Termodinámica y Mecánica Estadística II

Guía 1 - Agosto de 2009

Problema 1: Muestre que el número de permutaciones, N_p, de un conjunto de N objetos que contiene n_1 elementos idénticos de tipo 1, n_2 elementos idénticos de tipo 2, ..., n_k de tipo k, es

$$N_p \;=\; \frac{N!}{n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_k!}$$

donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$

Problema 2: Sean los eventos A y B tales que $P(\overline{A}) = \frac{4}{9}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cap B) = \frac{5}{36}$ ($\overline{A}$ es el complemento de A).

a) Calcular $P(A \cup B)$.

b) ¿Son A y B eventos independientes?.

c) ¿Son A y B eventos disjuntos o excluyentes?.

Problema 3: ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de seis puntos o menos con tres dados tirados simultáneamente?

Problema 4: Se escoge al azar un número entre 0 y 1. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 5 de las primeras 10 cifras decimales sean dígitos menores que 5?

Problema 5: Dado un grupo de n elementos, compuesto por n_1 elementos de tipo A y $n_2 = n - n_1$ elementos de tipo B, se elige aleatoriamente un grupo de r elementos. La probabilidad $P_r(k)$ de que el grupo elegido contenga exactamente k elementos de tipo A se conoce como distribución hipergeométrica (k es cualquier entero entre 0 y n_1 o r, según cuál sea el más pequeño).
a) Encuentre $P_r(k)$.
b) Un conjunto de $2N$ niños y $2N$ niñas se divide en 2 grupos con igual cantidad de personas. Usando la aproximación de Stirling, calcule la probabilidad p que haya igual cantidad de niños y niñas en cada uno de esos grupos.

Problema 6: Demostrar el teorema de Bayes:

$$P(A_i|B) \;=\; \frac{P(A_i)\; P(B|A_i)}{\sum P(A_j)\; P(B|A_j)}$$

donde $\{A_j\}$ es una partición arbitraria del espacio muestral y $P(A|B)$ es la probabilidad condicional que ocurra el evento A dado que ocurrió el evento B.

Problema 7: Por una autopista donde hay una estación de servicio pasan tres camiones por cada dos autos. La probabilidad que cargue combustible un camión es 0,1 y para un auto esta probabilidad es 0,3. Al surtidor llega un vehículo a abastecerse: ¿cuál es la probabilidad que sea un camión?

Problema 8: De las personas que llegan a un banco de sangre, una de tres tiene tipo sanguíneo O^+, y una de quince, tipo O^-. Considérese tres donantes, seleccionados aleatoriamente del banco de sangre. Sea X el número de donantes con sangre tipo O^+ y Y el número con tipo O^-. Obtenga las distribuciones de probabilidad para X e Y. Determine también la distribución de probabilidad para $X + Y$, es decir el número de donantes con sangre tipo O.

Problema 9: Calcule los momentos de la distribución de Rayleigh:

$$f(x) \;=\; \frac{x}{\alpha^2}\, e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\; U(x)$$

donde

$$U(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Problema 10: Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables estocásticas independientes con valores medios finitos. Demuestre que:

$$var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} var(x_i)$$

Problema 11: *Teorema de transformación de variables estocásticas* (v.e.): Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v.e. con densidad de probabilidad conjunta $P_X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y sean $y_1, \ldots, y_m$ v.e. definidas por $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$, donde cada f_i es una función real de n variables.

a) Demuestre que la densidad de probabilidad conjunta de las variables y_i es:

$$P_Y(y_1, \ldots, y_m) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; P_X(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{m} \delta(y_j - f_j(x_1, \ldots, x_n))$$

Ayuda: el valor medio de una función arbitraria g de m variables $g(y_1, \ldots, y_m)$ por definición es

$$\begin{aligned} \langle g \rangle \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dy_m \; g(y_1, \ldots, y_m) \; P_Y(y_1, \ldots, y_m) \\ &=\; \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; P_X(x_1, \ldots, x_n) \; g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

b) Muestre que para el caso particular de una única variable aleatoria $y = f(x)$

$$P_Y(y) = P_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

donde $x = f^{-1}(y)$. Interprete.

