Termodinámica y Mecánica Estadística II

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/termoII_2017.html

Guía 1 - agosto de 2017

Problema 1: Muestre que el número de permutaciones, N_p, de un conjunto de N objetos que contiene n_1 elementos idénticos de tipo 1, n_2 elementos idénticos de tipo 2, ..., n_k de tipo k, es

$$N_p \;=\; \frac{N!}{n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_k!}$$

donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$

Problema 2: Sean los eventos A y B tales que $P(\bar{A}) = 4/9$, $P(B) = 1/4$ y $P(A \cap B) = 5/36$ ($\bar{A}$ es el complemento de A).

a) Calcular $P(A \cup B)$.

b) ¿Son A y B eventos disjuntos o excluyentes?

c) ¿Son A y B eventos independientes?

Problema 3: ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de seis puntos o menos arrojando tres dados?

Problema 4: Se escoge al azar un número entre 0 y 1. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 5 de las primeras 10 cifras decimales sean dígitos menores que 5?

Problema 5: Dado un grupo de n elementos, compuesto por n_1 elementos de tipo A y $n_2 = n - n_1$ elementos de tipo B, se elige aleatoriamente un grupo de r elementos. La probabilidad $P_r(k)$ de que el grupo elegido contenga exactamente k elementos de tipo A se conoce como distribución hipergeométrica (k es cualquier entero entre 0 y n_1 o r, según cuál sea el más pequeño).

a) Encuentre $P_r(k)$.

b) Un grupo de $2N$ niños y $2N$ niñas se divide en 2 grupos iguales. Usando la aproximación de Stirling, calcule la probabilidad p de que haya igual cantidad de niños y niñas en cada uno de esos grupos.

Problema 6: Demuestre el teorema de Bayes:

$$P(A_i|B) \;=\; \frac{P(B|A_i)\; P(A_i)}{\sum P(B|A_j)\; P(A_j)}\;,$$

donde $\{A_j\}$ es una partición arbitraria del espacio muestral y $P(B|A)$ es la probabilidad condicional de que ocurra el evento B dado que ocurrió el evento A.

Problema 7: Por una autopista donde hay una estación de servicio pasan tres camiones por cada dos autos. La probabilidad de que cargue combustible un camión es 0,1 y para un auto esta probabilidad es 0,3. Al surtidor llega un vehículo a abastecerse: ¿cuál es la probabilidad que sea un camión?

Problema 8: De las personas que llegan a un banco de sangre, una de tres tiene tipo sanguíneo 0^+, y una de quince, tipo 0^-. Considérense tres donantes, seleccionados aleatoriamente del banco de sangre. Sea X el número de donantes con sangre tipo 0^+ y Y el número con tipo 0^-. Obtenga las distribuciones de probabilidad para X e Y. Determine también la distribución de probabilidad para $X + Y$, es decir el número de donantes con sangre tipo 0.

Problema 9: En una reunión social hay N personas.

a) Calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellas cumplan años el mismo dia. De los valores de $P(N)$ para $N = 10, 20, 30$ y grafique $P(N)$ vs. N.

b) Calcule la probabilidad de que exactamente n personas cumplan años el mismo dia, mientras todas las restantes cumplen años en dias diferentes entre si.

Problema 10: *Expansión en cumulantes:* Sea X una variable aleatoria continua,

a) Muestre que el n-esimo cumulante tiene la forma

$$C_n(X) \;=\; \langle X^n \rangle \;+\; \text{suma de términos que contienen solo los momentos menores } \langle X \rangle, \cdots, \langle X^{n-1} \rangle$$

b) Calcule explicitamente los 3 primeros cumulantes y compruebe que :

$$C_1(X) \;=\; \langle X \rangle \;;\; C_2(X) \;=\; \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \;=\; V(X) \;;\; C_3(X) \;=\; \langle X^3 \rangle - 3\langle X \rangle \langle X^2 \rangle + 2\langle X \rangle^3 \,.$$

c) Particularice para el caso de la distribución de Gauss. Calcule la función generatriz, su expansión en cumulantes y verifique que todos los momentos $\langle X^n \rangle,\; n > 2$ se pueden expresar en función de los 2 primeros.

