Determinantes

Primero unas definiciones que se necesitan.

1.Definición :

Una permutación de $\{1,..,n\}$ *es una función biyectiva de* $\{1,..,n\}$ *en* $\{1,..,n\}$*. El conjunto de permutaciones de* $\{1,..,n\}$ *se denota* S_n*.*

2.Escritura cíclica de las permutaciones :

La notación NO cíclica de las permutaciones consiste en simplemente escribir a donde va a parar cada elemento. Se puede escribir en forma vertical o, mas usual, horizontal. Por ejemplo, la permutación $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 5, f(4) = 1, f(5) = 3$ *se puede denotar como* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$*, donde el elemento de arriba es el elemento donde se evalua* f *y el de abajo el resultado correspondiente. La notación CICLICA simplifica esto: Se comienza un ciclo:* (1 *A la derecha de 1 se pone* $f(1)$*:* (12*. A la derecha de 2 se pone* $f(2)$*:* (124 *A la derecha de 4, se escribe* $f(4)$*... excepto que como da 1, en vez de ello se CIERRA el ciclo:* (124)*. Luego se comienza otro ciclo con algun elemento que no haya sido usado, pej, 3:* (124)(3*. Se pone* $f(3)$ *a la derecha:* (124)(35 *y como* $f(5) = 3$*, se cierra el ciclo:* (124)(35)*. (Aca escribo los números uno al lado del otro, cuando hay números de mas de una cifra, se deja un espacio entre ellos para distinguir entre (1 2 3) , (1 23) y (12 3) por ejemplo). Si la permutación tienen un punto fijo* x $(f(x) = x)$ *el ciclo se abre y cierra inmediatamente:* (x)*.*

3.Signo de una permutación :

Se define el signo de un ciclo que tiene r *elementos como* $(-1)^{r+1}$*, es decir, vale -1 si tiene una cantidad par de elementos, y 1 si tiene una cantidad impar. (Aunque esto parece contraintuitivo, en realidad tiene sentido, como veremos enseguida). El signo de una permutación es el producto de los signos de los ciclos que la componen. Se denota por* sg*.*

Por ejemplo, el signo de la identidad, que se escribe como $(1)(2)...(n)$, es por lo tanto $1.1....1 = 1$. Esta es una de las razones por las cuales se define el signo como se define. Otro ejemplo, el signo de (1234)(57)(6)(89) es $(-1)(-1)1.(-1) = -1$.

Ahora si:

4.Definición :

El determinante de una matriz A $n \times n$ es:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Es decir, es la suma de todos los productos posibles en los cuales hay un elemento por cada fila y por cada columna, con un signo dado por la permutación correspondiente.

Ejemplo:

Si $n = 1$, $\det(a) = a$, pues la unica permutación es la identidad, de signo 1.

Veamos como es para matrices 2×2: En este caso $S_2 = \{(1)(2), (12)\}$. Tenemos que $sg(1)(2) = 1.1 = 1$, $sg(12) = -1$. Por lo tanto, si llamamos $\sigma = (12)$ y $\tau = (1)(2)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= sg(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} + sg(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

que tambien suele escribirse:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Es decir, es el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la contradiagonal.

Para matrices 3×3:

$S_3 = \{(1)(2)(3), (123), (132), (13)(2), (12)(3), (1)(23)\}$ Sus signos son 1,1,1,-1,-1 y -1. Por lo tanto:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

o tambien:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha$$

es decir, es la suma de los productos de elementos sobre "diagonales", la principal mas la de arriba y abajo positivas, y la contradiagonal mas la de arriba y abajo negativas. (hay otras formas mnemonicas para memorizar este determinante, cada cual elija la que mas le guste)

El determinante de una matriz 4×4 involucraria 24 términos, y el de 5×5, 120. En general, son $n!$ sumas, asi que salvo para $n \leq 3$, esta es una forma muy ineficaz de calcular el determinante.

Queremos ver las propiedades del determinante, que en particular dan formas eficientes de calcularlo.

