Algebra de Matrices

Informalmente vimos que una matriz $r \times n$ sobre un cuerpo $I\!K$ es un rectangulo formado por r filas y n columnas de elementos de $I\!K$. Formalmente, una matriz $r \times n$ sobre $I\!K$ es una función $A : \{1, 2, ..., r\} \times \{1, 2, ..., n\} \mapsto I\!K$. La notación $A(i, j)$ entonces tiene sentido, pero por razones históricas se lo suele escribir como $A_{i,j}$ o A_{ij} si no hay posibilidad de confusión.

El conjunto de matrices $r \times n$ sobre $I\!K$ se denota $I\!K^{r\times n}$ o bien $M_{r,n}(I\!K)$. Cuando $r = n$ esta ultima notación se simplifica a $M_n(I\!K)$, pero la otra notación sigue siendo $I\!K^{n\times n}$ puesto que la notación $I\!K^n$ se reserva para indicar $I\!K^{1\times n}$.

Podemos definir la suma y el producto de matrices. La suma la definimos de la forma obvia:

1.Definición :

Dadas matrices A y B ambas del mismo tamaño, definimos la suma $A+B$ como la matriz cuy elemento ij es: $(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$.

El producto de matrices pareceria que seria lógico definirlo tambien de la forma obvia, pero NO se hace asi. (el producto definido de la forma obvia se llama producto de Hadamard de matrices. Tiene su importancia en ciertas areas–por ejemplo en el estudio matematico de la genetica–, pero no lo veremos aca).

2.Definición :

Dadas matrices A $r \times n$ y B $n \times p$, definimos una matriz AB de tamaño $r \times p$ como la matriz cuyo elemento ij es:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{k} A_{i,k}B_{k,j}$$

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Un ejemplo importante de MERF es la llamada matriz identidad, que es la que tiene todos 1s en la diagonal y 0s en los otros lados. Se suele denotar I si el tamaño es sobrentendido. Si se define la delta de Kronecker como $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ y 0 si no, entonces $I_{i,j} = \delta_{i,j}$. (porque no escribir la identidad como δ? Razones historicas.

3.Propiedad :

Si I es la matriz identidad $n \times n$, y A es $n \times m$, entonces $IA = A$. Si B es $m \times n$, entonces $BI = B$. En particular, si A es $n \times n$, entonces $AI = IA = A$.

Prueba:

$$(IA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} I_{i,k} A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} A_{k,j} = A_{i,j}$$

. Similar para el otro lado. QED.

4.Observación :

Sea A una matriz $r \times n$, y X y b matrices $r \times 1$ (a esto se le suele llamar un vector columna). Sean $x_i = X_{i,1}$, $b_i = b_{i,1}$. Entonces el sistema:

$$\begin{gathered} A_{1,1}x_1 + ... + A_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ A_{r,1}x_1 + ... + A_{r,n}x_n = b_r \end{gathered}$$

puede ser escrito como $AX = b$.

Veamos mas propiedades del producto:

5.Propiedad :

La multiplicación de matrices es distributiva respecto de la suma (cuando todas las operaciones pueden hacerse).

Prueba: Supongamos A $r \times n$ y B y C $n \times m$.

$$\begin{aligned} (A(B+C))_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(B+C)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(B_{k,j} + C_{k,j}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} + \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}C_{k,j} = (AB+AC)_{i,j} \end{aligned}$$

. Similar para el otro lado. (Queda como ejercicio para el practico). QED.

. En general la multiplicación de matrices NO ES conmutativa, es decir, en general $AB \neq BA$. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

pero:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lo que si vale es lo siguiente:

6.Propiedad :

El producto de matrices es asociativo.

