

# Física General I

Año 2019

## Capítulo 1: Dinámica de una partícula.

Hasta aquí se ha estudiado esencialmente el movimiento de objetos puntuales, describiendo su posición, velocidad y aceleración. A partir de ahora estudiaremos aquello que causa y modifica el movimiento de los objetos, tanto puntuales como extendidos.

Para ello introduciremos primeramente la noción de esfuerzo físico: si se desea desplazar un objeto pesado sobre el suelo; por ejemplo, una heladera, es necesario ejercer sobre ella un esfuerzo físico, que será más o menos intenso y nos dejará más o menos exhaustos según sean las características de la heladera, del suelo y nuestra propia fortaleza.



Figura 1: Esfuerzo físico y fuerza

Si el esfuerzo es suficiente, lograremos desplazar el objeto empujado. Queda claro que no solamente puede conseguirse ese efecto aplicando nuestro esfuerzo físico, sino que existen distintos mecanismos capaces de hacerlo, por ejemplo, una máquina mecánica, un poderoso imán, atracción o repulsión eléctrica, etc. Podemos dar el siguiente paso y pensar en el concepto de fuerza, que es similar al de esfuerzo físico, pero que es más general y no depende del mecanismo particular de interacción utilizado. Ahora que hemos aludido, aunque sea de una manera elemental al concepto de fuerza, veamos cuál es la evolución histórica de este concepto en relación al movimiento de los cuerpos.

En la antigua Grecia se pensaba que los cuerpos tendían al reposo como estado natural; en este sentido, Aristóteles de Estagira (384 a. C. – 322 a. C.) afirmaba que la perseverancia del movimiento requería siempre una causa eficiente, es decir, que hace falta ejercer una fuerza para que las cosas permanezcan en movimiento. Esto está de acuerdo con lo que nos dice la experiencia cotidiana; por ejemplo, si observamos la Fig. 1, como la heladera se moverá sólo si el hombre hace fuerza, sacaríamos como conclusión apurada que sin fuerza no hay movimiento. Como veremos más adelante, afirmar en general que las fuerzas son las causas del movimiento es un error; un error que estuvo firmemente establecido ¡durante casi dos mil años! En efecto, Galileo Galilei (1564-1642) haciendo una gran cantidad de experimentos muy cuidadosos <sup>1</sup> fue el primero en afirmar que un cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza permanece en movimiento inalterado, que no es lo mismo que reposo. Isaac Newton (1642–1727) describió este concepto presentado por Galileo, mediante una formulación matemática y estableció la relación entre fuerza y aceleración de manera clara y precisa.

Ha sido tan importante el avance desarrollado por Newton que se denomina ahora mecánica newtoniana y se puede sintetizar en lo que se llaman las tres “leyes de Newton”. Hoy sabemos que la mecánica newtoniana tiene sus limitaciones, ya que no puede describir absolutamente todas las situaciones. En este sentido, puede verse como un caso especial (un caso límite) de teorías más generales. Sin embargo, también sabemos que este caso especial no es para nada restrictivo ya que comprende una variedad enorme de situaciones y de escalas de tamaño (desde los micrones hasta distancias astronómicas).

<sup>1</sup>Para medir velocidades es necesario medir distancias y tiempos, pero ¿cómo medía el tiempo Galileo? “En cuanto a la medición del tiempo, teníamos un gran recipiente lleno de agua, colocado en alto; al fondo de este recipiente se había soldado un tubo de diámetro pequeño que daba un delgado chorro de agua, a éste lo recogíamos en un vaso durante el tiempo de cada ... [medición]... El agua así recogida se pesaba después de cada descenso en una balanza muy exacta; las diferencias y relaciones de estos pesos nos daban las diferencias y relaciones de los tiempos, y con tal exactitud, que aunque la operación se repitiera muchas, muchas veces no había diferencias notables entre ellas.” *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, G. Galilei (1638)

Como toda ley física, las leyes de Newton son un modelo matemático que describe hechos naturales y se llega a ellas a través de la observación experimental. Es importante tener siempre presente que la observación sistemática y más precisamente la medición es el hecho esencial de la física, y es el punto de partida para toda descripción o modelo. La formulación de las leyes de Newton es el resultado de un larguísimo camino de intuiciones, errores y aciertos que llevó, como dijimos, alrededor de dos milenios. Por razones de tiempo, no repetiremos ese proceso en este curso, sino que presentaremos las leyes y luego mostraremos su correspondencia con la observación experimental, aunque el camino real haya sido el inverso.

## 1. Leyes de Newton

Su formulación matemática fue publicada por Isaac Newton en 1687 en su obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica*.

### 1.1. Primera ley

*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él.

Aquí se ve un cambio conceptual que termina con la física aristotélica: el reposo no tiene nada de particular respecto del movimiento rectilíneo uniforme (MRU). Los cuerpos tienden indistintamente a cualquiera de estos dos estados, según cuál sea la situación inicial: si por alguna razón un cuerpo está en MRU y no se aplica ninguna fuerza, seguirá con MRU; mientras que si estaba en reposo, seguirá en reposo (a menos que se aplique alguna fuerza). Entonces, no hace falta ejercer una fuerza “para que las cosas se muevan”, sino más bien, para que cambien su estado de movimiento.

Sabemos que reposo y movimiento de un cuerpo son dos conceptos ambiguos, a menos que se establezca un sistema de referencia respecto del cual se describa la posición del mismo. Entiéndase, entonces, que cuando hablamos de reposo o de MRU lo hacemos siempre respecto de un sistema de coordenadas.

¿Qué ocurre entonces con la heladera de la Fig. 1? Si el señor empuja hace fuerza, y si hace fuerza debería cambiar el estado de movimiento de la heladera, y si cambia el estado de movimiento debería pasar de estar en reposo a moverse, cosa que puede ocurrir o no. Para resolver esta aparente contradicción entre la primera ley y la realidad, pensemos en tres experimentos que incluyan al mismo señor y la misma heladera situada sobre distintas superficies: 1. piso de ladrillo, 2. piso de mármol y 3. piso de hielo. Aclaremos que en los tres casos el señor tiene un apoyo firme para aplicar su fuerza sin resbalarse.

Experimento 1: el señor empuja con todas sus fuerzas (que por cierto son bastante pocas) y no logra deslizar la heladera.

Experimento 2: el señor comienza a empujar sin lograr el objetivo, pero al incrementar la fuerza, finalmente logra deslizar la heladera.

Experimento 3: el señor consigue deslizar la heladera sin mayores esfuerzos.

Si el señor siempre es el mismo y la heladera siempre es la misma, puede concluirse que la superficie, que es lo único que varía, ejerce un papel decisivo en el movimiento de la heladera. En efecto, la superficie ejerce una fuerza, llamada de roce o rozamiento, que se opone a la acción de la persona que empuja. Entonces, no estamos hablando de una fuerza, sino de dos. “Las fuerzas impresas” sobre el cuerpo, o más precisamente, la acción conjunta de estas fuerzas es la que determina si hay cambio

o no en su estado de movimiento. No considerar la existencia y acción de las fuerzas de roce fue uno de los errores que se cometían en la antigüedad.

## 1.2. Segunda ley

*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

El cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

El cambio de movimiento debe entenderse como el cambio de la velocidad, del vector velocidad. Por lo tanto, este cambio de movimiento no es otra cosa que el vector aceleración. La segunda ley puede formularse entonces como

$$F \propto a. \quad (1)$$

Si consideramos el carácter vectorial de la aceleración, surge claramente que la fuerza también tiene un carácter vectorial. No sólo en virtud de la segunda ley, sino a partir de la experiencia, que nos dice que se obtienen efectos distintos si se empuja para una dirección o para otra; experiencia que, repetimos, es la que da origen a la segunda ley. Luego, una formulación más correcta sería:

$$\vec{F} \propto \vec{a}, \quad (2)$$

atribuyendo a la fuerza un carácter vectorial, en consonancia con el carácter vectorial de la aceleración que produce.

Para no caer en el mismo error de los antiguos, debemos considerar también las fuerzas de roce que actúan sobre el cuerpo en cuestión, o más generalmente, la acción conjunta de todas las fuerzas actuantes sobre ese cuerpo. Pero ¿cómo se determina la acción conjunta de distintas fuerzas aplicadas sobre un cuerpo? Para responder a esta pregunta, primero debemos establecer algún procedimiento para medir y aplicar fuerzas de manera controlable.

### 1.2.1. Resortes: ley de Hooke

Sabemos que si comprimimos un resorte una longitud  $\Delta l$  o lo estiramos una longitud  $\Delta l'$ , sentiremos que éste ejercerá sobre nosotros una fuerza tendiente a recuperar su longitud natural, como se muestra en la Fig. 2. La fuerza que ejerce el resorte tiene su misma dirección, la cual es horizontal en este ejemplo. Se comprueba experimentalmente que el módulo de esta fuerza es proporcional al módulo de la compresión (o estiramiento) del resorte:

$$F = k\Delta l, \quad (3)$$

donde la constante de proporcionalidad  $k$  es propia de cada resorte. La ec. (3) se denomina ley de Hooke. Cabe destacar que un resorte que se comprime una cantidad  $\Delta l$  ejerce la misma fuerza, pero de sentido contrario, que si se lo estira la misma longitud.

Estas cualidades permiten aplicar fuerzas dirigidas y cuantificadas, ya que a través de la ec.(3) es posible medir fuerzas con sólo medir distancias (elongación o contracción). Ahora pongamos a prueba el funcionamiento de este dispositivo “resorte”. Al aplicar la fuerza  $\vec{F}$  sobre un cuerpo, se comprueba experimentalmente que éste adquiere una aceleración  $\vec{a}$ , paralela a la fuerza, como se ve en la Fig. 3(a) y en concordancia con la segunda ley de Newton.

Por otra parte, se verifica experimentalmente que también se puede lograr la misma aceleración utilizando dos resortes que apliquen dos fuerzas de distinta dirección sobre un cuerpo, siempre que la resultante  $\vec{F}_3$  de estas fuerzas (sumadas como vectores) sea igual a la fuerza  $\vec{F}$  original. La situación

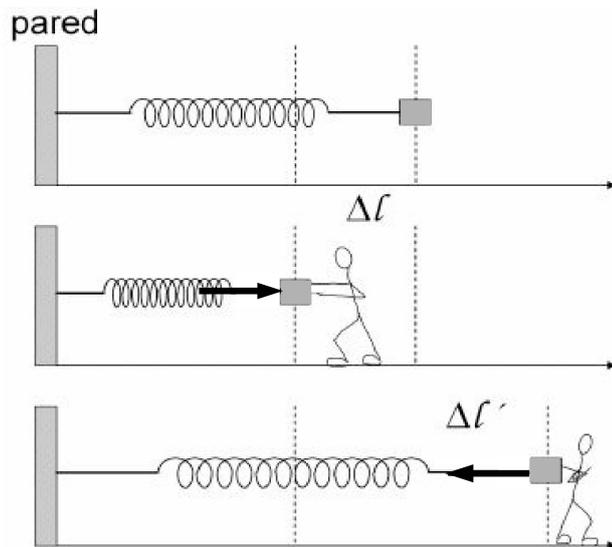


Figura 2: Compresión y estiramiento de un resorte con un extremo fijo a una pared.

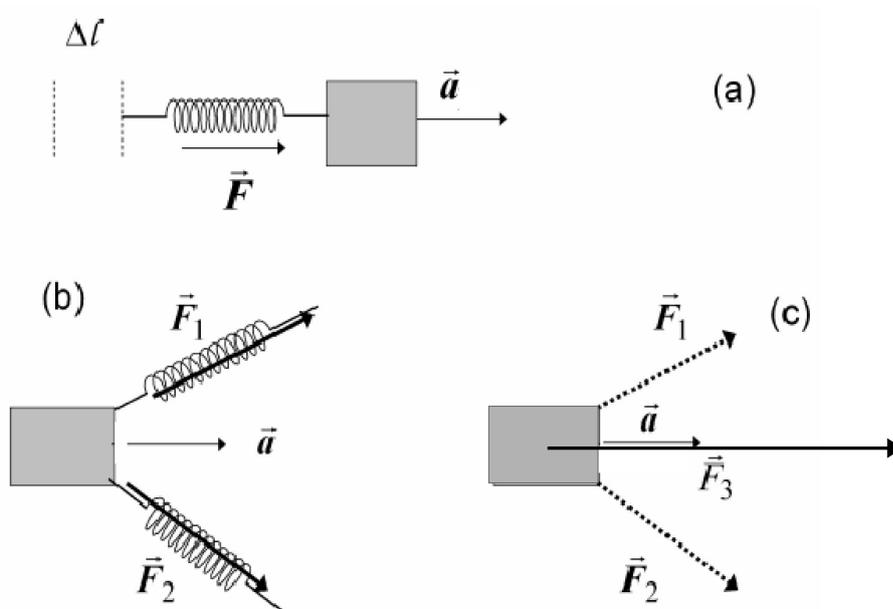


Figura 3: Fuerza aplicada por un único resorte (a) y por la combinación de dos resortes (b) y (c).

está representada en las Figs. 3(b) y 3(c). Vale decir, para resortes es fácil comprobar que las fuerzas se suman vectorialmente y esta comprobación puede extenderse a otras fuerzas, independientemente del mecanismo que las produzca, de manera que siempre se cumple que la resultante es  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Este resultado puede extenderse a un número arbitrario de fuerzas aplicadas sobre un cuerpo, con lo cual:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (4)$$

Ahora que hemos establecido cómo es el efecto conjunto de muchas fuerzas actuantes sobre un cuerpo, podemos volver a formular la relación (2) de manera que no nos olvidemos de ninguna fuerza (por ejemplo, las de rozamiento):

$$\sum_i \vec{F}_i \propto \vec{a}. \quad (5)$$

Para pasar de esta relación de proporcionalidad a una ecuación, deberíamos caracterizar la constante de proporcionalidad.

### 1.2.2. Masa inercial

Hagamos el siguiente experimento: Tomemos el cuerpo A, inicialmente en reposo, y apliquémosle una fuerza  $\vec{F}_1$  constante, luego midamos (a través de la medición de distancias y tiempos) la aceleración  $\vec{a}_1$  que adquiere. Ahora repetimos este experimento aplicando sucesivamente las fuerzas constantes  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ , etc. y midiendo las correspondientes aceleraciones  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$ , etc. Ahora analizamos los cocientes entre estas magnitudes y vemos que se verifica la siguiente (e importantísima) relación:

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{a}_1|} = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{a}_2|} = \frac{|\vec{F}_3|}{|\vec{a}_3|} = \dots = \text{constante} = m_A. \quad (6)$$

La constante  $m_A$  recibe el nombre de masa inercial del cuerpo A, o más suscintamente, masa del cuerpo A. La ec.(6) se satisface para cualquier cuerpo B, C, etc. Por lo tanto, se verifica que la masa inercial es una magnitud propia de cada cuerpo.

Recién ahora, que conocemos la constante de proporcionalidad, estamos en condiciones de formular matemáticamente la **segunda ley de Newton**:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}. \quad (7)$$

Es decir, si sobre un cuerpo de masa  $m$  se ejercen fuerzas  $\vec{F}_i$ , el cuerpo adquiere una aceleración  $\vec{a}$  y estas magnitudes están relacionadas a través de la ec.(7). Si aplicamos las mismas fuerzas a un cuerpo de gran masa y a un cuerpo de masa pequeña el segundo adquirirá mayor aceleración. Se verifica que las masas son aditivas, vale decir que si armamos una masa  $M$  a partir de un conjunto  $m_1, m_2, m_3, \dots$  y ejercemos una fuerza  $\vec{F}$  sobre ella, observamos que su aceleración es tal que

$$\vec{F} = M\vec{a}, \quad (8)$$

donde  $M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$

La segunda ley de Newton también establece cuál es la relación entre las unidades de fuerza, masa y aceleración:

$$[F] = [m][a]. \quad (9)$$

Para medir estas magnitudes físicas se han definido los siguientes sistemas de unidades:

cgs			MKS			Técnico		
long.	masa	t	long.	masa	t	fuerza	masa	t
cm	g	s	m	kg	s	$\vec{k}g$	UTM	s
	$[a] = \frac{cm}{s^2}$			$[a] \frac{m}{s^2}$			$1\vec{k}g = 9,8 \text{ kg} \frac{m}{s^2} = 9,8N$	
	$[F] = g \frac{cm}{s^2} = \text{dyna (dyn)}$			$[F] = kg \frac{m}{s^2} = \text{Newton (N)}$			$1 \text{ UTM} = \frac{\vec{k}g}{m/s^2} = 9,8 \frac{N}{m/s^2}$	

donde 1 UTM (unidad técnica de masa) es la masa que adquiere una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  cuando se le aplica una fuerza de  $1 \vec{k}g$ . Según la expresión  $F = k\Delta l$ , la constante  $k$  debe tener las siguientes unidades:

$$[k] = \frac{[F]}{[l]} = \frac{N}{m}, \quad \frac{dyn}{cm}, \quad \frac{\vec{k}g}{m}. \quad (10)$$

### 1.2.3. Sistemas inerciales y sistemas no inerciales

Consideremos el siguiente experimento: una persona A está sentada en el interior de un vagón de un tren de carga (no puede ver el exterior). Sobre el piso del vagón está apoyado un bloquecito de hielo, y podemos considerar que entre el hielo y el piso no hay rozamiento. En un dado momento, el tren arranca con aceleración de módulo  $a$  hacia la derecha (ver Fig. 4).