Primero, es claro que el determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de la diagonal, porque cualquier otro producto asociado a otra permutación que no se la identidad tendrá algun elemento cero y por lo tanto el producto será cero. Pero en realidad, esto tambien vale para una matriz triangular, porque cualquier permutación distinta de la identidad debe involucrar alguno de los elementos nulos. En particular:

5.Propiedad :

$\det(I) = 1$

6.Teorema :

El determinante es lineal en cada fila, si se dejan las otras filas constantes. (esto se suele decir como "el determinante es multilineal"). Concretamente, si X es un vector fila y $A[r \mapsto X]$ denota la matriz que tiene todas las filas iguales a las de A, salvo la fila r que es igual a X, entonces

$$\det(A[r \mapsto cX + Y]) = c\det(A[X]) + \det(A[Y])$$

Prueba:

Obvio, pues para cada permutación σ :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} A[r \mapsto cX + Y]_{i,\sigma(i)} &= (\prod_{i \neq r} A_{i,\sigma(i)}).(cX_{\sigma(i)} + Y_{\sigma(i)}) \\ &= c(\prod_{i \neq r} A_{i,\sigma(i)}).X_{\sigma(i)} + (\prod_{i \neq r} A_{i,\sigma(i)}).Y_{\sigma(i)} \\ &= c\prod_{i=1}^{n} A[X]_{i,\sigma(i)} + \prod_{i=1}^{n} A[Y]_{i,\sigma(i)}\end{aligned}$$

QED.

7.Corolario :

Si e es una OEF de tipo I: multiplicar una fila por $c \neq 0$, entonces $\det(e(A)) = c.\det(A)$.

Para los otros tipos, necesitamos mas propiedades primero. La idea es, justamente, ver como cambia el determinante de acuerdo con cada OEF, luego simplemente hay que reducir la matriz llevando un registro de los cambios. Veamos antes una propiedad importante:

8.Propiedad :

Si A tiene una fila 0, entonces $\det(A) = 0$.

Prueba:

Dos pruebas: la primera, por definición: si A tiene una fila 0, entonces como el producto $\prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$ involucra un elemento de cada fila, será cero. Como esto es cierto para toda σ, el determinante lo será. La segunda prueba, que será importante luego, es observar que como probamos que el determinante es lineal en cada fila, y las transformaciones lineales mandan el 0 en el 0, entonces una matriz con fila 0 tiene determinante 0. QED.

.

9.Definición :

Una función de las matrices cuadradas en $\mathbb{K}$ se dice alternada si es cero en toda matriz que tenga dos filas iguales.

10.Teorema :

El determinante es alternado.

Prueba:

Si A tiene las filas r y t iguales, y $\sigma \in S_n$, sea $\tau = \tau_\sigma$ tal que:

$$\tau(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \neq r, t \\ \sigma(t) & \text{si } i = r \\ \sigma(r) & \text{si } i = t \end{cases}$$

Tenemos:

$$\prod_{i=1}^{n} A_{i,\tau(i)} = (\prod_{i \neq r,t} A_{i,\sigma(i)}).A_{r,\sigma(t)}.A_{t,\sigma(r)} \quad (*)$$

Pero, puesto que las filas r y t de A son iguales, $A_{r,j} = A_{t,j}$ para todo j, en particular, $A_{r,\sigma(t)} = A_{t,\sigma(t)}$ y $A_{t,\sigma(r)} = A_{r,\sigma(r)}$, asi pues el producto en $*$ es igual a

$(\prod_{i \neq r,t} A_{i,\sigma(i)}).A_{t,\sigma(t)}.A_{r,\sigma(r)} = \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$.

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^n A_{i,\tau(i)}$ para todo σ Ahora bien, la función $\sigma \mapsto \tau_\sigma$ es una biyección de S_n que CAMBIA el signo. (esto no lo probamos en clase, prueba mas abajo).

Si denotamos por S_n^+ a las permutaciones de signo 1, y por S_n^- a las de signo -1 tenemos entonces que toda permutación $\rho \in S_n^-$ es una τ_σ para alguna $\sigma \in S_n^+$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n^+} \prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)} - \sum_{\rho \in S_n^-} \prod_{i=1}^n A_{i,\rho(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n^+} \prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in S_n^+} \prod_{i=1}^n A_{i,\tau_\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n^+} (\prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)} - \prod_{i=1}^n A_{i,\tau_\sigma(i)}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pues vimos arriba que $\prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^n A_{i,\tau_\sigma(i)}$

QED.

En la prueba anterior quedaria por ver que $sg(\tau_\sigma) = -sg(\sigma)$. Esto no lo probamos en clase, lo adjunto aca por completitud.

Si r y t caen en el mismo ciclo, digamos $\sigma = (...)....(rx...ty...)...(...)$ entonces $\tau = \tau_\sigma$ tiene los demas ciclos iguales a los de σ (y por lo tanto contribuyen de la misma forma al signo) pero el ciclo $(rx...ty...)$ se parte: $(ry...)(x...t)$ Por otro lado, si r y t estan en distintos ciclos: $(ry...)(tx....)$ entonces τ los "junta" en el ciclo: $(rx...ty...)$ Por lo tanto la diferencia de signo entre τ y σ es la diferencia de signo entre $(rx...ty...)$ y $(ry...)(tx....)$. Si el total de elementos en $(ry...)$ es a y el de $(tx....)$ es b entonces $sg(ry...)(tx....) = (-1)^{a+1}(-1)^{b+1} = (-1)^{a+b+2} = -(-1)^{a+b+1} = -sg(rx...ty...)$. QED.