Prueba: Sea A matriz $r \times n$, B $n \times p$ y C $p \times t$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(A(BC))_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(BC)_{k,j} \quad \text{(def producto aplicada a } A \text{ y } BC\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \left(\sum_{\ell=1}^{p} B_{k,\ell} C_{\ell,j} \right) \quad \text{(def producto aplicada a } B \text{ y } C\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} A_{i,k} B_{k,\ell} C_{\ell,j} \quad \text{(distributividad del cuerpo)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,\ell} C_{\ell,j} \quad \text{(conmutatitidad del cuerpo)} \\
&= \sum_{\ell=1} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,\ell} \right) C_{\ell,j} \quad \text{(factor común)} \\
&= \sum_{\ell=1} (AB)_{i,\ell} C_{\ell,j} \quad \text{(def producto aplicada a } A \text{ y } B\text{)} \\
&= ((AB)C)_{i,j} \quad \text{(def producto aplicada a } AB \text{ y } C\text{)}
\end{aligned}$$

QED.

INVERSAS

Las cosas se vuelven mas interesantes cuando introducimos el concepto de matrices inversibles (solo tiene sentido para matrices cuadradas)

7.Definición :

Sea A una matriz $n \times n$. Diremos que una matriz A tiene una inversa a derecha si existe C $n \times n$ tal que $AC = I$, y que tiene una inversa a izquierda si existe B $n \times n$ tal que $BA = I$. Diremos que A tiene inversa o que es inversible sii existe B tal que $AB = BA = I$, (es decir si existe una matriz que es al mismo tiempo inversa a izquierda y a derecha).

8.Observación :

Cuando se dice que una matriz es inversible, esto implica que la matriz es cuadrada. Matrices no cuadradas NO son inversibles por definición.

9.Proposición :

La inversa de una matriz es unica. Mas aun, si A tiene una inversa a derecha B y una inversa a izquierda C, entonces $B = C$.

Prueba: Prueba estandar de unicidad de inversas:

$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$ QED.

La única inversa de A se denota A^{-1}. Obviamente, si A es inversible tambien lo es A^{-1}, con inversa A, porque por definición de A^{-1}, tenemos que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, lo cual dice que A^{-1} tiene inversa A.

Nuestro objetivo es, primero, tener una idea de cuales matrices son inversibles y segundo, si una matriz es inversible, hallar un algoritmo que nos permita hallar la inversa de A.

Ejemplo de matriz inversible: La identidad es inversible, pues $I.I = I$.

Ok, no muy interesante. ¿Cuales otras matrices son inversibles?

Matrices Elementales

10.Definición :

Una matriz se llama **elemental** *si se puede obtener de la matriz identidad por medio de* **una sola** *OEF.*

11.Lemma :

Sea e una OEF, y $E = e(I)$ la matriz elemental asociada donde I es la identidad $n \times n$. Entonces $e(A) = EA$ para toda matriz A $n \times p$.

Prueba: Supongamos que e sea de tipo II: sumarle a la fila r la fila t multiplicada por c. Entonces:

$$(e(A))_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{if } i \neq r \\ A_{r,j} + cA_{t,j} & \text{if } i = r \end{cases}$$

En particular, puesto que $E = e(I)$, obtenemos que:

$$E_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \text{if } i \neq r \\ \delta_{r,j} + c\delta_{t,j} & \text{if } i = r \end{cases}$$

Asi:

$$\begin{aligned} (EA)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} E_{i,k} A_{k,j} \\ &= \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} A_{k,j} = A_{i,j} & \text{if } i \neq r \\ \sum_{k=1}^{n} (\delta_{r,k} + c\delta_{t,k}) A_{k,j} = A_{r,j} + cA_{t,j} & \text{if } i = r \end{cases} \\ &= (e(A))_{i,j} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $EA = e(A)$. Esto, si e es de tipo II. Las pruebas para las de tipo I y tipo III son similares (incluso mas faciles) y se dejan como ejercicio en el practico. QED.

12.Corolario :

Sean A, B matrices $n \times p$. Entonces, $A \sim B$ si y solo si existen matrices elementales E_i $n \times n$ tales que $B = E_1 E_2 ... E_t A$.

13.Corolario :

Toda matriz elemental es inversible.

