Notas de Combinatoria
Daniel Penazzi

El Principio de Adición:

Si se puede realizar una acción A de n formas distintas, y se puede realizar una acción B de m formas distintas, y A y B son excluyentes, entonces el número de formas de realizar la acción "A o B" es $n + m$.

Ejemplo: Supongamos que una adolescente tiene 3 pantalones distintos para ponerse para ir a una fiesta, y además, tiene 4 polleras. Entonces, tendrá un total de 3+4=7 formas distintas de cubrirse las piernas en esa fiesta.

El Principio de Multiplicación:

Si una acción A puede realizarse de n formas distintas, y una accion B de m formas distintas, y A y B son independientes, entonces se puede realizar la acción "A y B" de nm formas distintas.

Ejemplo: Supongamos que la adolescente del ejemplo anterior ha decidido que irá a la fiesta de pantalones, y quiere ahora elegir una blusa de entre las 5 que posee. Ella podrá, entonces, vestirse de 3.5=15 formas distintas.

Estos principios parecen fáciles, y lo son, pero una buena parte de saber contar consiste en saber cuando usar uno y cuando el otro, o cuando ninguno es aplicable. Obviamente, la generalización de los principios a más de dos acciones es trivial.

Veamos algunos ejemplos más:

1) Supongamos que tiramos dos dados, uno blanco con puntos negros, y otro negro con puntos blancos, y queremos saber cuántas posibilidades tenemos. El dado blanco tiene 6 formas distintas de caer, lo mismo el negro y (suponiendo que no hay ningún imán oculto o alguna otra trampa) la caída de un dado no afecta el otro. Por lo tanto, tenemos acciones independientes, y el total de posibilidades es 6.6=36. Ahora bien, supongamos que queremos calcular cuántas formas hay de arrojar los dados de manera tal que la suma de los dos sea 7. Entonces, las acciones NO son independientes y no podemos usar el Principio de Multiplicación. La forma de resolver este problema es la siguente: Las "aciones posibles para el primer dado son que la cara superior indique un "1", un "2", etc. Cada una de estas acciones determina automáticamente que número debe aparecer en el otro dado: si en el blanco aparece un "1", en el negro debo tener un "6"; si un "2", un "5"; etc. Por lo tanto, hay sólo 6 posibilidades.

Similarmente, supongamos que pidiéramos que "no hubiera un doble". En este caso, el número en el dado blanco no determina absolutamente el número del dado negro, pero sí limita sus posibilidades: si sale "1" en el blanco, no puede salir "1" en el negro, por lo tanto el dado negro tiene sólo 5 posibilidades en este caso. Así hay sólo 6.5=30 tiradas del dado sin dobles. Observar que podríamos haber deducido esto también haciendo el siguiente razonamiento: si hubieramos pedido que haya dobles, entonces el dado blanco determinaría el valor del negro (si sale un "1" en el blanco, debe salir "1" en el negro, etc), por lo tanto hay sólo 6 dobles. Así, hay 36-6=30 "no dobles". Muchas veces, un problema combinatorio se resuelve mucho más fácil (o incluso, es la única forma de resolverlo) pensando, como en este caso, en el "complemento", y sustrayendo el número obtenido del total.

2) Veamos un ejemplo donde usamos los dos principios: Supongamos que un estudiante puede formar parte de 3 equipos distintos de volley, de 4 equipos distintos de handball y de 5 equipos distintos de basquet, pero que no le es permitido formar parte de más de dos equipos. ¿Cuántas posibilidades tiene?

Aquí debemos usar primero el Principio de Adición, para dividir el problema en casos excluyentes. En este caso, los casos serían "elige volley y handball", "elige volley y basquet" y "elige basquet y handball". Luego, resolvemos cada caso usando el Principio de Multiplicación, pues el equipo que elija en volley, por ejemplo, no afectará el equipo que elegirá en basquet.

Así, en el primer caso, tenemos 3.4=12 posibilidades, en el segundo 3.5=15 posibilidades, y en el tercer caso, 4.5=20 posibilidades. Aplicando el Principio de Adición, tenemos un total de 12+15+20=47 posibilidades.