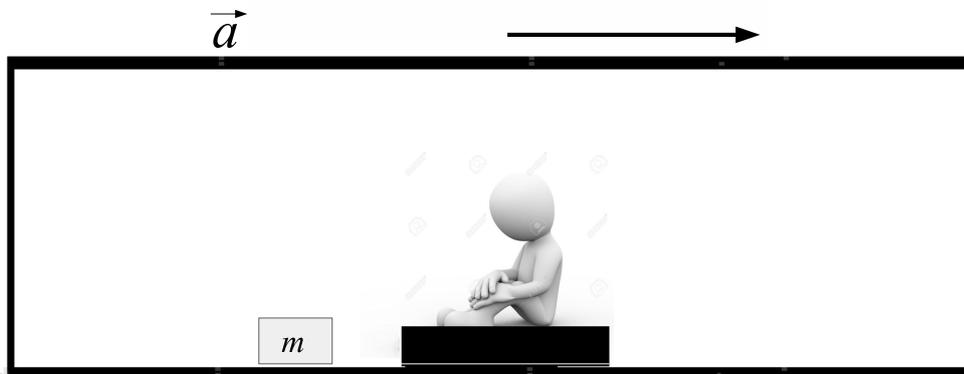


Figura 4: Una persona sentada en un sistema no inercial.

Como el vagón está cerrado, la persona en su interior no sabe qué ocurre en el exterior, pero observa cómo el hielo comienza a deslizar, acercándose hacia la pared izquierda de la caja con aceleración de módulo  $a$ . Es decir, sin que ninguna fuerza se haya aplicado sobre el bloquecito de hielo, ve cómo este se acelera hacia la izquierda. La masa del hielo es  $m$ , su aceleración es  $\vec{a}$ , distinta de cero, ¡pero la fuerza es cero! En conclusión, la segunda ley de Newton no vale para A (ni la primera).

Un observador B situado en el exterior del vagón vería que este se acelera hacia la derecha con aceleración de módulo  $a$  y además (si tuviera acceso a lo que pasa adentro, por ejemplo a través de un circuito de televisión) vería que el hielo permanece en reposo, al menos hasta que choque contra la pared izquierda. Entonces, para B, el bloque de hielo, al que no se le aplica ninguna fuerza, permanece en reposo. Es decir, para B valen las leyes de Newton y para A, no.

Los sistemas de referencia donde valen las leyes de Newton se denominan sistemas inerciales. Todos los sistemas inerciales guardan entre sí una relación de MRU (considerando el reposo como un caso particular de MRU). Es decir, si un sistema de referencia es inercial, cualquier otro sistema que se mueva respecto del primero con velocidad  $\vec{v}$  constante es también un sistema inercial. Por otro lado, un sistema de referencia que está acelerado respecto de un sistema inercial es un sistema no inercial y en él **no valen las leyes de Newton**.

Ahora que hemos definido sistemas inerciales y sistemas no inerciales, vale la pena hacer un comentario sobre las dos primeras leyes de Newton. Si en la expresión matemática de la segunda ley ponemos  $\sum_i \vec{F}_i = 0$ , obtenemos  $\vec{a} = 0$ , o sea, si no se ejerce ninguna fuerza neta, el cuerpo “persevera” en su estado de movimiento, sea éste reposo o MRU, es decir, llegamos a la primera ley. ¿Podemos pensar la primera ley como un caso particular de la segunda? Sí, podemos, pero no lo haremos. En lugar de eso resulta conceptualmente más claro reservar para la primera ley un carácter cualitativo, que involucra la existencia de los sistemas inerciales. En este sentido, podemos reformular la primera ley de la siguiente forma:

*Existen sistemas de referencia (los sistemas inerciales) en los cuales se cumple que todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él.*

La existencia de los sistemas inerciales no es tan trivial y supone una idealización, ya que es difícil encontrar sistemas que no estén acelerados. Por ejemplo, nuestro sistema referencial por excelencia: la Tierra, está acelerado ya que cualquier punto de su superficie describe un movimiento circular con

respecto al eje de rotación<sup>2</sup>. Ni siquiera los puntos de su eje están exentos de aceleración, ya que éste describe una órbita elíptica alrededor del sol<sup>3</sup>. De todas maneras, las aceleraciones involucradas son suficientemente pequeñas y pueden despreciarse en la mayoría de las situaciones que estudiaremos.

La segunda ley, en cambio, da por sentado la existencia de los sistemas inerciales y tiene matices más cuantitativos. Podríamos reformularla de esta manera:

*Dado que existen los sistemas inerciales, si nos referimos a uno de ellos, se cumple que  $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$*

### 1.3. Tercera ley

*Actioni contrariam semper & aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales & in partes contrarias dirigi.*

Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: quiere decir que las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto.

Aquí la palabra “acción” significa “fuerza”. La tercera ley establece que si un cuerpo A ejerce una fuerza  $\vec{F}_{AB}$  sobre un cuerpo B, el cuerpo B ejerce una fuerza  $\vec{F}_{BA}$  sobre el cuerpo A, de manera que  $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ .

Consideremos dos astronautas A y B flotando en el espacio intergaláctico. Supongamos que A empuja a B ejerciéndole la fuerza  $\vec{F}_{AB}$ . En el mismo acto (aunque no se lo proponga), B ejerce la fuerza  $\vec{F}_{BA}$  sobre A. Si sumamos estas dos fuerzas obtenemos cero, ya que  $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ , aunque los dos astronautas adquieran aceleraciones distintas de cero. Esto no contradice en absoluto la segunda ley, ya que en ella se habla de fuerzas ejercidas sobre **un** cuerpo y en la tercera ley se habla de fuerzas mutuas, es decir, ejercidas sobre **dos** cuerpos distintos.

## 2. Aplicación de las leyes de Newton

Según las leyes de Newton, particularmente la segunda, las fuerzas aplicadas a un cuerpo ejercen una influencia sobre la velocidad que éste experimenta. Con ello, podemos decir que si conocemos las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo seremos capaces de describir cómo es su movimiento. Pero antes, debemos poder establecer claramente la posición del cuerpo objeto de estudio.

### 2.1. Masa puntual

Hasta aquí hemos analizado la relación entre el movimiento de los cuerpos y las fuerzas aplicadas sobre ellos, pero nada hemos dicho sobre la forma ni las dimensiones de los cuerpos. Sólo les hemos asignado una única cualidad: la masa. Aun sin haber mencionado el tamaño de los objetos, hemos podido describir su movimiento de traslación, es decir, los hemos considerado como puntos materiales incapaces de tener rotaciones intrínsecas. Esto significa que se trata de un único punto, o bien todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad (el cuerpo se traslada paralelo a sí mismo). Sin embargo, las leyes de Newton son válidas para describir la dinámica de cuerpos extensos, incluyendo rotaciones, que estudiaremos más adelante. Por ahora entenderemos que un cuerpo (de masa  $m$ ) ocupa una posición puntual en el espacio y describiremos su movimiento, es decir, cómo varía esa posición puntual con el tiempo. Masa puntual, punto material o partícula son términos usados indistintamente en este contexto.

---

<sup>2</sup>La aceleración centrípeta de un punto sobre el ecuador debido a la rotación de la tierra alrededor de su eje es de aproximadamente  $0,034 \text{ m/s}^2$ .

<sup>3</sup>La aceleración del eje de la tierra debido a su rotación alrededor del sol es de aproximadamente  $0,006 \text{ m/s}^2$ .

## 2.2. Ecuaciones de movimiento

La dinámica estudia el problema del movimiento a partir de las causas que lo originan. El gran avance que propone la segunda ley de Newton es el ofrecer una ecuación, una expresión matemática que relaciona las variaciones del estado de movimiento con su causa. Sin embargo, esta ley no nos proporciona un modelo para describir cómo es la interacción sino que, dada una interacción permite describir cómo es el movimiento.

Recordemos que el estudio de la cinemática nos enseñó que

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} . \quad (11)$$

Combinando esta ecuación vectorial con la segunda ley de Newton se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales —es decir, ecuaciones que relacionan una función con sus derivadas— que se conocen como ecuaciones de movimiento.

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} . \quad (12)$$

Para resolver cualquier problema de mecánica (newtoniana) de una masa puntual, se pueden seguir los siguientes pasos:

- Elegir el sistema de coordenadas que se toma como referencia para  $\vec{F}$  y  $\vec{a}$ .
- Escribir las ecuaciones de movimiento en ese sistema de coordenadas. Por ejemplo, si se ha elegido un sistema de coordenadas cartesianas, las ecuaciones son de la forma

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} ; F_y = m \frac{d^2y}{dt^2} ; F_z = m \frac{d^2z}{dt^2} . \quad (13)$$

- Sustituir en  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$ , expresiones que contengan a las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  (y eventualmente el tiempo), a partir de información adicional que se tenga sobre la naturaleza de las fuerzas interactuantes. Es decir, ser capaces de escribir:

$$F_x(x, y, z, t) = m \frac{d^2x}{dt^2} ; F_y(x, y, z, t) = m \frac{d^2y}{dt^2} ; F_z(x, y, z, t) = m \frac{d^2z}{dt^2} . \quad (14)$$

- Resolver estas ecuaciones para encontrar las funciones de movimiento, o sea la expresión del vector posición de la masa puntual en función del tiempo,  $\vec{r}(t)$ . O bien  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  si es que se utilizan coordenadas cartesianas para describir el movimiento.

Es importante hablar con precisión para evitar confusiones: se llaman *ecuaciones de movimiento* a las expresiones dadas en ec. (14) y se llaman *funciones de movimiento* a las expresiones particulares de  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  que resulten de la resolución de las ecuaciones de movimiento.

Si los datos son la masa del cuerpo y las componentes de la fuerza, para encontrar las funciones de movimiento hay que resolver tres ecuaciones diferenciales de segundo orden<sup>4</sup> en donde aparecerán dos constantes de integración. Recordemos que ya se han enfrentado a este tipo de problemas antes. La única diferencia es que ahora tenemos como dato la fuerza que produce la aceleración. Ahora queda claro porqué las funciones aceleración  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$ ,  $a_z(t)$  pueden ser funciones discontinuas. Como para que haya aceleración necesariamente debe haber una fuerza aplicada, al quitar tal fuerza la aceleración se anula de inmediato.

---

<sup>4</sup>El orden de una ecuación diferencial está dado por el término con derivadas de mayor orden.

### 2.2.1. Algunos ejemplos

#### 1. Masa puntual en equilibrio

Se denomina equilibrio, para un cuerpo puntual, a la situación en la cual sobre dicho cuerpo no actúa ninguna fuerza, o más precisamente, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es nula. Considerando la segunda ley de Newton, es fácil ver que toda partícula en reposo, o en MRU está en equilibrio.

Para resolver este problema se elige un sistema de coordenadas y se plantean en él las ecuaciones de movimiento y se las resuelve teniendo en cuenta las condiciones iniciales (que son tantas como el orden de la ecuación diferencial, o sea dos para cada coordenada). En este caso,  $\vec{F} = 0$ , con lo cual,  $\vec{a} = 0$ , es decir,

$$\begin{aligned}0 = a_x &\Rightarrow v_x = \int a_x(t)dt = v_{0x} \Rightarrow x(t) = \int v_x(t)dt = v_{0x}t + x_0 \\0 = a_y &\Rightarrow v_y = \int a_y(t)dt = v_{0y} \Rightarrow y(t) = \int v_y(t)dt = v_{0y}t + y_0 \\0 = a_z &\Rightarrow v_z = \int a_z(t)dt = v_{0z} \Rightarrow z(t) = \int v_z(t)dt = v_{0z}t + z_0 .\end{aligned}\tag{15}$$

Estas son las funciones de movimiento que corresponden a un movimiento rectilíneo y uniforme, un caso particular del cual sería el reposo, para el que se cumple que  $v_{0x} = v_{0y} = v_{0z} = 0$ .

#### 2. Fuerza constante

Dentro de este ejemplo consideraremos el caso particular del movimiento de un objeto sujeto a la fuerza de atracción gravitacional, cuya cinemática fue estudiada en el capítulo 4. Se comprueba experimentalmente que en las inmediaciones de la superficie de la Tierra, todo cuerpo experimenta una aceleración de arriba hacia abajo de módulo  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , debida a una fuerza que ejerce la Tierra sobre el cuerpo, denominada peso ( $\vec{P}$ ). La segunda ley de Newton nos dice entonces que  $\vec{P} = m\vec{g}$ . Esta relación es la que da origen al sistema técnico de unidades, ya que en ese sistema un cuerpo de 1 kg de masa tiene un peso de 1 kg.

Consideremos entonces una masa puntual  $m$  arrojada con velocidad inicial de módulo  $v_0$  formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Llamaremos  $x$  e  $y$  a las coordenadas del plano horizontal y  $z$  a la dirección vertical, de manera que el movimiento se desarrolla en el plano vertical  $x-z$ . Si despreciamos el rozamiento del aire, el cuerpo se verá afectado solamente por la fuerza peso; es decir, solamente tendrá una aceleración  $a_z = -g$ . Eligiendo adecuadamente el origen del sistema de coordenadas, las condiciones iniciales del movimiento son:

$$\begin{aligned}v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) \neq 0; \quad v_{0y} = 0; \quad v_{0z} = v_0 \sin(\alpha) \neq 0; \\x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad z_0 = 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Las tres ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned}\frac{F_x}{m} = a_x = 0; \\ \frac{F_y}{m} = a_y = 0; \\ \frac{F_z}{m} = a_z = -g.\end{aligned}\tag{17}$$

Integrando y utilizando las condiciones iniciales se obtiene:

$$\begin{aligned}v_x = \int a_x(t)dt = v_0 \cos(\alpha) &\Rightarrow x(t) = \int v_x(t)dt = v_0 \cos(\alpha)t; \\v_y = \int a_y(t)dt = 0 &\Rightarrow y(t) = \int v_y(t)dt = 0; \\v_z = \int a_z(t)dt = -gt + v_0 \sin(\alpha) &\Rightarrow z(t) = \int v_z(t)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t.\end{aligned}\tag{18}$$

Como ya se hizo en el estudio de la cinemática, la ecuación de la trayectoria  $z = z(x)$  se obtiene eliminando el tiempo de las funciones de movimiento. Entonces, despejando  $t$  de la ecuación para  $x(t)$

tenemos:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} . \quad (19)$$

Sustituyendo este valor de  $t$  en  $z(t)$  resulta finalmente:

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \operatorname{tg}(\alpha)x , \quad (20)$$

que es la ecuación de una parábola.

### 3. Energía

Para explicar el concepto de energía vamos a utilizar una situación particular, que es el movimiento de un cuerpo bajo la acción de la gravedad (en las inmediaciones de la superficie terrestre). Usando la segunda ley de Newton podemos escribir la fuerza  $\vec{F} = \vec{P}$ , que la tierra ejerce sobre los cuerpos, como  $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{k}$ . Si usamos como condiciones iniciales  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y  $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$  y el mismo sistema de coordenadas del ejemplo anterior, se obtienen las velocidades y funciones de movimiento estudiadas en el capítulo 4 para tiro parabólico:

$$\begin{aligned} v_x = v_{0x} & \Rightarrow x(t) = v_{0x}t + x_0 \\ v_y = v_{0y} & \Rightarrow y(t) = v_{0y}t + y_0 \\ v_z = -gt + v_{0z} & \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 . \end{aligned} \quad (21)$$

A partir del resultado previo podemos expresar el módulo de la velocidad en función de las coordenadas a lo largo del movimiento; en particular, de la coordenada  $z$ :

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 \equiv v^2 & = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + (v_{0z} - gt)^2 \\ & = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 + (gt)^2 - 2gv_{0z}t \\ & = v_0^2 - 2g(v_{0z}t - \frac{gt^2}{2}) \\ & = v_0^2 - 2g(z - z_0) . \end{aligned} \quad (22)$$

Ahora dejemos de un lado de la igualdad las magnitudes referidas al tiempo  $t$  y del otro, las referidas al instante inicial.

$$v^2 + 2gz = v_0^2 + 2gz_0 , \quad (23)$$

donde podemos notar que todo el miembro de la izquierda es igual al de la derecha para todo tiempo, es decir, es una constante de movimiento. En general, para cualquier movimiento no se conserva ni la posición, ni la velocidad, ni la aceleración; por este motivo, encontrar cosas que sí se conserven a lo largo del tiempo, o sea, constantes de movimiento tiene un significado muy especial. Si multiplicamos la ecuación precedente por  $m/2$ , obtenemos una nueva constante de movimiento:

$$E_M \equiv \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 . \quad (24)$$

La constante  $E_M$  se denomina energía mecánica del sistema. Cuando decimos *sistema* nos referimos a la masa puntual y al agente externo que ejerce fuerzas sobre ella; en este caso particular, el sistema es una masa  $m$  sometida a la acción de la fuerza constante peso. El hecho de que  $E_M$  sea una constante de movimiento significa que si se conoce la velocidad inicial y la posición inicial (en el eje  $z$ ) de un cuerpo sometido a la fuerza peso, se puede calcular el valor de la energía mecánica con estas condiciones iniciales y no cambiará durante todo el movimiento.