Prueba: Sea E matriz elemental, $E = e(I)$. Sea f la OEF inversa de e, y $F = f(I)$.

Entonces $EF = e(F) = e(f(I)) = I$ (pues $(e \circ f)(A) = A$ para toda A). Similarmente, $FE = I$, por lo tanto E tiene inversa F. QED.

¿Son estas las únicas? No. Ya veremos mas.

14.Propiedad :

Sea A matriz $r \times n$, b matriz columna $r \times 1$. Si el sistema $AX = b$ tiene alguna solución, digamos $X^{(0)}$, entonces toda solución de $AX = b$ es de la forma $X = Y + X^{(0)}$, donde Y es una solución del sistema homogenero $AY = 0$.

Prueba: $A(Y + X^{(0)}) = AY + AX^{(0)} = 0 + b = b$, por lo tanto todas las cosas de la forma $Y + X^{(0)}$ son solución. Por otro lado, sea X solución de $AX = b$. Como tambien

$AX^{(0)} = b$, tenemos que $AX = AX^{(0)}$, es decir, $A(X - X^{(0)}) = 0$, es decir, $X - X^{(0)}$ es una solución Y de $AY = 0$. Con lo cual $X = Y + X^{(0)}$. QED.

15.Corolario :

Si el sistema $AX = b$ tiene alguna solución, entonces los sistemas $AX = b$ y $AX = 0$ tienen el mismo número de soluciones. En particular, si $AX = b$ tiene solución, entonces esa solución es única si y solo si $AX = 0$ tiene sólo la solución trivial.

Dos preguntas muy importantes son :¿cuando tiene el sistema $AX = 0$ sólo la solución trivial? y ¿cuando es cierto que todos los sistemas $AX = b$ tienen solución? (siempre que los tamaños sean los adecuados)

Recordemos que hemos definido el rango de A como el número de pivotes en la unica MERF equivalente por filas a A y que vimos que el rango de A es menor o igual al minimo entre el número de columnas y el número de filas.

Los siguientes teoremas son muy importante, asi que los llamaremos VITs. (Very Important Theorem). Los enuncio juntos dada la similaridad. En vez de numerarlos, les pondre un simbolo. Como uno habla de unicidad le pondre el simbolo !, y como el otro habla de existencia le pondre el simbolo $\exists$

16.Teorema (VIT!) :

El sistema homogeneo $AX = 0$ tiene sólo la solución nula si y solo si el rango de A es igual al número de COLUMNAS de A.

Prueba: Sea M la unica MERF tal que $A \sim M$. Por definición, el rango de A es el número de pivotes de M.

Veamos la implicación $\Leftarrow$ primero: Si el rango de A es igual al número de columnas, entonces M tiene exactamente un pivote en cada columna. Por ser MERF debe ser de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir, la identidad arriba de varias filas cero. (quizas ninguna) Sea X $n \times 1$ tal que $AX = 0$. Como $A \sim M$, tenemos que $MX = 0$.Pero como M tiene la forma descripta arriba, el sistema $MX = 0$ es:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \\ 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases}$$

es decir, $X = 0$.

Supongamos ahora que $AX = 0$ tiene solo la solución trivial. Supongamos que rango(A) no es igual al número de columnas y lleguemos a una contradicción. Como el rango es siempre menor o igual que el número de columnas, si no son iguales entonces rango(A) es menor que el número de columnas, es decir que M tiene mas columnas que pivotes, con lo cual hay columnas que NO tienen pivote. La variable que corresponde a esa columna es entonces una variable independiente: le podemos dar el valor que queramos, en particular le podemos dar un valor no nulo, y tendremos una solución no nula del sistema $MX = 0$. Como $AX = 0$ y $MX = 0$ tienen las mismas soluciones, tenemos una solución no nula de $AX = 0$. QED.

