Practico 5 de Algebra II/Algebra-2010

EI: ejercicio importante. VIE: Very important exercise

La numeración de los ejercicios no es la usual. Descifrarla. :)

1) (VIE) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, caracterizar mediante ecuaciones el Nu T y la Imagen de T, dar sus dimension y una base de cada uno. Verificar que en todos los casos la dimension del nucleo mas la dimension de la imagen es igual a la dimension del espacio de salida. Decidir ademas cuales de los siguientes vectores estan en el nucleo o en la imagen: $(-1,1,1),(1,2,-1),(3,1,1),(1,1,2),(1,1,-3)$.

1) $T_1 : I\!R^2 \mapsto I\!R^3$ dada por $T_1(x,y) = (x-y, x+y, 2x+3y)$.

2) $T_2 : I\!R^3 \mapsto I\!R^2$ dada por: $T_2(x,y,z) = (x-y+z, -2x+2y-2z)$

3) $T_3 : I\!R^3 \mapsto I\!R^3$ dada por: $T_3(x,y,z) = (-x+2y+z, 2x-4y-2z, -3x+6y+3z)$

4) $T_4 : I\!R^3 \mapsto I\!R^3$ dada por: $T_4(x,y,z) = (3x-2y-z, 7x-5y-3z, -x-z)$.

5) $T_5 : I\!R^3 \mapsto I\!R^3$ dada por: $T_5(x,y,z) = (x-y+2z, 3x+y+4z, 5x-y+8z)$.

6) $T_6 : I\!R^4 \mapsto I\!R^3$ dada por:
$T(x,y,z,w) = (x+2y+3z+4w, 3x+2y+z+4w, x-2y-5z-4w)$

2) (EI) En cada caso, sea W el espacio de matrices generado por G. Describir explicitamente el espacio W, y hallar una base del mismo y su dimension. Ademas, de las matrices del conjunto *test*, decidir cuales de ellas estan en W.

$$a)\ G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$test = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$b)\ G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$test = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 2^{35} \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \right\}$$

$$c)\ G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$test = \left\{ \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \pi & \frac{38}{15} \\ \frac{312456}{302178} & \int_0^1 \frac{1+e^x}{\ln(x^2+\sqrt{x})} dx \end{bmatrix} \right\}$$

3) (EI) Encuentre una base y caracterización para el espacio generado por los polinomios $x^2+2x-1, 2x^2+x+2, 4x^2+5x, x^2+5x-5$.

4) Encuentre la dimensión del espacio generado por los polinomios
$x^3 + 2x^2 - x, 4x^3 + 8x^2 - 4x - 3, x^2 + 3x + 4, 2x^3 + 5x^2 + x + 4$

5) Sea $g \in C^1[0,1]$ y sea $T : C^1[0,1] \mapsto C[0,1]$ dada por $T(f) = (fg)'$.

a) Probar que T es lineal y hallar el nucleo de T.

b) Describir explicitamente el nucleo en los casos $g(x) = e^x$ y $g(x) = x$ y hallar su dimensión. (nota: la dimensión es distinta en ambos casos)

6) Sea T la transformación lineal en $\mathbb{C}^3$ tal que $T(e_1) = (1,0,i)$, $T(e_2) = (0,1,1)$ $T(e_3) = (i,1,0)$ ¿Es T inversible?

30) (EI) En el teórico probamos que si $A \sim B$ entonces un subconjunto de las filas de A es LI sii el correspondiente subconjunto de columnas de B lo es.

a) Usar esto para extraer una base de cada conjunto generador. (la base debe estar formada por elementos del conjunto dado. El conjunto genera algun SEV).

i) $\{(1,1,2),(1,1,1),(1,1,4),(5,5,7),(1,2,3),(3,4,9)\}$

ii) $\{1 + x + 2x^2 + x^3, 1 - x + 3x^2 - x^3, 1 + 3x + x^2 + 3x^3, 2 - x + x^2 + x^3, 5 + 2x + 6x^2 + 4x^3, 5x + 2x^2 + 3x^3\}$

b) Usar lo probado en el teórico para completar los siguientes conjuntos LI a una base del espacio dado:

i)$\{(1,0,-1,0),(1,1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

ii) $\{1 + x^2 + x^3 + x^5, 1 + x + 2x^3 + x^4 - 3x^5\} \subseteq$ polinomios de grado ≤ 5