Permutaciones

Un permutación de (los elementos de) un conjunto es simplemente un reordenamiento de ellos. Así, una permutación de $\{1, 2, 3\}$ es 123, otra es 312, etc. La pregunta es: ¿Cuántas permutaciones de un conjunto de n elementos existen? Esto se puede responder fácilmente usando el Principio de Multiplicación: Como tenemos n elementos, tenemos entonces n "lugares" o "casillas", donde ubicarlos. Para la primera casilla, tenemos n elementos posibles que podemos ubicar allí. Para la segunda, como ya ubicamos uno, sólo quedan $n-1$ posibilidades. Para la tercera, como ya ubicamos dos elementos, sólo quedan $n-3$ posibilidades, etc. Así, obtenemos:

Proposición 1) El número de permutaciones de un conjunto de n elementos es $n(n-1)(n-2)\ldots 3,2,1$.

Se puede demostrar esto también utilizando el principio de inducción.

Al aparecer tan frecuentemente, el número $n(n-1)(n-2)\ldots 3,2,1$ se le llama el *factorial* de n y se denota $n!$.

Arreglos

Los arreglos son parecidos a las permutaciones, pero hay que ordenar menos elementos. Un arreglo de un conjunto S de n elementos, tomados de r en r, es un ordenamiento de r elementos de S. Denotaremos por $A(n, r)$ la cantidad de arreglos de un conjunto de n elementos tomados de r en r. El cálculo de $A(n, r)$ es muy parecido al de las permutaciones: Como ahora vamos a ordenar sólo r elementos, tenemos sólo r lugares. Como podemos elegir cualquier elemento de S para el primer lugar, tenemos n posibilidades. En el segundo, $n-1$, y así sucesivamente hasta que llenamos los r lugares. Por lo tanto:

Proposición 2) $A(n, r) = n(n-1)\dots(n-r+1)$.

Pruebas Combinatorias y No Combinatorias

Cuando uno quiere ver de cuántas formas se puede realizar algo, existe lo que se llama *pruebas combinatorias* y *pruebas no combinatorias*. La diferencia a veces es sutil, y otras veces es bien clara. Una clara prueba no combinatoria de algo, sería usar alguna identidad algebraica o analítica para llegar a un resultado, mientras que una prueba combinatoria consiste en establecer una biyección entre lo que uno quiere contar y algún otro objeto que sea más fácil de contar.

Veamos un ejemplo sencillo. Supongamos que deseamos saber el número total de subconjuntos de un conjunto dado A. Analicemos antes al problema para casos en que A es pequeño. Supongamos primero que A es el conjunto vacío. El conjunto vacío sólo se tiene a sí mismo como subconjunto, así que el número buscado es 1. Bien, supongamos ahora que A tuviese sólo un elemento, digamos $A = \{a\}$. Dado un subconjunto de A, o bien a pertenece a él, o no, es decir, los subconjuntos posibles son el vacío, y $\{a\}$. El número que buscamos es en este caso 2.

Supongamos ahora que A tiene dos elementos, i.e., $A = \{a; b\}$. Entonces, los subconjuntos posibles son: $\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}$, es decir, el número que buscamos es 4.

Pareciera ser que si A tiene n elementos, el número de subconjuntos es 2^n. Veamos si podemos probar esto:

Una prueba no combinatoria típica sería por inducción:

Sabemos que si $n = 0, 1, 2$, nuestra proposición es cierta. Supongamos que vale para el número natural $n-1$. Sea ahora A un conjunto con n elementos. Escribimos A de la forma $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ y consideramos $B = \{a_1; a_2; \dots; a_{n-1}\}$. Como B tiene $n-1$ elementos, entonces por hipótesis inductiva B tiene 2^{n-1} subconjuntos. Denotemos estos subconjuntos por $C_1; C_2; \dots; C_{2^{n-1}}$. Sea ahora D un subconjunto cualquiera de A. Tenemos dos posibilidades: o $a_n \in D$, o bien $a_n \notin D$. En el segundo caso, resulta que D era en realidad un subconjunto de B, es decir, D es uno de los C_iś. En el primer caso, tomando $E = D \smallsetminus \{a_n\}$, resulta que E es ahora un subconjunto de B, digamos igual a C_i. Pero entonces D es igual a $C_i \cup \{a_n\}$. Así hemos probado que D debe ser algún C_i, o algún C_i unión $\{a_n\}$. Por lo tanto, los subconjuntos de A son $C_1; C_2; \dots; C_{2^{n-1}}; C_1 \cup \{a_n\}; C_2 \cup \{a_n\}; \dots C_{2^{n-1}} \cup \{a_n\}$. Pero esto dice que A tiene $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ subconjuntos.