Podemos ahora diferenciar entre los dos términos que conforman  $E_M$ . Le llamaremos *energía cinética*<sup>5</sup> al término que involucra la velocidad y *energía potencial* al que contiene la posición. Debe notarse sin embargo, que cada uno de estos términos por separado **no** es una constante de movimiento: pueden variar a lo largo del tiempo de manera que su suma sea siempre la misma.

<sup>5</sup>cinético/a: adj. Perteneciente o relativo al movimiento. Del griego κινητικός: que mueve.

Veamos otra forma de obtener esta constante de movimiento:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt} = \frac{dv_z}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dv_z}{dz} v_z = \frac{d}{dz} \left( \frac{v_z^2}{2} \right) . \quad (25)$$

Entonces,

$$-g = \frac{d}{dz} \left( \frac{v_z^2}{2} \right) , \quad (26)$$

o bien,

$$\frac{d}{dz} (-gz) = \frac{d}{dz} \left( \frac{v_z^2}{2} \right) . \quad (27)$$

Multiplicando esta última ecuación por  $m$  y reagrupando convenientemente se obtiene:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2} m v_z^2 + m g z \right) = 0 . \quad (28)$$

El término entre paréntesis no depende de  $z$ , puesto que su derivada con respecto a esa coordenada es nula; es decir, durante el movimiento, aquel término permanecerá constante. Magnitudes de ese tipo se denominan constantes de movimiento. Para llegar a la expresión de la energía mecánica del sistema presentada en la ec.(24) es necesario considerar también lo que ocurre en las otras coordenadas. Sabemos que las componentes de la velocidad,  $v_x$  y  $v_y$ , son constantes y que, por lo tanto, sus derivadas se anulan. Entonces, basándonos en la ec.(28) podemos escribir:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2} m v_z^2 + m g z + \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 \right) = 0 , \quad (29)$$

es decir:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2} m v^2 + m g z \right) = 0 , \quad (30)$$

que nos lleva a la conservación de la energía mecánica  $E_M$  de la ec.(24).

La conservación de la energía mecánica es un concepto clave en la Física. Como se verá, existe una variedad de cantidades que se conservan, que son constantes de movimiento. Su valor numérico permanece constante durante todo el movimiento y está, entonces, totalmente determinado por las condiciones iniciales de la partícula en cuestión. La utilidad de las magnitudes conservadas radica en que permiten obtener información acerca del movimiento de un cuerpo o de un sistema de cuerpos interactuantes.

Como ejemplo de aplicación de este concepto veamos el siguiente problema: Calcule la velocidad vertical  $v_0$  que debe dársele, desde el suelo, a un ladrillo para alcanzárselo a un albañil que está en el techo de una casa de una planta. Considere que el ladrillo es lanzado desde una altura inicial  $z_0$  y recibido en un altura final  $z_f$  m con velocidad  $|v_f| = 0$ .

Usando la ec.(24):

$$\frac{1}{2} m v_f^2 + m g z_f = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0 . \quad (31)$$

En nuestro caso,  $v_f^2 = 0$ , con lo cual es fácil despejar la velocidad inicial:

$$v_0 = \sqrt{2g(z_f - z_0)} , \quad (32)$$

que es el mismo resultado que obtendríamos usando solamente la cinemática, sólo que en **un** paso. Sin embargo, resolviendo el problema como sabíamos antes, obtendríamos más información sobre cómo se realiza el movimiento. Como siempre, hay que escoger la herramienta adecuada según lo que se busque.

La ec.(24) nos dice que la energía es una magnitud que tiene unidades de masa por velocidad al cuadrado, o bien, de fuerza por distancia. Luego, en el caso de utilizar el sistema MKS,

$$[E] = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N m} \equiv \text{Joule (J)} . \quad (33)$$

Análogamente, en cgs:

$$[E] = \text{g} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = \text{dyn cm} \equiv \text{ergio (erg)} . \quad (34)$$

## 4. Diversas fuerzas aplicadas sobre una masa puntual

Vamos a tratar de aplicar las leyes de Newton a situaciones en las que varias fuerzas se ejercen al mismo tiempo sobre una masa puntual. Debe entenderse que aunque dibujemos objetos extensos, por ejemplo, bloques, esto es un recurso para facilitar la comprensión de los esquemas, pero por ahora vamos a pensar solamente en partículas. Hasta aquí hemos hablado de la fuerza peso y de la fuerza que ejerce un resorte; en esta sección introduciremos algunas fuerzas más.

### 4.1. Tensión de una cuerda

Los elementos hilo, cuerda, cable, sogas, etc. con que trataremos tienen la cualidad de transmitir fuerzas pero los consideramos inextensibles, es decir que nunca se comportan como resortes; además pensaremos que no tienen masa. Se suele definir este comportamiento como de *cuerda ideal*. Cuando un hilo se ata a un cuerpo y se tira de él, el hilo atrae el cuerpo con una fuerza  $\vec{T}$  que sale del cuerpo en la dirección del hilo. Ésta se denomina fuerza de tensión porque la cuerda o hilo están en un estado de tensión. El hilo sirve para conducir la fuerza que un agente externo hace para ponerlo en tensión, desde el agente externo hacia el cuerpo al que está atado el hilo, de manera que la tensión que ejerce el agente sobre la cuerda tiene la misma magnitud que la fuerza ejercida por el hilo sobre el cuerpo.

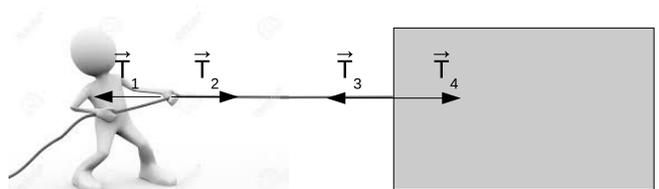


Figura 5: Tensión de una cuerda.

Consideremos la fuerza  $\vec{T}_1$  que la persona de la Fig. 5 ejerce sobre la cuerda. Por la tercera ley de Newton, la cuerda ejerce una fuerza igual y opuesta  $\vec{T}_2$  sobre la persona. Ahora bien, como la cuerda sólo *conduce* la fuerza que hace la persona, el otro extremo de la cuerda ejerce una fuerza  $\vec{T}_3$ , también de igual magnitud, sobre el bloque. Finalmente, apelando otra vez a la tercera ley de Newton, el bloque ejerce sobre la cuerda una fuerza  $\vec{T}_4$  igual y opuesta a  $\vec{T}_3$ .

Supongamos que el sistema está en equilibrio; por ejemplo, pensemos que el bloque está atado a una pared. Es fácil corroborar que efectivamente la cuerda sólo conduce la fuerza  $\vec{T}_1$  hacia el bloque, es decir,  $\vec{T}_1 = \vec{T}_3$ . Si no fuera así,  $\vec{T}_4$  que es igual a  $\vec{T}_3$ , debería ser distinto de  $\vec{T}_1$ , es decir, las dos fuerzas aplicadas a la cuerda  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_4$  tendrían módulos diferentes y así, la suma vectorial de ellas sería distinta de cero. Entonces, por la segunda ley de Newton, la cuerda debería estar acelerada hacia alguna de las dos direcciones y esto es imposible, ya que partimos de un sistema (incluida la cuerda) en equilibrio.

#### Diagrama de cuerpo aislado

Vamos a mostrar una forma sencilla de visualizar las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo; para ello consideraremos un ejemplo que combina los tres tipos de fuerza que hemos discutido hasta ahora: tensión de una cuerda  $\vec{T}$ , fuerza ejercida por un resorte  $\vec{F}$  y peso  $\vec{P}$ .

Sea un cuerpo de masa  $m$ , en equilibrio, suspendido conjuntamente de un hilo y de un resorte de constante  $k$ , de tal forma que la longitud del hilo es mayor que la longitud natural  $\ell_0$  del resorte.

En la Fig. 6a) se muestra un esquema del cuerpo de masa  $m$  y todos los elementos que intervienen, particularmente el sistema de coordenadas elegido. En la Fig. 6b) se muestra solamente el cuerpo y el resto de los elementos ha sido reemplazado por las fuerzas que ellos producen sobre el cuerpo. A esto se lo conoce como diagrama de cuerpo aislado y es uno de los primeros pasos necesarios para plantear un problema de dinámica de una partícula.

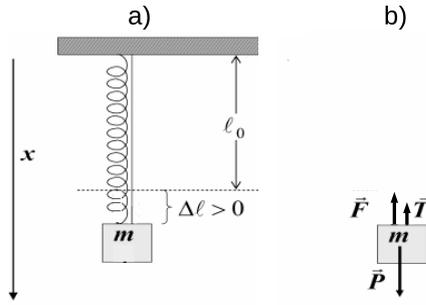


Figura 6: Diagrama de cuerpo aislado.

Como el sistema, es decir, el conjunto de elementos que interactúan (cuerpo, resorte, hilo, planeta Tierra) está en equilibrio, la segunda ley de Newton nos dice que:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = 0. \quad (35)$$

Para poder dar una expresión matemática a estas fuerzas, se elige un sistema de coordenadas. La simetría del problema sugiere un sistema unidimensional como el que se ha indicado en la Fig. 6a). En este sistema de coordenadas,

$$\vec{F} = -k|\Delta\ell|\hat{i}, \quad \vec{P} = mg\hat{i}, \quad \vec{T} = -|\vec{T}|\hat{i}. \quad (36)$$

Nótese que la fuerza del resorte es hacia arriba en este caso (apunta en sentido  $-\hat{i}$  en este sistema de coordenadas), y  $\Delta\ell$  es positivo por tratarse de una elongación. Reemplazando estas expresiones en la ec.(35) y considerando la componente según  $\hat{i}$ , que es la única relevante en el problema, se obtiene

$$-k|\Delta\ell| + mg - |\vec{T}| = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{T}| = mg - k|\Delta\ell|. \quad (37)$$

Vemos así que la tensión del hilo es menor que el peso;  $|\vec{T}| < mg$ , porque el resorte estirado “ayuda” a sostener el cuerpo colgado.

Para mayor claridad consideraremos también el caso en el que el cuerpo de masa  $m$  está en equilibrio, suspendido de una cuerda y un resorte, pero en esta situación el resorte está comprimido, ya que la cuerda tiene una longitud menor que la longitud natural del resorte (ver Fig. 7).

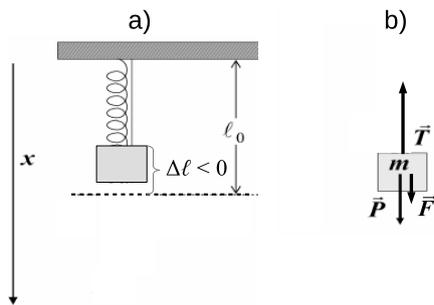


Figura 7: Diagrama de cuerpo aislado.

A partir de la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = 0. \quad (38)$$

Si elegimos el mismo sistema de coordenadas que en el ejemplo anterior,

$$\vec{F} = k|\Delta\ell|\hat{i}, \quad \vec{P} = mg\hat{i}, \quad \vec{T} = -|\vec{T}|\hat{i}. \quad (39)$$

Ahora la fuerza del resorte apunta hacia abajo (en sentido  $\hat{i}$ ), y si bien  $\Delta\ell$  es negativo por tratarse de una compresión, hemos elegido utilizar el módulo de  $\Delta\ell$ , para dejar en evidencia el sentido positivo de la fuerza del resorte. Reemplazando estas expresiones en la ec.(38) y considerando nuevamente la componente según  $\hat{i}$ , se obtiene

$$k|\Delta\ell| + mg - |\vec{T}| = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{T}| = mg + k|\Delta\ell|. \quad (40)$$

Vemos así que la tensión del hilo es mayor que el peso;  $|\vec{T}| > mg$ , porque el resorte comprimido “ayuda” al peso a empujar el cuerpo hacia abajo.

### Cuerpo que no está en equilibrio

Analicemos otro ejemplo donde se requiere averiguar la tensión que ejerce una cuerda. Veamos ahora cómo tratar cuerpos que no están en equilibrio. Calculemos cuál es la tensión que ejerce el cable que sostiene un ascensor cuando éste sube con aceleración  $\vec{a}$ .

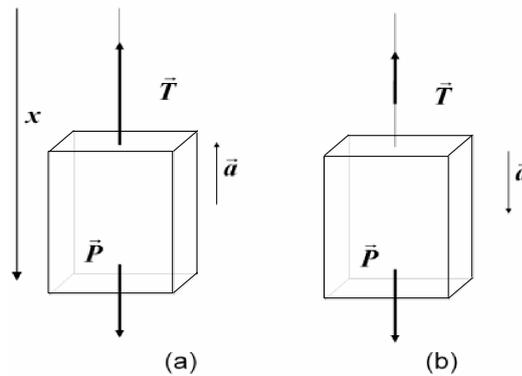


Figura 8: Diagrama de cuerpo aislado de un ascensor que (a) sube o (b) baja, con aceleración  $\vec{a}$ .

En la Fig. 8 se ha dibujado el diagrama de cuerpo aislado del problema. Al diagrama de cuerpo aislado se le ha añadido una indicación sobre el vector aceleración en el caso en que el ascensor sube (a) o baja (b). Otra vez se ha elegido la dirección positiva de las coordenadas hacia abajo. La segunda ley de Newton implica que

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T} &= m\vec{a} \\ mg - |\vec{T}| &= ma \\ |\vec{T}| &= m(g - a). \end{aligned} \quad (41)$$

Hay que notar que la primera ecuación es vectorial, pero a partir de la segunda se trabaja con las componentes de los vectores en el sistema de coordenadas elegido. Si bien  $g$  es una cantidad positiva cuyo valor estimado de  $9,8 \text{ m/s}^2$  y  $|\vec{T}|$  es siempre positivo, la componente  $a$  de la aceleración será negativa o positiva, según el ascensor esté acelerado hacia arriba o hacia abajo, respectivamente. El mayor valor de  $|\vec{T}|$  se dará cuando  $a$  sea negativo, es decir, cuando el ascensor se acelere hacia arriba, lo cual está de acuerdo con lo que se puede intuir. Por otro lado, puede verse que si el ascensor es acelerado hacia abajo con la aceleración de la gravedad (es decir, cae), la tensión se anula.

## 4.2. Fuerzas de contacto

Si apoyamos un cuerpo de masa  $m$  sobre una superficie horizontal como se muestra en la Fig. 9. El cuerpo tiene peso y está en reposo, de manera que tiene que haber una fuerza más que equilibre la acción de  $\vec{P}$ . Esa fuerza está provista por la superficie de apoyo y la denominamos fuerza normal  $\vec{N}$  o reacción del plano, o fuerza de contacto. Una forma de pensar el problema es que un cuerpo o sistema de cuerpos denominado *vínculo* limita el movimiento de la partícula que se desea estudiar; en ese marco, las fuerzas de contacto son también llamadas fuerza de vínculo.