31) (EI) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, caracterizar mediante ecuaciones el Nu T y la Imagen de T, dar sus dimension y una base de cada uno. Verificar que en todos los casos la dimension del nucleo mas la dimension de la imagen es igual a la dimension del espacio de salida.

i) T :(polinomios de grado ≤ 2) $\mapsto C[0,1]$ dada por:
$T(ax^2 + bx + c) = (b-a)e^x + (c-a)e^{2x} + (b-c)e^{3x}$.

ii) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \mapsto$(polinomios de grado ≤ 5) dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-b)x^5 + (c+d)x^4 + (a+b)x^3 + (c+d)x^2 + (a+2b+3c+3d)x + \\ + 7a - 8b + 5c + 5d$$

iii) $T : I\!R^{2\times 2} \mapsto I\!R^{2\times 2}$ dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x+3y-2z+w & 7x-6y+2z-w \\ -2x+6y-4z+2w & -11x+13y-6z+3w \end{bmatrix}$$

32) (EI) Sea $B = \{(1,-2,1);(2,-3,3);(-2,2,-3)\}$

a) Probar que B es una base de $I\!R^3$.

b) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}$ (la base canonica) a $\mathcal{B}$.

d) Hallar las coordenadas, respecto de $\mathcal{B}$, de los vectores $(1,0,1)$ y $(-1,2,1)$.

33) (EI) Sea $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right\}$

a) Probar que B es una base de $M_{2\times 2}(I\!R)$.

b) Sea $\mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$. Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

c) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

d) Hallar las coordenadas, respecto de $\mathcal{B}$, de las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

34) (EI) a) Para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio 1), dar su matriz respecto de las bases canonicas de los $I\!R^n$ que correspondan.

b) Repetir pero ahora tomando las bases ordenadas $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,0)\}$ de $I\!R^3$, y cuando corresponda, la base ordenada $\{(1,1),(1,2)\}$ de $I\!R^2$.

35) (EI) Sea T la transformación de los polinomios de grado ≤ 2 en los polinomios de grado ≤ 1 definida por $T(ax^2+bx+c) = (a+b)x + 2c - a$.

a) Si $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$ (en ese orden) y $\mathcal{B}' = \{x, 1\}$ (en ese orden), ¿Cuál es la matriz respecto del par $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$?.

b) Si $\mathcal{B} = \{x^2+1, x^2+x+1, x^2\}$ (en ese orden) y $\mathcal{B}' = \{1, x\}$ (en ese orden) ¿Cuál es la matriz respecto de las bases ordenadas $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$?

36) Sea T una transformación lineal en $\mathbb{C}^2$ definida como $T(x_1,x_2) = (x_1, 0)$. Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$, y $\mathcal{B}'$ la base ordenada $\{(1,i),(-i,2)\}$

a) ¿Cuál es la matriz de T respecto del par $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$?

b) ¿Cuál es la matriz de T respecto del par $\mathcal{B}', \mathcal{B}$?

c) ¿Cuál es la matriz de T respecto de $\mathcal{B}'$?

d) ¿Cuál es la matriz de T respecto de $\mathcal{B}$?

20) (EI) Probar que el siguiente operador lineal T en $\mathbb{R}^3$ es un isomorfismo y calcular su inversa: $T(x, y, z) = (4z - y, 3x + y - z, 2x + y - z)$.

21) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, S un conjunto no vacio y $W = V^S$. Ud. probó en el ejercicio 4 del practico 3 que W es un espacio vectorial.
a) Sea $x_0 \in S$ y sea $T : W \mapsto V$ dada por $T(f) = f(x_0)$. Probar que T es lineal.
b) Sea $v \in V$ y sea $T : \mathbb{K} \mapsto V$ dada por $T(k) = kv$. Probar que T es lineal.
c) Sea $x_0 \in S$, $v \in V$ y $T : \mathbb{K}^S \mapsto V$ dada por $T(f) = f(x_0)v$. Probar que T es lineal.

22) (EI) Sea V el subespacio vectorial de $C(\mathbb{R})$ dado por todas los funciones polinomicas de grado menor o igual a 2. Sea $T : V \mapsto V$ dada por:
$$T(p(x)) = p(1) + p(0)x + p(-1)x^2 - 2[(2 + x)p(x)]'.$$
a) Probar que T es lineal. (en un par de lineas. ayuda: ejercicio anterior).
b) Dar la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ donde $\mathcal{B}$ es la base ordenada $\{1, x, x^2\}$.
c) Caracterizar mediante ecuaciones, dar una base y la dimensión del nucleo de T.
d) Idem con la Imagen de T.
e) Dar la matriz de T con respecto a la base ordenada $\{1 + x, 1 + x^2, 3 + x + x^2\}$

23) (EI) Dar una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que su imagen sea al subespacio generado por $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 2)$. Hallar $T(x, y, z)$.