11.Propiedad :

Si e es una OEF de tipo II, entonces $\det(e(A)) = \det(A)$.

Prueba:

Si e le suma a la fila r la fila t multiplicada por c, entonces $e(A)$ es una matriz cuyas filas son iguales a las de A, escepto la r, que es de la forma $e(A)_{r,j} = A_{r,j} + cA_{t,j}$. Si denotamos la fila i-esima de A por A_i, entonces esto dice que $e(A) = A[r \mapsto A_r + cA_t]$. Por la multilinealidad: $\det(e(A)) = \det(A[A_r]) + c\det(A[A_t])$. Pero $A[A_r] = A$, y $A[A_t]$ tiene las filas r y t iguales, asi pues $\det A[A_t] = 0$ y tenemos $\det(e(A)) = \det(A) + c.0 = \det(A)$. QED.

12.Propiedad :

Si e es una OEF de tipo III, entonces $\det(e(A)) = -\det(A)$.

Prueba:

Una OEF de tipo III se puede obtener por medio de una sucesion de OEFs de tipo II y tipo I: para intercambiar las filas i y j, primero sumarle a la fila i la fila j. Luego sumarle a la fila j la fila i multiplicada por -1. Luego volver a sumarle a la fila i la fila j. Esto deja la fila i original en la fila j, pero multiplicada por -1 y la fila j original en la fila i. Multiplicando la fila j por -1, obtenemos el intercambio de filas. Vemos que entonces una OEF de tipo III es una sucesion de tres OEFs de tipo II (que no cambian el determinante) seguida de una OEF de tipo I con coeficiente -1. que por lo tanto multiplica el determinante por -1. QED.

Entonces, para calcular un determinante basta irlo reduciendo y observando que OEF se usa. En realidad esto se puede acelerar porque:

13.Propiedad :

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Prueba:

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A^t_{i,\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i),i}\end{aligned}$$

Llamando j a $\sigma(i)$, tenemos que $i = \sigma^{-1}(j)$ por lo que la ultima suma es igual a:

$$\sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma^{-1}(i)}$$

Pero recorrer todas las permutaciones mirando σ o mirando σ^{-1} es lo mismo, por lo tanto llamando ρ a σ^{-1}, esa suma es $\sum_{\rho\in S_n} sg(\rho)\prod_{i=1}^{n} A_{i,\rho(i)} = \det(A)$. (el único detalle que quedaria por ver es que el signo de σ y de σ^{-1} es el mismo, lo cual quedó como ejercicio en clase. Pero esto es trivial porque si σ se escribe en notación ciclica como $\sigma = C_1...C_t$ entonces σ^{-1} tiene esos mismos ciclos, solo que leidos de derecha a izquierda en vez de izquierda a derecha. Por ejemplo si $\sigma = (1247)(589)(36)$ entonces $\sigma^{-1} = (7421)(985)(63)$. Pero entonces los signos son iguales. QED.

Por lo tanto, todas las propiedades acerca de los determinates son válidas si se reemplaza la palabra "fila" por "columna".

Ahora, quizas el teorema mas importante de determinantes:

14.Teorema :

a) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

b) A es inversible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

Prueba:

Primero probemos a) para matrices elementales. Sea e OEF tal que $E = e(I)$. Hemos visto que en los tres casos, existe una constante k_e (que depende de e) tal que $\det(e(A)) = k_e\det(A)$ para toda matriz A. (esa constante es c en el caso de las OEF de tipo I, 1 en las de tipo II y -1 en las de tipo III). Entonces, $\det(E) = \det(e(I)) = k_e.\det(I) = k_e$, por lo tanto $\det(EA) = k_e.\det(A) = \det(E).\det(A)$.

Entonces podemos probar a) para matrices inversibles: si A es inversible, el VIT^{-1} dice que es producto de elementales: $A = E_1...E_r$. Por lo tanto: $\det(AB) = \det(E_1...E_rB) = \det(E_1)....\det(E_r)\det(B) = \det(A)\det(B)$. (esto por lo que acabamos de ver para las elementales).

