Álgebra II y Álgebra lineal. Práctico n^o 8. 2010

1. Encuentre $W^{\perp}$ con el producto interno canónico de $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$, según corresponda, en cada uno de los siguientes casos, caracterizandolo mediante ecuaciones paramétricas y dando una base y dimensión.

a) $W = gen\{(1,1,1),(1,-1,0)\}$ b) $W = gen\{(1,1,2),(1,2,3)\}$
c) $W = gen\{(1,-1,2)\}$ d) $W = gen\{(1,0,-2,1),(1,1,3,1),(1,-1,1,1)\}$
e) $W = gen\{(1,1,1,1)\}$. f) $W = gen\{(1,1,1,1),(1,2,3,0)\}$
g) $W = gen\{(1,1,1,1,1),(0,0,1,2,3)\}$. h) $W = gen\{(0,0,0,1,1),(0,0,1,2,3)\}$.

2. En este ejercicio los productos internos son los canónicos.

a) Aplicarle el proceso de Gram-Schmidt a la base ordenada $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ para obtener una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
b) Usando el procedimiento de Gram-Schmidt, construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de la base $\{(1,1,1),(0,1,0),(-1,-1,1)\}$
c) Obtener las coordenas del vector $(2,-1,3)$ respecto de la bases obtenidas en a) y b). (deberia demorar muy poco en esto, si invierte alguna matriz lo hizo mal).
d) Hallar una base ortonormal de $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$
e) Hallar una base ortogonal de $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = x + 2y - z\}$

3. En $\mathbb{R}^{n\times n}$, con el producto interno $< A, B >= tr(AB^t)$, encontrar el espacio ortogonal al subespacio de matrices diagonales.

4. (tipico de final)(los $\perp$ abajo son respecto al canónico).
Sea $T : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^4$ dada por:

$$T(x,y,z,u,v) = (x + z + 3u + 3v\, ,\, x + y + 3u + 2v\, ,\, y + z + 2u + 3v\, ,\, x + y + z + 4u + 4v)$$

i) Hallar la matriz de T en la base canónica.

ii) Hallar la Im T, dar una base de la misma y su dimensión.

iii) Hallar el Nu T, dar una base del mismo y su dimensión.

iv) Hallar (Nu $T)^{\perp}$, dar una base y su dimensión.

v) Hallar (Im $T)^{\perp}$, dar una base y su dimensión.

vi) Decir cuales de los siguientes vectores estan en Im T, Nu T, (Im $T)^{\perp}$ ó (Nu $T)^{\perp}$: (1,2,3,3), (1,1,1,-6), (-3,-2,-3,1,1), (1,2,1,5,5), (1,1,1,4,3).

5. Decidir si el siguiente es un producto interno en $I\!R^2$:
$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$

Extras:

6. Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores:
a) $(2, 2)$ y $(1, 0)$ b) $(-2, 2)$ y $(3, -3)$ c) $(\cos(\phi), \text{sen }(\phi))$ y $(\cos(\phi + \rho), \text{sen }(\phi + \rho))$

7. Pruebe que si V y W son subespacios de algun otro EV mas grande, entonces $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$

8. Sea $W = gen\{(1, 0, i), (2, 1, 1 + i)$. Hallar una base ON de W con el producto interno canónico de $\mathbb{C}^3$.

9. Sea V el espacio de polinomios de grado ≤ 3 con el producto interno $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$. Encontrar $W^\perp$ para los siguientes subespacios W
a) $W = gen\{1\}$ b) $W = gen\{1, x\}$.

10. En $C[-1, 1]$, tomar el producto interno $< f, g >= \int_{-1}^1 f(t)g(t)\, dx$. Si W es el subsespacio de las funciones impares, hallar $W^\perp$.

11. Aplicarle Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ del conjunto de polinomios de grado ≤ 2, usando el producto interno $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$.

12. Con el producto interno $< f, g >= \int_0^\pi f(x)g(x)dx$ hallar el angulo entre sen(x) y $\cos(x)$.

13. Hallar un producto interno $<, >$ en $I\!R^2$ tal que $< (1, 0), (0, 1) >= 2$.

14.

a) Sean V y W dos espacios vectoriales con dim V =dim $W < +\infty$, y sea $[,]$ un producto interno en V y $<, >$ un producto interno en W. Sea $T : V \mapsto W$ una transformación lineal tal que $< Tx, Ty >= [x, y]$ para todo $x, y \in V$.
Probar que T es un isomorfismo.
b) Sea $V = C[0, 1]$, y sea $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$ y $[f, g] = \int_0^1 f(t)g(t)t^2\, dt$. Ya sabe que $<, >$ es producto interno. Probar que $[,]$ tambien es producto interno.
c) Con el V de b), sea $T : V \mapsto V$ la transformación: $T(f)(t) = tf(t)$. Probar que T es lineal, pero que no es isomorfismo.
d) Probar que $< Tf, Tg >= [f, g]$.
e) ¿Por que b), c) y d) no contradicen a)?

15. Se define una k-variedad lineal en $I\!R^n$ como un conjunto de la forma $\alpha + W$, donde W es un subespacio de dimensión k. Una recta es una 1-variedad lineal y un plano es una 2-variedad lineal.

a)Probar que para toda recta r existen vectores α, β tal que $r = \{\gamma \in I\!R^n : \gamma = \alpha + t\beta, t \in I\!R\}$ (llamada ecuación vectorial o paramétrica).

b) Probar que para toda $(n-1)$-variedad lineal H en $I\!R^n$ existen vectores $\alpha, \nu \in I\!R^n$, $\nu \neq 0$ y $a_1, ..., a_{n+1} \in I\!R$ tales que $H = \{\gamma \in I\!R^n : < \gamma - \alpha, \nu >= 0\} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!R^2 : a_1x_1 + \cdots a_nx_n + a_{n+1} = 0\}$. La primera se llama la ecuación normal y la segunda la ecuación implicita. ν se llama el vector normal.

c) Concluir que toda recta en $I\!R^2$ tiene ecuación normal e implícita, al igual que todo plano en $I\!R^3$. ¿A qué le llamaría una ecuación vectorial o parametrica de un plano?

d) Describir parametrica e implicitamente:

.-La recta de $I\!R^2$ que pasa por $(2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

.-La recta de $I\!R^3$ que pasa por $(-3, 0, 2)$ y es paralela al $(0, 3, -2)$.

.-El plano de $I\!R^3$ que pasa por $(0, 1, 6), (1, -1, 3), (2, -2, 2)$.

.-El plano de $I\!R^3$ que pasa por $(1, 2, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 1, -1), (3, -2, 1)$.