Análisis Funcional I – 2011
Práctico 5

(1) (a) Sea $\mathfrak{N}$ normado. Probar que la bola unidad (abierta o cerrada) es convexa.
(b) Consideremos $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$. Si $1 < p < \infty$ la bola unidad es estrictamente convexa (Ayuda: probar que existen f y g en L^p tales que $||f|| = 1$ y $||g|| = 1$ tal que $\frac{1}{2}||f|| + \frac{1}{2}||g|| < 1$). Esto es falso para $p = 1$ o $p = \infty$.

(2) (a) El Teorema de Banach-Steinhauss <u>no vale</u> cuando $\mathfrak{N}$ no es completo. Considerar
$$\mathfrak{N} = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty},\ x_i = 0 \text{ salvo un número finito de i's }\}.$$
$\mathfrak{N}$ es un normado con la $||\ ||_1$, $||\ ||_2$ o $||\ ||_\infty$.
Sea $A_n(x) = nx_n$. Probar
(i) $A_n \in \mathfrak{N}' = \mathcal{B}(\mathfrak{N}, \mathbb{K})$.
(ii) $\sup_n |A_n(x)| < \infty$ y $\lim_{n\to\infty} ||A_n|| \to \infty$ (verificarlo con $||\ ||_1$).

(3) Sea $\mathfrak{N}$ un espacio normado.
(a) Probar que para todo $x \neq 0$ en $\mathfrak{N}$ existe $F \in \mathfrak{N}'$ tal que $||F|| = 1$ y $F(x) = ||x||$.
(b) $\mathfrak{N}'$ separa puntos en $\mathfrak{N}$, es decir si $\forall x_1 \neq x_2$ existe $F \in \mathfrak{N}'$ tal que $F(x_1) \neq F(x_2)$.
(c) Probar que para todo $x \in \mathfrak{N}$ existe $\tilde{x} : \mathfrak{N}' \to \mathbb{K}$, definida por $\tilde{x}(F) = F(x)$ lineal y continua, es decir $\tilde{x} \in (\mathfrak{N}')' \doteq \mathfrak{N}'' \doteq$ el bidual de $\mathfrak{N}$. Probar que la aplicación $x \to \tilde{x}$ es lineal e isométrica.

(4) (a) Si S es un subespacio vectorial cerrado de $\mathfrak{N}$, entonces $\mathfrak{N}/S$ es normado con
$$||x + S|| = \inf_{y\in S} ||x + y||.$$
Además si $\mathfrak{N}$ es de Banach entonces $\mathfrak{N}/S$ es de Banach.
(b) Probar que para todo $x \notin S$ existe $F \in \mathfrak{N}'$ tal que $F(x) \neq 0 = F(y)$ para todo $y \in S$.

(5) Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$ espacios de Banach. Sea $A : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ lineal que satisface cada vez que $x_n \to 0$ en $\mathfrak{N}$ y $Ax_n \to y$ en $\mathfrak{M}$ entonces $y = 0$. Probar que A es continua.

(6) Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$, espacios de Banach. Probar que $A \in B(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ es inyectiva y $A(\mathfrak{N})$ es cerrado si y sólo si existe k tal que $||x|| \leq k||Ax||$.

(7) Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$, espacios de Banach. Probar que $A \in B(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ tiene imagen $A(\mathfrak{N})$ cerrada si y sólo si existe k tal que para todo $y \in A(\mathfrak{N})$ existe $x \in \mathfrak{N}$ con $Ax = y$ y $||x|| \leq k||y||$.

(8) Sean $\mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$, espacios de Banach, y sean $A_i : \mathfrak{N}_i \to \mathfrak{N}_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2$ operadores lineales tales que
(a) A_0, A_2, $A_2A_1A_0$, son continuas,
(b) A_0 es sobre,
(c) A_2 es inyectiva.
Probar que A_1 es continua.

(9) Probar que si $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$, son espacios de Banach, el conjunto
$$\{A \in B(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) : A \text{ es inytectivo y } A(\mathfrak{N}) \text{ es cerrado}\}$$
es abierto en $B(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$.

(10) (a) Probar que el si $1 < p < \infty$ entonces $(\ell^p)' = \ell^{p'}$. $(p + p' = pp')$.
(b) Probar que $(\ell^1)' = \ell^\infty$.
(c) Probar que $(C_0)' = \ell^1$.

(11) Sabemos que $f \to \widehat{f}$ de $L^1(S^1) \to C_0$ es lineal, continua e inyectiva. Probar que no es sobre.