Antes de continuar con el resto de la prueba de a), probemos b). Si A es inversible, la cuenta de arriba dice que $\det(A) = \det(E_1)....\det(E_r) \neq 0$ pues cada $\det(E_i)$ es no nulo. Por otro lado, si A no es inversible, entonces $A \sim R$ donde R es una MERF que no es I. Por lo tanto R tiene una fila 0 y entonces $\det(R) = 0$. Pero, existen OEFs tal que $A = E_1.E_2....E_m.R$ Por lo tanto, $\det(A) = \det(E_1)\det(E_2)...\det(E_m)\det(R) = \det(E_1)\det(E_2)...\det(E_m).0 = 0$.

Asi tenemos b). Ahora para terminar a) nos quedaba el caso A no invertible. Por b), $\det(A) = 0$. Pero A no inversible implica que AB tampoco es inversible. Entonces

$\det(AB) = 0 = 0\det(B) = \det(A)\det(B)$ QED.

Veamos un poco acerca de la unicidad del determinante:

15.Propiedad :

La unica funcion multilineal alternada que vale 1 en la identidad es el determinante.

Prueba:

Sea D una tal función. Al ser lineal, en particular "saca constantes afuera", por lo tanto vale la propiedad de que si e es una OEF de tipo I, multiplicar una fila por c, entonces $D(e(A)) = c.D(A)$. Al ser multilineal y alternada, vale la propiedad de que $D(e(A)) = D(A)$ para las OEF de tipo II, con la misma prueba dada para el determinante. Con la misma prueba que para el determinante, usando la propiedad para las OEF de tipo I y II, obtenemos que si e es una OEF de tipo III, entonces $D(A) = -D(A)$. Usando ahora que $D(I) = 1$ y esas 3 propiedades, deducimos al igual que con los determinantes que $D(EA) = D(E)D(A)$ si E es elemental, pero ademas probamos que $D(E) = c, 1$ ó $-1 = \det(E)$.

Asi, deducimos que $D(A) = \det(A)$ para las A inversibles, pues son producto de elementales. Por otro lado, al ser lineal en cada fila, tenemos que $D(A) = 0$ si A tiene una fila 0 y entonces como en la prueba de los determinantes, deducimos que si A no es inversible entonces $D(A) = 0 = \det(A)$. QED.

16.Teorema (expansion por fila o columna) :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1} A_{i,j}(-1)^{i+j}\det(A(i|j)\\ &= \sum_{j=1} A_{i,j}(-1)^{i+j}\det(A(i|j))\end{aligned}$$

donde $A(i|j)$ es la matriz obtenida de A removiendo la fila i y la columna j.

Prueba:

Basta probar una de las dos, por la dualidad fila-columna de los determinantes.

Probemos la segunda. Veamos varios casos:

a. $i = n$ y la última fila de A es $[0\ 0\ ...\ a]$. Es decir:

$$A = \begin{bmatrix} B & * \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Entonces $\prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)} = 0$ si $\sigma(n) \neq n$. Por lo tanto, al calcular el determinante basta sumar sobre las σ tal que $\sigma(n) = n$. Pero ese conjunto es isomorfo a S_{n-1} (con preservación del signo). Por lo que
$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} B_{i\sigma(i)} a = a\det(B)$.

b. $i = n$ y la última fila de A es de la forma [0 ...0 a 0... 0] con el a en el lugar j. En este caso, transponiendo la columna j con la columna $j+1$, luego la $j+1$ con la $j+2$, etc, obtenemos que la columna j queda en el lugar n, pero las otras columnas no cambian su lugar relativo. Como hay $n-j$ cambios tenemos que:

$$\det(A) = (-1)^{n-j}\det(\begin{bmatrix} A(n|j) & * \\ 0 & a \end{bmatrix}) = (-1)^{n+j} a\det(A(n|j))$$

c. $i = n$. En este caso, escribimos la ultima fila de A como: $[\, A_{n1} \quad A_{n2} \quad \ldots \quad A_{nn}\,] = [\, A_{n1} \quad 0 \quad \ldots \quad 0\,] + [\,0 \quad A_{n2} \quad 0 \quad \cdots \quad 0\,] + \cdots + [\,0 \quad 0 \quad \ldots \quad A_{nn}\,]$. Como el determinante es lineal en cada fila, y usando el punto b), tenemos que $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} A_{n,j} \det(A(n|j))$.

d. Caso general. Se deduce del caso c. simplemente llevando la fila i a la n, intercambiando la i con la $i+1$, la $i+1$ con la $i+2$, etc. (es necesario hacerlo asi para no cambiar el orden relativo de las demas filas)
Entonces $\det(A) = (-1)^{n-i} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} A_{i,j} \det(A(i|j))$
y el teorema queda probado pues $(-1)^{n-i}(-1)^{n+j} = (-1)^{i+j}$ QED.

El teorema de la Adjunta y la regla de Cramer las dejo que las lean del Hoffman.