

PROBLEMAS ELÍPTICOS RESUELTOS MEDIANTE MALLAS COMPUESTAS APLICANDO MÉTODOS MULTIGRILLA

Sofía S. Sarraf^a, Marta B. Bergallo^b y Victorio E. Sonzogni^a

^a*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), INTEC CONICET, Universidad Nacional del Litoral, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina, ssarraf@ceride.gov.ar,*

<http://www.cimec.org.ar>

^b*Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, Santiago del Estero 2829, 3000 Santa Fe, Argentina, bergallo@math.unl.edu.ar,*

<http://math.unl.edu.ar>

Palabras clave: Mallas Compuestas, Multigrilla, Error de discretización

Resumen. El uso de una malla compuesta de elementos finitos puede resultar de utilidad para estimar errores de discretización e incluso obtener una solución mejorada sin elevar el costo computacional. Esta técnica surge de una analogía con la teoría de mezclas para la modelación de materiales compuestos por varias fases. Lo que el método propone consiste en resolver, sobre una malla dada, un sistema lineal cuyo operador resulta de una combinación lineal de operadores definidos en mallas con distintos grados de refinamiento y definidos sobre la malla más fina de manera adecuada. Las distintas mallas poseen nodos en común, los cuales vinculan sus respectivos operadores.

Los métodos Multigrilla resuelven un sistema lineal empleando sistemas de distintos tamaños resultantes de varios niveles de discretización. Esta característica motiva el estudio de la aplicación de una técnica multigrilla en conjunto con la de mallas compuestas, cuya potencialidad es explorada en el presente trabajo. Se presentan diferentes ejemplos de aplicación de la estrategia desarrollada a problemas elípticos en dos dimensiones, algunos de ellos con solución analítica.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se utiliza una técnica de malla compuesta ([Bergallo et al., 2000](#)) donde cada componente de la mezcla representa una malla con diferente error de aproximación. Dadas dos mallas de elementos finitos con nodos en común, donde cada una posee diferente orden del error de aproximación, adjudicando a cada malla la mitad de las propiedades físicas o geométricas, se obtiene un resultado global intermedio entre los resultados que se obtendrían con cada malla individualmente. Una de las ventajas de la composición de mallas radica en que puede tenerse una solución aproximada mejorada con respecto a la solución obtenida a partir del comportamiento individual de cada componente.

El sistema lineal resultante luego de utilizar la técnica de malla compuesta, puede resolverse mediante un método directo, un método iterativo o bien un método Multigrilla. En general los métodos iterativos o de relajación, como por ejemplo Jacobi o Gauss Seidel, parten de una aproximación inicial de la solución y generan una sucesión de aproximaciones que, si convergen, permite obtener la solución buscada. Estos métodos, además de ser fáciles de implementar, poseen la propiedad de suavizado, la cual permite la eliminación de las componentes de alta frecuencia del error en las primeras iteraciones dejando prácticamente inalteradas las componentes menos oscilantes.

Con la idea de modificar estos métodos de manera tal de reducir simultáneamente todas las componentes del error, se parte de una aproximación inicial a la solución más adecuada sobre el esquema de relajación. Esta aproximación se obtiene realizando algunas iteraciones sobre una malla más gruesa ya que el proceso en dicha malla es menos costoso debido a que se tienen menos variables a ser actualizadas y, además, ésta tendrá una tasa de convergencia marginalmente mejorada. Luego, si se asume que se ha aplicado un esquema de relajación hasta que sólo se observen las componentes suaves del error, se considera cómo lucen dichas componentes en una malla más gruesa. Allí, estas componentes serán menos suaves y, entonces, se podrá realizar una relajación en esta malla para reducirlas. Ante el interrogante de cómo moverse de una malla a otra y relajar, es donde comienza a desarrollarse la técnica de los métodos Multigrilla ([Arnold, 2001](#); [Briggs et al., 2000](#); [Wesseling, 1992](#); [Xu, 1995](#); [Press et al., 1988-1992](#)).

Se presenta en este trabajo la utilización de una malla compuesta de elementos finitos para mallas no estructuradas y se muestran algunos problemas test donde se analizan los errores de discretización. El sistema lineal de ecuaciones resultante de la discretización se resuelve mediante un método Multigrilla.

2. MÉTODO MULTIGRILLA

A continuación, se desarrolla el esquema de Multigrilla para elementos finitos en forma abstracta. En [Sarraf et al. \(2006\)](#) puede encontrarse el desarrollo de la técnica para un contexto de diferencias finitas.

Sea Ω un dominio acotado adecuado en el plano con frontera $\partial\Omega$. Considérese la siguiente ecuación diferencial con condiciones de borde homogéneas

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

Supóngase que el operador L es autoadjunto, es decir, que $(Lu, v) = (u, Lv)$ para cualesquiera $u, v \in H \subset L^2(\Omega)$ y que es positivo en el sentido de que $(Lu, u) > 0$ para todo $u \in H$, $u \neq 0$, donde el subespacio H contiene funciones suaves que se anulan en la frontera de Ω . Con estas

propiedades, resolver la ecuación diferencial (1) resulta formalmente equivalente a minimizar el funcional cuadrático en $u \in H$

$$F(u) \equiv \frac{1}{2}(Lu, u) - (f, u) \quad (2)$$

El problema puede reescribirse en forma compacta como

$$u = \operatorname{argmin}_{v \in H} F(v) \quad (3)$$

donde (3) denota hallar el argumento que minimiza a F sobre todas las funciones de H .

Dada una triangulación de Ω de tamaño h , denotada Ω^h , sea H^h el subespacio de H de dimensión finita que consiste en las funciones u^h que se anulan en la frontera del dominio, son continuas en Ω y polinomiales dentro de cada elemento. El problema discreto se escribe del siguiente modo:

$$u^h = \operatorname{argmin}_{v^h \in H^h} F(v^h) \quad (4)$$

Dado que el operador L es autoadjunto y positivo los problemas que consisten en determinar la función $u \in H$ de manera que satisfaga (3) y $(Lu, v) = (f, v)$ para toda $v \in H$ son equivalentes. Luego resolver (4) es equivalente a encontrar $u^h \in H^h$ de modo que

$$(Lu^h, v^h) = (f, v^h) \quad \text{para todo } v^h \in H^h \quad (5)$$

Para resolver (5) se trabaja con la función ε_i^h que denota una función de alguna base de H^h , se resuelve la forma débil del problema, donde por ejemplo, para el operador de Laplace, la forma débil se escribe

$$(\nabla u^h, \nabla v^h) = (f, v^h) \quad \text{para todo } v^h \in H^h \quad (6)$$

Luego, eligiendo las funciones de prueba v^h como funciones de la base de H^h : ε_i^h , el resultado de esta sustitución es un sistema lineal en el cual las incógnitas son los valores nodales de u_i^h , es decir, se eligen las funciones ε_i^h tales que $\varepsilon_i^h(N_j) = \delta_{ij}$, donde los coeficientes matriciales son productos de la forma $(\nabla \varepsilon_i^h, \nabla \varepsilon_j^h)$ y los elementos del término derecho son (f, ε_i^h) . Cuando se ensamblan todas las filas de la matriz y sus correspondientes lados derechos, el resultado es una ecuación matricial de la forma: $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$.