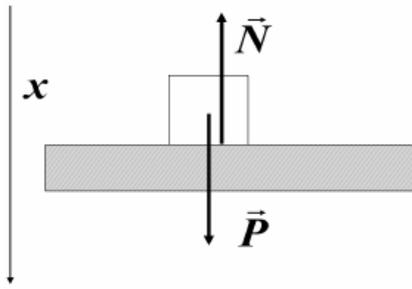


Figura 9: Fuerza de contacto.

$$\begin{aligned} \vec{N} + \vec{P} = 0 &\Rightarrow \vec{N} = -\vec{P} \\ \vec{P} = mg\hat{i} &\Rightarrow \vec{N} = -mg\hat{i}. \end{aligned} \quad (42)$$

El vínculo (plano de apoyo) ejerce una fuerza perpendicular a la superficie, que en este caso particular es igual al peso del cuerpo. Notemos que si la fuerza fuera menor, entonces el cuerpo se hundiría en la mesa y si fuera mayor sería expulsado. Por otra parte si el vínculo fuera capaz de ejercer fuerzas paralelas a la superficie, entonces tales fuerzas podrían acelerar (o frenar) el cuerpo. En síntesis, mientras el vínculo existe, provee la fuerza necesaria para que se cumplan las leyes de Newton.

### Ejemplo

Veamos el caso de la Fig. 10a) en que al cuerpo apoyado sobre una superficie lisa se le aplica una fuerza que, expresada en el sistema de coordenadas de la figura es  $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ . Mientras que  $\vec{P} = -mg\hat{j}$  y  $\vec{N} = N\hat{j}$ .

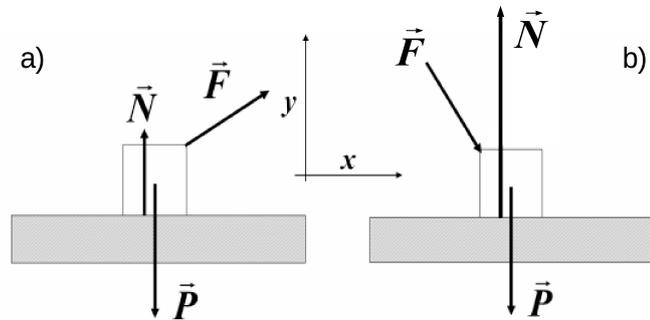


Figura 10: Fuerza de contacto. a) La fuerza aplicada  $\vec{F}$  tiene componente hacia arriba. b) La fuerza aplicada  $\vec{F}$  tiene componente hacia abajo.

El cuerpo sometido a la acción de estas fuerzas no está en equilibrio ya que aunque la suma de las componentes verticales de las fuerzas sea nula, una sola de las fuerzas tiene proyección sobre el eje horizontal (no hay otra fuerza que la equilibre). Por lo tanto el cuerpo sólo podrá moverse en la dirección horizontal, es decir que el vector aceleración sólo tendrá una componente no nula en esta dirección. Se cumple la segunda ley de Newton:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}, \quad (43)$$

que en componentes queda:

$$\begin{aligned} \text{en } x : & \quad F_x = ma_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m}; \\ \text{en } y : & \quad N - mg + F_y = 0 \Rightarrow N = mg - F_y, \end{aligned} \quad (44)$$

donde vemos que sólo la componente horizontal de  $\vec{F}$  es causante de la aceleración. La fuerza normal es menor o igual que el peso del cuerpo; su módulo sería igual al peso sólo en el caso en que  $F_y = 0$ . Cabe notar que

- si  $F_y = mg$ , entonces el vínculo no ejercería acción alguna, es decir,  $N = 0$ ;
- si  $F_y > mg$  la ec. previa sugiere que  $N < 0$ , pero esto es un contrasentido porque el vínculo sólo es capaz de evitar que el cuerpo se hunda en su seno, pero no es capaz de “atraer” el cuerpo hacia sí. Físicamente, lo que ocurre es que el cuerpo ya no está en contacto con el piso. Por lo tanto hay que escribir nuevamente las ecs. precedentes teniendo en cuenta que la normal será nula (si no hay contacto, no hay fuerzas de contacto) y la aceleración tendrá componentes en las direcciones  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} \text{en } x : \quad F_x &= ma_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m} ; \\ \text{en } y : \quad -mg + F_y &= ma_y \Rightarrow a_y = \frac{F_y}{m} - g . \end{aligned} \quad (45)$$

Un caso similar es el que se representa en la Fig. 10b) en que ahora la fuerza  $\vec{F}$  es aplicada hacia abajo. Como ya es costumbre, para analizar esta situación seguimos los siguientes pasos:

- Identificar el o los cuerpos cuyo movimiento (o equilibrio) se quiere estudiar.
- Reconocer cuáles son las fuerzas que actúan sobre él.
- Dibujar el diagrama de cuerpo aislado, como el de la Fig. 10b).
- Escribir la ecuación de la segunda ley de Newton en forma vectorial.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a} . \quad (46)$$

- Elegir el sistema de coordenadas que resulte conveniente. En este caso, en el sistema  $x, y$  de la Fig. 10 la fuerza  $\vec{F}$  tiene componentes  $F_x > 0$  y  $F_y < 0$ . Con esta elección, los vectores de la ecuación anterior quedan:  $\vec{P} = -mg\hat{j}$ ,  $\vec{N} = N\hat{j}$ ,  $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$  y  $\vec{a} = a\hat{i}$ .
- Escribir la segunda ley de Newton en componentes.

$$\begin{aligned} \text{en } x : \quad F_x &= ma \Rightarrow a = \frac{F_x}{m} ; \\ \text{en } y : \quad N - mg + F_y &= 0 \Rightarrow N = mg - F_y . \end{aligned} \quad (47)$$

- Resolver, es decir, encontrar las cantidades incógnitas en términos de las cantidades conocidas. En este caso estamos analizando cómo es la fuerza de vínculo y la aceleración que adquiere el cuerpo.

Se ha encontrado que  $N = mg - F_y$ , pero como  $F_y < 0$  es  $F_y = -|F_y|$ ; entonces, en este caso,  $N = mg + |F_y|$  es siempre positiva y no puede ser cero. La fuerza de vínculo sólo puede crecer con la fuerza aplicada hasta que eventualmente la superficie o el objeto no logren soportar las fuerzas aplicadas sobre ellos, lo cual no está previsto en las hipótesis de trabajo.

### Plano inclinado

Consideremos ahora un cuerpo que se desliza sobre una superficie plana y lisa que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. En este caso la segunda ley de Newton para el cuerpo queda expresada como  $\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$ .

En la Fig. 11 se muestra el diagrama de cuerpo aislado correspondiente (marcado con un óvalo) y se propone un sistema de coordenadas cuyo eje  $x$  es paralelo al plano. En consistencia con esta elección, el movimiento del cuerpo será unidimensional en la dirección del eje  $x$  y podemos escribir:

$$\vec{N} = N\hat{j} ; \quad \vec{P} = mg \text{sen} \alpha \hat{i} - mg \text{cos} \alpha \hat{j} \quad \text{y} \quad \vec{a} = a_x \hat{i} \quad (48)$$

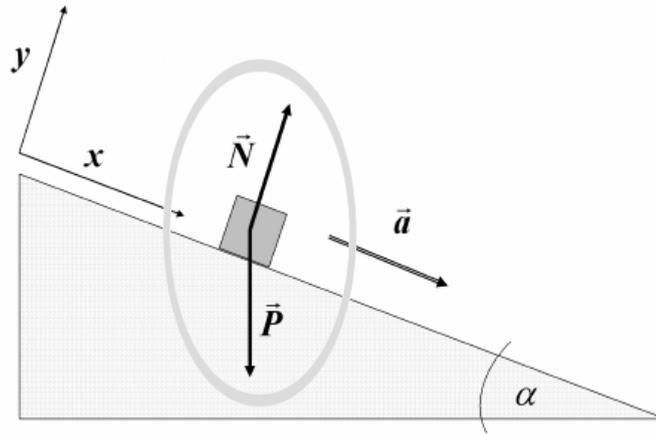


Figura 11: Fuerza de contacto en un plano inclinado.

con lo que las ecuaciones de movimiento quedan

$$\begin{aligned} \text{en } x : \quad mg \operatorname{sen} \alpha &= ma_x \Rightarrow a_x = g \operatorname{sen} \alpha ; \\ \text{en } y : \quad N - mg \cos \alpha &= 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha . \end{aligned} \quad (49)$$

Vemos que si el ángulo  $\alpha$  crece, la fuerza de vínculo decrece hasta hacerse 0 cuando  $\alpha = \pi/2$ .

Resumiendo:

- Las fuerzas de vínculo son siempre normales al vínculo y apuntan hacia fuera de él.
- dependen de las fuerzas aplicadas.
- son aplicadas por objetos que limitan las posibilidades de movimiento (paredes, rieles, superficies, piso, etc.).

### 4.3. Fuerza centrípeta

Este tipo de fuerza puede ser ejercida por cualquier tipo de mecanismo, por lo cual no debe entenderse este apartado como la descripción de una fuerza más en cuanto al agente que la produce, sino en cuanto al tipo de movimiento con el que se relaciona; en particular, el movimiento circular, cuya cinemática ya fue tratada en detalle en el capítulo 5. Analicemos el caso de una bolita de masa  $m$  girando con velocidad de módulo uniforme en el interior de una cacerola de radio  $\rho$ . En otras palabras, estamos en presencia de un movimiento circular uniforme de radio  $\rho$ . Sabemos que la velocidad  $\vec{v}$ , tangente a la trayectoria, cambia de dirección; entonces debe existir una aceleración. Como sólo cambia la dirección pero no el módulo de  $\vec{v}$ , la aceleración debe ser perpendicular a la velocidad en todo instante (si no imponemos que el módulo de la velocidad sea constante, entonces habría también una componente tangencial de la aceleración). En el movimiento circular llamamos aceleración centrípeta a la aceleración normal a la trayectoria:

$$a_n \equiv a_c = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 \rho . \quad (50)$$

Si hay aceleración, debe haber una fuerza tal que  $ma_c = F_c$  y que llamamos fuerza centrípeta por ser paralela a la aceleración centrípeta:

$$\vec{F}_c = -m \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_\rho , \quad (51)$$

donde  $\hat{u}_\rho$  es el versor que apunta en la dirección del radio de la circunferencia de radio  $\rho$  con sentido saliente (centrífugo). Ahora nos preguntamos ¿cuál es el agente que produce esta fuerza? La única

respuesta posible es que la pared evita que la bolita se salga de su trayectoria circular, obligando al cuerpo a que constantemente se desvíe de una trayectoria rectilínea. Es decir que la pared de la cacerola ejerce una fuerza de vínculo  $\vec{N}_h$  que limita el movimiento en el plano horizontal, entonces  $\vec{F}_c = \vec{N}_h$ , como puede verse en la Fig.12a). Pero, ésta no es la única acción que ejerce la cacerola: también evita que la bolita se mueva en el eje vertical oponiéndose a la fuerza peso mediante una fuerza de vínculo vertical  $\vec{N}_v$ . En consecuencia, para describir las fuerzas que actúan en una dirección perpendicular a  $\hat{u}_\rho$ , debemos agregar una dimensión al sistema de coordenadas: la dirección vertical  $z$ . Un sistema adecuado para representar este problema es uno que tenga los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_z \equiv \hat{k}$ . El diagrama de cuerpo aislado de la Fig.12b), muestra un corte vertical de la cacerola donde se han representado todas las fuerzas que actúan sobre la bolita, suponiendo que no hay rozamiento. Como no hay aceleración en la dirección vertical, entonces debe cumplirse que  $\vec{N}_v = -\vec{P}$ , es decir,  $N_v = mg$ .

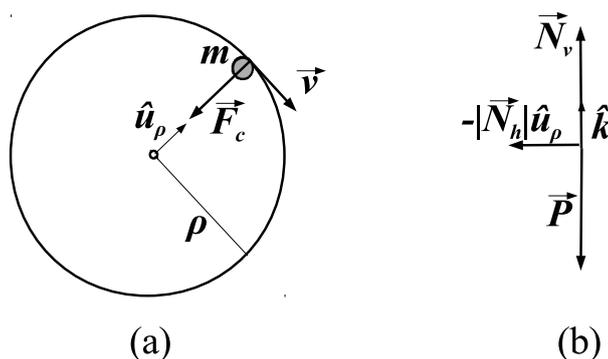


Figura 12: Fuerza centrípeta sobre una bolita. (a) Vista desde arriba; (b) corte lateral.

Un caso parecido es el de un cuerpo apoyado sobre una superficie lisa y horizontal, que gira alrededor de un punto fijo al cual está ligado por un hilo o cuerda inextensible. La única diferencia con el ejemplo anterior es que ahora la fuerza centrípeta responsable del cambio de dirección del cuerpo es la tensión de la cuerda.

$$\vec{F}_c = \vec{T} = -m \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_\rho . \quad (52)$$

En este caso la cuerda es el vínculo que limita el movimiento de la bolita y la tensión  $\vec{T}$  es la fuerza de vínculo correspondiente.

#### 4.4. Aplicación combinada de varias fuerzas de vínculo

Veamos cómo tratar algunos casos que involucran uno o más cuerpos ligados entre sí por cuerdas e interactuando con la superficie de apoyo.

##### Ejemplo 1

Dado el sistema de cuerpos en equilibrio de la Fig. 13, nos preguntamos cómo depende la tensión  $\vec{T}_1$  del peso de los cuerpos A y B. Los cuerpos de masas  $m_A$  y  $m_B$  están ligados por un hilo. La masa  $m_A$  está además atada a la pared, mientras que  $m_B$  cuelga del hilo que la une a  $m_A$  a través de una polea sin masa ni rozamiento. Suponemos que no hay rozamiento en ninguna superficie. Describimos las fuerzas que actúan sobre  $m_A$  usando un sistema de coordenadas en el que  $x$  es horizontal con el sentido positivo hacia la derecha del dibujo e  $y$  es vertical con el sentido positivo hacia arriba. La Fig. 13 muestra el diagrama de cuerpo aislado de cada uno de los cuerpos interactuantes. Nótese que cada cuerpo debe tener su diagrama de cuerpo aislado por separado.

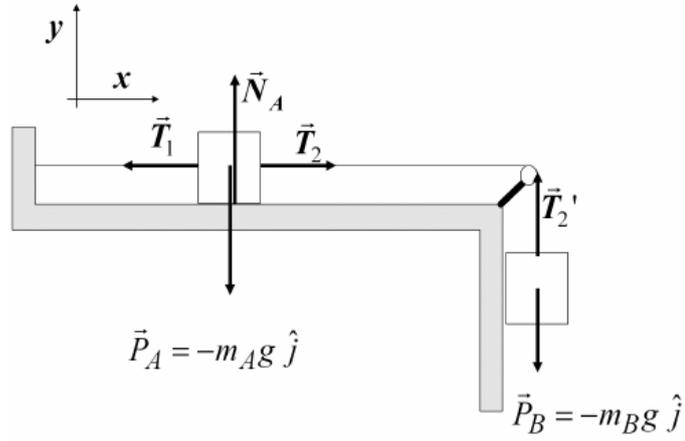


Figura 13: Sistema descrito en el ejemplo 1.

Sobre  $m_A$  actúan las fuerzas  $\vec{T}_1 = -|T_1|\hat{i}$ ,  $\vec{T}_2 = |T_2|\hat{i}$ ,  $\vec{P}_A = -m_A g \hat{j}$  y  $\vec{N}_A = |N_A|\hat{j}$ . Y sobre  $m_B$  actúan las fuerzas  $\vec{T}_2' = |T_2'|\hat{j}$  y  $\vec{P}_B = -m_B g \hat{j}$ . Como los cuerpos están en equilibrio, se cumplen las siguientes condiciones:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{N}_A + \vec{P}_A = 0 \quad \text{y} \quad \vec{T}_2' + \vec{P}_B = 0. \quad (53)$$

Escribimos a continuación las ecuaciones correspondientes a cada uno de los cuerpos en las componentes  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} \text{en } x : \quad & |T_2| - |T_1| = 0 \quad \Rightarrow \quad |T_1| = |T_2| ; \\ \text{en } y : \quad & |N_A| - m_A g = 0 \quad \Rightarrow \quad |N_A| = m_A g , \\ & |T_2'| - m_B g = 0 \quad \Rightarrow \quad |T_2'| = m_B g . \end{aligned} \quad (54)$$

Pero por las propiedades de las cuerdas inextensibles que hemos visto,  $|T_2'| = |T_2|$ . Entonces podemos escribir  $|T_1| = m_B g$ , por lo tanto:

$$\vec{T}_1 = -m_B g \hat{i} . \quad (55)$$

A veces resulta cómodo, para referirse al módulo de un vector  $|\vec{A}|$ , escribir simplemente  $A$ ; con esta notación resumida las ecuaciones anteriores se escriben de forma más compacta:

$$\begin{aligned} \text{en } x : \quad & T_2 - T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 ; \\ \text{en } y : \quad & N_A - m_A g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = m_A g , \\ & T_2' - m_B g = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2' = m_B g ; \end{aligned} \quad (56)$$

pero debe recordarse que  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_2'$  y  $N_A$  denotan los módulos de los vectores correspondientes.

