I): Probar que en $I\!R^{2\times 3}$ las siguientes matrices son LI .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

II): En cada caso, decidir si los vectores dados son LI o no.

a) $(1,0,-1);(1,2,1);(0,-3,2)$ **b)** ; $(1,0,-1);(1,-2,1);(2,-2,0)$

c) $(1,3,-3);(2,3,-4);(1,-3,1)$ **d)** $(1,1,1,1);(1,2,1,2);(1,3,1,3);(0,1,2,3)$

e) $(1,1,0,0);(0,0,1,1);(1,0,0,4);(0,0,0,2)$

f) $(1,1,2,4);(2,-1,-5,2);(1,-1,-4,0);(2,1,1,6)$

III): EJERCICIO CLAVE. Hay dos habilidades duales una de la otra que Ud. debe aprender bien: una es obtener una caracterización de un SEV a partir de una base, y la otra es extraer una base de una caracterización.

a) En cada uno de los casos, los vectores dados forman una base de un subespacio vectorial del $I\!R^n$ adecuado. Caracterizar ese SEV parametricamente mediante ecuaciones.

i) $\{(1,0,3);(0,1,-2)\}$ ii) $\{(1,2,0);(0,0,1)\}$

ii) $\{(1,0,0,-1);(0,1,0,2);(0,0,1,9);\}$ iv)$\{(1,0,3,-1);(0,1,2,3)\}$

v) $\{(1,0,0,2,2,1);(0,1,2,3,4,2);\}$ vi)$\{(1,0,1,0);(0,1,1,0);(0,0,0,1)\}$

vii) $\{(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,0,1)\}$ viii) $\{(1,0,0,0,0);(0,1,0,3,0);(0,0,0,0,1)\}$

b) Dar una base y la dimensión de los siguientes espacios vectoriales:

i) $W=\{(x,y,z)\in I\!R^3 : z=x+y\}$ ii)$W=\{(x,y,z)\in I\!R^3 : z=y; x=2y\}$

iii) $W=\{(x,y,z,w)\in I\!R^4 : w=x+y+z\}$

iv) $W=\{(x,y,z,w)\in I\!R^4 : w=x+z; y=x-z\}$

v) $W=\{(x,y,z,w)\in I\!R^4 : w=x+z; y=x\}$

vi) $W=\{(x,y,z,w)\in I\!R^4 : w=x+z\}$

vii) $W=\{(x,y,z,w,u)\in I\!R^5 : w=x+z; y=x-z; u=2x-3z\}$

IV): ¿Cual es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ cuando se lo considera como $I\!R$-espacio vectorial?

V): Calcular la dimensión y exhibir una base de:

i) $S=\{A\in I\!R^{n\times n} : A=A^t\}$.

ii) $S=\{A\in \mathbb{C}^{n\times n} : A=\overline{A^t}\}$ (considerado como $I\!R$-subespacio de $\mathbb{C}^{n\times n}$).

Ejercicios VI-XVI son ejercicios de pensar. Si Ud. los pregunta sin haber intentado pensarlos bien no esta aprovechando estos ejercicios. Si alguno no se le ocurre, pase al siguiente y luego vuelvalo a pensar. Pregunte sólo luego de un bien tiempo de pensarlo.

VI): Dar 3 vectores en $I\!R^3$ que sean LD, y tales que dos cualesquiera de ellos sean LI.

VII): Sean $p_i(x), i = 1, .., n$ polinomios en $I\!K[x]$ tales que sus grados son todos distintos.

a) Probar que $\{p_1(x), ..., p_n(x)\}$ es LI en $I\!K[x]$.

b) El punto a) prueba que en los casos $I\!K = I\!R, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$, si $P_i(x), i = 1, .., n$ denota la función polinomica inducida por $p_i(x)$ en $I\!K^{I\!K}$ entonces $\{P_1(x), ..., P_n(x)\}$ es LI en $I\!K^{I\!K}$. Dar un ejemplo de que esto no es cierto cuando $I\!K = \mathbb{Z}_2$.

c) Probar que $\{1, 1 + x, (1 + x)^2\}$ es una base del conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2.

d) Probar que el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2 es generado por $\{1, 2 + 2x, 1 - x + x^2, 2 - x^2\}$ ¿Es ese conjunto una base?