Dadas del mallas donde la primera es un refinamiento de la segunda, la iteración de dos grillas es la base para construir un método Multigrilla. En forma resumida, esta iteración se compone de los siguientes pasos:

1. Se realizan unas pocas iteraciones de algún método iterativo que suavice al residuo $\mathbf{r}^h = \mathbf{f}^h - A^h \mathbf{x}^h$, como por ejemplo Gauss Seidel o Jacobi amortiguado. Este paso de suavizado reducirá las componentes de alta frecuencia del error pero lo hará en menor medida para las componentes de baja frecuencia. El nuevo residuo, siendo relativamente más suave, se puede entonces aproximar adecuadamente sobre una partición más gruesa.
2. El residuo se proyecta sobre la malla gruesa y allí se resuelve la ecuación para el error, reduciéndose ahora las componentes de baja frecuencia sobre la malla más gruesa (debido a que en la malla gruesa las componentes suaves del error se comportan como componentes de alta frecuencia).

3. Finalmente, esta solución sobre la malla gruesa es transferida a la malla fina donde se la utiliza para mejorar la aproximación suavizada del paso 1.

Considérese en primer lugar la etapa de relajación, cuyo objetivo es proveer un método poco costoso para la eliminación de errores oscilatorios en la aproximación \bar{u}^h a la solución del sistema. Este objetivo puede conseguirse llevando a cabo cambios locales de la forma $\bar{u}^h \leftarrow \bar{u}^h - s\varepsilon_i^h$, donde $s \in \mathbb{R}$ es un tamaño de paso adecuado. La elección de s se lleva a cabo en el sentido de minimizar el funcional sobre todas las elecciones posibles, es decir

$$s = \operatorname{argmin}_{t \in \mathbb{R}} F(\bar{u}^h - t\varepsilon_i^h) \quad (7)$$

Luego, se obtiene el siguiente esquema de relajación:

- Para cada $i = 1, 2, \dots$, calcular

$$s = \operatorname{argmin}_{t \in \mathbb{R}} F(\bar{u}^h - t\varepsilon_i^h) \quad (8)$$

- Realizar los desplazamientos $\bar{u}^h \leftarrow \bar{u}^h - s\varepsilon_i^h$

donde, para el funcional F , este esquema no es otro que Gauss Seidel.

El proceso de corrección a la malla gruesa se formula también de manera abstracta. Se define el espacio para la grilla gruesa $H^{2h} \subset H^h$ como el conjunto de funciones polinomiales a trozos asociadas con una grilla gruesa estandar Ω^{2h} . El objetivo es cambiar la aproximación \bar{u}^h por una función $\bar{u}^{2h} \in H^{2h}$ que aproximará el, presumiblemente, más suave error. La forma de esta corrección es $\bar{u}^h \leftarrow \bar{u}^h + \bar{u}^{2h}$. La elección de \bar{u}^{2h} se realiza nuevamente eligiendo la mejor corrección de la malla gruesa en el sentido de que minimice el funcional sobre todas las elecciones posibles. Matemáticamente esto es,

$$\bar{u}^{2h} = \operatorname{argmin}_{w^{2h} \in H^{2h}} F(\bar{u}^h + w^{2h}) \quad (9)$$

y el esquema de corrección de la malla gruesa es

- Calcular

$$\bar{u}^{2h} = \operatorname{argmin}_{w^{2h} \in H^{2h}} F(\bar{u}^h + w^{2h}) \quad (10)$$

- Reemplazar $\bar{u}^h \leftarrow \bar{u}^h + \bar{u}^{2h}$.

En el proceso de agregar una función $\bar{u}^{2h} \in H^{2h}$, a una función $\bar{u}^h \in \Omega^h$ se pueden encontrar coeficientes que permitan escribir \bar{u}^{2h} como una función de H^h , lo cual puede llevarse a cabo ya que $H^{2h} \subset H^h$. Luego, se busca así el operador de prolongación I_{2h}^h que permite determinar $\bar{\mathbf{u}}^h = I_{2h}^h \bar{\mathbf{u}}^{2h}$ (véase [Briggs et al. \(2000\)](#)).

Para determinar el operador de la malla gruesa correspondiente al operador A^h , denominado A^{2h} , se trabaja con los vectores nodales y se traslada el principio de minimización a términos matriciales. Se parte del sistema matricial $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$ equivalente al problema de minimización

$$\mathbf{u}^h = \operatorname{argmin}_{\mathbf{v}^h \in H^h} F^h(\mathbf{v}^h) \quad (11)$$

donde $F^h(\mathbf{v}^h) \equiv (A^h \mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h)/2 - (\mathbf{f}^h, \mathbf{v}^h)$. De igual manera, el problema de la corrección de la malla gruesa es equivalente al principio de minimización matricial

$$\bar{\mathbf{u}}^{2h} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{w}^{2h} \in H^{2h}} F^h(\bar{\mathbf{u}}^h + I_{2h}^h \mathbf{w}^{2h}) \quad (12)$$

Luego, llevando a cabo los cálculos correspondientes se obtiene $A^{2h} = (I_{2h}^h)^T A^h I_{2h}^h$, la versión en la malla gruesa de A^h . El término $(I_{2h}^h)^T$ toma un vector en la grilla fina y lo lleva a un vector en la grilla gruesa, es decir, es un operador de restricción. Luego, tiene sentido pensar en $I_h^{2h} = (I_{2h}^h)^T$.

Para concluir, sean $\mathbf{r}^h = \mathbf{f}^h - A^h \bar{\mathbf{u}}^h$ y $\mathbf{f}^{2h} = I_h^{2h} \mathbf{r}^h$. Entonces se obtiene

$$F^h(\bar{\mathbf{u}}^h + I_{2h}^h \mathbf{w}^{2h}) = F^h(\bar{\mathbf{u}}^h) + F^{2h}(\mathbf{w}^{2h}) \quad (13)$$

Por lo tanto, dado que $F^h(\bar{\mathbf{u}}^h)$ es independiente de \mathbf{w}^{2h} , la minimización de $F^h(\bar{\mathbf{u}}^h + I_{2h}^h \mathbf{w}^{2h})$ es equivalente a la minimización de $F^{2h}(\mathbf{w}^{2h})$ sobre los vectores $\mathbf{w}^{2h} \in H^{2h}$, el cual es el esquema de corrección para la malla gruesa.