Veamos ahora una prueba combinatoria: Si $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ y $D \subseteq A$, entonces D queda determinado pos sus elementos, es decir, sólo debemos decir cuáles a_i's están en D y cuáles no. Ahora, para cada a_i, sólo tenemos dos opciones: o está o no está. Como la elección de a_i es independiente de la de a_j, por el Principio de Multiplicación tenemos que hay un total de $2{,}2.\ldots{,}2 = 2^n$ subconjuntos.

Así, hemos probado

Proposición 3) El número de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n.

Como se puede apreciar, la prueba combinatoria es más corta, más fácil y más sencilla de recordar y reproducir que la otra.

Aplicación: en una clase de 20 estudiantes, se hará una salida (voluntaria) en grupo al teatro San Martín. Se desea saber cuántos posibles grupos no vacíos pueden formarse.

Una forma de resolver este problema es a través de una combinación de los Principios de Adición y Multiplicación. Primero dividimos el problema en casos disjuntos: el grupo consiste de un estudiante, el grupo consiste de dos estudiantes, etc. En el primer caso, tenemos 20 posibilidades. En el segundo, tenemos 20 posibilidades de escoger un alumno, y luego tendríamos 19 para escoger el segundo, pero deberíamos dividir por dos, puesto que si primero escogemos a Juan y luego a María, es lo mismo que escoger a María y después a Juan. Claramente los casos con más estudiantes se complican más, y debemos analizar 20 casos distintos. Si usamos en cambio lo anterior, observamos que sólo queremos saber cuántos subconjuntos no vacíos hay en un conjunto de 20 elementos. La respuesta es, entonces, $2^{20} - 1 = 1{,}048{,}755$ posibilidades!!

El ejemplo anterior muestra que a veces podemos no querer calcular el número total de subconjuntos, sino el número total de subconjuntos de un determinado tamaño. Por ejemplo, si se hubiera requerido que el grupo de estudiantes que va al teatro deba tener 12 estudiantes.

Definición: Denotaremos por $\binom{n}{k}$ el número de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n.

Obtenemos fácilmente:

Proposición 4) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Prueba: Puesto que cada $\binom{n}{k}$ es igual a la cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos, y como estamos sumando en k, resulta que la suma de la izquierda es igual a la cantidad total de subconjuntos de un conjunto de n elementos, lo cual hemos visto en la Proposición 3) , es igual a 2^n.

Podemos describir explícitamente estos números:

Proposición 5) $\binom{n}{k} = \frac{A(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Prueba: $A(n,k)$ es igual a la cantidad de arreglos de $\{1,2,\ldots,n\}$ tomados de k en k. Estos arreglos pueden obtenerse escogiendo primero los k elementos que vamos a ordenar (esto se hace en $\binom{n}{k}$ formas) y luego ordenándolos (en $k!$ formas). Por lo tanto, $A(n,k) = \binom{n}{k}k!$, con lo cual obtenemos la primera igualdad. La segunda se obtiene de la sencilla observación $A(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$, que se obtiene directamente de la Proposición 2).

Esta fórmula es la que se obtiene generalmente al principio, y con la cual se prueban la mayoría de las propiedades de los números $\binom{n}{k}$, mediante pruebas algebraicas. Es absolutamente necesario conocerla, para poder brindar un número concreto a la solución de un problema, pero en este curso, sin embargo, obtendremos las propiedades directamente de la definición, mediante pruebas combinatorias en lugar de algebraicas. Esto permite recordarlas mejor, además de ver el "porqué" detrás de una fórmula, que en una prueba algebraica se pierde.