17.Teorema (VIT$\exists$) :

Los sistemas no homógeneos asociados a A tienen siempre solución si y solo si el rango de A es igual al número de FILAS de A. En otras palabras: Si A es $r \times n$ entonces:

$$(\forall b \ r \times 1 \ \exists X n \times 1 \text{ tal que } AX = b) \iff \text{rango}(A) = r$$

Prueba: Al igual que en el VIT!, sea M la unica MERF con $A \sim M$. Probemos primero $\Rightarrow$ por el absurdo. i.e., Supongamos que $AX = b$ siempre tiene solución pero que el rango de A es menor que el número de filas. Entonces M tendria menos pivotes que filas, con lo cual M tendria al menos una fila nula. Por ser MERF, esto implica que la ultima fila (al menos) debe ser nula. Pero entonces, el sistema $MX = c$ donde c es la columna con todos 0s y un 1 al final, es un sistema incompatible. Como $A \sim M \Rightarrow M \sim A$, existen OEFs que transforman M en A. Aplicando las OEFs que llevan M en A a la matriz $[M|c]$ llegamos a una matriz equivalente por filas de la forma $[A|b]$ para algun b, que representa el sistema $AX = b$. Como fuimos de un sistema a otro por medio de OEF, los sistemas

$MX = c$ y $AX = b$ deben tener las mismas soluciones. Pero estamos diciendo que $MX = c$ es incompatible pero que $AX = b$ tiene al menos una solución, absurdo.

Para el otro lado es obvio: Sea b $r \times 1$ cualquiera. Aplicandole las OEFs que llevan A en M a la matriz $[A|b]$ llegamos a una matriz $[M|c]$. Si el rango de A es igual al número de filas,entonces M tiene un pivote por fila con lo cual, por ser MERF, es obvio que $MX = c$ tiene solución. (por ejemplo, podemos simplemente hacer cero todas las variables independientes que pueda haber y resolver para las dependientes), y por lo tanto $AX = b$ tiene solución. QED.

Estos VITs tienen varios corolarios interesantes.

18.Corolario :

Si A es una matriz con menos filas que columnas (es decir, corresponde a un sistema con mas incógnitas que ecuaciones), entonces el sistema homogeneo $AX = 0$ tiene soluciones no nulas.

Prueba: Supogamos A $r \times n$. Si $r < n$ entonces rango$(A) \leq r < n$, por lo tanto por el VIT!, el sistema $AX = 0$ tiene soluciones no nulas. QED.

19.Corolario :

Si A es una matriz con menos columnas que filas (es decir, corresponde a un sistema con mas ecuaciones que incógnitas), entonces existen bs tal que el sistema $AX = b$ no tiene solución.

Prueba: Si A es $r \times n$, entonces Rango$(A) \leq n < r$, por lo tanto el resultado sale directo del VIT$\exists$. QED.

Vimos lo que pasa con matrices con mas columnas que filas y con menos columnas que filas. Queda por ver que pasa con las cuadradas. Tenemos otro VIT, al cual llamaremos VIT^{-1} para indicar que tiene que ver con la inversibilidad.

20.Teorema (VIT^{-1}) :

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Los siguientes son equivalentes:

1) A es inversible.

2) $A \sim I$.

3) El rango de A es n.

4) El sistema $AX = 0$ tiene solo la solución $X = 0$.

5) Para todo b $n \times 1$, el sistema $AX = b$ tiene siempre al menos una solución.

6) Para todo b $n \times 1$, el sistemas $AX = b$ tiene siempre exactamente una solución.

7) A tiene inversa a derecha.

8) A tiene inversa a izquierda.

9) A es producto de matrices elementales.

Prueba: Lo probaremos en varias partes. (en realidad cada parte es un mini-teorema).

VIT^{-1} Parte I: **3),4) y 5) son equivalentes**

Como A es $n \times n$, entonces: por el VIT!, $AX = 0$ tiene solución única $X = 0$ si y solo si rango(A) = número de columnas=n=número de filas y esto último es si y solo si los sistemas $AX = b$ siempre tienen solución por el VIT∃.