El algoritmo Multigrilla se obtiene aplicando recursivamente la iteración de dos grillas. Precisando, se resuelve el problema en la malla gruesa utilizando una iteración de dos grillas involucrando así una malla aún más gruesa. Este procedimiento se utiliza en cada nivel de malla hasta obtener una malla suficientemente gruesa donde el sistema correspondiente se resuelve en forma directa.

Una iteración de Multigrilla desde la grilla más fina a grillas más gruesas y volviendo a la grilla fina, se denomina *cycle*. La estructura exacta de un *cycle* depende del valor de γ , el número de iteraciones de dos grillas en cada paso intermedio. El caso $\gamma = 1$ se denomina *V-cycle*, mientras que $\gamma = 2$ es llamado *W-cycle* (ver figura 1).

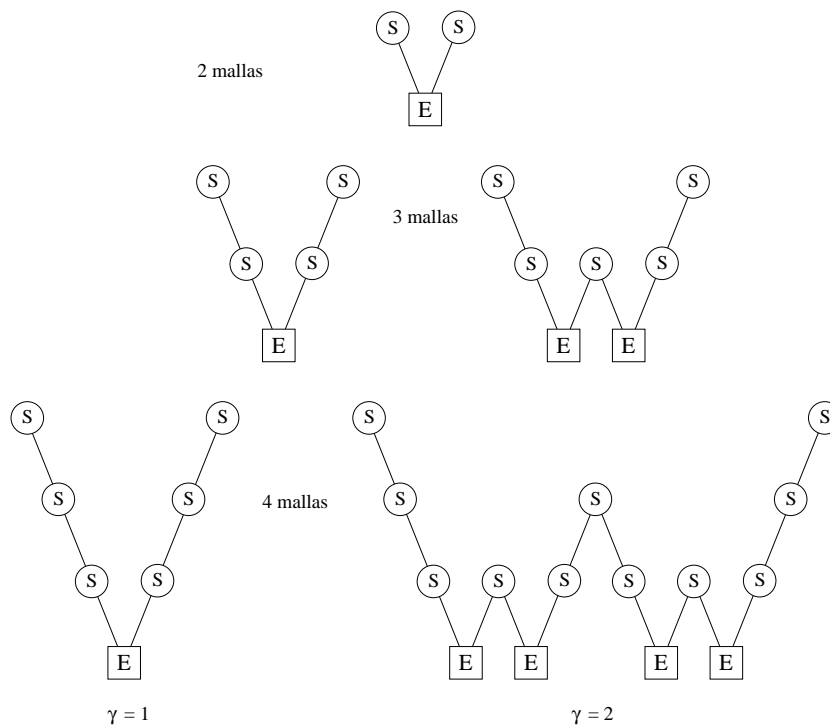


Figura 1: Diagrama del método Multigrilla

3. USO DE UNA MALLA COMPUESTA

Una malla compuesta de elementos finitos aplicada a la resolución de un problema elíptico puede utilizarse para mejorar una solución numérica sin elevar en forma apreciable el costo computacional y, además, estimar el error de discretización utilizando extrapolación de Richardson (Bergallo et al., 2000). En su versión h , el método consiste en sustituir el operador discreto por una combinación lineal del propio operador y el correspondiente a una malla extendida al mismo dominio pero con un tamaño de elemento mayor. En este caso, los polinomios interpolantes conservan el mismo grado en ambas mallas. Luego, suponiendo que la malla fina se obtiene a partir de un refinamiento homogéneo de otra malla más gruesa, la conexión entre ambas se fuerza en los nodos compartidos. El factor de participación de cada malla en el modelo compuesto, es decir, el coeficiente en la combinación lineal entre las mallas, se introduce de forma tal de minimizar el error de discretización.

3.1. Elección de los factores de participación

Sean Ω^{h_1} y Ω^{h_2} dos mallas no estructuradas de elementos finitos con tamaños de elemento h_1 y h_2 respectivamente ($h_1 > h_2$). Definiendo u como la solución exacta y u^{h_i} con $i = 1, 2$ como las aproximaciones asociadas a cada malla, se puede expresar el error asintótico de la siguiente manera (Sonzogni et al., 1996):

$$\begin{aligned} u &= u^{h_1} + Ch_1^p + O(h_1^q), \\ u &= u^{h_2} + Ch_2^p + O(h_2^q). \end{aligned} \quad (14)$$

donde p es el orden del método y $q > p$. Eliminando la constante C entre ambas ecuaciones, se obtiene para u

$$u = \frac{h_1^p/h_2^p}{(h_1^p/h_2^p - 1)} u^{h_2} - \frac{1}{(h_1^p/h_2^p - 1)} u^{h_1} + O(\{\max\{h_1, h_2\}\}^q) \quad (15)$$

Si las mallas poseen tamaños de elemento tales que $h_1 = 2h_2$, despreciando términos de orden superior, de la ecuación (15) se obtiene

$$u_{h_1 h_2 r} = \frac{2^p}{(2^p - 1)} u^{h_2} - \frac{1}{(2^p - 1)} u^{h_1} \quad (16)$$

La notación $u_{h_1 h_2 r}$ significa que se efectúa la extrapolación de Richardson entre los “pasos” h_1 y h_2 . En los nodos de la grilla fina se utiliza la solución u^{h_2} , y en los nodos de la grilla gruesa se utiliza la extrapolación $u_{h_1 h_2 r}$ propiamente dicha.

Mediante un procedimiento análogo se obtiene que

$$\frac{u^{h_2} - u^{h_1}}{u^{h_3} - u^{h_2}} \simeq \frac{h_1^p - h_2^p}{h_2^p - h_3^p} \quad (17)$$

Si en particular se tiene $h_1 = 2h_2 = 4h_3$, la ecuación (17) se reduce a

$$\frac{u^{h_2} - u^{h_1}}{u^{h_3} - u^{h_2}} \simeq 2^p \quad (18)$$

la cual permite determinar el orden numérico aproximado del método para estimar así los coeficientes de la combinación lineal de la extrapolación.

Este procedimiento de extrapolación de dos mallas con nodos comunes, relacionadas entre sí mediante el refinamiento de una de ellas, permite obtener una solución con una mejor aproximación en los nodos comunes a ambas mallas contenidos en la malla gruesa. Es decir, el procedimiento mantiene el subespacio de funciones en la dimensión determinada por los nodos de la malla más fina pero incorpora las ventajas de la extrapolación usando una malla más gruesa.