VIII): Pruebe que, para todo natural r, existen numeros racionales $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r$ tales que que, para todo natural $n \geq r$, vale la igualdad:

$$n^r = a_0 + a_1.n + a_2.\binom{n}{2} + a_3\binom{n}{3} + \ldots + a_r\binom{n}{r}$$

(Ayuda: su prueba deberia empezar: "esto es obvio por el ejercicio VII) , pues...")

IX): Considere el siguiente conjunto infinito en $I\!R^{[0,1]}$: $S = \{\frac{1}{1-x}, 1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$. Probar que S es un conjunto LI . Explicar porque esto no es una contradicción con el hecho que Ud sabe o va a aprender en Analisis que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$.

X): Decidir si los siguientes conjuntos son LI en $I\!R^{I\!R}$.
a) $\{1, \mathrm{sen}(x), \cos(x)\}$. b) $\{1, \mathrm{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$.

XI): Sea $\{f_1, ..., f_n\}$ un conjunto LI de funciones *pares* en $I\!R^{I\!R}$ (i.e., $f(x) = f(-x)\forall x$) y sea $\{g_1, ..., g_m\}$ un conjunto LI de funciones *impares* (i.e., $f(-x) = -f(x)\forall x$). Probar que $\{f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m\}$ es LI

XII): Sea V un $I\!R$-espacio vectorial y sean α, β y γ vectores en V.

a) Probar que si $\alpha; \beta; \gamma$ son LI , entonces tambien lo son $\alpha + \beta; \alpha + \gamma; \beta + \gamma$.

b) Probar que esto no es cierto si en vez de suponer que V es $I\!R$-espacio vectorial se supone que es $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial.

XIII): Probar que para todo n, el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}, ..., e^{\lambda_n x}\} \subseteq C(I\!R)$ es linealmente independiente si los λ_i son números reales todos distintos.

(Ayuda: Una primera ayuda es hacer los casos $n = 2$,$n = 3$ primero. En general, plantear la ecuación con la que quieren probar LI, luego derivar esa ecuación y continuar derivando hasta tener n ecuaciones. Evaluarlas en $x = 0$).

XIV): Probar que $\mathbb{R}$ mirado como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial tiene dimensión infinita. (Una posibilidad fácil es usar un argumento de cardinalidad, pero debe saber algunos resultados de cardinalidad infinita. Otra forma es usar que e es trascendente, una prueba de esto esta en el Spivak).

XV): Este ejercicio deberia haber estado en el práctico anterior, pero iba a ir en el parcial. Eso no paso, asi que ahora va aca: probar que el axioma de la conmutatividad de la suma en la definición de espacio vectorial puede deducirse de los otros. (es decir, no seria necesario incluirlo en la definición).

XVI): Supongamos que $\mathbb{K}$ y $\mathbb{F}$ son cuerpos tales que $\mathbb{F}$ es subcuerpo de $\mathbb{K}$. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, (por lo tanto, tambien se lo puede ver como un $\mathbb{F}$-EV). Sean $v_i (1 \leq i \leq n)$ vectores en V.

i) Probar que si $\{v_1, ..., v_n\}$ es $\mathbb{K}$-LI entonces es $\mathbb{F}$-LI .

ii) Mostrar que la recíproca no es cierta.

iii) Mostrar que si solo se pide que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ entonces $i)$ no es necesariamente cierto.

XVII): **EJERCICIO CLAVE. Si no sabe hacer esto no sabe algebra lineal. En cada caso del ejercicio II) caracterizar mediante ecuaciones el subespacio W de $\mathbb{R}^3$ (casos a)-c)) o $\mathbb{R}^4$ (casos d)-f)) generado por los vectores indicados, hallar su dimensión y dar una base del mismo. En los casos de $\mathbb{R}^3$ decidir cuales de los vectores $(4, -5, 1); (5, 15, 5); (-5, 15, -5)$ estan en W y en los casos de $\mathbb{R}^4$ cuales de los vectores $(1, 1, -4, 4); (1, 1, -4, -4); (1, 1, 4, 4), (1, 1, 1, 2)$ estan en W. Hacer ademas los siguientes casos. De paso decir si los vectores son LI o no. Asegurese de hacer algunos con el metodo por columnas y otros por el metodo por filas. Observar que en el metodo por columnas necesitará las habilidades del item b) del ejercicio III) mientras que en el método por filas necesitará las habilidades del punto a) de ese ejercicio.**