### Ejemplo 2

En el ejemplo de la Fig. 14a) un cuerpo apoyado sobre una superficie rígida y lisa es acelerado por la acción de una fuerza horizontal. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son  $\vec{T} = |T|\hat{i}$ ,  $\vec{P} = mg\hat{j}$  y  $\vec{N} = |N|\hat{j}$ . La ecuación vectorial de movimiento del cuerpo es

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{T} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a} . \quad (57)$$

Para escribir las ecuaciones en componentes utilizaremos la notación simplificada introducida al final del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} \text{en } x : \quad & T = ma ; \\ \text{en } y : \quad & N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg . \end{aligned} \quad (58)$$

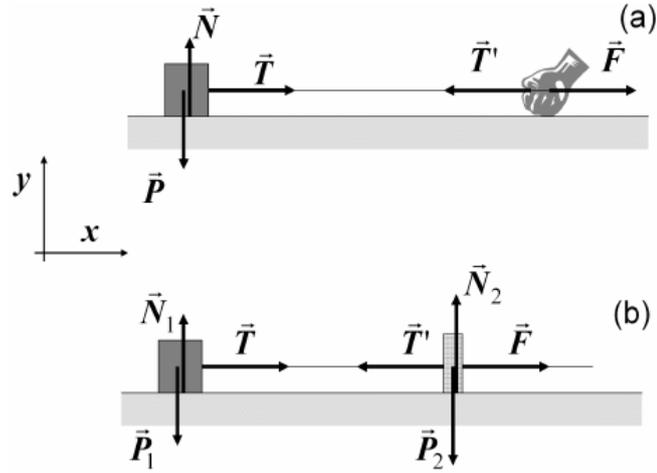


Figura 14: Sistemas descritos en los ejemplos 2 (a) y 3 (b).

Por otra parte, según la tercera ley de Newton,  $\vec{F} = -\vec{T}'$  y debido a las propiedades de las cuerdas,  $\vec{T} = -\vec{T}'$ , con lo cual, resulta que  $\vec{F} = m\vec{a}$ , es decir que la cuerda transmite la fuerza ejercida por la mano, como ya habíamos discutido.

### Ejemplo 3

Analicemos las fuerzas en el sistema de cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  de la Fig. 14b), que se mueve bajo la acción de la fuerza externa  $\vec{F}$ . Suponemos conocidas  $\vec{F}$ ,  $m_1$  y  $m_2$ , de modo que las incógnitas son  $T$ ,  $T'$ ,  $a_1$  y  $a_2$ . Las ecuaciones para  $m_1$  son

$$\begin{aligned} \vec{T} + \vec{P}_1 + \vec{N}_1 &= m_1 \vec{a}_1 ; \\ \text{en } x : \quad T &= m_1 a_1 \quad ; \\ \text{en } y : \quad N_1 - m_1 g &= 0 \quad \Rightarrow N_1 = m_1 g . \end{aligned} \quad (59)$$

Y para  $m_2$ ,

$$\begin{aligned} \vec{T}' + \vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F} &= m_2 \vec{a}_2 ; \\ \text{en } x : \quad F - T' &= m_2 a_2 \quad ; \\ \text{en } y : \quad N_2 - m_2 g &= 0 \quad \Rightarrow N_2 = m_2 g . \end{aligned} \quad (60)$$

En el eje vertical no hay movimiento de ninguna de las masas, así que las ecuaciones en la coordenada  $y$  no aportan información relevante en este caso. Nos centramos pues con lo que ocurre según la componente  $x$ , es decir,  $T = m_1 a_1$  y  $F - T' = m_2 a_2$ , pero también sabemos que  $T = T'$  y si el hilo es inextensible, los dos cuerpos necesariamente se mueven solidarios y entonces las aceleraciones son las mismas:  $a_1 = a_2 = a$ . Con esto, las ecuaciones quedan

$$T = m_1 a ; \quad F - T = m_2 a . \quad (61)$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $T$  y  $a$ ), cuyas soluciones pueden obtenerse fácilmente:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} ; \quad T = \frac{m_1 F}{m_1 + m_2} . \quad (62)$$

### Ejemplo 4

Las masas  $m_1$  y  $m_2$  están apoyadas sobre una superficie horizontal, en contacto entre sí y se aplica sobre una de ellas una fuerza  $\vec{F}$  paralela a la superficie y en el sentido de la otra masa, como se muestra en la Fig. 15.

Sabemos por experiencia que ambos cuerpos se moverán juntos, como si estuvieran pegados. Por lo tanto, podremos tratar el problema como el de un único cuerpo de masa  $m = m_1 + m_2$ , de manera que la ecuación de movimiento correspondiente en el sistema de coordenadas de la figura es

$$\vec{F} = (m_1 + m_2) \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_1 + m_2} , \quad (63)$$

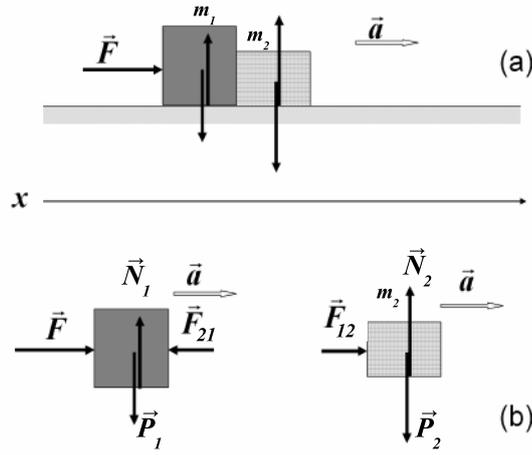


Figura 15: Sistema descrito en el ejemplo 4. Esquema general (a) y diagrama de cuerpo aislado de cada cuerpo (b).

ya que las ecuaciones referidas a las fuerzas verticales no aportan al movimiento (el sistema de cuerpos no se hunde en la superficie de apoyo ni se eleva sobre ella). También podemos estudiar cada masa por separado, usando en el diagrama de cuerpo aislado de la Fig. 15b). Si analizamos el movimiento de la masa  $m_2$  vemos que tiene la aceleración expresada en la ec.(63), por lo tanto sobre ella hay aplicada una fuerza neta igual a

$$\vec{F}_{12} = m_2 \vec{a} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}. \quad (64)$$

En esta expresión se puede notar que el módulo de la fuerza aplicada sobre la masa  $m_2$  es menor que  $|\vec{F}|$ , ya que se cumple que  $m_2/(m_1 + m_2) < 1$ . En la dirección  $x$  la masa  $m_2$  solamente está en contacto con la masa  $m_1$ , por lo tanto la fuerza  $\vec{F}_{12}$  debe estar aplicada por  $m_1$ .

Sobre la masa  $m_1$  actúa directamente la fuerza  $\vec{F}$ , pero ésta no puede ser la única fuerza horizontal aplicada, ya que si lo fuera, el cuerpo tendría una aceleración  $\vec{a} = \vec{F}/m_1$ , lo cual es incorrecto según ec.(63). Llamemos  $\vec{F}_{21}$  a la fuerza que ejerce el bloque 2 sobre el bloque 1. De acuerdo a esto y tal como se muestra en el diagrama de cuerpo aislado, en la dirección horizontal la ecuación de movimiento es

$$\vec{F} + \vec{F}_{21} = m_1 \vec{a}. \quad (65)$$

Entonces,

$$\vec{F}_{21} = m_1 \vec{a} - \vec{F} = \frac{m_1 \vec{F}}{m_1 + m_2} - \vec{F} = -\frac{m_2 \vec{F}}{m_1 + m_2} = -\vec{F}_{12}, \quad (66)$$

es decir, se cumple la tercera ley de Newton. No debemos caer en el error de decir que estas fuerzas se anulan y que podría no tenérselas en cuenta, ya que  $\vec{F}_{12}$  está aplicada al cuerpo 2 y  $\vec{F}_{21}$  al cuerpo 1. Estas fuerzas de contacto podrían medirse si colocáramos un resorte u otro dispositivo sensible a la compresión entre ambas masas.

En este último ejemplo hemos tratado un mismo problema de dos maneras. Cuando consideramos el sistema como un único bloque obtuvimos la aceleración correcta sin necesidad de considerar las fuerzas de contacto entre ambos bloques ya que en esta descripción éstas son fuerzas *internas*. En cambio, cuando consideramos cada masa por separado, las fuerzas de contacto son fuerzas *externas*. Entonces, de estos ejemplos vemos que

- Sólo las fuerzas exteriores al sistema observado son las que producen aceleración y por lo tanto, son las únicas que deben tenerse en cuenta al escribir las ecuaciones de Newton.
- La fuerza que un cuerpo le ejerce a otro es igual en módulo y dirección pero de sentido opuesto a la que el otro cuerpo le ejerce al primero, tal como vimos al presentar la tercera ley de Newton.

## 5. Fuerzas de rozamiento

Hemos experimentado que cuando ejercemos fuerza sobre un cuerpo apoyado sobre una superficie horizontal, se logra, con mayor o menor esfuerzo, que el cuerpo se mueva (ver Fig. 1). Primero el cuerpo está quieto y si se incrementa la fuerza aplicada por encima de cierto valor, empieza a moverse. En términos de la segunda ley de Newton, podemos decir que como el cuerpo no se mueve aun cuando lo empujamos con una fuerza  $\vec{F}$ , debe existir otra fuerza, que llamaremos  $\vec{f}_e$ , que está contrarrestando el efecto de la primera:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f}_e = 0. \quad (67)$$

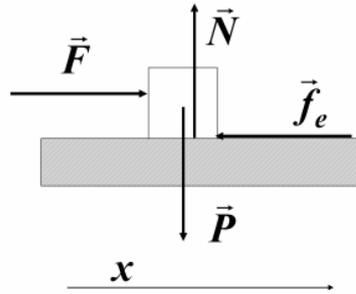


Figura 16: Fuerza de rozamiento estático.

Según se muestra en la Fig. 16, como en la dirección vertical no hay aceleración, sabemos que el peso y la fuerza normal del plano de apoyo se cancelan mutuamente. Esto nos habilita a omitir estas dos fuerzas, de manera que debe cumplirse:

$$\vec{F} + \vec{f}_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_e = -\vec{F}. \quad (68)$$

La fuerza  $\vec{f}_e$  se denomina fuerza de rozamiento estático. Es importante notar que la magnitud de esta fuerza depende de la fuerza externa  $\vec{F}$  aplicada; en particular, podemos ver de la ecuación anterior que  $\vec{f}_e$  tiene igual módulo que  $\vec{F}$  y sentido opuesto. La experiencia indica que al aumentar la intensidad de la fuerza  $\vec{F}$  aplicada, eventualmente se logra que comience el movimiento; deducimos entonces que el módulo de la fuerza de rozamiento estático sólo puede crecer acompañando el crecimiento de fuerza aplicada hasta un cierto valor máximo  $|\vec{f}_e \text{ máx}|$ . Se comprueba experimentalmente que, como se indica en la Fig. 17,

$$|\vec{f}_e \text{ máx}| = \mu_e |\vec{N}|. \quad (69)$$

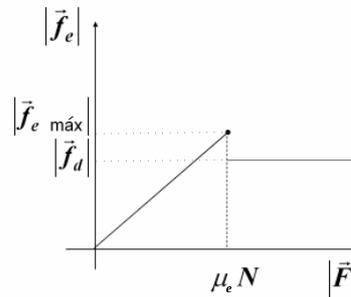


Figura 17: Fuerzas de rozamiento estático y dinámico.

Es decir, la máxima fuerza de rozamiento estático posible entre un cuerpo y una superficie es proporcional al módulo de la fuerza normal que ejerce la superficie sobre el cuerpo, aunque claramente **no** tiene la misma dirección que  $\vec{N}$ . La constante de proporcionalidad  $\mu_e$  se denomina coeficiente de rozamiento estático y depende de las características de las dos superficies en contacto. Si la fuerza

aplicada supera el valor  $|\vec{f}_e^{m\acute{a}x}|$ , el cuerpo finalmente se pone en movimiento. En esta situación, si dejamos de aplicar la fuerza  $\vec{F}$ , la experiencia nos dice que en un experimento real el móvil comenzará a disminuir la velocidad hasta detenerse, tanto más rápidamente cuanto más rugosas sean las superficies en contacto. Esto nos dice que hay involucrada otra fuerza que llamaremos  $\vec{f}_d$  o fuerza de rozamiento dinámico. Esta fuerza siempre se opone al movimiento, siendo paralela a la velocidad del cuerpo y de sentido contrario. Por la segunda ley de Newton se tiene que

$$\vec{F} + \vec{f}_d = m\vec{a} . \quad (70)$$

En cuanto al módulo de  $\vec{f}_d$ , se comprueba que en general, se puede aproximar por un valor constante (ver Fig. 17) y que es proporcional a la fuerza normal. Entonces, podemos escribir

$$\vec{f}_d = -\mu_d |\vec{N}| \hat{v} , \quad (71)$$

donde el coeficiente de proporcionalidad  $\mu_d$  es el llamado coeficiente de rozamiento dinámico y  $\hat{v}$  es el versor velocidad. De las ecs. (69) y (71) puede verse que los coeficientes  $\mu_e$  y  $\mu_d$  son adimensionales. Además se cumple que la fuerza de roce dinámico es menor que la fuerza de roce estático máximo, como puede verse en la Fig. 17. El valor que tienen las cantidades  $\mu_e$  y  $\mu_d$  es característico de las superficies y por lo general se cumple que

$$\mu_e < 1 \quad \text{y} \quad \mu_d < \mu_e . \quad (72)$$

A continuación sintetizamos las características principales de las fuerzas de rozamiento:

- hay rozamiento estático sólo si actúa una fuerza externa
- sólo hay rozamiento dinámico si hay movimiento relativo entre dos superficies
- la fuerza de rozamiento dinámico tiene la misma dirección y sentido opuesto a la velocidad
- el rozamiento estático alcanza un valor máximo que es proporcional a la fuerza normal.
- la fuerza de rozamiento dinámico es aproximadamente constante y también es proporcional a la fuerza normal (con un factor menor de proporcionalidad)

## 6. Fuerza gravitatoria

La fuerza que la Tierra ejerce sobre los cuerpos, llamada fuerza gravitatoria, tiene características algo diferentes de las fuerzas que tratamos hasta ahora, pues no es necesario el contacto directo entre el cuerpo y la Tierra para que exista interacción entre ellos. Hay otras fuerzas que comparten esta característica; tal es el caso de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: la nuclear débil, la nuclear fuerte, la electromagnética y la gravitatoria, ya mencionada, que es la más débil. Para que exista fuerza gravitatoria debe haber dos masas, y no necesariamente la Tierra o un planeta debe ser una de ellas; sin embargo, como la interacción gravitatoria es débil, sus efectos sólo son fácilmente apreciables cuando está involucrada una masa grande. La interacción gravitatoria entre masas pequeñas es difícil de medir o detectar; sin embargo existe. Este punto fue demostrado por el físico británico Henry Cavendish en 1797<sup>6</sup>.

### 6.1. Marco histórico

Cada civilización en cada región geográfica ha desarrollado modelos para explicar el movimiento de los cuerpos celestes. Las ideas existentes en Europa hacia el siglo XVI, para describir el movimiento de la luna, los planetas y estrellas eran, básicamente los siguientes:

<sup>6</sup>Véase una versión moderna de este experimento en <https://www.youtube.com/watch?v=11sLusnVZwM>

- Modelo geocéntrico. Todos los cuerpos celestes giran alrededor de la Tierra. La Tierra no tiene movimiento de traslación ni de rotación. Esta idea muy antigua, que viene de la civilización griega (Aristóteles, 384 aC-322 aC), tenía, al menos, mayor asidero fáctico que otras que involucraban causas improbables.

Claudio Ptolomeo de Alejandría (c. 100-c. 170) perfeccionó el sistema geocéntrico de Aristóteles basado en esferas simples, reemplazándolo por otro sistema geocéntrico según el cual los planetas giran en torno a una esfera pequeña (epiciclo) que a su vez gira en torno a una mayor (deferente), centrada en un punto cercano a la Tierra. El modelo geocéntrico aristotélico o ptolemaico estuvo vigente durante casi veinte siglos y su aceptación está ligada al desarrollo de la filosofía durante ese período.