24) (EI) Definir una transformación lineal T de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$, tal que $T(1, -1, 1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1, 1) = (0, 1)$ y hallar $T(x, y, z, w)$. (ayuda: extender $\{(1, -1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$)

25) (EI) a) Definir una transformacion lineal $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que su imagen sea $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \mid y = x - z \text{ y } w = x + z \right\}$ y su nucleo sea $\{(x, y, z) : z = 2x = y\}$ y hallar $T(x, y, z)$.
b) Probar que no existe una transformacion lineal $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que su imagen sea $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \mid y = x - z \text{ y } w = x + z \right\}$ y su nucleo sea $\{(x, y, z) : z = 2x - y\}$.

26) En el ejercicio 1), en los casos $T = T_3$, $T = T_4$ y $T = T_5$ ¿es cierto que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Nu}T \oplus \mathrm{Im}T$? (en al menos uno de los 3 casos la respuesta es si, y en al menos un caso la respuesta es no).

60) Sea V un espacio vectorial y sea T una transformación lineal de V en V.
a) Probar que $\mathrm{Nu}(T) \subseteq \mathrm{Nu}(T^2)$.
b) Probar que $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{Nu}(T^2)$ si y solo si $\mathrm{Nu}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$

61) (EI) Dar la base dual de la base $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ de $I\!R^3$.

62) Sean $\alpha_i \in I\!R^3$ dados por: $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, -2), \alpha_3 = (-1, -1, 0)$.
a) Sea $f \in (I\!R^3)^*$ tal que $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0, f(\alpha_3) = 1$. Hallar $f(a, b, c)$.
b) Dar la base dual de $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$
c) Repetir a) pero ahora con una f tal que $f(\alpha_1) = 1, f(\alpha_2) = -1, f(\alpha_3) = 3$.

63) (EI) a) Sea $T : I\!R^3 \mapsto I\!R^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ y $f \in (I\!R^2)^*$ dada por $f(x, y) = 2x - 3y$. Sea $g \in (I\!R^3)^*$ dada por $g = T^t f$. Hallar $g(x, y, z)$.
b) Repetir tomando ahora $T(x, y, z) = (x, 0)$ y $f(x, y) = x + y$.

Mas ejercicios

64) En el ejercicio 1), hallar la composicion $T_2 \circ T_1$. Verificar que la matriz de $T_2 \circ T_1$ respecto de las bases canonicas es el producto de las matrices de T_1 y T_2. Repetir con $T_1 \circ T_2$, $T_4 \circ T_3$ y con las otras que quiera y pueda hasta que se canse. Haga al menos uno con respecto a una base no canonica.

65) Sea $V = I\!R^{n\times n}$ y sea $A \in V$ una matriz fija. Sean L_A y T_A las aplicaciones de V en V definidas por $L_A(B) = AB$ y $T_A(B) = AB - BA$. Se vio en el teórico que ambas son transformaciones lineales.
a) Demostrar que $\mathrm{Nu}(L_A) = V$ si y sólo si $A = 0$.
b) ¿Es cierto a) para la transformación T_A?
c) Hallar $\{A \in V : I \in \mathrm{Im}(L_A)\}$ y $\{A \in V : I \in \mathrm{Im}(T_A)\}$ (nota: el primero es fácil, el segundo requiere pensar y algunos pueden decir que es engañoso).

66) En los siguientes items, escriba (x, y, z) en terminos de la base ordenada dada:
a) $\{(1, 0, -1); (-1, 1, 0); (0, 1, 1)\}$ b) $\{(2, 1, 3); (-1, 4, 5); (3, -2, -4)\}$

40) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea T una transformación lineal de V

en V. Probar que si n es impar entonces $\mathrm{Nu}T \neq \mathrm{Im}T$. Dar un ejemplo (con n par, obvio) de una $T : V \mapsto V$ tal que $\mathrm{Nu}T = \mathrm{Im}T$. ¿Es capaz de dar, para cada espacio vectorial de dimension par, un ejemplo?

41) Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $I\!K$ y sea U un isomorfismo de V en W. Probar que $L : L(V,V) \mapsto L(W,W)$ dada por $L(T) = UTU^{-1}$ es un isomorfismo.

42) Sea $B = \{(0,1,-2,0); (1,-1,2,1); (0,-2,3,3); (2,2,-2,-3)\}$

a) Probar que B es una base de $I\!R^4$.

b) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ (mirada como base ordenada) a la base canonica $\mathcal{C}$.

c) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

d) Hallar las coordenadas, respecto de $\mathcal{B}$, de los vectores $(1,1,1,1)$ y $(-1,0,1,0)$.

43) Escriba el polinomio $2x^3 + 5x^2 - x + 6$ como combinacion lineal de los polinomios: $x^3 - x^2 + x$; $2x^3 + 3x^2 + 1$; $-x^2 + x$; $-2x + 4$.

44) Definir una transformación lineal $T : I\!R^{2\times 2} \mapsto C[0,1]$ tal que : $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = e^x$, $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \cos x$, $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \int_0^x e^{t^2} dt$ y hallar $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right)$.

45) a) Sea V un E.V. de dimensión **finita** y sea T un operador lineal en V.

Probar que si $\dim(\mathrm{Im}\ (T^2)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ entonces $V = \mathrm{Nu}T \oplus \mathrm{Im}T$.

b) Dar un contraejemplo cuando V no es de dimension finita.

46) Sean V, W, U espacios vectoriales de dimensión finita tales que existen transformaciones lineales $T : V \mapsto W$ no singular y $L : W \mapsto U$ suryectiva tales que $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Nu}(L)$. Probar que $W \simeq V \times U$ (Ayuda: Rango-nulidad).

50) Sean V y W espacios vectoriales de dimension finita. Probar que si $T : V \mapsto W$ es un isomorfismo, entonces $T^t : W^* \mapsto V^*$ es un isomorfismo

51) Sea $T : I\!R^2 \mapsto I\!R^3$ dada por $T(x,y) = (x - y, 0, x + y)$ y $f \in (I\!R^3)^*$ dada por $f(x,y,z) = 2x - 3y - z$. Sea $g \in (I\!R^2)^*$ dada por $g = T^t f$. Hallar $g(x,y)$.

52) Sea V el conjunto de las funciones polinomicas de $I\!R$ en $I\!R$ de grado ≤ 2. Sean $f_i \in V^*$ dadas por $f_i(p) = \int_0^i p(x)dx$. Probar que $\{f_1, f_2, f_{-1}\}$ es una base de V^*.

53) Sea V un espacio vectorial sobre $I\!R$ y sean $f, g \in V^*$ tales que $fg \in V^*$. Probar que $f = 0$ o $g = 0$.

54) En el ejercicio 2)e) del practico 3 se vio que el conjunto $V = I\!R^3$ con las operaciones: $(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y' - 1, z + z')$ y $c \odot (x, y, z) = (cx, cy + 1 - c, cz)$ es un espacio vectorial, y en el ejercicio XIX del practico 4) se vio que $\{(1, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de V.

a) Dado un vector $(x, y, z) \in V$, dar sus coordenadas respecto de esa base.

b) Sea $T : I\!R^3 \mapsto V$ dada por $T(x, y, z) = (x + y - z, 3x - z + 1, 5x - y - z)$. Probar que T es una transformacion lineal. ($I\!R^3$ con la estructura usual).

c) Caracterizar el NuT e ImT, dar una base de cada uno y sus dimensiones.

d) ¿Es $I : I\!R^3 \mapsto V$ lineal?

55) En el ejercicio XI) del practico 4) definimos un cuerpo $I\!K_4$. Sea $T : I\!K_4^{2\times 2} \mapsto I\!K_4^{3\times 1}$ dada por:

$$T \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \spadesuit x + \diamondsuit y + \heartsuit z + \spadesuit w \\ \diamondsuit x + \heartsuit y + \spadesuit z + \diamondsuit w \\ \diamondsuit x + \spadesuit y + \clubsuit z + \spadesuit w \end{bmatrix}$$

Caracterizar el nucleo e imagen de T por ecuaciones, y dar una base y dimensiones de ambos.

56) Sea $V = I\!K^{n\times n}$ y sea $W = \{f \in V^* : f(AB) = f(BA) \forall A, B \in V\}$. Probar que $W \simeq I\!K$.