Unicidad de la Merf

1.Teorema :

Toda matriz es equivalente por filas a UNA SOLA MERF.

Prueba:

Lo que debemos ver es que si $A \sim M$ y $A \sim R$ con M, R MERFs, entonces $M = R$. Pero $A \sim M$ y $A \sim R$ implica que $M \sim R$. Por lo tanto, basta ver que MERFs equivalentes por filas son iguales.

Obviamente si $M = 0$, entonces R es cero porque cualquier OEF deja la matriz cero como está.

Supongamos $M \neq 0$.

Cualquier columna nula queda inalterable por OEFs, asi que si M tiene columnas nulas, R tambien, y en los mismos lugares. Asi que son irrelevantes, ie., sea $\tilde{M}$ igual a M menos sus columnas nulas, y similar para $\tilde{R}$. Entonces, $M \sim R$ implica que $\tilde{M} \sim \tilde{R}$, y $\tilde{M}$ y $\tilde{R}$ son MERFs. Ademas, por el comentario anterior, si $\tilde{M} = \tilde{R}$ entonces tendremos que $M = R$, porque las columnas cero estaban en los mismos lugares.

Por lo que sólo necesitamos ver que $\tilde{M} = \tilde{R}$. Supongamos que no. Miremos la primera columna en la cual son distintas. La primera columna de una MERF que no tiene columnas nulas debe ser la columna con un 1 arriba de todo y ceros debajo. Entonces la primera columna en la cual M y R son distintas es una de las columnas $2, ..., n$. Digamos que es la columna j. El 1 de la primera columna es un pivote tanto en $\tilde{M}$ como en $\tilde{R}$. Sea M^* la matriz obtenida de $\tilde{M}$ tomando las columnas en donde estan todos los pivotes en columnas menores que la j, junto con la columna j de M. Analogamente construyamos R^*. Observemos que como j es la primera columna en la cual $\tilde{M}$ y $\tilde{R}$ son distintas, entonces las columnas de los pivotes anteriores son iguales (y hay al menos una columna con pivote: la primera). Es decir, M^* y R^* difieren solo en su ultima columna. Las primeras columnas de M^* y R^*, como $\tilde{M}$ y $\tilde{R}$ son MERF, estan formadas por pivotes escalonados, y al haber removido las columnas intermedias, forman la identidad. Por ejemplo, supongamos que $\tilde{M}$ y $\tilde{R}$ son las siguientes matrices:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces :

$$M^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observemos que si hay t pivotes antes de la columna j, entonces M^* sera de alguno de los dos tipos siguientes, dependiendo de si tiene o no un pivote en la columna j:

$$\text{tipo } \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & b_{t-1} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & b_t \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{o tipo } \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R^* tambien sera de uno de los dos tipos, aunque como estamos suponiendo que es distinta de M^*, si las dos son de tipo α, los b_is deberian ser distintos de los de M^*. Es decir, las posibilidades son: que una sea α y otra β, o que las dos sean α con b_is distintos. (las dos β no pueden ser porque serian iguales).

Ahora bien, miremos cada matriz como representando un sistema NO homogeneo de r ecuaciones con t incógnitas. Una matriz de tipo β representa un sistema INCONSISTENTE. Una matriz de tipo α representa un sistema con solucion UNICA $x_i = b_i, i = 1, ..., t$.

Como $M \sim R$ y lo unico que hemos hecho para llegar a M^* y R^* es eliminar columnas, entonces las mismas OEFs que llevan M en R llevarian M^* en R^*, es decir resulta que $M^* \sim R^*$. Pero entonces los sistemas de ecuaciones que representan tienen las mismas soluciones, asi que no puede ser uno con solucion única y el otro incompatible, o ambos con soluciones únicas pero distintas. Asi que no puede ser una del tipo α y otra β, o ambos α con b_is distintos, como suponiamos, asi que llegamos a una contradicción. QED.