PRÁCTICO NÚMERO 3 DE ÁLGEBRA II Y ÁLGEBRA-2010

1. Sea V un espacio vectorial. Probar que si a es un escalar y α es un vector tales que $a.\alpha = \mathbf{0}$, entonces $a = 0$ ó $\alpha = \mathbf{0}$.

2. Decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones abajo definidas.

a) $\mathbb{R}^n$, con $\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$, y el producto por escalares usual.

b) $\mathbb{R}^n$ con la suma usual y $c \odot \alpha = -c\alpha$.

c) $\mathbb{R}^2$, con la suma usual y $c \odot (x, y) = (cx, y)$

d) $\mathbb{R}^2$ con $(x, y) \oplus (x_1, y_1) = (x + x_1, 0)$, $c \odot (x, y) = (cx, 0)$.

e) $\mathbb{R}^3$ con:

$$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y' - 1, z + z')$$

$$c \odot (x, y, z) = (cx, cy + 1 - c, cz)$$

f) El conjunto de polinomios, con el producto por escalares (reales) usual, pero con suma $p(x) \oplus q(x) = p'(x) + q'(x)$ (suma de derivadas)

3. Probar que V con las operaciones definidas a continuación es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$.

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 1\}\}$$

$$(x_1, x_2 \dots, x_n) \oplus (y_1, y_2 \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots x_n y_n)$$

$$c \odot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^c, \dots x_n^c)$$

4. Sea $(V, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial y S un conjunto cualquiera. Sea $W = V^S$ (el conjunto de funciones de S en V). Defina la suma de elementos $f, g \in W$ como la función $f + g : S \mapsto V$ tal que $(f + g)(x) = f(x) \oplus g(x) \forall x \in S$, y el producto por escalares como la función $c.f : S \mapsto V$ tal que $(c.f)(x) = c \odot f(x) \forall x \in V$. Probar que $(W, \mathbb{K}, +, .)$ es un espacio vectorial.

5. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, S un conjunto tal que existe una suma $\oplus : S \times S \mapsto S$ y un producto por elementos de $\mathbb{K}$ $\odot : \mathbb{K} \times S \mapsto S$. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. tal que existe una biyección $f : S \mapsto V$ tal que $f(\alpha \oplus \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$, $f(c \odot \alpha) = c.f(\alpha)$. Probar que $(S, \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

6. Demostrar que los únicos subespacios de $\mathbb{R}$ (como $\mathbb{R}$-espacio vectorial) son $\{\mathbf{0}\}$ y $\mathbb{R}$. Probar que esto no es cierto si se mira $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial. (el contrajemplo es mas o menos obvio).

7. Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o bien $W_2 \subseteq W_1$.

(Ayuda: niegue la condición $W_1 \subseteq W_2$. Esto debería darle un vector α con ciertas propiedades. Luego pruebe que $W_2 \subseteq W_1$ tomando un vector β cualquiera en W_2 y viendo que debe estar en W_1, usando α como apoyo)

8. Decidir cuáles de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ son transformaciones lineales:

a) $T(x,y,z) = 3x - 2y + 7z$
b) $T(x,y,z) = 3x + y^2 - z$
c) $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
d) $T(x,y,z) = \mathrm{sen}(x + y - z)$
e) $T(x,y,z) = x + z$
f) $T(x,y,z) = 1 + x - 2y + 5z.$
g) $T(x,y,z) = xyz$

9. Para cada una de las T del ejercicio anterior, decidir si $\{(x,y,z) : T(x,y,z) = 0\}$ es o no un espacio vectorial. Para aquellos que no lo sean, decidir cuáles son cerrados para la suma, cuáles cerrados para el producto por escalares y cuáles ninguna de las dos cosas. (OJO!⨀: *en el teórico vimos que SI T es lineal entonces $\{\alpha : T(\alpha) = 0\}$ es espacio vectorial, pero puede suceder que T NO sea lineal y aún asi $\{\alpha : T(\alpha) = 0\}$ sea sin embargo espacio vectorial).*

10. ¿Cuáles de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ son transformaciones lineales?

a) $T(x,y) = (y,x)$
b) $T(x,y) = (x^2,y)$
c) $T(x,y) = (x-y,0)$

11. $\mathbb{C}$ puede ser mirado como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial o como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sea $T : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ la transformación dada por $T(a+ib) = ia$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Probar que T es $\mathbb{R}$-lineal pero no es $\mathbb{C}$-lineal. (es decir, si se mira a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces es lineal, si se lo mira como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces no es lineal).