- Modelo heliocéntrico: los planetas, incluida la Tierra, giran alrededor del Sol. Esta teoría, inicialmente enunciada por Aristarco de Samos (310 aC.-c. 230 aC) pasó desapercibida o fue descartada durante unos dieciocho siglos, hasta que fue retomada y perfeccionada por Nicolás Copérnico (1473-1543). En esta última versión, puede resumirse en los siguientes puntos:
  - a) Los movimientos celestes son uniformes, eternos, y **circulares o compuestos de diversos ciclos (epiciclos)**<sup>7</sup>.
  - b) **El centro del universo se encuentra cerca del Sol.**
  - c) Orbitando alrededor del Sol, en orden, se encuentran Mercurio, Venus, la Tierra, **la Luna**, Marte, Júpiter y Saturno (aún no se conocían Urano y Neptuno.)
  - d) Las estrellas son objetos distantes que permanecen fijos y por lo tanto no orbitan alrededor del Sol.
  - e) La Tierra tiene tres movimientos: la rotación diaria, la revolución anual, y **la inclinación anual de su eje.**
  - f) El movimiento retrógrado de los planetas es explicado por el movimiento de la Tierra.
  - g) La distancia de la Tierra al Sol es pequeña comparada con la distancia a las estrellas.

Esta visión fue muy resistida por razones filosóficas y religiosas y porque no explicaba todas las observaciones. Si bien hoy sabemos que este modelo no es correcto, al menos proveyó un marco de referencia inercial desde el cual describir un problema de movimiento. Por otro lado, se parece mucho más a la realidad que el modelo ptolemaico.

El siguiente gran aporte para resolver el problema del movimiento de los astros vino a través del sustento experimental que proveyó el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), recolectando datos sistemáticos y precisos. La calidad de los datos astronómicos que recogió llega al límite de lo que es accesible al ojo humano sin instrumentos ópticos. Su gran labor observacional, le permitió desechar algunos modelos existentes e incluso llegó a afirmar que los cielos no son “inmutables” (como había enunciado Aristóteles) como consecuencia de su estudio de la aparición en el cielo de una estrella nueva o “nova” en 1572. Se sabe ahora que ese hecho fue la explosión de una supernova (estrella muy masiva que al no poder desarrollar más reacciones nucleares se enfría, colapsa a su propia gravedad y luego se expande súbitamente).

El astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler (1571-1630) heredó de Brahe la colección más abundante y precisa de datos planetarios. Con los datos sobre la órbita de Marte abandonó el postulado de la circularidad de las órbitas y pudo enunciar tres leyes que reconciliaban los datos de Brahe con el modelo heliocéntrico. Adoptando el marco de referencia de Copérnico, presentó la información cinemática del movimiento de algunos planetas en una forma sencilla:

1. Los planetas giran en órbitas elípticas, con el sol situado en uno de los focos de la elipse.
2. La línea recta que une al planeta con el sol, barre áreas iguales en tiempos iguales.

<sup>7</sup>En negrita se destacan las afirmaciones erróneas de la teoría copernicana. Algunas no subrayadas no son exactas, pero se pueden considerar correctas haciendo una interpretación laxa. Por ejemplo, los movimientos de los cuerpos celestes no son eternos, pero son prácticamente inmutables en una escala de tiempo compatible con la historia del hombre.

3. La razón entre el cuadrado de los períodos de rotación alrededor del Sol de dos planetas cualesquiera es igual al cubo de las razones de sus distancias máximas al Sol:  $\frac{T^2}{r^3} = cte.$

Paralelamente, las observaciones de Galileo, usando el telescopio, proveyeron más datos precisos y sistemáticos. Finalmente, Isaac Newton concibe una teoría según la cual el movimiento de los astros puede explicarse a través de una única ley, que maravillosamente es la misma que explica la caída de los cuerpos hacia el suelo.

## 6.2. Ley de gravitación universal

Estudiando las fuerzas que rigen el movimiento de los cuerpos y considerando la evidencia experimental astronómica de esos tiempos, Newton dedujo que la fuerza entre dos cuerpos cualesquiera (en particular cuerpos celestes) yace sobre la línea que los une, es atractiva, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa los cuerpos y directamente proporcional a la masa de ellos. De esta manera, propuso la expresión matemática, que ahora se conoce como ley de gravitación universal

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (73)$$

donde la cantidad  $G$  es una constante, denominada constante de gravitación universal —se llaman constantes universales a las constantes fundamentales de la física, las cuales se asume que toman el mismo valor a lo largo del tiempo y en todo el universo—.

El geólogo John Michell diseñó una balanza de torsión y, luego de su muerte en 1793, su dispositivo fue heredado por Henry Cavendish (1731-1810) quien lo utilizó para medir la densidad de la Tierra ( $5,448 \text{ g cm}^{-3}$ ). Si se utiliza esta cantidad, se obtiene un valor de  $G = 6,74 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  que difiere en menos del 1% del valor actualmente recomendado de  $G = 6,67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  (Committee on Data for Science and Technology, 2010).

El dispositivo utilizado por Cavendish (ver Fig. 18) consiste en una barra con esferas masivas en sus extremos. El conjunto se cuelga de un hilo, constituyendo un péndulo de torsión, y queda en estado de equilibrio. Al acercar otras esferas masivas, se produce una fuerza de atracción entre estas últimas esferas y las que están fijas a la barra, provocando el movimiento del péndulo. Midiendo el período del péndulo se puede deducir la fuerza que actúa sobre él, lo que permite calcular la constante de gravitación.

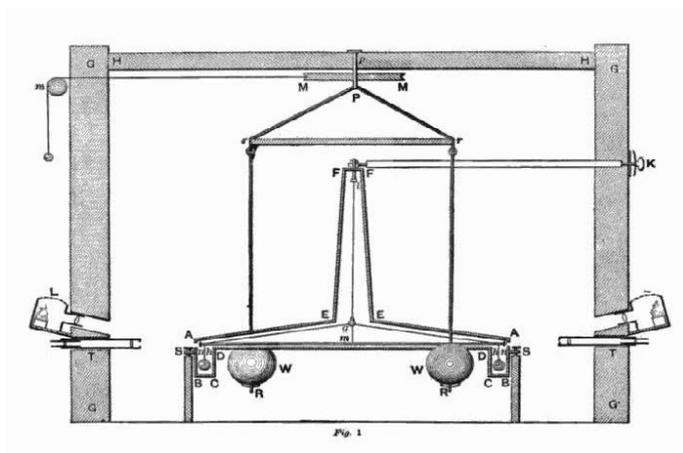


Figura 18: Balanza de Cavendish.

## 6.3. Masa inercial y masa gravitatoria

Según la ec. (73), debido a la interacción gravitatoria con la masa  $M$ , sobre la masa  $m$  se ejerce una fuerza que está representada por el vector  $\vec{F}$  en la Fig. 19, que está dirigida sobre la recta que

une ambas masas. Las masas  $m$  y  $M$  involucradas en la ec. (73) se llaman masas gravitatorias. Debe

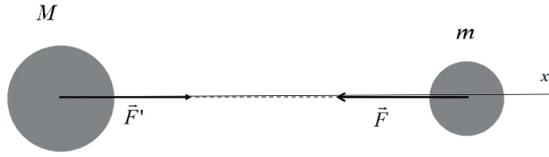


Figura 19: Atracción gravitatoria.

notarse que, en principio, la masa gravitatoria (que por esta vez denotaremos con  $m_g$ ) no tiene por qué ser lo mismo que la masa inercial (que por esta vez denotaremos con  $m_i$ ) definida en la sección 1.2.2. En efecto, según la ec. (73),  $m_g = Fr^2/(M_gG)$ , mientras que de acuerdo a la segunda ley de Newton,  $m_i = F/a$ . La masa gravitatoria es una propiedad de los cuerpos que compete exclusivamente a la interacción gravitatoria con otro cuerpo; por otro lado, la masa inercial es una propiedad mucho más general, ya que afecta el movimiento de los cuerpos independientemente del tipo de fuerza que se le aplique. Por ejemplo, si sobre un cuerpo de masa inercial  $m_i$  un resorte aplica una fuerza  $\vec{F}$ , el cuerpo adquiere una aceleración  $\vec{a} = \vec{F}/m_i$ ; si sobre ese mismo cuerpo la Tierra ejerce su influencia gravitatoria, la aceleración experimentada por el cuerpo será, en módulo,  $a = F/m_i = GM_gm_g/(m_i r^2)$ .

Sin embargo, hasta donde la precisión de los experimentos ha permitido, se ha observado experimentalmente que,  $m_g = m_i$ . Esta sorprendente relación nos exige de distinguir entre ambas magnitudes y, por lo tanto, a partir de ahora designaremos indistintamente cualquiera de ellas simplemente como “masa”.

#### 6.4. Tiro vertical a gran altura

Consideremos ahora el movimiento de un cuerpo de masa  $m$  bajo la acción de la fuerza gravitatoria de la Tierra, dada por la ec.(73). En primer lugar haremos la suposición de que la Tierra es un sistema inercial, es decir, no consideraremos el movimiento de rotación ni la traslación en su órbita<sup>8</sup>. Elegimos un sistema de coordenadas polares con origen en el centro de la Tierra, como se muestra en la Fig. 20.

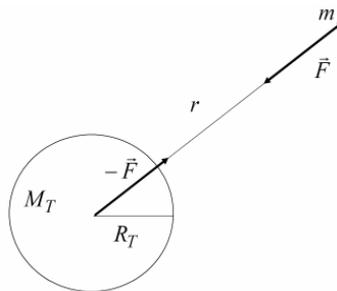


Figura 20: Tiro vertical a gran altura.

En ese sistema,

$$\vec{F} = -G \frac{mM_T}{r^2} \hat{u}_\rho, \quad (74)$$

donde  $r$  se mide desde el centro de la Tierra hasta la posición del cuerpo,  $M_T$  es la masa de la Tierra y  $\hat{u}_\rho$  es el versor radial. Para estimar cuál es el valor de  $M_T$ , analicemos que el peso de un cuerpo

<sup>8</sup>Dadas las velocidades de rotación y traslación involucradas, resulta que la aproximación efectuada es muy buena para el análisis que sigue.

sobre la superficie terrestre es

$$P = mg, \quad \text{pero también} \quad P = GmM_T/R_T^2, \quad (75)$$

y como  $R_T = 6400 \text{ km} = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$  y  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , entonces

$$M_T = \frac{gR_T^2}{G} \simeq 6 \times 10^{24} \text{ kg}. \quad (76)$$

Este valor coincide con el valor actualmente aceptado  $(5,97223 \pm 0,00008) \times 10^{24} \text{ kg}$ .

De la ec.(74) y la segunda ley de Newton puede escribirse la ecuación de movimiento para el cuerpo de masa  $m$ :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M_T}{r^2}. \quad (77)$$

Encontrar la función posición de la masa  $m$ ,  $r(t)$ , presenta cierta dificultad porque hay que resolver una ecuación diferencial en que la derivada segunda de la función que se desea encontrar es inversamente proporcional al cuadrado de esa función. Entonces utilizaremos la siguiente estrategia: recordemos que el primer miembro de la ec.(77) se puede escribir como

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr} v = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} v^2 \right). \quad (78)$$

También, en el segundo miembro de la ec.(77) podemos reemplazar  $-\frac{1}{r^2}$  por  $\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right)$ , entonces queda:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{GM_T}{r} \right), \quad (79)$$

o bien,

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{d}{dr} \left( \frac{GM_T}{r} \right) = 0, \quad (80)$$

es decir,

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM_T}{r} \right) = 0. \quad (81)$$

Esta última ecuación indica que la cantidad  $\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_T}{r}$  es una constante de movimiento. Multiplicando por la masa, obtenemos una magnitud que sigue siendo constante y que tiene unidades de energía:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r}. \quad (82)$$

El término que involucra la velocidad es la energía cinética  $E_c$ , mientras que el otro término, que depende de la posición, es la energía potencial  $E_p$ . Notemos que si  $r \rightarrow \infty$  entonces  $E_p \rightarrow 0$  y si  $r \rightarrow 0$  entonces  $E_p \rightarrow -\infty$ . A partir de la ec.(82) es posible despejar el módulo de la velocidad en función de la posición:

$$v(r) = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM_T}{r}}, \quad (83)$$

donde el signo + indica que el cuerpo va subiendo y el signo -, que va bajando. Como  $v = \frac{dr}{dt}$ , se puede escribir:

$$dr = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM_T}{r}} dt. \quad (84)$$

El siguiente paso en el procedimiento se usa frecuentemente para resolver ecuaciones diferenciales; se llama *separación de variables* y consiste en llevar a cada miembro de la igualdad sólo un tipo de variables. En este caso dejaremos el tiempo  $t$  de un lado y el resto de la función, que contiene a la variable  $r$  pero no al tiempo, del otro:

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM_T}{r}}}. \quad (85)$$

Luego podemos integrar para obtener  $t = t(r)$ , y de allí eventualmente,  $r = r(t)$ , si es que sabemos resolver la integral...

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM_T}{r}}} \quad (86)$$

Aunque todavía no disponemos de una expresión explícita de la función de movimiento, sí podemos obtener cierta información sobre el movimiento a partir de la expresión de la energía. La cantidad  $E$  de la ec.(82), como buena constante de movimiento, tiene el mismo valor para todo tiempo. Supongamos que en el punto de partida el cuerpo está a una distancia  $r_0$  y tiene velocidad  $v_0$ . Entonces la velocidad del cuerpo en una posición genérica  $r$  será

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2GM_T \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}. \quad (87)$$

Lo primero que podemos ver es que si  $r > r_0$ , entonces  $|v| < |v_0|$ , es decir, el cuerpo va cada vez más lento a medida que sube. Otra cosa importante a considerar es que si

$$2GM_T \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) > v_0^2, \quad (88)$$

es decir, si

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2GM_T}, \quad (89)$$

entonces el radicando es negativo y  $v$  es imaginaria. Esto significa que el móvil no puede ir más allá de

$$r_{m\acute{a}x} = \frac{1}{\frac{1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2GM_T}}. \quad (90)$$

Esta es la máxima distancia al centro de la Tierra a la que puede llegar un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba desde la posición  $r_0$  con velocidad inicial  $v_0$ . Otra forma de interpretar la ec. (87) es que para llegar a una posición  $r$ , el proyectil debe partir con una velocidad

$$v_0^2 > v_{m\acute{i}n}^2 = 2GM_T \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right), \quad (91)$$

ya que si  $v_0 = v_{m\acute{i}n}$ , entonces  $v = 0$ : el cuerpo llega hasta ahí nomás y empieza a caer. ¿Es posible que un cuerpo sea lanzado de tal manera que no vuelva nunca, es decir, que escape al alcance de la fuerza gravitatoria de la Tierra? Sí, sólo basta con hacer  $r \rightarrow \infty$  en la ec.(87) y despejar la velocidad inicial necesaria para alcanzar la posición de retorno, es decir en la cual  $v = 0$ :

$$v_e = v_0 = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}}; \quad (92)$$

$v_e$  se denomina velocidad de escape. Si el objeto es lanzado desde la superficie terrestre, entonces  $r_0 = R_T$  y

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T}, \quad (93)$$

donde la última igualdad sale de la ec.(76). Puede verse que la velocidad de escape no depende de la masa del cuerpo lanzado, sino de la masa del planeta desde el cual se lanza.

El análisis que acabamos de presentar es válido para cualquier planeta. Compruebe que la velocidad de escape de la Tierra es  $v_e=11,2$  km/s = 40320 km/h y que las de los siguientes cuerpos celestes son como se muestra en la tabla:

Luna	Marte	Venus	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
2,38 km/s	5,027 km/s	10,36 km/s	59,54 km/s	35,49 km/s	21,3 km/s	23,71 km/s

Analicemos por último cómo varía el peso de un cuerpo cuando éste se aleja de la Tierra en dirección radial. La dependencia del peso con la distancia al centro está dada por:

$$P = G \frac{mM_T}{r^2}, \quad (94)$$

mientras que si la variable es la distancia  $h$  medida desde la superficie, la expresión es

$$P = G \frac{mM_T}{(R_T + h)^2}. \quad (95)$$

Como ejemplo, en la siguiente tabla se muestra la variación porcentual  $(\Delta P)/P$  del peso con la distancia a la superficie de la Tierra.

$h$ (m)	$(\Delta P)/P$ (%)
1000	0,03
10000	0,3
30000	0,9

Esta tabla nos muestra que la práctica del alpinismo no es un buen método para bajar de peso. También nos sugiere que el peso de un cuerpo es *razonablemente* constante mientras no se lo aparte *demasiado* de la superficie de la Tierra. Las palabras “razonablemente” y “demasiado” son deliberadamente ambiguas, para indicar que todo dependerá de la precisión con que se pretenda describir el peso de ese cuerpo.