g) $(1, -2, 2); (2, 1, 3)$

h) $(1, -1, 2); (-1, 0, 3); (0, -1, 5); (3, 2, 2)$

i) $(1, -2, 4, -1); (2, -3, 7, -1); (-1, 4, -6, 3); (1, -3, 5, -2)$

j) $(1, -1, 2, 1); (-1, 2, 1, 2); (-1, 3, -3, 1); (2, 1, 2, 6)$

k$(1, 2, -1, 0); (4, 8, -4, -3); (0, 1, 3, 4); (2, 5, 1, 4)$;

XVIII): Encontrar una base y caracterización del subespacio S de $\mathbb{Z}_7^5$ generado por $\{(5,1,1,3,4),(2,2,3,2,4),(4,1,2,6,0),(2,2,0,1,4),(2,6,1,6,3)\}$.

XIX): En el ejercicio 2)e) del practico 3 se vio que el conjunto $V = \mathbb{R}^3$ con las operaciones: $(x,y,z) \oplus (x',y',z') = (x+x', y+y'-1, z+z')$ y $c \odot (x,y,z) = (cx, cy+1-c, cz)$ es un espacio vectorial.

a) ¿Son los vectores $(2,-1,0);(1,-1,1);(-1,5,-3)$ LI en V?

b) Probar que $\{(1,0,0),(0,0,0),(0,0,1)\}$ es una base de V. (observación: el $(0,0,0)$ NO ES el cero de V, por eso puede formar parte de una base).

c) Probar que $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=1\}$ es un SEV de V, y dar una base del mismo.

XX): Considere el conjunto $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ con la suma dada en el penúltimo ejercicio del practico 3. (En ese ejercicio tambien había una multiplicación por escalares, que ignoramos ahora). Defina una multiplicación en ese conjunto por medio de:

$$\begin{aligned}
\clubsuit\alpha = \alpha\clubsuit &= \clubsuit \quad (\alpha = \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit)\\
\spadesuit\alpha = \alpha\spadesuit &= \alpha \quad (\alpha = \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit)\\
\heartsuit\diamondsuit = \diamondsuit\heartsuit &= \spadesuit\\
\heartsuit\heartsuit &= \diamondsuit\\
\diamondsuit\diamondsuit &= \heartsuit
\end{aligned}$$

i) Probar que con esas operaciones, ese conjunto es un CUERPO, que denotaremos como el cuerpo $\mathbb{K}_4$.

ii) En cada caso, caracterizar el subespacio de $\mathbb{K}_4^3$ generado por los vectores dados, y dar una base y dimension:

a) $\{(\clubsuit,\heartsuit,\diamondsuit);(\heartsuit,\heartsuit,\diamondsuit),(\diamondsuit,\diamondsuit,\spadesuit)\}$. b) $\{(\spadesuit,\spadesuit,\spadesuit),(\spadesuit,\clubsuit,\diamondsuit),(\spadesuit,\heartsuit,\clubsuit)\}$

XXI): (generalización del ejercicio IV) Supongamos que $\mathbb{K}$ y $\mathbb{F}$ son cuerpos tales que $\mathbb{F}$ es subcuerpo de $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}$ puede entonces ser mirado como un $\mathbb{F}$-EV. Supongamos que $\mathbb{K}$ tiene dimensión finita mirado como $\mathbb{F}$-EV. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, (por lo tanto, tambien se lo puede ver como un $\mathbb{F}$-EV). Probar que entonces V tiene dimensión finita mirado como $\mathbb{K}$-EV si y solo si V tiene dimensión finita mirado como $\mathbb{F}$-EV y en ese caso:

$$\dim_{\mathbb{F}} V = (\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{K}).(\dim_{\mathbb{K}} V)$$

(por ejemplo, la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-EV es $2n$, como se ve en el ejercicio IV) .