VIT^{-1} Parte II: **5) es equivalente con 6)**

Obviamente 6) implica 5). Por otro lado, si tenemos 5) tenemos tambien 4) por lo que vimos arriba. 5) dice que el sistema no homogeneo tiene al menos una solución, 4) dice que el homogeneo tiene solo la solución trivial y vimos antes que estas dos cosas implican que el sistema no homogeneo tiene una sola solución, es decir, 6).

VIT^{-1} Parte III: **2) y 3) son equivalentes**

pues la unica MERF $n \times n$ con n pivotes es la identidad.

VIT^{-1} Parte IV: **9) es equivalente a 2)**

Sea M la unica MERF con $A \sim M$. Entonces existen matrices elementales con $A = E_1 ... E_t M$. Asi, $A \sim I$ si y solo si $M = I$ si y solo si $A = E_1 ... E_t$.

VIT^{-1} Parte V: **7) es equivalente a 5)**

Pues:

7) implica 5): *si A tiene una inversa a derecha C, dado b, sea $X = Cb$, entonces $AX = ACb = Ib = b$.*

5) implica 7) *Tomemos los n $b^{(j)}$s que forman las columnas de la identidad. Como estamos suponiendo 5), para cada uno de ellos tenemos un $X^{(j)}$ que es solución de $AX^{(j)} = b^{(j)}$. Si tomamos la matriz C cuyas columnas son los $X^{(j)}$, entonces $AC = [\, AX^{(1)} \quad AX^{(2)} \quad \cdots \quad AX^{(n)} \,] = [\, b^{(1)} \quad b^{(2)} \quad \cdots \quad b^{(n)} \,] = I$, es decir C es una inversa a derecha de A.*

VIT^{-1} Parte VI: **1) implica 8) y este implica 4)**

1) implica 8) es obvio y 8) implica 4) puesto que si B es una inversa a izquierda de

A y $AX = 0$, entonces tenemos que $X = IX = BAX = B0 = 0$.

VIT^{-1} Parte VII: **7) es equivalente a 1)**

Claramente 1) implica 7). Para la vuelta, sea C una inversa a derecha de A. Veremos que tambien es inversa a izquierda, por lo tanto sera una inversa de A, probando 1). Como C es inversa a derecha de A, entonces A es inversa a izquierda de C. Es decir, vale 8) **para C.** *Arriba probamos que entonces vale 4) (para C) lo cual es equivalente a 5) y por lo tanto a 7).(para C). Es decir, C tiene una inversa a derecha B. Como C tiene inversa a derecha B e inversa a izquierda A, resulta $A = B$. Es decir, $AC = CA = I$, i.e., A es inversible.*

Nota: esa es la prueba que PENSABA dar en clases. Cuando estuve en clases, algunos estudiantes sugirieron otra forma de probar la ultima parte, pero no me acuerdo bien cual fue la que al final escribí. Es decir, luego de las partes I-VI, tenemos que 2,3,4,5,6,7 y 9 son equivalentes. y ademas 1 implica 8 y 8 implica 4, es decir, “cae” en el bloque anterior de equivalencias. Para terminar la prueba, basta ver que alguno de ese bloque implica 1. Arriba probé que 7 implica 1, pero ciertamente cualquiera que se les ocurra esta bien. Si no recuerdo mal, creo que la que hicimos en clase fue 9 implica 1, asi: $A = E_1...E_r$ entonces $E_r^{-1}...E_1^{-1}A = I$ y tambien $AE_r^{-1}...E_1^{-1} = I$, es decir A tiene inversa a izquierda Y a derecha. Por lo tanto es inversible, como vimos antes. (Proposición 9). QED.

