# Termodinámica y Mecánica Estadística II

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/termoII_2017.html

Guía 6 - Octubre de 2017

**Problema 1:** Describa qué propiedades deben tener las funciones de onda de bosones y fermiones. ¿Qué sistema se describe mediante la estadística de Maxwell-Boltzmann?

**Problema 2:** Muestre que para un gas de Maxwell-Boltzmann la longitud de onda térmica $\lambda_T$ es aproximadamente igual a la longitud de onda de de Broglie $h/\langle|\boldsymbol{p}|\rangle$.

**Problema 3:** Calcule el desarrollo del virial de $P(v,T)$ hasta tercer orden en $1/v$ para bosones y fermiones. Compare sus resultados y analíce las ecuaciones de estado como correciones al gas ideal clásico.

**Problema 4:** Demuestre que las funciones $g_{5/2}(z)$ y $g_{3/2}(z)$ pueden expandirse como una suma de potencias de $z$.

**Problema 5:** Para un gas ideal de Bose calcule:

**a)** la ecuación de estado para la presión;

**b)** la entropía y verifique la expresión para el calor latente de la transformación, lo que permite convalidar la ecuación de Clausius-Clapeyron;

**c)** la energía interna por unidad de volumen;

**d)** el calor específico a volumen constante.

**Problema 6:** Muestre que para un gas ideal de Bose la compresibilidad isotérmica diverge cuando el volumen específico se aproxima al volumen específico crítico:

$$\lim_{v\to v_c} \kappa_T \equiv - \lim_{v\to v_c} \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = \infty\ .$$

**Problema 7:**

**a)** Demuestre que $g_\nu(z)$ cumple la relación de recurrencia

$$g_{\nu-1} = -\frac{\partial g_\nu}{\partial \eta}\ \ ;\ \ \eta = -\ln z\,.$$

**b)** La expresión $g_{5/2}(z) = 2,363\,\eta^{3/2} + 1,342 - 2,612\,\eta - 0,730\,\eta^2$ es válida cerca de $z = 1$. De esta expresión podemos obtener las correspondientes expansiones para $g_{3/2}$, $g_{1/2}$ y $g_{-1/2}$ . Use esto para mostrar que para un gas ideal de Bose la discontinuidad en la derivada del calor específico a la temperatura crítica está dada por

$$\frac{1}{k_B}\left[\left(\frac{\partial c_V}{\partial T}\right)_{T\to T_c^+} - \left(\frac{\partial c_V}{\partial T}\right)_{T\to T_c^-}\right] = -\frac{3,66}{T_c}\ .$$

**Problema 8:** Considere un gas ideal de Bose bidimensional:

**a)** calcule la función gran partición para este sistema;

**b)** encuentre el número medio de partículas por unidad de área en función de $T$ y $z$;

**c)** muestre que no hay condensación de Bose-Einstein en 2 dimensiones.

**Problema 9:** Considere un gas de bosones con grados de libertad internos. Suponga que además del estado fundamental con energía $\epsilon_0 = 0$, tenemos un estado excitado con energía $\epsilon_1 > 0$ y el continuo. Obtenga una expresión para la temperatura de condensación de Bose-Einstein en función de $\epsilon_1$.

**Problema 10:** Una caja cúbica de volumen $V$ se halla en contacto con un reservorio de bosones idénticos sin spin, de masa $m$ y a temperatura $T$.

**a)** Escriba una expresión para el número de bosones $\mathrm{d}n(\epsilon)$ con energías entre $\epsilon$ y $\epsilon + \mathrm{d}\epsilon$ en función de $\epsilon$, $m$, $T$ y el potencial químico.

**b)** Para el caso en que $\exp(\beta\mu) \ll 1$ (gas diluido), muestre que el potencial químico es aproximadamente igual al del gas de Boltzmann. Muestre también que en esta situación la distancia media $\ell$ entre partículas es mucho mayor que la longitud de onda de de Broglie.

**c)** Para el caso en que $\mu = 0$, calcule la densidad de energía y la capacidad calorífica del sistema.

**Problema 11:** Un cuerpo negro consiste de una cavidad de volumen V vacía de materia a una temperatura T. En quilibrio termodinámico habrá en la cavidad radiación de diversas frecuencias con diferentes intensidades. Para poder aplicar el formalismo de la mecánica estadística a este sistema, debemos expresar las ecuaciones del campo electromagnético en términos de coordenadas y momentos generalizados que satisfagan las ecuaciones de Hamilton.

**a)** Suponiendo se tiene una caja de lado L, encuentre la solución de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes con condiciones períodicas de contorno.

**b)** Demuestre que la energía del campo electromagnético es:

$$\mathcal{E} \;=\; \int_V (\vec{E}^2 + \vec{H}^2)\,\mathrm{d}V = \frac{V}{4\pi}\sum_{\vec{k}} k^2\, \vec{a}_{\vec{k}}\, \vec{a}^*_{\vec{k}}$$

donde $\vec{a}_{\vec{k}}$ son las amplitudes del potencial vector $\vec{A}$

La expresión anterior no es un Hamiltoniano ya que no se encuentra expresada en términos de variables canónicas y por lo tanto no se puede aplicar el formalismo de la mecánica estadística clásica.

**c)** Muestre que definiendo la coordenadas generalizadas:

$$\vec{Q}_{\vec{k}}(t) \;=\; \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}[\vec{a}_{\vec{k}}\ \exp i\omega(\vec{k})\,t + \vec{a}^*_{\vec{k}}\ \exp -i\omega(\vec{k})\,t] \quad ; \quad \vec{P}_{\vec{k}}(t) \;=\; \frac{d}{dt}\vec{Q}_{\vec{k}}(t)$$

donde $\omega(\vec{k}) = c\vec{k}$ y $V = L^3$, se obtiene el Hamiltoniano del cuerpo negro como

$$\mathcal{H} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\vec{k},j}\left(\vec{P}^2_{\vec{k},j} + \omega^2(\vec{k})\,\vec{Q}^2_{\vec{k},j}\right)\ ,$$

donde el indice $j = 1, 2$ numera las dos direcciones de polarización. Use este Hamiltoniano para obtener la ley de Rayleigh-Jeans.

**Problema 12:** Para un gas de fotones ($m = 0$ y $\mu = 0$)

**a)** Encuentre la densidad de estados de energía y la densidad de energía a temperatura $T$.

**b)** Encuentre la presión del gas.