# Práctico 5

**1.** Decir en qué puntos son continuas las siguientes funciones.
(a) $f(x) = [x]$;
(b) $f(x) = x - [x]$;
(c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$;
(d) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$.

**2.** ¿Para cuáles de las siguientes funciones $f$ existe una función continua $F$, definida en toda la recta real, que extienda a $f$?

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}; \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{|x|}{x} \qquad \text{(c) } f(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$$

**3.** Decir en qué puntos son continuas las siguientes funciones.

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}(x), & x \geq 0; \\ \frac{x+1}{x-1}, & x < 0. \end{cases}; \quad \text{(b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}, & x > 0; \\ 5, & x = 0; \\ \frac{5x^2+1}{x^2+1}, & x < 0. \end{cases}$$

**4.** (a) Probar que si $|f(x)| \leq |x|$, entonces $f$ es continua en 0.
(b) Probar que si $|f(x)| \leq |g(x)|$, $g$ es continua en 0 y $g(0) = 0$, entonces $f$ es continua en 0.

**5.** Probar que si $f$ es continua en $a$, entonces también son continuas en $a$ $|f|$, $f^+ = \max(f, 0)$ y $f^- = \max(-f, 0)$.

**6.** (a) Definir una función que no sea continua en ningún punto, pero que $|f|$ sea continua en todo punto.
(b) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.
(c) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ y en 0, pero continua en todos los demás puntos.

**7.** (a) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que si $f|_{\mathbb{Q}} \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$.
(b) Si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y coinciden en $\mathbb{Q}$, entonces son iguales.

**8.** (a) Mostrar que si $f$ en continua en $[a, b]$, entonces existe una extensión continua $g$ definida en todo $\mathbb{R}$.
(b) Mostrar que la conclusión del punto anterior es falsa si cambiamos $[a, b]$ por $(a, b)$.
(c) Supongamos que $f$ es continua en $[a, b]$ y que $g$ es continua en $[b, c]$. Probar que si $f(b) = g(b)$, entonces la función $h$ en $[a, c]$, con $h = f$ en $[a, b]$ y $h = g$ en $[b, c]$ es continua.

**9.** Para cada una de las siguientes funciones decir si están acotadas superior o inferiormente y si alcanzan sus valores máximos o mínimos.
(a) $f(x) = x^2$ en: (i) $(-1, 1)$; (ii) $\mathbb{R}$; (iii) $[0, \infty)$; (iv) $(-1, 2]$.
(b) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$.
(c) $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(x)$ en: (i) $[k\pi, (k + 1)\pi]$, $k$ entero; (ii) $(k\pi, (k + 1)\pi)$, $k$ entero.

**10.** Sea $p(x) = x^5 + x + 1$.
(a) Probar que $p$ es suryectiva sobre $\mathbb{R}$.
(b) Encontrar un $n$, tal que $p$ tenga un cero en $[-n, n]$.
(c) Encontrar $a$ y $b$ tales que $p$ tenga un cero en $[a, b]$.

**11.** Sea $f$ una función continua y supongamos que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué se puede decir de $f$?

**12.** (a) Si $f$ y $g$ son dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, entonces existe un $x$ en $(a, b)$ tal que $f(x) = g(x)$.
(b) Mostrar que la ecuación $\operatorname{sen}(x) = x + 1$, tiene al menos una solución. Graficar las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $x + 1$.
(c) Mostrar que existe un $x$ entre 0 y $\pi/2$ tal que $x^3 \operatorname{sen}^7(x) = 2$.

**13.** Sea $f$ definida y continua en todo $\mathbb{R}$. Supongamos que $f$ es siempre positiva y que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Probar que $f$ alcanza un máximo.

**14.** Decir si es Verdadero o Falso, justificar.
(a) Sea $f$ continua y acotada en $\mathbb{R}$ entonces $f$ alcanza un mínimo.
(b) Si $|f|$ es continua en $a$ entonces entonces $f$ es continua en $a$.
(c) Existe un número que es exactamente una unidad mayor que su cubo.

**15.** Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$. Mostrar que si $f$ es continua, entonces tiene un punto fijo, esto es, existe un $x$ tal que $f(x) = x$.

**16.** (a) ¿Cuántas funciones $f$ continuas hay tales que $f(x)^2 = x^2$ para todo $x$?
(b) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta anterior si no exigimos continuidad?
(c) Sean $f$ y $g$ continuas y nunca nulas y supongamos que $f^2 = g^2$, probar que entonces $f = g$ o $f = -g$.
(d) ¿Qué sucede si no suponemos que $f$ y $g$ sean nunca nulas?