Termodinámica y Mecánica Estadística II

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/termoII_2017.html

Guía 7 - Octubre de 2017

Problema 1: Derive la densidad de estados de energía para un gas de electrones en una dimensión. Suponga que el sistema está compuesto por N electrones confinados en una línea de longitud L. Calcule la energía de Fermi.

Problema 2:

a) Muestre que la función $f_{5/2}(z)$ admite la expansión asimptótica

$$f_{5/2}(z) \sim \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left(\eta^{5/2} + \frac{5}{8}\pi^2 \eta^{1/2} + \cdots \right) + O(z^{-1}) \;\; \text{para } T \to 0 \, ,$$

donde se define $\eta = -\ln z$.

b) Demuestre que $f_\nu(z)$ cumple la relación de recurrencia

$$f_{\nu-1}(z) = \frac{\partial f_\nu(z)}{\partial \eta} \, .$$

y encuentre la expresión asimptótica correspondiente para $f_{3/2}(z)$.

Problema 3: Los electrones de conducción de un metal pueden ser considerados como un gas de electrones libres.

a) Obtenga la densidad de estados de energía y la energía de Fermi.

b) Dé una expresión para la densidad de electrones en función de la longitud de onda térmica y el potencial químico.

c) Calcule la temperatura de Fermi para los electrones de conducción en aluminio, cobre y platino.

Problema 4: Siguiendo el método de Sommerfeld, muestre que a bajas temperaturas la energía interna de un gas de fermiones libres con energía de Fermi ϵ_F puede aproximarse como

$$U = \frac{3}{5} \langle N \rangle \epsilon_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \cdots \right] \, .$$

Problema 5: Verifique que para un gas de fermiones libres con impulso de Fermi p_F se cumple

$$\sum_{|\boldsymbol{p}|<p_F} \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{5} \langle N \rangle \epsilon_F \, .$$

Problema 6: Muestre que para un gas ideal de Fermi la energía libre de Helmholtz por partícula a bajas temperaturas está dada por

$$f = \lim_{N\to\infty} \frac{F}{N} = \frac{3}{5} \epsilon_F \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \cdots \right] \, .$$

Problema 7: Un cilindro está separado en dos compartimentos por un pistón móvil. En uno de los compartimentos se coloca un gas ideal de Fermi de partículas de espín 1/2, mientras que en el otro, un gas ideal de Fermi de partículas de espín 3/2. Todas las partículas tienen igual masa. Encuentre la densidad relativa de equilibrio a $T = 0$ y $T \to \infty$.

Problema 8: Un modelo simplificado para un semiconductor intrínseco consiste en considerar un sistema de dos niveles, correspondientes a las bandas de valencia y conducción respectivamente. Las energías respectivas son ϵ_1 y ϵ_2 ($> \epsilon_1$), con la misma degeneración g en ambos niveles. Cuando el sistema cuenta con N electrones, todos están en la banda de valencia a T=0 K. La característica de semiconductor se introduce imponiendo $N = g$.

a) Determine las poblaciones respectivas N_1 y N_2 en los niveles ϵ_1 y ϵ_2 a temperatura T.

b) Calcule el potencial químico en función de la temperatura. ¿Cuánto vale la energía de Fermi?

c) Exprese N_1 y N_2 en función de g, kT y $\Delta\epsilon \equiv \epsilon_1 - \epsilon_2$. Determine P_1 y P_2, el número de "huecos" o estados vacíos en cada banda. Analice los límites para altas y bajas temperaturas.

Problema 9: *Diamagnetismo de Landau.* Una partícula sin espín y carga $-e$ es puesta en presencia de un campo magnético H constante en la dirección z. Elija el gauge en que el Hamiltoniano toma la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x - \frac{eHy}{c}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2\right]$$

y calcule los niveles de energía (niveles de Landau).

Suponga que la temperatura es suficientemente alta como para tratar el gas de electrones usando la estadística de Boltzmann y calcule la susceptibilidad magnética.

Problema 10: *Efecto de Haas - Van Alphen.* Para el sistema descripto en el problema anterior, en el límite de bajas temperaturas y campo fuerte, $kT \ll \hbar eH/mc$ (tome $T = 0$ y analice el estado fundamental), aparecen términos oscilatorios en la energía que llevan a discontinuidades en la magnetización y la susceptibilidad magnética al variar el campo aplicado. Calcule los valores de H donde estas discontinuidades toman lugar y grafique la energía del estado fundamental, la magnetización y la suceptibilidad en función del campo aplicado.

Problema 11: Considere un gas de electrones bidimensional en presencia de un campo magnético suficientemente fuerte como para que todas las partículas estén en el nivel de Landau más bajo. Calcule la magnetización a $T = 0$ teniendo en cuenta el spin del electrón.