Para el cómputo de la malla compuesta, en lugar de obtener soluciones respectivas a cada malla, se interpreta que el dominio está formado por la superposición de las dos mallas con factores de participación α y $1 - \alpha$. Con $\alpha = 1$ se obtiene el problema original en la malla fina y con $\alpha = 0$ se obtiene el problema en la malla más gruesa.

Sean $A_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2$ el sistema de ecuaciones proveniente de la discretización por elementos finitos para la malla Ω^{h_2} y $A_{12}\mathbf{u}_{12} = \mathbf{f}_{12}$ el sistema análogo para la discretización sobre la malla Ω^{h_1} , ($A_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{f}_1$) completado con ceros para obtener la dimensión requerida. La solución aproximada por el método de malla compuesta $\mathbf{u}_{h_1h_2}$ se obtiene del sistema (Sonzogni et al., 1996)

$$(\alpha A_2 + (1 - \alpha)A_{12})\mathbf{u}_{h_1h_2} = \alpha\mathbf{f}_2 + (1 - \alpha)\mathbf{f}_{12} \quad (19)$$

4. MULTIGRILLA PARA PROBLEMAS CON MALLA COMPUESTA

Como fuera puntualizado con anterioridad, el principal objetivo de este trabajo consiste en la aplicación de la técnica de malla compuesta a la resolución de problemas elípticos, resolviendo el sistema lineal de ecuaciones resultante mediante el método Multigrilla. Suponiendo que se involucran n niveles en cada iteración de Multigrilla y que la malla correspondiente al j -ésimo nivel se obtiene del $(j - 1)$ -ésimo refinamiento homogéneo de una malla inicial dada (correspondiente al nivel 1), las grillas de los niveles n y $n - 1$ participan de la malla compuesta para resolver el problema. Es decir, relativo a la ecuación (19), $A_2 = A_n$, donde A_n es la matriz correspondiente al nivel n anteriormente citado, y A_{12} se obtiene de completar con ceros la matriz A_{n-1} para alcanzar la dimensión de A_n .

Debido a que el método Multigrilla plantea resolver en el nivel j una ecuación para el error del sistema planteado en el nivel $j + 1$ (véase la sección 2), no resultaría eficaz proponer una composición o mezcla de mallas en cada nivel. Esto se debe a que sólo tiene sentido plantear esta mezcla para la solución $\mathbf{u}_{h_1h_2}$ y no para su error. Entonces, se propone modificar en el esquema de Multigrilla únicamente la matriz correspondiente al nivel n , sustituyéndola por la matriz que surge de la mezcla de mallas. La figura 2 esquematiza la estrategia. Con este planteo, es esperable que la técnica Multigrilla conserve sus características de convergencia, dado que las soluciones de los problemas con y sin mezcla de mallas se encuentran relativamente cerca. Esto será comprobado en forma experimental con los problemas que se presentan en la próxima sección.

Estimaciones para el error del método de elementos finitos aplicado a problemas como el del primer ejemplo permiten obtener $p \simeq 2$ en la ecuación (16) (Sonzogni et al., 1996). Siendo este el caso para el refinamiento aplicado ($h_j = 2h_{j+1}$), se emplea en este caso como factor de participación $\alpha = 4/3$. Para el problema test correspondiente al dominio en L , se buscó numéricamente el factor de participación que minimiza el error obteniéndose $\alpha = 5/3$. Por último, para el problema con coeficientes variables, el valor de participación correspondiente, se estimó también numéricamente, luego para este problema se tiene $\alpha = 4/3$.

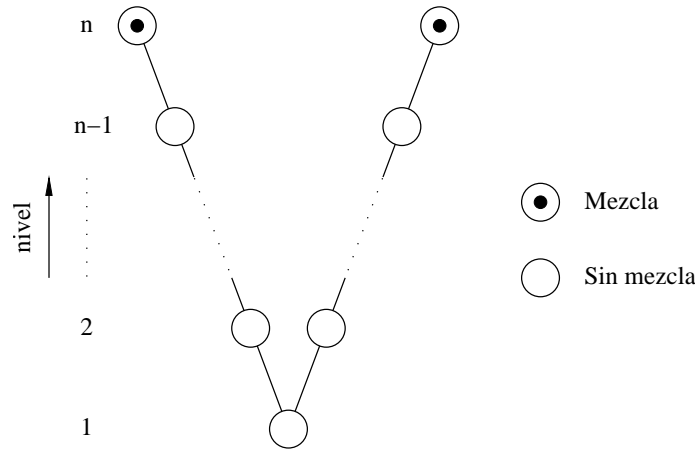


Figura 2: Multigrilla para malla compuesta (*V-cycle*)

5. PROBLEMAS TEST

A continuación se presentan problemas test, algunos de ellos con solución exacta, en donde se muestran las ventajas de resolverlos mediante la técnica de doble malla junto con el método Multigrilla. Si bien no existe un único algoritmo Multigrilla que resuelva todas las ecuaciones elípticas, sí existe una técnica que provee el marco para resolverlos. Es necesario entonces para cada caso ajustar las distintas componentes del algoritmo que forman parte del entorno para resolver cada problema específico.

5.1. Problema de Poisson

Se propone como primer ejemplo, resolver por el método de elementos finitos el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (20)$$

cuya solución exacta está dada por:

$$u(x, y) = 31250x(x-1)\left(x - \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{9}{10}\right)y(y-1)\left(y - \frac{4}{5}\right)\left(y - \frac{1}{5}\right)\left(y - \frac{1}{10}\right) \quad (21)$$

En la figura 3 se ilustra una de las mallas correspondiente al tercer nivel de refinamiento.

Se resolvió el problema realizando la composición de dos mallas de elementos finitos no estructuradas, siendo una de ellas el resultado del refinamiento homogéneo de la otra que participa en la mezcla. Se empleó el método Multigrilla para resolver el sistema lineal resultante de la discretización como se explicó en la sección 4. En la figura 4 se presenta la solución obtenida con una tolerancia de 1×10^{-6} para la convergencia en el residuo.

En las figuras 5 y 6 se muestran los errores nodales entre la solución exacta y la solución numérica obtenida para la malla más fina (nivel n) y la compuesta. Para cuantificar los errores y evaluar el comportamiento del método Multigrilla, las tablas 1 y 2 presentan algunos resultados. La tabla 1 contiene resultados para el ciclo V e incluye la cantidad de niveles que se utilizan en el método Multigrilla, el número de iteraciones necesario para la convergencia, los errores en norma del máximo y L_2 , y el tiempo de cálculo en segundos. La tabla 2 corresponde al ciclo W .