Tenemos ahora lo necesario para saber como calcular la inversa, si es que esta existe: La prueba del VIT^{-1} nos dice como: la inversa de A se calcula en esa prueba resolviendo los n sistemas $AX^{(j)} = b^{(j)}$, donde los $b^{(j)}$ eran las columnas de la identidad. Sin embargo, recordemos que al resolver un sistema $AX = b$, tomamos la matriz ampliada $[A|b]$, y le aplicamos OEFs para resolverlos, tratando de llevar A a una MERF. Como todos los sistemas $AX^{(j)} = b^{(j)}$ tienen la misma A, la secuencia de OEFs sera la misma. Con lo cual, en vez de resolver n sistemas $n \times n$ por separado, podemos hacerlo en paralelo, pues las OEFs seran la misma. Es decir, en vez de tomar una matriz ampliada $[A|b^{(j)}]$ para cada j, tomamos una matriz “super-ampliada” $[A|b^{(1)}\ b^{(2)}\ ...\ b^{(n)}]$ y los resolvemos todos juntos aplicandole OEFs a la matriz $n \times 2n$ que tenemos. Observemos que como los $b^{(j)}$ eran las columnas de la identidad, esa matriz “super-ampliada” es en realidad $[A|I]$. Por lo que vimos en la prueba del VIT^{-1}, una vez que terminemos, lo que quede del lado derecho sera la inversa de A. Como tambien vimos, para que esto pueda hacerse, debe ser $A \sim I$, de lo contrario A no sera inversible. Tenemos entonces:

21.Proposición :

El siguiente algoritmo para decidir si existe A^{-1} y encontrarla en caso que exista es correcto:

1) *Aplicar OEFs a la matriz $n \times (2n)$ $[A|I]$ hasta que quede una matriz de la forma $[M|B]$, donde M es una matriz escalon reducida por filas.*
2) *Si $M = I$, entonces A es inversible y $A^{-1} = B$. Si $M \neq I$, A no es inversible.*

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ Decidir si A es inversible, y si lo es, dar la inversa.:

$$\begin{aligned}
[A\ I] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Repetir el ejercicio anterior tomando la matriz A^* que es igual a la matriz A anterior excepto que reemplazamos el “8” en la entrada $(3,3)$ por “9”.

$$\begin{aligned}
[A^*\ I] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 9 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

No hace falta continuar, pues esto dice que A^* sera equivalente por filas a una MERF con fila 0, es decir $A \not\sim I$, por lo tanto A no es invertible.

Observar que si el ejercicio solo pregunta si la matriz es o no inversible (y no pide la inversa), entonces no hace falta reducir $[A\ I]$: basta con reducir A y ver si llegamos a la identidad o no.

Veamos otras propiedades de las matrices inversibles:

22.Propiedad :

Un producto de matrices cuadradas es inversible si y solo si cada una de las matrices lo es.

(obviamente, si no son cuadradas NO pueden ser inversibles, aun cuando el producto lo sea).

Prueba: Lo probaremos para dos matrices, el caso general sale por inducción obvia.

Sean A y B inversibles. Entonces existen A^{-1} y B^{-1}. Sea $C = B^{-1}A^{-1}$. Entonces:

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (A.I)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

por lo que $C = B^{-1}A^{-1}$ es inversa a derecha de AB, por lo tanto por el VIT^{-1} es inversa.

Para la vuelta, sean A, B matrices $n \times n$ tales que AB es inversible. Entonces $I = (AB)(AB)^{-1} = A(B(AB)^{-1})$. Por lo que $B(AB)^{-1}$ es una inversa a derecha de A, asi que A es inversible. Similarmente, $(AB)^{-1}A$ es una inversa a izquierda de B, asi que B es inversible.

QED.

23.Propiedad :

Si A y B son cuadradas, entonces $A \sim B$ sii existe una matriz inversible P tal que $A = PB$.

Prueba: Si $A \sim B$, entonces existen matrices elementales E_i tales que $A = E_1...E_tB$. Si tomamos $P = E_1...E_t$ entonces P es producto de elementales, por lo tanto inversible, y $A = PB$.

Viceversa, si $A = PB$ con P inversible, entonces por el VIT^{-1} existen matrices elementales $E_1, ..., E_t$ tal que $P = E_1....E_t$, es decir $A = E_1...E_tB$ y por lo tanto $A \sim B$. QED.