Álgebra II / Álgebra
Práctico 6 - Año 2010

1. Calcular el determinante en cada caso (el cuerpo es $\mathbb{R}$):

$$a)\begin{bmatrix}4&7\\5&3\end{bmatrix}\quad b)\begin{bmatrix}-1&2&1\\3&-1&5\\2&-4&-3\end{bmatrix}\quad c)\begin{bmatrix}-3&2&4\\1&-1&2\\-1&4&0\end{bmatrix}\quad d)\begin{bmatrix}2&-1&3\\4&0&6\\5&-2&3\end{bmatrix}\quad e)\begin{bmatrix}-2&3&2&-6\\0&4&4&-5\\5&-6&-3&2\\-3&7&0&0\end{bmatrix}$$

$$f)\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&0&3&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}\quad g)\begin{bmatrix}3&-1&2&1\\4&3&1&-2\\-1&0&2&3\\6&2&5&2\end{bmatrix}\quad h)\begin{bmatrix}1&-1&2&0&0\\3&1&4&0&0\\2&-1&5&0&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&-1&4\end{bmatrix}\quad i)\begin{bmatrix}1&-1&0&4&1\\3&-4&-1&12&0\\3&2&6&5&1\\0&0&4&-1&13\\3&2&1&-1&1\end{bmatrix}$$

2. Probar que si una matriz cuadrada con elementos todos unos y ceros es inversible en $\mathbb{Z}_2$, entonces es inversible en $\mathbb{R}$. ¿Vale la recíproca?

3. Sea V el conjunto de los polinomios de grado a lo sumo n, y sea $T : V \mapsto V$ la tranformación lineal $T(p(x)) = (xp(x))'$. Calcular el determinante de T.

4. Sea $B \in K^{n\times n}$ y sea $T : K^{n\times n} \mapsto K^{n\times n}$ dada por $T(A) = AB - BA$. Calcular $\det T$.

5. Sea $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sea $T : V \mapsto V$ la transformación lineal $T(A) = A^t$. Calcular el determinante de T.

6. Una matriz $n \times n$ A se dice *antisimétrica* si $A^t = -A$, *ortogonal* si $AA^t = I$ y *nilpotente* ya fue definido.
   a) Probar que si A es nilpotente o antisimétrica con n impar, entonces $\det A = 0$, y que si es ortogonal entonces $\det A = \pm 1$.
   b) Para cada n par, dar una matriz A antisimétrica $n \times n$ tal que $\det A \neq 0$.

7. Probar que $\det A^t = \det A$.

8. Sin hacer cuentas, hallar una base del espacio de soluciones de la ecuación $\det \begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\1&1&2\\-1&0&3\end{bmatrix} = 0$

9. Probar que

$$\det \begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_1 & x_2 & \dots & 1+x_n \end{bmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

10. Probar que el determinante de la matriz de Vandermonde $V_{i,j} = x_i^{j-1}$ es $\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k>i}(x_k - x_i)$

    [Ayuda para una prueba: primero, con el uno de la primera fila, eliminar los otros unos; luego se puede restar, en orden, x_1 veces la columna $n-1$ de la columna n, x_1 veces la columna $n-2$ de la columna $n-1$, y así hasta restar x_1 veces la columna 1 de la columna 2. La matriz que queda tiene un uno en el lugar $(1,1)$ y el resto de sus elementos son nulos en la primera fila y en la primera columna. Ahora se puede usar que el determinante es lineal en las filas y aplicar el principio de inducción.]

11. Usar la matriz adjunta para calcular la inversa en cada caso.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -\operatorname{sen}(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}$$

12. Usar la *regla de Cramer* para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sobre el cuerpo de los números racionales:

$$\text{a)} \begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-6y-z=0 \\ 3x+4y+2z=0 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 3x-2y=7 \\ 3y-2z=6 \\ 3z-2x=-1 \end{cases}$$

13. Hallar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, si

    a) $\mathbf{u} = (1,2,3)$ y $\mathbf{v} = (-2,3,1)$ b) $\mathbf{u} = (-4,1,5)$ y $\mathbf{v} = (3,-2,2)$.

14. Sea A una matriz $n \times n$ sobre un cuerpo K. Supongamos que A es de la forma

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}$$

donde cada A_i es una matriz de tamaño $r_i \times r_i$. Probar que $\det A = (\det A_1)(\det A_2)\dots(\det A_k)$.