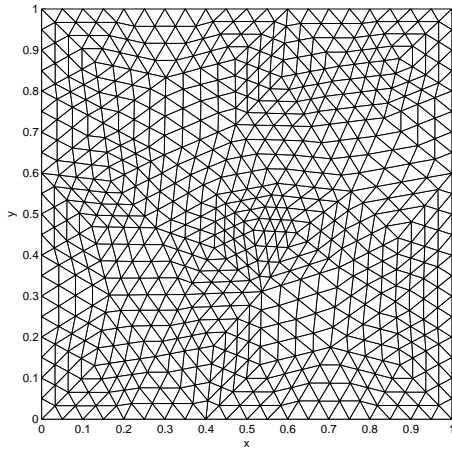


Figura 3: Malla para el problema de Poisson

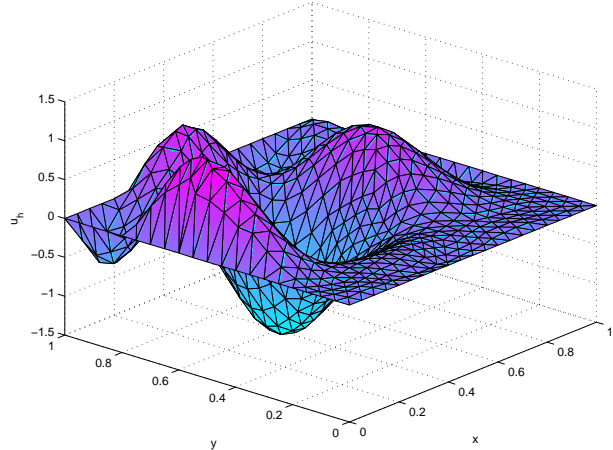


Figura 4: Solución numérica al problema de Poisson

Sin mezcla				
niveles	iteraciones	error del máximo	error en L_2	tiempo [s]
3	7	3.3960×10^{-3}	8.4062×10^{-4}	1.22×10^{-1}
4	7	9.5195×10^{-4}	2.0931×10^{-4}	4.24×10^{-1}
5	7	2.8171×10^{-4}	5.2294×10^{-5}	1.70
6	7	8.1310×10^{-5}	1.3097×10^{-5}	7.34
Con mezcla				
niveles	iteraciones	error del máximo	error en L_2	tiempo [s]
3	7	1.1824×10^{-3}	8.0901×10^{-5}	1.31×10^{-1}
4	7	1.6160×10^{-4}	7.1617×10^{-6}	4.55×10^{-1}
5	7	2.1730×10^{-5}	6.4398×10^{-7}	4.54

Tabla 1: Errores para el ciclo V , con 3 pasos de pre y post suavizado de Jacobi con factor 0.7 para el problema de Poisson.

Sin mezcla				
niveles	iteraciones	error del máximo	error en L_2	tiempo [s]
3	6	3.3959×10^{-3}	8.4060×10^{-4}	1.55×10^{-1}
4	5	9.5185×10^{-4}	2.0928×10^{-4}	4.66×10^{-1}
5	5	2.8159×10^{-4}	5.2258×10^{-5}	1.78
6	5	8.1190×10^{-5}	1.3060×10^{-5}	7.55
Con mezcla				
niveles	iteraciones	error del máximo	error en L_2	tiempo [s]
3	6	1.1824×10^{-3}	8.0893×10^{-5}	1.62×10^{-1}
4	6	1.6181×10^{-4}	7.1549×10^{-6}	5.63×10^{-1}
5	5	2.1912×10^{-5}	6.3367×10^{-7}	4.08×10^1

Tabla 2: Errores para el ciclo W , con 3 pasos de pre y post suavizado de Jacobi con factor 0.7 para el problema de Poisson.

En las figuras 5 y 6 se observa para este problema la incorporación de la técnica de malla compuesta sobre los errores correspondientes. En las tablas presentadas se muestra como dis-

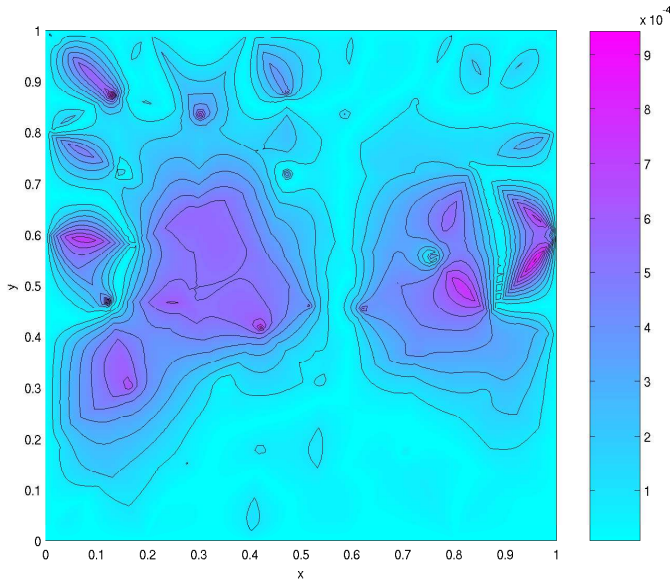


Figura 5: Curvas de nivel del error para la solución con la malla más fina para el problema de Poisson

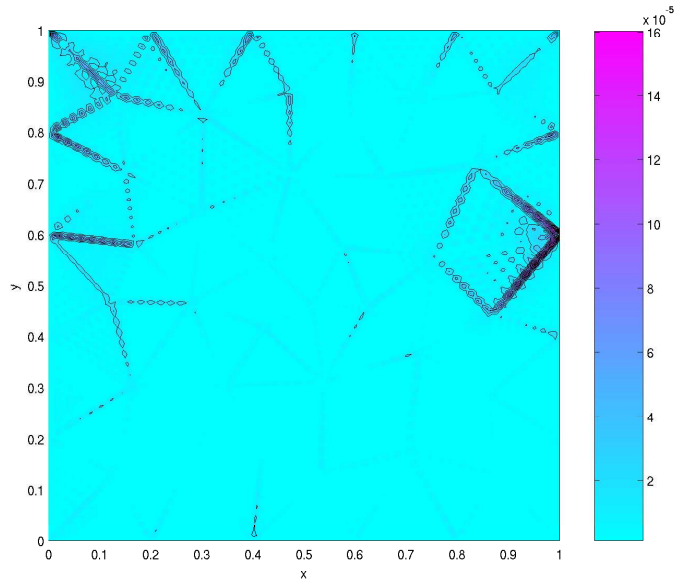


Figura 6: Curvas de nivel del error para la solución con malla compuesta para el problema de Poisson

minuye el error con la mezcla, el cual puede apreciarse mejor cuando se calcula mediante la norma L_2 y, además, cómo crece el tiempo con la doble malla, lo cual se debe al hecho de que la matriz del sistema es menos rala que la correspondiente al sistema sin mezcla. Respecto del comportamiento de la estrategia propuesta en la sección 4 para la resolución de problemas con malla compuesta aplicando Multigrilla, puede concluirse que la misma preserva las características del método Multigrilla original. Esta afirmación se basa en que el número de iteraciones necesarias para la convergencia en los casos con y sin mezcla de mallas permanece constante (véanse tablas 1 y 2).

