Termodinámica y Mecánica Estadística II

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/termoII_2017.html

Guía 3 - Septiembre de 2017

Problema 1: Considere un sistema compuesto por N osciladores no interactuantes clásicos y *distinguibles* de masa m y frecuencia ω. Calcule la entropía cuando el sistema tiene energía total E. Calcule también el calor específico.

Problema 2: *Modelo de sólido de Einstein:* Considere un sistema de N osciladores cuánticos no interactuantes, cuyo espectro de energía viene dado por

$$\epsilon(n) = (n + 1/2)\hbar\,\omega \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Obtenga una expresión asintótica para la entropía. Determine la temperatura T en función de E/N y $\hbar\,\omega$. calcule el calor específico a N constante, analice los límites de bajas y altas temperaturas y muestre que se recupera la ley de Dulong y Petit. Compare los resultados con los obtenidos en el ejercicio anterior.

Problema 3: Considere un sistema de N átomos localizados definido por el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = D \sum_{i=1}^{N} s_i^2$$

donde las variables s_i pueden asumir los valores 0, ± 1 para todo valor de i.

a) Encuentre el número de estados microscópicos accesibles cuando el sistema tiene energía total E y calcule la entropía $s(u)$, con $u = E/N$.

b) De una expresión para el calor específico en función de T,

Problema 4: *Spines 1 en el microcanónico:* Considere un sistema de N átomos localizados definido por el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\mu_0 H \sum_{i=1}^{N} s_i$$

donde las variables s_i pueden asumir los valores 0, ± 1 para todo valor de i.

a) Encuentre el número de estados microscópicos accesibles del sistema en función de la energía total E, el número total de partículas N y el número de partículas con espín cero N_0.

b) Escriba la entropía en función de estas variables, $S(E, N; N_0)$.

c) Determine el valor de N_0 y escriba $S(E, N)$. y calcule la entropía $s(u)$, con $u = E/N$.

d) Calule $S(E, N)$ en T = 0 K y a temperatura infinita. Discuta el resultado.(Ayuda: NO calcule $\frac{\partial S}{\partial E}$)

Problema 5: Usando la definición de entropía (S) como valor de expectación, encontrar S para:

a) $\rho(x) = C\, e^{-Cx}\;\; \Theta(x)$

b) $\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right]$

Problema 6: Determine la densidad de probabilidad $f_X(x)$ que maximiza la entropía para una variable X, imponiendo $\langle x^2 \rangle = m_2$.

Problema 7: Considere un conjunto de partículas sujetas a la restricción que el valor medio para la energía cinética es $\langle K \rangle = K_0$. Encuentre las distribuciones

a) $f_V(v_x)$ para una de las componentes de la velocidad.

b) $f(v)$ para el módulo del vector velocidad de las partículas.

Problema 8: Muestre que, para una distribución de probabilidades $\{P_i\}$ correspondiente a M eventos, si

$$\sum_{i=1}^{M} P_i = 1,$$

entonces la función

$$S(\{P_i\}) = -\sum_i P_i \ln P_i$$

toma su máximo valor cuando $P_i = 1/M$ para todo i. Calcule el valor de $S(\{P_i\})$.

Problema 9: Suponga que una caja contiene pelotas con números, y que estos números pueden ser 0, 1 ó 2. Se sabe además que el valor medio del número inscripto en las pelotas de la urna es $\langle n \rangle = 2/7$.

a) Usando el principio de máxima incertidumbre, estime las probabilidades P_0, P_1 y P_2.

b) Calcule el valor de $\langle n^3 \rangle - 2\langle n \rangle$.

c) Suponga que además de conocer el valor medio $\langle n \rangle$, se sabe también que $\langle n^3 \rangle = 3/7$. Estime las probabilidades P_0, P_1 y P_2. Muestre que el valor de S con esta restricción es menor que sin ella.

Problema 10: Utilice el principio variacional de Gibbs para obtener la expresión para la densidad de probabilidad que maximiza la entropía imponiendo ademas de la condición de normalización, el vínculo $U = \langle E \rangle$ y corrobore que obtiene de esta forma el ensamble canónico.