12. En cada uno de los casos siguientes, el conjunto dado es un subconjunto de algo que

Ud. ya sabe que es espacio vectorial sobre $I\!R$ con las operaciones naturales. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial del espacio vectorial dado. Cuando no lo sea, decidir si es cerrado para la suma o el producto por escalares.

a) $C^1[0,1] = \{f : [0,1] \to I\!R \ : f$ es derivable $\}$

b) $\{f \in C[0,1] : f(1) = 1\}$. **c)** $\{f \in C[0,1] : f(1) = 0\}$.

d) $\{f \in C[0,1] : f(1) \geq 0\}$. **e)** $\{f \in C[0,1] : f(1) = f(0)\}$.

f) $\{(x_1, ..., x_n) \in I\!R^n | x_1 = x_n\}$

g) $\{(x_1, ..., x_n) \in I\!R^n | \exists j > 1 : x_1 = x_j\}$ $\odot$OJO: $n = 1$, $n = 2$, $n > 2$ son distintos.

h) $\{(x_1, ..., x_n) \in I\!R^n | x_1 x_n = 0\}$ **i)** El conjunto de matrices $n \times n$ inversibles.

j) El conjunto de matrices $n \times n$ NO inversibles.

k) El conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado par, junto con el polinomio nulo.

ℓ) El conjunto de matrices $n \times n$ A tales que $AB = BA$. (B una matriz $n \times n$ fija)

m) $\{f \in C[0,1]$: $\int_0^1 f(x)\, dx = 0\}$. **n)** $\{f \in C[0,1]$: $\int_0^1 (f(x))^2\, dx = 0\}$

(nota: los dos últimos sólo si vió integrales. En el parcial no habrá ejercicios con integrales).

13. Probar que el conjunto $V = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ es un espacio vectorial sobre $Z\!\!Z_2$, con la multiplicación por escalares dada por: $0.\clubsuit = 0.\spadesuit = 0.\heartsuit = 0.\diamondsuit = \clubsuit$ y $1.\clubsuit = \clubsuit, 1.\spadesuit = \spadesuit, 1.\heartsuit = \heartsuit, 1.\diamondsuit = \diamondsuit$ y la suma dada por $\clubsuit + \clubsuit = \spadesuit + \spadesuit = \heartsuit + \heartsuit = \diamondsuit + \diamondsuit = \clubsuit$; $\clubsuit + \spadesuit = \spadesuit + \clubsuit = \spadesuit$, $\heartsuit + \clubsuit = \clubsuit + \heartsuit = \heartsuit$, $\clubsuit + \diamondsuit = \diamondsuit + \clubsuit = \diamondsuit$; $\heartsuit + \spadesuit = \spadesuit + \heartsuit = \diamondsuit$; $\heartsuit + \diamondsuit = \diamondsuit + \heartsuit = \spadesuit$; $\diamondsuit + \spadesuit = \spadesuit + \diamondsuit = \heartsuit$. (Ayuda: además de probarlo directamente por definición, lo cual es fácil pero laborioso, también sale usando los ejercicios 3)y 5))

14. Sea V el espacio vectorial del ejercicio anterior.
Sea $T : V \mapsto V$ dada por $T(\clubsuit) = \clubsuit; T(\spadesuit) = \heartsuit; T(\heartsuit) = \diamondsuit, T(\diamondsuit) = \spadesuit$.
Decidir si T es una transformación lineal.