5.2. Problema de Laplace sobre un dominio en L

Considérese el problema de Laplace $\Delta u = 0$ en un dominio en forma de L con la solución exacta (dada en coordenadas polares)

$$u(r, \phi) = r^{2/3} \sin \frac{2}{3} \phi \quad (22)$$

El problema se discretiza utilizando una triangulación no estructurada como la de la figura 7, la cual corresponde a una instancia intermedia del refinamiento.

Se realizó la composición de las mallas y se resolvió el problema resultante con Multigrilla. En la figura 8 se presenta la solución obtenida con una tolerancia de 1×10^{-8} para la convergencia en el residuo.

En las figuras 9 y 10 se muestran los errores nodales entre la solución exacta y la solución numérica obtenida para la malla más fina y la compuesta. Las tablas 3 y 4 presentan los resultados obtenidos. La tabla 3 corresponde al ciclo V e incluye la cantidad de niveles que se utilizan en el método Multigrilla, el número de iteraciones necesario para la convergencia, los errores en norma L_∞ y L_2 , y el tiempo de cálculo en segundos. La tabla 4 corresponde al ciclo W .

Las conclusiones que pueden obtenerse para este problema son similares a las expuestas en el problema de Poisson de la subsección anterior. Para reforzar lo concluido acerca de la convergencia del método Multigrilla para mallas compuestas, se presenta la evolución del residuo

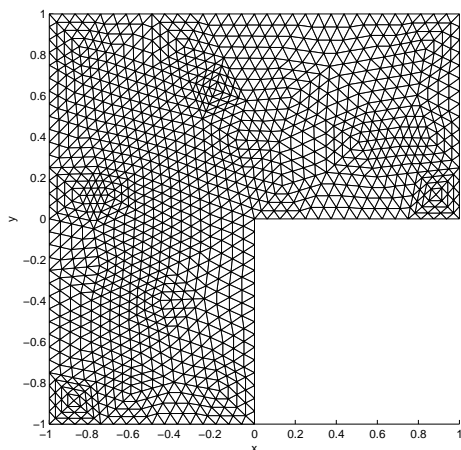


Figura 7: Malla para el problema con dominio en L

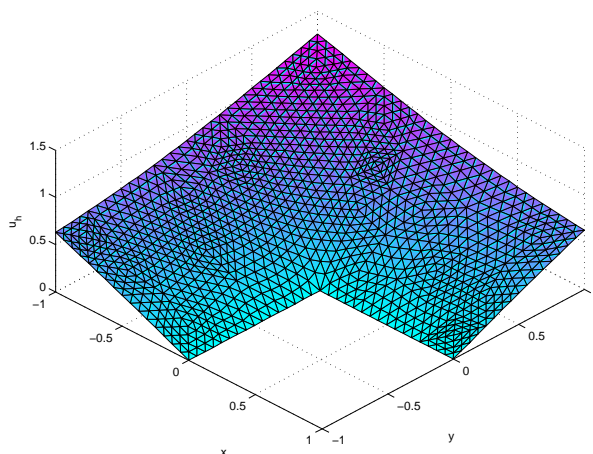


Figura 8: Solución numérica al problema con dominio en L

Sin mezcla				
niveles	iteraciones	error del máximo	error en L_2	tiempo [s]
3	8	5.6340×10^{-3}	6.0714×10^{-4}	2.57×10^{-1}
4	8	3.5637×10^{-3}	2.4614×10^{-4}	9.81×10^{-1}
5	7	2.2489×10^{-3}	9.9025×10^{-5}	3.56
Con mezcla				
niveles	iteraciones	error del máximo	error en L_2	tiempo [s]
3	8	3.0409×10^{-3}	1.2747×10^{-4}	2.76×10^{-1}
4	8	1.9152×10^{-3}	4.2726×10^{-5}	1.03

Tabla 3: Errores para el ciclo V , con 4 pasos de pre y post suavizado de Jacobi con factor 0.7 para el problema del dominio en L .

Sin mezcla				
niveles	iteraciones	error del máximo	error en L_2	tiempo [s]
3	7	5.6340×10^{-3}	6.0714×10^{-4}	3.36×10^{-1}
4	7	3.5637×10^{-3}	2.4613×10^{-4}	1.27
5	7	2.2487×10^{-3}	9.8953×10^{-5}	5.21
Con mezcla				
niveles	iteraciones	error del máximo	error en L_2	tiempo [s]
3	8	3.0409×10^{-3}	1.2748×10^{-4}	3.79×10^{-1}
4	8	1.9151×10^{-3}	4.2736×10^{-5}	1.49

Tabla 4: Errores para el ciclo W , con 4 pasos de pre y post suavizado de Jacobi con factor 0.7 para el problema del dominio en L .

con el número de iteraciones en las figuras 11 y 12, respectivamente, para los ciclos V y W . Como puede observarse, las curvas del residuo son prácticamente paralelas en los casos con y sin mezcla de mallas.

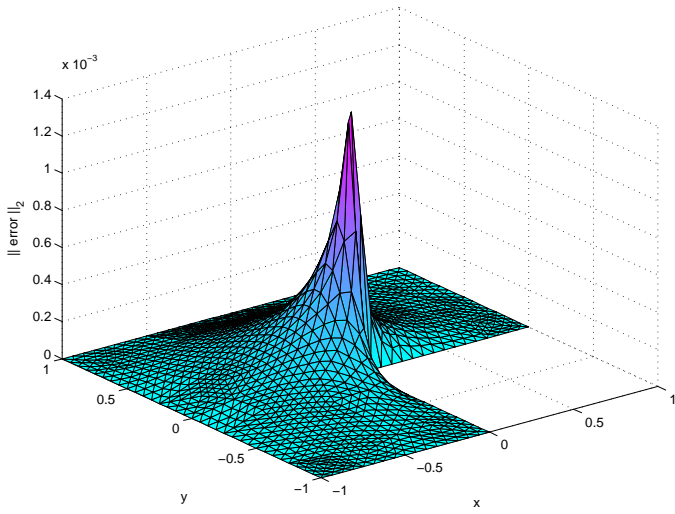


Figura 9: Error entre las soluciones exacta y aproximada para el problema con dominio en L

