Algebra II y Algebra lineal Práctico n^{o}7-2010

1. Sea $A \in I\!K^{2\times 2}$. Pruebe que el polinomio característico de A es $x^2 - tr(A)x + \det(A)$.

2. Hallar los autovalores, autovectores y autoespacios de las siguientes matrices A, y decidir si son semejantes a una matriz diagonal D. En caso que lo sean, dar una matriz P tal que $D = P^{-1}AP$. Considerarlas primero como matrices en $I\!R$ y luego en $\mathbb{C}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales $T : I\!R^n \mapsto I\!R^n$ ($n = 2, 3$,etc), hallar sus autovalores, y para cada autovalor, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Decidir en cada caso si la transformacion lineal es o no diagonalizable.

a) $T(x, y) = (y, 0)$ b) $T(x, y, z, w) = (2x - y, x + 4y, z + 3w, z - w)$.
c) $T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + 2y - z, 2x + y - z)$.
d) $T(x, y, z, u, v) = (3x + 2y + 4z, 2x + 2z, 4x + 2y + 3z, 3u + v, 2u + 2v)$
e) $T(x, y, z, u) = (-5x - 5y - 9z + 7u, 8x + 9y + 18z - 9u, -2x - 3y - 7z + 4u, 2u)$

4. Probar que una matriz 2×2 no inversible tiene autovalores 0 y tr(A). (ver ej.1)

5. a) Probar que el término independiente del polinomio característico de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es $(-1)^n \det(A)$ (esto es muy fácil) y que el coeficiente del término de grado $n - 1$ es $-tr(A)$. (esto hay que pensarlo un poco mas)

b) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que si $c_1, \ldots, c_n$ son los autovalores de A (contados con la multiplicidad repetida), entonces $\det(A) = c_1 \ldots c_n$ y $\mathrm{tr}(A) = c_1 + c_2 + \cdots c_n$. (si A es diagonalizable esto es trivial pero igual sale fácil incluso en el caso general usando a))

6. Sean $A, B \in I\!K^{n\times n}$. Probar que AB y BA tienen los mismos autovalores.

(Ayuda: Primero, ver que 0 es autovalor de AB sii lo es de BA. Luego, observar que si $ABv = cv$, entonces $BA(Bv) = cBv$).

7. Probar que $T : C[0, 1] \mapsto C[0, 1]$ dada por $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$ no tiene autovalores.

8. Probar que hay una única transformación lineal $T : I\!R^2 \mapsto I\!R^2$ tal que $(1, 1)$ es autovector correspondiente a 2 y $(-2, 1)$ es autovector asociado a 1. Para tal T, calcular $\det T$ y dar la matriz de T relativa a la base canónica.