La primera propiedad que veremos es la de simetría:

Proposición 6) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Prueba: $\binom{n}{k}$ denota el número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos. Sea A un tal subconjunto. Entonces, el complemento de A debe tener $n-k$ elementos. Así, cada subconjunto de k elementos determina un único subconjunto de $n-k$ elementos, y por lo tanto $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

La siguiente propiedad es un famoso teorema:

Proposición 7) (Teorema del Binomio) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Prueba: Una prueba normal de este teorema sería por inducción, luego de haber deducido más propiedades de $\binom{n}{k}$, y luego de un tedioso procedimiento algebraico. En cambio, si pensamos a $(x+y)^n$ como el producto $(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$, y lo desarrollamos, veremos que obtenemos una suma de elementos de la forma $x^k y^r$. Observemos que como en el producto $(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$ tenemos n factores, y de cada uno sale a lo sumo un x o a lo sumo un y (pero no ambos), pero además, al menos un x o un y, tenemos que la suma de los exponentes de x e y en cada producto $x^k y^r$ debe ser n, es decir, $r = n-k$. Lo único que queda por verificar es *¿cuántos* factores de la forma $x^k y^{n-k}$ tenemos? (podría, por ejemplo, obtener los k x's de los primeros k factores, o bien de los últimos, o bien del primero y de los últimos $k-1$, etc.).

Si numeramos los factores $(x+y)$ en el producto $(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$, (digamos, factor 1, factor 2, etc), veremos que lo que tenemos que decidir es ¿de cuáles factores obtenemos los x's? (una vez decidido esto, los y's se deben obtener de los otros factores). Entonces, decidir cuántos sumandos de la forma $x^k y^{n-k}$ hay es lo mismo que decidir de cuántas formas podemos escoger k factores $(x+y)$ (de los cuales sacaremos los x's). Pero, tenemos n factores, de los cuales debemos elegir k, por lo tanto, el número de formas de hacerlo es $\binom{n}{k}$.

En una prueba más tradicional del teorema, la siguiente propiedad es normalmente usada (y por lo tanto, probada antes del teorema del binomio). Es además, la propiedad fundamental para "construir" los numeros $\binom{n}{k}$, en el famoso "Triángulo de Pascal" en honor a Blaise Pascal (1623-1662) quien realizó diversas investigaciones acerca de él en 1653. De hecho, Tartaglia ya lo conocía mucho antes que Pascal. Más aún, desconocido para los europeos, los chinos ya lo conocían, y de hecho en China el triángulo se llama el triángulo de Yang Hui, quien lo descubrió en 1261.

Dicho triángulo se construye colocando un 1 y debajo de él otros dos 1's. Cada nueva línea comienza y termina con 1's, pero los elementos en el interior de la línea se forman sumando los dos elementos en la línea superior a él que son adyacentes:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

Para probar que los números que se obtienen de esta forma son los números binomiales $\binom{n}{k}$, debemos probar la siguiente:

Proposición 8) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Prueba: Tomemos un subconjunto A de k elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Tenemos dos posibilidades: si $n+1 \notin A$, entonces A es realmente un subconjunto de k elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Si $n+1 \in A$, entonces $A \setminus \{n+1\}$ es un subconjunto de $k-1$ elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Viceversa, si tenemos un conjunto de k elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, lo podemos "mirar" como un subconjunto de k elementos de $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$, mientras que si tenemos un subconjunto de $k-1$ elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, agregándole el $n+1$, tenemos un subconjunto de k elementos de $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$

El teorema del binomio permite deducir algunas identidades binomiales en forma no combinatoria, p.ej., la Proposición 4) se puede probar tomando $x = y = 1$ obteniendo:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_k \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_k \binom{n}{k}$$

Otra fórmula que se puede obtener a partir del binomio, para quienes conocen derivadas, es tomar $y = 1$, obteniendo $(x+1)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k$, y derivar respecto de x, obteniendo $n(1+x)^{n-1} = \sum_k \binom{n}{k} k x^{k-1}$. Tomando ahora $x = 1$, tenemos $n2^{n-1} = \sum_k \binom{n}{k} k$. Veamos cómo probar esto usando argumentos combinatorios:

Proposición 9) $\sum_k \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.
Prueba: La suma de la derecha, usando los Principios de Adición y Multiplicación, es igual a la cantidad de formas distintas de escoger un subconjunto de un conjunto de n elementos y luego "marcar" uno de ellos. Para concretar, podríamos decir que tenemos un conjuntos de n personas, de las cuales hay que escoger una comisión, de tamaño no especificado, y luego elegir un presidente de esa comisión. Ahora bien, esto también se puede hacer eligiendo primero al presidente entre todas las n personas, y luego eligiendo al resto de la comisión de entre las $n-1$ personas que quedan, en 2^{n-1} formas posibles, de acuerdo con la Proposición 3) .

La siguiente identidad es muy famosa y no puede faltar en un curso de combinatoria:

Proposición 10) (Identidad de Van der Monde) $\sum_k \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$
Prueba: Una prueba no combinatoria puede lograrse comparando los coeficientes de x^r que se obtienen al desarrollar ambos miembros de la igualdad $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$. Una prueba combinatoria, más corta, es como sigue: $\binom{n+m}{r}$ es igual al número de subconjuntos de r elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n+m\}$. Pero, un tal subconjunto tendrá una cantidad, digamos k, de elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, y el resto, $(r-k)$, estarán en $\{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$. Así, para formar tal subconjunto, debemos elegir un k, y luego k elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en $\binom{n}{k}$ formas, y luego $r-k$ elementos de $\{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$ en $\binom{m}{r-k}$ formas. Por los Principios de Adición y Multiplicación, hay $\sum_k \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$ formas de hacer esto.

La siguiente identidad nos dice lo que pasa si sumamos a lo largo de una diagonal del Triángulo de Pascal:

Proposición 11) (Identidad de Chu Shih-Chieh) $\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$
Prueba: El número $\binom{n+1}{r+1}$ es igual a la cantidad de subconjuntos de $r+1$ elementos de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Para formar un subconjunto A de $r+1$ elementos, primero, debemos decidir cuál es el mayor número que estará en A. Supongamos que j es tal número. (Observemos que, como A debe tener $r+1$ elementos, j debe ser al menos $r+1$). Entonces, como $j+1, j+2, \ldots, n+1 \notin A$, debemos construir el resto de A con r elementos tomados del conjunto $\{1, 2, \ldots, j+1\}$. Esto lo podemos hacer en $\binom{j+1}{r}$ formas distintas. Así, tenemos que $\sum_{j=r+1}^{n+1} \binom{j+1}{r} = \binom{n+1}{r+1}$. Tomando $k = j-1$ en la suma, obtenemos el resultado.

Las sumatorias efectuadas hasta ahora son todas con signos positivos. Veamos una alternante:

Proposición 12) $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Prueba: Una prueba no combinatoria sencilla se obtiene evaluando $\sum_k \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$ en $x = -1$.

Una prueba combinatoria podría ser como sigue:

Basta probar que el número de subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ con una cantidad impar de elementos es igual al número de subconjuntos con una cantidad par de elementos. Esto es obvio si n es impar, puesto que si A tiene una cantidad par de elementos, entonces el complemento de A debe tener una cantidad impar de elementos. Si n es par, dividamos todos los subconjuntos en dos clases:

1^a) los que contienen a n y

2^a) los que no.

La cantidad de subconjuntos de la 2^a clase con una cantidad par de elementos es igual a la cantidad en la 2^a clase con una cantidad impar, puesto que ahora éstos son subconjuntos de $\{1, \ldots, n-1\}$. Si A está en la 1^a clase, $A - \{n\}$ es subconjunto de $\{1, \ldots, n-1\}$, así pues,
la cantidad de subconjuntos en la 1^a clase con una cantidad impar de elementos = la cantidad de subconjuntos de $\{1, \ldots, n-1\}$ con una cantidad par de elementos = cantidad de subconjuntos de $\{1, \ldots, n-1\}$ con una cantidad impar de elementos = cantidad de subconjuntos en la 1^a clase con una cantidad par de elementos.