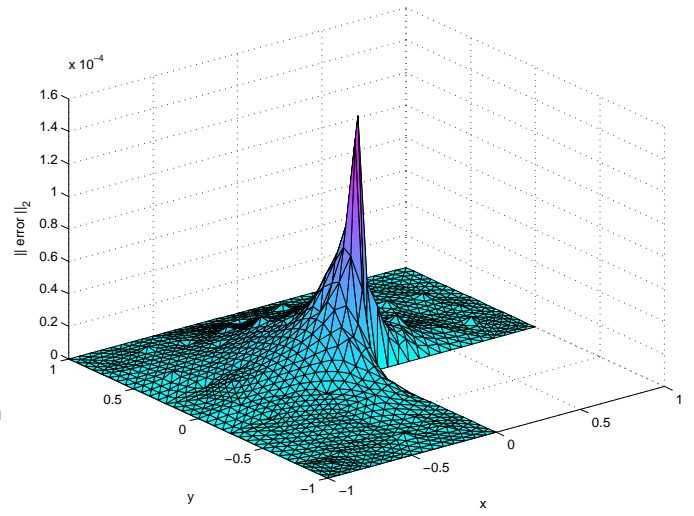


Figura 10: Error entre las soluciones exacta y aproximada para el problema con dominio en L con doble malla

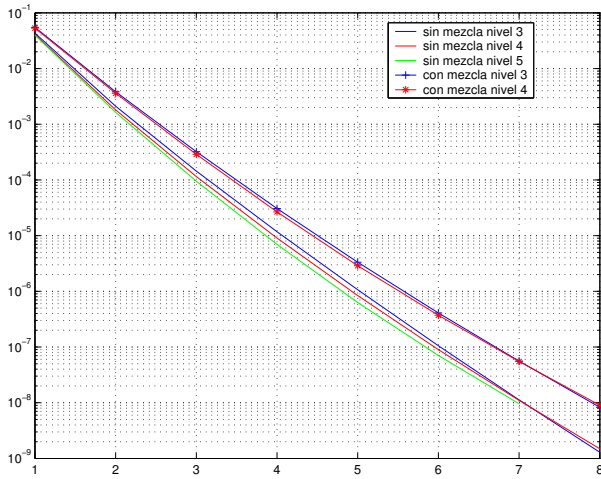


Figura 11: Residuos correspondientes al problema en L para el ciclo V .

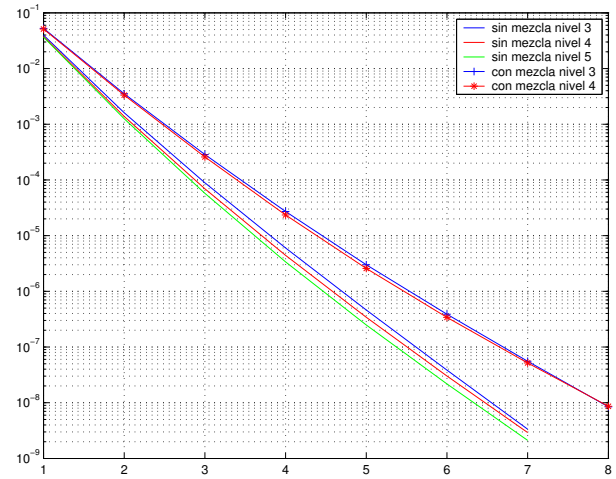


Figura 12: Residuos correspondientes al problema en L para el ciclo W .

5.3. Problema Elíptico a Coeficientes Variables

Considérese el problema

$$-\nabla \cdot (a(x, y)\nabla u) = f(x, y) \quad (23)$$

en un dominio Ω con $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, donde $f = 10$. Sea $\Omega = ([0, 10] \times [0, 5.5])/B$, donde B es el disco de radio $1/2$ y centro $(1.25, 2.75)$. El coeficiente de difusión $a(x, y)$ es discontinuo y está dado por

$$a(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1/2 \leq \sqrt{(x - 1.25)^2 + (y - 2.75)^2} < 2 \\ 1000 & \text{si } 2 \leq \sqrt{(x - 1.25)^2 + (y - 2.75)^2} < 6 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (24)$$

El problema se discretiza empleando una malla no estructurada de elementos triangulares, como puede verse, para el tercer nivel, en la figura 13.