## 6.5. Satélite en órbita circular

Consideremos un satélite de masa  $m$  orbitando alrededor de la Tierra con una órbita circular cuyo centro coincida con el centro del planeta. La primera pregunta que surge es si es posible tal movimiento. La respuesta es que sí, siempre que se aplique sobre el satélite la fuerza necesaria para proveer la aceleración compatible con un movimiento circular<sup>9</sup>. Ya sabemos que la fuerza gravitatoria ejerce una atracción hacia el centro de la Tierra, por lo tanto esta es la fuerza centrípeta requerida. Además, si la órbita es circular, la fuerza centrípeta será de módulo constante, ya que la distancia  $r$  en la ec.(74) es constante, lo que nos lleva a que el movimiento circular será uniforme.

Sabemos que para el módulo de la aceleración (centrípeta) podemos escribir, por un lado,

$$a = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{gR_T^2}{r^2}, \quad (96)$$

donde la última igualdad se cumple en virtud de la ec.(76). Por otro lado, tenemos que

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (97)$$

Igualando las últimas dos ecuaciones podemos despejar el módulo de la velocidad del satélite:

$$v^2 = \frac{gR_T^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{g}{r}} R_T. \quad (98)$$

El período de revolución está dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} r^{3/2}, \quad (99)$$

o bien,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{gR_T^2} r^3, \quad (100)$$

<sup>9</sup>Por otra parte esto no contradice la primera ley de Kepler, ya que una circunferencia es un caso particular de elipse.

Esta última ecuación no es otra cosa que la tercera ley de Kepler aplicada a este caso. La segunda, también se cumple: es fácil ver que si el movimiento es circular y uniforme, la línea que une el satélite con la Tierra barre áreas iguales en tiempos iguales.

Tanto en este ejemplo, como en cualquier otro que involucre la ley de atracción gravitatoria, hay que tener en cuenta que  $r$  es la distancia entre los centros de los cuerpos interactuantes (o más precisamente entre los centros de masa, cuya definición veremos más adelante); por este motivo, no debe medirse desde la superficie del planeta, sino siempre desde el centro.

## 7. Fuerzas viscosas

Hemos analizado el movimiento de distintos cuerpos a los cuales se les aplica diferentes fuerzas. En algunos casos hay una única fuerza aplicada sobre el cuerpo y en otros casos, más de una fuerza. Sin embargo, algunas de las descripciones realizadas parecen no reflejar lo que observamos en nuestra vida cotidiana. Cuando analizamos el movimiento de cuerpos sobre los cuales está aplicada únicamente la fuerza peso, todos ellos adquieren la misma aceleración ( $\vec{g}$ ). Por lo tanto, si dejamos caer desde la misma altura dos cuerpos, deberían caer juntos, es decir, su altura con respecto al piso debería ser la misma para todo instante.

Consideremos ahora el siguiente experimento sencillo: tomemos dos hojas de papel, pleguemos una de ellas formando una pelota, y dejemos caer ambas desde la misma altura. El resultado de nuestra observación será que la hoja sin plegar caerá más lentamente que aquella con la que formamos una pelota. Esto evidencia que los dos cuerpos tuvieron diferentes aceleraciones y por lo tanto, diferentes fuerzas aplicadas. En ambos casos actúa la fuerza peso, que es igual para ambas hojas de papel, pero además, debemos tener en cuenta el efecto de la atmósfera sobre el movimiento de los cuerpos. La única conclusión posible es que este efecto no es el mismo para las dos hojas.

Hasta ahora habíamos supuesto que los cuerpos caían en el vacío, pero no siempre es posible despreciar el efecto del ambiente sobre el movimiento de los cuerpos, como acabamos de ver. Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido (ya sea gaseoso o líquido), aparte de la fuerza peso y el empuje, actúa sobre él una fuerza de rozamiento debida el medio, la cual se suele denominar *fuerza viscosa*. Esta fuerza se origina en la resistencia de las moléculas del fluido a desplazarse para dejar que el cuerpo avance. Se puede intuir que esta fuerza dependerá de la velocidad relativa al medio, de la forma cuerpo y de las características del fluido en el que se mueve. En particular, las magnitudes relevantes del fluido para determinar la fuerza viscosa son la densidad y la viscosidad, donde esta última está relacionada con la resistencia que puede oponer el fluido a la deformación. Debido a que esta fuerza se origina por la interacción entre el cuerpo y todas las moléculas que se encuentran en su dirección de movimiento, solo podemos dar una expresión fenomenológica de la misma. Por otra parte, no existe una única expresión para la fuerza viscosa, sino que esta depende de la velocidad que pueda alcanzar el cuerpo y de las características del medio.

Las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo de masa  $m$  que se mueve en el seno de un líquido viscoso son el peso, el empuje y la fuerza viscosa. (ver figura 21)

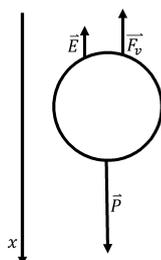


Figura 21: Fuerzas aplicadas sobre un cuerpo que se mueve en el seno de un líquido.

Si el cuerpo se mueve en el seno de un líquido muy viscoso no alcanzará altas velocidades. Para

este caso particular la expresión que describe la fuerza viscosa es:

$$\vec{F}_v = -D\eta\vec{v} = -D\eta v \hat{i}, \quad (101)$$

donde  $D$  es una constante que depende de la geometría del cuerpo (por ejemplo para una esfera  $D = 6\pi R$ ) y  $\eta$  es la viscosidad del líquido. Teniendo en cuenta que el empuje corresponde al peso del fluido desalojado, las expresiones para las fuerzas peso y empuje son:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= mg \hat{i}; \\ \vec{E} &= -V_c \rho_f g \hat{i}, \end{aligned} \quad (102)$$

donde  $m$  y  $V_c$  son la masa y volumen del cuerpo respectivamente, y  $\rho_f$  es la densidad del fluido. Como en este ejemplo consideraremos que el movimiento es unidimensional, omitiremos los versores en el desarrollo matemático. También, sin pérdida de generalidad, supondremos que  $v(0) = 0$  y  $x(0) = 0$  (queda como ejercicio repetir los cálculos suponiendo que la velocidad y la posición iniciales son distintas de cero).

La ecuación de movimiento del cuerpo será

$$ma = mg - V_c \rho_f g - D\eta v. \quad (103)$$

Antes de determinar las funciones velocidad y posición del cuerpo en función del tiempo analicemos cualitativamente la ec. (103). En  $t = 0$  la aceleración del cuerpo será

$$a = g - \frac{V_c \rho_f}{m} g. \quad (104)$$

El móvil, inicialmente en reposo, comenzará a desplazarse hacia abajo incrementando su velocidad. Cuando la velocidad es diferente de cero la aceleración del cuerpo será

$$a = g - \frac{V_c \rho_f}{m} g - \frac{D\eta}{m} v, \quad (105)$$

e irá disminuyendo a medida que la velocidad aumente. En un determinado instante la aceleración se anula y la velocidad toma un valor  $v_l$ , denominado *velocidad límite*.

$$g - \frac{V_c \rho_f}{m} g - \frac{D\eta}{m} v_l = 0; \quad (106)$$

despejando obtenemos:

$$v_l = g \frac{m - V_c \rho_f}{D\eta}. \quad (107)$$

Luego de que el cuerpo alcance la velocidad límite ( $v = v_l$ ) mantendrá su velocidad constante. Escribiendo la masa del móvil en términos de su densidad ( $\rho_c$ ), la expresión de la velocidad límite queda

$$v_l = \frac{gV_c}{D\eta} (\rho_c - \rho_f), \quad (108)$$

y para el caso particular de una esfera,

$$v_l = \frac{2R^2 g}{9\eta} (\rho_c - \rho_f). \quad (109)$$

Usando esta última ecuación se puede calcular, por ejemplo, la velocidad final de una gota de lluvia. Si la viscosidad del aire fuera nula, la ec.(103) nos muestra que la aceleración sería constante, con lo cual la velocidad alcanzada por las gotas sería tan alta que en lugar de usar paraguas, deberíamos usar casco. En otro ejemplo de aplicación de la ec.(109), usando valores tabulados de viscosidad y densidad, es posible obtener la velocidad límite de una esfera de aluminio de 0,5 cm de diámetro moviéndose en glicerina a 20 °C como  $v_l = 5,2 \text{ cm/s}$ .<sup>10</sup>

<sup>10</sup>Recíprocamente, utilizando la ec. (109), y midiendo la velocidad límite de una esfera que se mueve en el seno de un líquido de alta viscosidad es posible determinar de manera simple esta viscosidad.

Ahora determinaremos la función de movimiento del cuerpo que se mueve en el seno del líquido. La aceleración está dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = \alpha - \beta v, \quad (110)$$

donde

$$\alpha = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_c} \right) \quad \text{y} \quad \beta = \frac{D\eta}{V_c \rho_c}. \quad (111)$$

A partir de la ec. (110) podemos escribir

$$\int_0^v \frac{dv}{\alpha - \beta v} = \int_0^t dt. \quad (112)$$

Integrando obtenemos

$$t = -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - v\beta) \Big|_0^v = -\frac{1}{\beta} \ln \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha} v \right), \quad (113)$$

y la expresión de la velocidad del cuerpo en función del tiempo es:

$$v(t) = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}). \quad (114)$$

A partir de las definiciones de  $\alpha$  y  $\beta$  y de la ec. (108) puede verse que  $\frac{\alpha}{\beta} = v_l$ , con lo cual la función velocidad puede escribirse como

$$v(t) = v_l (1 - e^{-\beta t}). \quad (115)$$

Integrando la función velocidad con respecto al tiempo obtenemos la función posición

$$x(t) = \int_0^t v_l (1 - e^{-\beta t}) dt. \quad (116)$$

Luego,

$$x(t) = v_l t \Big|_0^t + \frac{v_l}{\beta} e^{-\beta t} \Big|_0^t = v_l t + \frac{v_l}{\beta} (e^{-\beta t} - 1). \quad (117)$$

En la figura 22 se muestran las funciones aceleración, velocidad y posición de una esfera de hierro de 1 cm de radio cayendo en glicerina. Se ve claramente que a medida que la aceleración se aproxima a cero la velocidad va alcanzando su valor límite y la función de movimiento se aproxima a un comportamiento lineal.

Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido de baja viscosidad actúan las mismas fuerzas que se grafican en la figura 21. En este caso, el cuerpo puede alcanzar velocidades grandes, y se observa que la fuerza viscosa puede expresarse de la siguiente manera:

$$\vec{F}_v = -\frac{1}{2} C_d A \rho_f v^2 \hat{i}, \quad (118)$$

donde  $C_d$  es una constante adimensional denominada coeficiente de arrastre y depende de la forma del cuerpo y de características del fluido,  $A$  es el área que presenta el móvil en el plano perpendicular a la dirección del movimiento; al igual que en el caso anterior,  $\rho_f$  es la densidad del fluido y  $v$  es la velocidad relativa del cuerpo respecto del fluido. La ecuación de movimiento en la coordenada  $x$  es:

$$ma = mg - V_c \rho_f g - \frac{1}{2} C_d A \rho_f v^2. \quad (119)$$

Por lo tanto la aceleración del cuerpo es

$$a = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_c} \right) - \frac{1}{2} \frac{C_d A \rho_f}{m} v^2. \quad (120)$$

En los casos de fluidos de baja viscosidad como el que estamos tratando, generalmente la densidad del fluido es mucho menor que la densidad del cuerpo, por lo tanto se puede despreciar el empuje que ejerce el fluido en la descripción del movimiento del cuerpo. Por simplicidad, en los cálculos siguientes

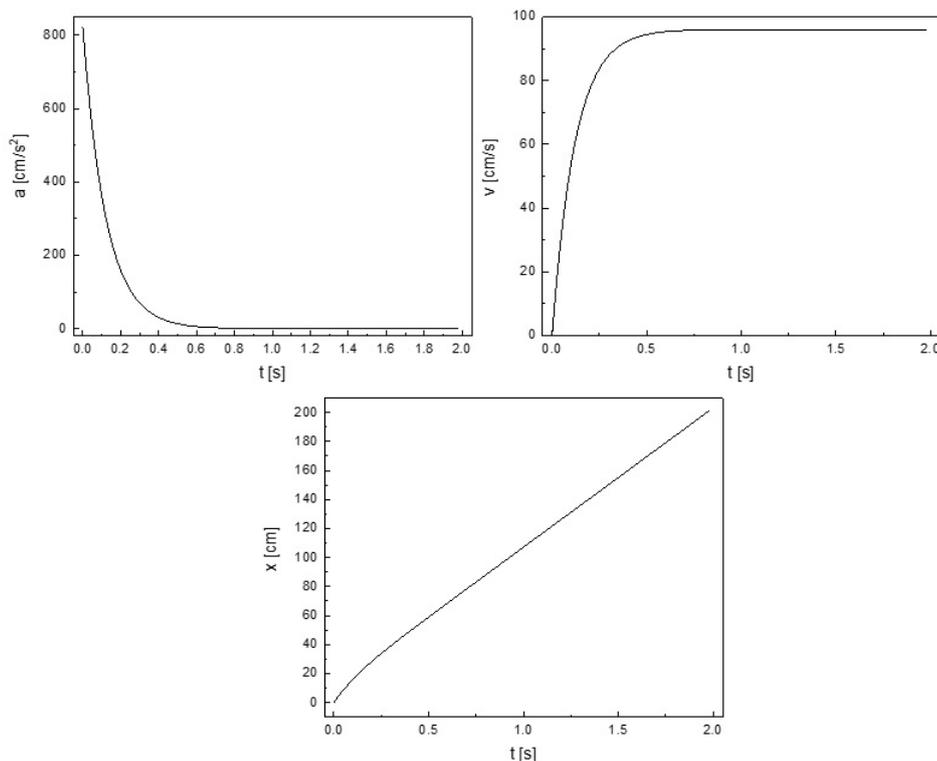


Figura 22: Aceleración, velocidad y posición en función del tiempo de una esfera de hierro de 1 cm de radio cayendo en glicerina

no tendremos en cuenta el empuje del fluido; sin embargo, para aquellos casos en que no sea posible despreciarlo, solo hay que reemplazar  $g$  por  $g(1 - \rho_f/\rho_c)$ .

De manera similar al caso anterior, la aceleración del cuerpo irá disminuyendo a medida que aumente su velocidad hasta anularse. En ese instante se alcanza la velocidad límite  $v_l$ , cuya expresión se obtiene igualando a cero la aceleración en la ec.(120):

$$v_l = \sqrt{\frac{2gm}{C_d A \rho_f}} . \quad (121)$$

Si dejamos caer una esfera de aluminio de 1 cm de diámetro dentro de un recipiente con agua, su velocidad límite, teniendo en cuenta el empuje, será de 0,68 m/s. Si consideráramos válido el modelo para la fuerza viscosa correspondiente al caso de alta viscosidad dado por la ec. (108), obtendríamos una velocidad límite de 92,6 m/s, lo cual no se corresponde con lo observado experimentalmente.

Para un mejor análisis del efecto de la fuerza viscosa sobre el movimiento del cuerpo determinaremos cómo varía la velocidad del cuerpo con la posición. Sabemos que:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v . \quad (122)$$

Entonces podemos escribir

$$v \frac{dv}{dx} = g - \gamma v^2 , \quad (123)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{C_d A \rho_f}{m} . \quad (124)$$

A partir de la ec.(123) planteamos

$$\int_0^v \frac{v dv}{g - \gamma v^2} = \int_0^x dx . \quad (125)$$

Integrando obtenemos

$$x = -\frac{1}{2\gamma} \ln(g - \gamma v^2) \Big|_0^v = -\frac{1}{2\gamma} \ln\left(1 - \frac{\gamma v^2}{g}\right). \quad (126)$$

A partir de las ecs.(121) y (124) puede verse que  $\sqrt{g/\gamma} = v_l$ ; con lo cual, la ecuación anterior puede reescribirse como

$$x = -\frac{1}{2\gamma} \ln\left(1 - \frac{v^2}{v_l^2}\right). \quad (127)$$

Entonces, la dependencia de la velocidad con la posición esta dada por

$$v(x) = v_l \sqrt{1 - e^{-2\gamma x}}. \quad (128)$$

Si analizamos el movimiento de un paracaidista de 90 kg de masa, antes de que abra el paracaídas y haciendo la aproximación de que la densidad del aire es constante con la altura, podemos estimar que si vuela cabeza abajo ( $C_d = 0,7$  y  $A = 0,25 \text{ m}^2$ ) su velocidad límite será  $v_l \simeq 87,4 \text{ m/s}$  y la alcanzará al recorrer aproximadamente 2500 m. Sin embargo, si cae en posición horizontal ( $C_d = 1$  y  $A = 0,9 \text{ m}^2$ ) su velocidad límite es  $v_l \simeq 39,0 \text{ m/s}$  y la alcanzará al recorrer aproximadamente 500 m. Cuando abre el paracaídas aumenta la fuerza viscosa (se incrementan los valores de  $C_d$  y  $A$ ) generando una aceleración hacia arriba lo que reduce notablemente la velocidad límite con la que llegará a tierra.