Problema 12: Dada una v.a. x con función de distribución $F_x(x)$, determine la expresión para la función de distribución $F_y(y)$ de las variables aleatorias $y = g(x)$:

a) $y = ax + b$

b) $y = x^2$. Dibuje esquemáticamente g, y F_y para F_x uniforme en el intervalo [-1,1]

Problema 13: Una fuente lineal infinita homogénea emite fotones con igual probabilidad en cualquier dirección radial. Un detector plano, que puede considerarse de área infinita, es colocado frente a la fuente a una distancia d. Encuentre la densidad de probabilidad de que un fotón llegue a un punto dado del detector.

Problema 14: Un hombre borracho tratando de caminar a lo largo de un camino recto tiene igual probabilidad de dar un paso hacia adelante o hacia atrás. Después de n pasos, ¿cuál es el desplazamiento medio $\langle x \rangle$ y cuál la varianza $\langle x^2 \rangle$-$\langle x \rangle^2$? en los casos

a) los pasos tienen largo a

b) los pasos son de largo $\ell \leq a$ igualmente probables.

Problema 15: Suponga una caminata aleatoria donde la probabilidad de un salto de longitud entre x y $x + dx$ está dada por una Lorentziana:

$$f(x)dx = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)} dx$$

Encuentre la distribución de probabilidad para el desplazamiento total luego de n pasos. ¿Satisface esta distribución el teorema del límite central?

Problemas complementarios

Problema 16: Considere un juego en el que intervienen 5 dados. Hallar la probabilidad de que salga el número 6 en: un solo dado, un dado por lo menos, y dos dados a lo sumo.

Problema 17: De una población dada, 5 hombres de cada 100 y una mujer de cada 100 sufren daltonismo. Una persona daltónica se escoge aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad que sea hombre, suponiendo igual número de hombres que de mujeres?

Problema 18: Un libro de 1400 páginas contiene 700 errores.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una página contenga cero errores?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una página contenga dos errores?

Problema 19: Suponga que Ud. dispone de un generador de números aleatorios que produce números reales independientes uniformemente distribuidos en el intevalo $[0, 1]$. Se desea obtener números aleatorios con una distribución normal de media nula y desviación standard unidad.

a) Muestre que un enfoque directo requiere la inversión de la función error.

b) Se propone generar conjuntamente *dos* números con distribución normal, de la siguiente manera: se generan dos números aleatorios uniformes e independientes x_1 y x_2, y se realiza la transformación

$$y_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\,\cos(2\pi x_2), \qquad y_2 = \sqrt{-2\ln x_1}\,\sin(2\pi x_2).$$

Muestre que y_1 e y_2 tendrán las propiedades deseadas (este método se conoce como algoritmo de Box-Muller).

Problema 20: Un regador de jardín consiste en un hemisferio perforado en el que se inyecta agua a presión desde abajo. El agua sale por pequeños orificios idénticos perforados en la superficie esférica, con velocidad inicial v_0 normal a ella. Si se desea que el regador riegue uniformemente un sector circular del jardín, ¿cuál debe ser la distribución de orificios? (Nota: el radio del regador puede suponerse mucho menor que el radio de la zona regada).

Problema 21: Dada una v.a. x con función de distribución $F_x(x)$, determine la expresión para la función de distribución $F_y(y)$ de las variables aleatorias $y = g(x)$:

a) $g(x) = \begin{cases} x - c & x > c \\ 0 & -c \leq x < c \\ x + c & x < -c \end{cases}$ Dibuje esquemáticamente g, y F_y para F_x genérica.

b) $g(x) = \begin{cases} -b & x < -b \\ x & -b \leq x < b \\ b & x > b \end{cases}$ Dibuje esquemáticamente g, y F_y para F_x genérica.