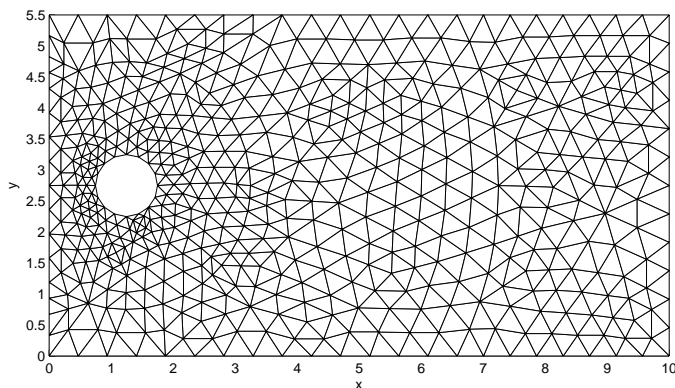


Figura 13: Malla para el problema de coeficientes variables

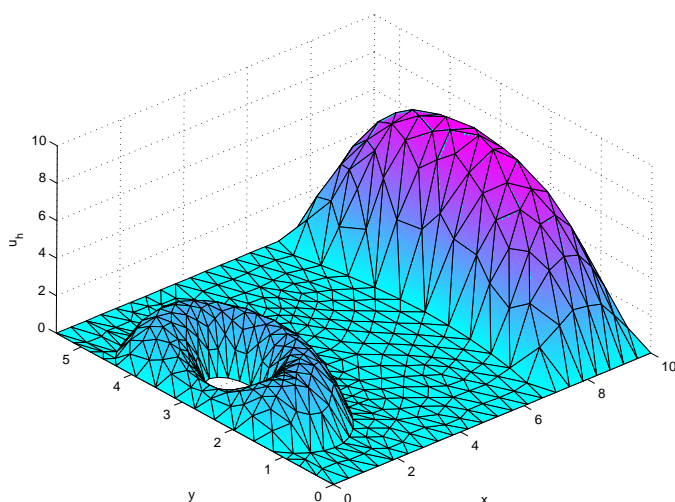


Figura 14: Solución numérica al problema de coeficientes variables

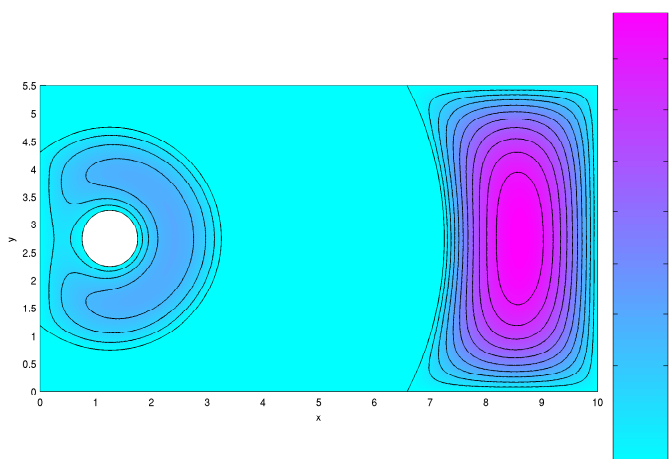


Figura 15: Curvas de nivel para el problema de coeficientes variables

En las tablas 5 y 6 se presentan los resultados obtenidos para el problema. En las mismas se resolvió para el ciclo V con 5 pasos de pre y post suavizado, con un factor de 0.8 para el suavizador de Jacobi y una tolerancia de 1×10^{-6} para la convergencia en el residuo. Para el ciclo W con mezcla, a diferencia de los casos anteriores, se necesitaron 6 pasos de pre y post suavizado para alcanzar la convergencia con la misma tolerancia. Con el algoritmo Multigrilla estandar, la discontinuidad que presenta el coeficiente difusivo implica una gran demanda que no puede ser resuelta en forma sencilla, dado que se emplean mallas no estructuradas y los “saltos” siguen un patrón circular. Este hecho explica el gran número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia y se refleja también en el comportamiento del residuo (véanse las figuras 16 y 17).

Sin mezcla		
niveles	iteraciones	tiempo [s]
3	25	1.46
4	41	9.35
Con mezcla		
niveles	iteraciones	tiempo
3	30	1.86

Tabla 5: Datos para el ciclo V para el problema con coeficientes variables.

Sin mezcla		
niveles	iteraciones	tiempo
3	18	1.47
4	27	8.99
Con mezcla		
niveles	iteraciones	tiempo
3	24	2.07

Tabla 6: Datos para el ciclo W para el problema con coeficientes variables.

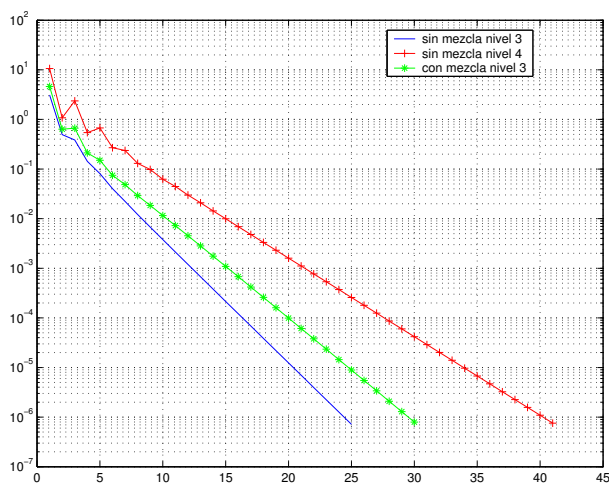


Figura 16: Residuo correspondiente para el problema de coeficientes variables para el ciclo V .

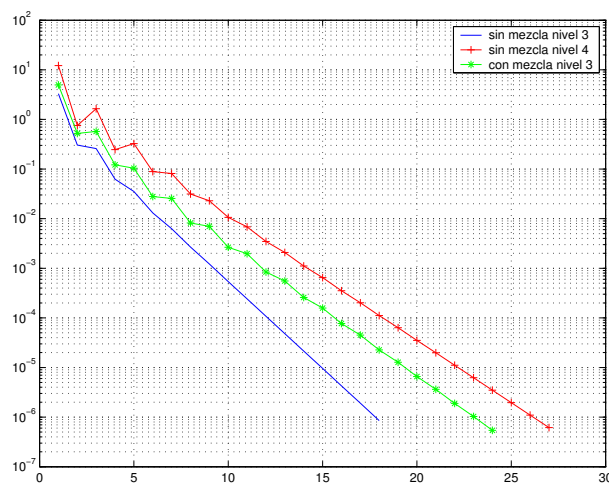


Figura 17: Residuo correspondiente para el problema de coeficientes variables para el ciclo W .

6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo fueron presentados resultados preliminares de una implementación del método Multigrilla junto con la técnica de malla compuesta aplicada a la resolución del sistema algebraico que surge de la discretización mediante el método de elementos finitos.

Dado que algunos de los ejemplos poseían solución exacta, pudo confrontarse la solución obtenida mediante el método Multigrilla con la analítica, observándose la potencialidad del método.

La estrategia Multigrilla se mostró más eficiente al aumentar el tamaño del sistema a resolver observándose siempre la ventaja del uso de la técnica de doble malla al obtenerse una solución mejorada con respecto a la obtenida por cada malla de la mezcla individualmente.

Se plantea como trabajo a futuro el desarrollo del método Multigrilla para problemas más generales, no sólo elípticos sino también otros de naturaleza parabólica-hiperbólica, considerando campos escalares y vectoriales. Las ecuaciones de Navier-Stokes constituyen un ejemplo clásico de este último tipo de ecuaciones. Además, se proponen la incorporación de la versión algebraica del método (AMG) y su implementación en paralelo a fin de poder aplicarlo a la resolución de problemas de interés práctico.

REFERENCIAS

- D.N. Arnold. A Concise Introduction to Numerical Analysis. *University of Minnesota*, pages 195–206, 2001.
- M.B. Bergallo, C.E. Neuman, y V.E. Sonzogni. Composite mesh concept based FEM error estimation and solution improvement. *Computed Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:755–774, 2000.
- W.L. Briggs, V.E. Hemson, y S.F. McCormick. *A Multigrid Tutorial*. SIAM, 2000.
- W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, y W.T. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1988-1992.
- S.S. Sarraf, M.B. Bergallo, y Sonzogni V.E. Uso de métodos Multigrilla para resolución numérica de problemas de valores de contorno. *Proceedings ENIEF'06*, 2006.
- V.E. Sonzogni, M.B. Bergallo, y Neuman C.E. Uso de una malla compuesta para estimar errores de discretización y mejorar la solución en elementos finitos. *Proceedings MECOM'96*, I: 260–263, 1996.
- P. Wesseling. *An Introduction to Multigrid Methods*. John Wiley & Sons, 1992.
- Jinchao Xu. An Introduction to Multigrid Convergence Theory. *Winter School on Iterative Methods in Scientific Computing and Their Applications*, 1995.