Dimensión

Asumimos en estas notas que tiene claro los conceptos de LI, LD, generadores y base.

1.Lema :

Sea V un espacio vectorial tal que todo conjunto LI tiene a lo sumo n elementos. Entonces V tiene una base. (que obviamente, tendrá a lo sumo n elementos).

Prueba: Sea $A = \{k \in \mathbb{N}_0 : \exists$ un conjunto LI con k elementos.$\}$.

a. $A \neq \emptyset$. Pues $\emptyset$ es LI, por lo tanto $0 \in A$.

b. $A \subseteq \mathbb{N}_0$. Por definición de A.

c. A esta acotado superiormente por n. (por hipotesis).

a.+b.+c. implican que existe un número M que es el MÁXIMO de A. Asi, existe un conjunto S de V que es LI, con M elementos, y tal que todo conjunto con $M+1$ elementos es LD. Si S genera V, ya está: al ser LI y generar, es base. Supongamos entonces que no genera. Entonces existe un $\beta \in V$ tal que $\beta \notin gen(S)$. Por un lema anterior esto implica que $S \cup \{\beta\}$ es LI. Absurdo pues tiene $M+1$ elementos. QED.

2.Teorema de la dimensionalidad :

Si V esta generado por un conjunto finito de vectores, entonces V tiene una base y ademas existe un número d (llamado la dimensión de V) tal que:

a) toda base de V tiene d elementos.

b) todo conjunto LI de V tiene $\leq d$ elementos.

c) todo conjunto generador de V tiene $\geq d$ elementos.

Prueba: Sea $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ un conjunto que genera V. Probemos que todo conjunto con $n+1$ elementos es LD. Sean entonces $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ $n+1$ vectores distintos. Como $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ genera V, entonces $\forall \alpha \in V \exists c_1, ..., c_n \in \mathbb{K}$ tales que $\alpha = c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n$. En particular, para todo $j = 1, ..., n+1$ existen $c_{i,j}$ tales que $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j}\beta_i$. Sea

$$A = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n+1} \\ c_{2,1} & \cdots & c_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n.n+1} \end{bmatrix}$$

Como A tiene mas columnas que filas, por el VIT! sabemos que existe $X \neq 0$ tal que

$AX = 0$. Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ entonces $\sum_{j=1}^{n+1} c_{i,j}x_j = 0$. Asi:

$$\begin{aligned} x_1\alpha_1 + \cdots + x_{n+1}\alpha_{n+1} =& \sum_{j=1}^{n+1} x_j\alpha_j \\ =& \sum_{j=1}^{n+1} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i,j}\beta_i \right) \\ =& \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} c_{i,j}x_j \right) \beta_i \\ =& \sum_{i=1}^{n} 0.\beta_i \\ =& 0 \end{aligned}$$

Hemos probado entonces que todo conjunto con mas de n elementos es LD, por lo tanto V satisface las hipotesis del lema anterior. Por lo tanto, V tiene una base, digamos B_1. Sea d la cardinalidad de esa base. Como B_1 es LI, lo de arriba muestra que $d \leq n$. Y esto vale para todo conjunto generador, es decir, probamos c).

A su vez, como $\mathcal{B}_1$ genera, por lo que acabamos de probar tenemos que todo conjunto con mas de d elementos es LD. (es decir, hemos probado b).)

Sea $\mathcal{B}_2$ otra base, con cardinalidad d_2. Como $\mathcal{B}_2$ es LI, tenemos entonces que $d_2 \leq d$. Pero como $\mathcal{B}_2$ genera tenemos que $d \leq d_2$. Asi, $d = d_2$, es decir, probamos a). QED.