Problema 11: Calcule los momentos de la distribución de Rayleigh:

$$f(x) \;=\; \frac{x}{\alpha^2}\, e^{-x^2/(2\alpha^2)}\, U(x) \;,$$

donde

$$U(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Problema 12: Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables estocásticas independientes con valores medios finitos, demuestre que

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \text{var}\,(x_i)$$

Problema 13: *Teorema de transformación de variables estocásticas.* Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables estocásticas con densidad de probabilidad conjunta $f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y sean $y_1, \ldots, y_m$ variables estocásticas definidas por $y_i = \phi_i(x_1, \ldots, x_n)\;\; (i = 1, \ldots, m)$, donde cada ϕ_i es una función real de n variables.

a) Demuestre que la densidad de probabilidad conjunta de las variables y_i es:

$$f_Y(y_1, \ldots, y_m) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n\; f_X(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{m} \delta\left(y_j - \phi_j(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

Ayuda: el valor medio de una función arbitraria g de m variables $g(y_1, \ldots, y_m)$ por definición es

$$\begin{aligned} \langle g \rangle \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y_m\; g(y_1, \ldots, y_m)\; f_Y(y_1, \ldots, y_m) \\ &=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n\; f_X(x_1, \ldots, x_n)\; g\left(\phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_m(x_1, \ldots, x_n)\right) \end{aligned}$$

b) Muestre que para el caso particular de una única variable aleatoria $y = \phi(x)$ esta transformación se escribe

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \;,$$

donde $x = \phi^{-1}(y)$. Interprete.

Problema 14: Dada una variable aleatoria x con función de distribución $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x'\; f_X(x')$, determine la expresión para la función de distribución $F_Y(y)$ de las variables aleatorias $y = g(x)$:

a) $y = ax + b$

b) $y = x^2$. Dibuje esquemáticamente g, y F_Y para F_X correspondientes a una distribución uniforme en el intervalo [-1,1].

Problema 15: Una fuente lineal infinita homogénea emite fotones con igual probabilidad en cualquier dirección radial. Un detector plano, que puede considerarse de área infinita, es colocado frente a la fuente a una distancia d. Encuentre la densidad de probabilidad de que un fotón llegue a un punto dado del detector.

Problema 16: Sean X, Y variables aleatorias, muestre que la correlación cumple:

a) $Cor(X,Y) = Cor(Y,X)$.

b) $-1 \leq Cor(X,Y) \leq 1$.

c) $Cor(X,X) = 1$, $Cor(X,-X) = -1$.

d) $Cor(aX+b, cY+d) = Cor(X,Y)$, $a, c \neq 0$.

Y si X, Y son independientes se cumple:

e) $Cor(X,Y) = 0$.

f) $\langle X\, Y\rangle = \langle X\rangle \langle Y\rangle$.

g) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Problema 17: Un hombre borracho tratando de caminar a lo largo de un camino recto tiene igual probabilidad de dar un paso hacia adelante o hacia atrás. Después de n pasos, determine el desplazamiento medio $\langle x\rangle$ y la varianza $\langle x^2\rangle$-$\langle x\rangle^2$ en los casos

a) los pasos tienen largo a ;

b) los pasos son de largo $\ell \leq a$ igualmente probables.

Problema 18: Suponga una caminata aleatoria donde la probabilidad de un salto de longitud entre x y $x + \mathrm{d}x$ está dada por una Lorentziana:

$$f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{a}{\pi\ (x^2 + a^2)}\ \mathrm{d}x$$

Encuentre la distribución de probabilidad para el desplazamiento total luego de n pasos. ¿Satisface esta distribución el teorema del límite central?

Problema 19: Considere un juego en el que intervienen 5 dados. Halle la probabilidad de que salga el número 6 en: un solo dado, un dado por lo menos, y dos dados a lo sumo.

Problema 20: De una población dada, 5 hombres de cada 100 y una mujer de cada 100 sufren daltonismo. Una persona daltónica se escoge aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre, suponiendo igual número de hombres que de mujeres?

Problema 21: Un regador de jardín consiste en un hemisferio perforado en el que se inyecta agua a presión desde abajo. El agua sale por pequeños orificios idénticos perforados en la superficie esférica, con velocidad inicial v_o normal a ella. Si se desea que el regador riegue uniformemente un sector circular del jardín, ¿cuál debe ser la distribución de orificios? El radio del regador puede suponerse mucho menor que el radio de la zona regada.

Problema 22: Cuidadosas medidas han establecido que una muestra radiactiva de torio (Th) emite partículas alfa a una razón de 1.5 por minuto. Si se cuenta el número de partículas alfas emitidas en 2 (dos) minutos,

a) Cuál es el resultado promedio esperado?

b) Cuál es la probabilidad de contar exactamente este número promedio?

c) Cuál es la probabilidad de contar 0, 1, 2 y 4 partículas?

d) Cuál es la probabilidad de contar por lo menos 5?