En la figura 23 podemos ver el comportamiento de la velocidad, en función de la distancia recorrida, de una esfera de hierro de 1 cm de radio que se deja caer en aire. También se grafica, para hacer un análisis comparativo, la velocidad de caída en aire de una esfera de telgopor de alta densidad (30 kg/m<sup>2</sup>) de idénticas dimensiones y la velocidad suponiendo caída libre.

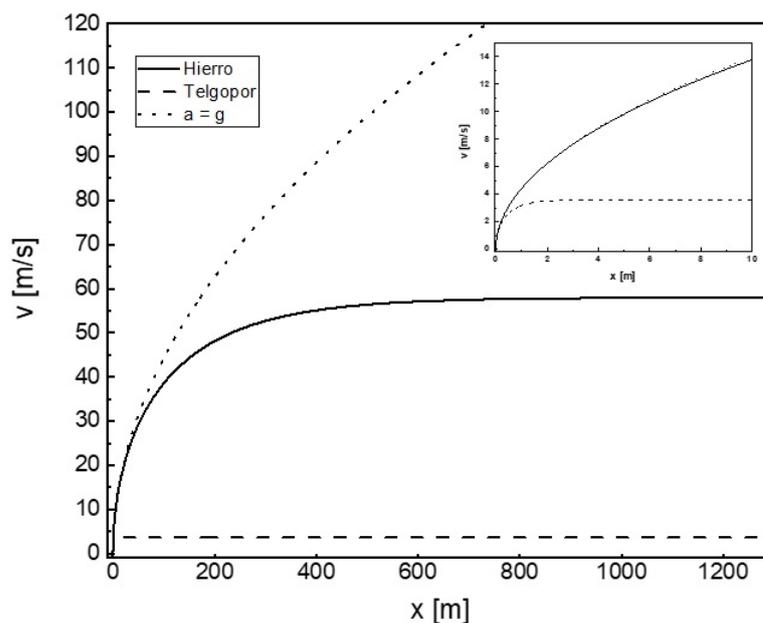


Figura 23: Velocidad en función de la distancia recorrida de esferas de hierro y telgopor cayendo en el vacío y en aire. Inserto: se observa una ampliación de los 10 primeros metros de recorrido.

Como se observa en la figura 23, la esfera de hierro alcanza su velocidad límite (58,0 m/s) cuando ha recorrido aproximadamente 1200 m, mientras que una esfera de telgopor alcanza su velocidad límite (3,6 m/s) aproximadamente a los 5 m de recorrido.

Entonces es válido preguntarnos, ¿en la caída en aire de un cuerpo podemos despreciar el efecto del fluido sobre el movimiento y considerar que su aceleración  $g$ ? Será válido considerar que la aceleración es  $g$  dependiendo del cuerpo (dimensiones y masa) y de la distancia que estemos analizando. En el ejemplo graficado en la figura 23 vemos que para la esfera de hierro se comienza a hacer evidente el efecto de la fuerza viscosa cuando el móvil ha recorrido aproximadamente 5 m, mientras que en

el caso de la esfera de telgopor los efectos de viscosidad se hacen evidentes cuando ha recorrido aproximadamente 2 cm.

## 8. Fuerzas elásticas

Ya hemos mencionado que los resortes son capaces de proveer una fuerza proporcional a su estiramiento o contracción,  $|\vec{F}| = k|\Delta\ell|$  (ley de Hooke), cuando son deformados dentro de cierto límite de  $\Delta\ell$  conocido como rango elástico. Ahora analizaremos cómo es el movimiento de un cuerpo sometido a la fuerza de un resorte.

### 8.1. Movimiento oscilatorio

Consideremos el siguiente ejemplo: un cuerpo de masa  $m$  está fijo al extremo libre de un resorte de constante elástica  $k$  y el otro extremo del resorte está fijo a una pared. Todo el conjunto está colocado sobre una mesa horizontal sin rozamiento. En la Fig. 24 se esquematizan las fuerzas aplicadas sobre una masa  $m$  unida a un resorte de longitud natural  $\ell_0$ , en distintas situaciones de estiramiento.

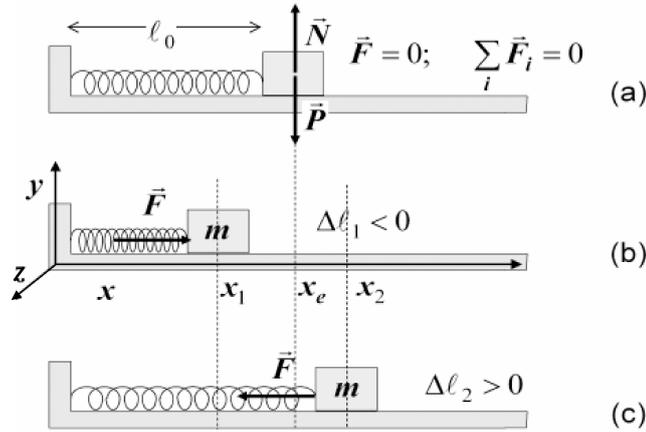


Figura 24: Diferentes instantes en un movimiento oscilatorio armónico, (a) equilibrio, (b) resorte comprimido, (c) resorte estirado.

Para analizar el movimiento del cuerpo bajo la acción de la fuerza elástica planteamos la ecuación de movimiento para este caso particular. Elegimos un sistema de coordenadas como el de la Fig. 24, donde el eje  $x$  coincide con la dirección de la fuerza del resorte; las fuerzas peso y reacción de la superficie están sobre el eje  $y$  y su suma es idénticamente nula durante todo el movimiento. El eje  $z$  resulta perpendicular al plano de la figura. Sólo hay fuerzas netas sobre la dirección  $x$ , por lo cual el movimiento será en esta dirección. Entonces:

$$F_y = 0 \quad \text{y} \quad F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y = v_z = \text{cte.} = 0. \quad (129)$$

Con lo que sólo resta resolver la ecuación de movimiento en la dirección  $x$ , donde ocurren eventos más interesantes. Como puede observarse en la Fig. 24, teniendo en cuenta que se cumple la ley de Hooke, vemos que:

$$\begin{aligned} \text{si } m \text{ está en la posición } x_e, \text{ entonces } \vec{F} &= 0, \\ \text{si } m \text{ está en la posición } x_1, \text{ entonces } \vec{F} &= -k(x_1 - x_e)\hat{i} \quad (F_x > 0), \\ \text{si } m \text{ está en la posición } x_2, \text{ entonces } \vec{F} &= -k(x_2 - x_e)\hat{i} \quad (F_x < 0). \end{aligned}$$

De manera genérica, si el cuerpo se encuentra en una posición  $x$ ,

$$\vec{F} = -k(x - x_e)\hat{i}, \quad (130)$$

lo que indica que la fuerza del resorte siempre apunta hacia la posición de equilibrio  $x_e$ .

La segunda ley de Newton nos dice que la ecuación de movimiento en la única variable de interés (la coordenada  $x$ ) es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_e) . \quad (131)$$

Como  $x_e$  es una constante, su derivada segunda es nula, de manera que podemos reescribir convenientemente la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$m \frac{d^2(x - x_e)}{dt^2} = -k(x - x_e) . \quad (132)$$

Si hacemos un cambio de variables, llamando  $u = x - x_e$  podemos escribir:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -k u , \quad (133)$$

o bien,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{k}{m} u = 0 . \quad (134)$$

Debemos notar que el cambio de variables efectuado implica un cambio a un sistema de coordenadas  $u$  cuyo origen coincide con la posición de equilibrio del resorte. La ecuación diferencial de segundo grado resultante tiene un término lineal en la variable  $u$ , por lo tanto su solución no será trivial como en el caso del tiro vertical con aceleración constante ni tan complicado como el caso de la atracción gravitatoria dependiente de la distancia. La función de movimiento que es solución de esta ecuación debe ser tal que si se la deriva dos veces respecto del tiempo, se vuelva a obtener la misma función pero multiplicada por un factor constante  $-k/m$ .

Una función que cumple con esta condición es  $f(t) = \text{sen}(\omega t)$ , donde  $\omega$  es una constante, ya que

$$\frac{df}{dt} = \omega \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 \text{sen}(\omega t) = \text{cte. } f(t) . \quad (135)$$

Para encontrar la constante  $\omega$  debemos sustituir la función  $f(t)$  en la ec.(134):

$$0 = \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{k}{m} f = -\omega^2 \text{sen}(\omega t) + \frac{k}{m} \text{sen}(\omega t) = \left( -\omega^2 + \frac{k}{m} \right) \text{sen}(\omega t) . \quad (136)$$

Para que el último término se anule para todo tiempo es necesario que  $\omega = 0$ , con lo cual  $u(t) = 0$  y no hay movimiento, o bien, debe cumplirse que

$$-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0 , \quad (137)$$

es decir,  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Entonces, una solución para la ec.(134) es  $\text{sen}(\sqrt{k/m} t)$ . Como puede verse,  $\cos(\sqrt{k/m} t)$  también es solución de la ec.(134); ya que ésta es una ecuación lineal, es fácil convencerse de que cualquier combinación lineal de ambas soluciones, también será solución. Esto puede verificarse directamente sustituyendo una combinación lineal arbitraria en la ec.(134). Luego, la solución más general es

$$u(t) = A \text{sen}(\sqrt{k/m} t) + B \cos(\sqrt{k/m} t) . \quad (138)$$

Volviendo al sistema de coordenadas inicial:

$$x(t) = x_e + A \text{sen}(\sqrt{k/m} t) + B \cos(\sqrt{k/m} t) . \quad (139)$$

Por simplicidad, adoptaremos un sistema de coordenadas con origen en la posición de equilibrio del extremo libre del resorte, es decir, que en definitiva:

$$x(t) = A \text{sen}(\sqrt{k/m} t) + B \cos(\sqrt{k/m} t) . \quad (140)$$

Como vemos, la solución dada en la ec.(140) tiene dos constantes a determinar ya que responde a una ecuación diferencial de segundo grado, de manera que para encontrar completamente la función de movimiento  $x(t)$  es necesario conocer información adicional (como ocurre siempre en la integración de las ecuaciones de movimiento). Supongamos que, para un caso particular se tienen las siguientes condiciones iniciales: para  $t = 0$ ,  $x = x_0$  y  $v = v_0$ . Haciendo  $t = 0$  en la ec.(140) vemos que

$$x_0 = x(0) = B \quad \Rightarrow \quad B = x_0 . \quad (141)$$

Derivando la función de movimiento podemos escribir:

$$v(t) = \sqrt{k/m} \left[ A \cos(\sqrt{k/m} t) - B \sin(\sqrt{k/m} t) \right] . \quad (142)$$

Ahora hacemos  $t = 0$  en esta última expresión:

$$v_0 = v(0) = \sqrt{k/m} A \quad \Rightarrow \quad A = v_0 \sqrt{m/k} = \frac{v_0}{\omega} . \quad (143)$$

Entonces, la solución de este caso particular queda:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t) , \quad (144)$$

con  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Consideremos ahora otra forma de escribir la solución de este tipo de movimiento, que a veces resulta conveniente. Para ello, retomemos la expresión de la función de movimiento dada en la ec.(140) sustituyendo las constantes  $A$  y  $B$  de manera conveniente:

$$A = x_m \cos(\phi_0) \quad \text{y} \quad B = x_m \sin(\phi_0) . \quad (145)$$

Reemplazando en la solución de la función de movimiento queda:

$$x(t) = x_m \cos(\phi_0) \sin(\omega t) + x_m \sin(\phi_0) \cos(\omega t) . \quad (146)$$

Recordando que  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)$ , la expresión anterior puede escribirse como:

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \phi_0) . \quad (147)$$

Esta es la misma función que la dada en la ec.(140), pero escrita en términos de otras constantes:  $x_m$  y  $\phi_0$ . En ambos casos tenemos dos constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales. La ec.(145) muestra cómo se expresan las constantes  $A$  y  $B$  en función de  $x_m$  y  $\phi_0$ ; las últimas en función de las primeras se expresan de la siguiente forma:

$$x_m = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{y} \quad \text{tg}(\phi_0) = \frac{B}{A} . \quad (148)$$

La ec.(147) nos dice que:

- El movimiento es sinusoidal. Es decir, responde a una función periódica; por este motivo al movimiento de una masa enganchada a un resorte se lo denomina movimiento oscilatorio armónico.
- $x(t)$  toma valores entre  $-x_m$  y  $x_m$ , por lo tanto la constante  $x_m$  está relacionada con los valores extremos de la variable, por lo que se la llama amplitud máxima.
- la constante  $\phi_0$  se llama fase inicial; es el argumento de la función seno para  $t = 0$ . Es decir, para  $t = 0$  la posición es  $x(0) = x_m \sin(\phi_0)$ .

Repetamos el cálculo del ejemplo anterior con esta nueva expresión. Ahora las condiciones para  $t = 0$ :  $x = x_0$  y  $v(0) = v_0$  se traducen en la función de movimiento como

$$x(0) = x_0 = x_m \operatorname{sen}(\phi_0) , \quad (149)$$

y en la función velocidad:

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_m \cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v(0) = v_0 = \omega x_m \cos(\phi_0) . \quad (150)$$

Las expresiones encontradas para  $x_0$  y  $v_0$  en términos de  $x_m$  y  $\phi_0$  constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (este último par de parámetros) fácil de resolver:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = x_m \operatorname{sen}(\phi_0) \\ v_0 = \omega x_m \cos(\phi_0) \end{array} \right\} \Rightarrow x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} ; \quad \operatorname{tg}(\phi_0) = \frac{\omega x_0}{v_0} . \quad (151)$$

Resta todavía considerar el significado del parámetro  $\omega$ . Supongamos que para un dado tiempo  $t'$  el argumento del seno de la ec.(147) es  $\omega t' + \phi_0 = \alpha$ . Como la función seno es periódica de período  $2\pi$ , existe un tiempo  $T$  para el cual se verifica que el seno evaluado en  $t' + T$  es igual al seno evaluado en  $t'$ , es decir,

$$\omega(t' + T) + \phi_0 = \alpha + 2\pi . \quad (152)$$

Escrito de otra forma vemos que

$$\alpha + 2\pi = \overbrace{\omega t' + \phi_0}^{\alpha} + \omega T = \alpha + \omega T . \quad (153)$$

Por lo tanto,

$$\omega T = 2\pi . \quad (154)$$

Entonces, transcurrido un tiempo  $T$ , la función de movimiento vuelve a repetir sus valores:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (155)$$

El tiempo  $T$  se denomina período del movimiento y físicamente representa el mínimo tiempo que debe transcurrir para que el cuerpo pase por la misma posición con la misma velocidad. La cantidad  $f = 1/T$  es la frecuencia con que oscila el cuerpo; su valor numérico coincide con el número de períodos que realiza el movimiento en la unidad de tiempo. La cantidad  $\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi/T$  es proporcional a la frecuencia  $f$  y se denomina frecuencia angular de oscilación. Cabe notar que la frecuencia depende de la constante de resorte  $k$  y de la masa  $m$  del cuerpo, pero no depende de la amplitud  $x_m$  ni de las condiciones iniciales del movimiento.

### 8.1.1. Energía del oscilador armónico

Recordemos la ecuación de movimiento del oscilador armónico ec.(131), con el origen de coordenadas en la pared:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_e) , \quad (156)$$

o bien:

$$m \frac{dv}{dt} = -k(x - x_e) . \quad (157)$$

Repetiendo algunos pasos mágicos ya utilizados anteriormente:

$$m \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = -k \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} (x - x_e)^2 \right] , \quad (158)$$

es decir,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) = -\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 \right]. \quad (159)$$

Entonces,

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 \right] = 0, \quad (160)$$

lo que nos dice que el término entre paréntesis es una constante de movimiento, nuestra conocida energía; como siempre, el término que depende de la velocidad es la energía cinética y el que depende de la posición es la energía potencial:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2. \quad (161)$$

Se puede ver que el término de energía potencial elástica tiene una expresión diferente de la que obtuvimos en el caso de la fuerza gravitatoria. Las energías correspondientes a los distintos tipos de interacción que hemos tratado pueden verse en la tabla 1. Claramente, la energía cinética es siempre la misma y lo que varía es la energía potencial, que es característica de cada tipo de fuerza.

Fuerza	Energía	Tipo de fuerza
$m\vec{g}$	$\frac{1}{2}mv^2 + mgz$ si $\vec{g} = -g\hat{k}$	Gravitatoria cerca de la sup. de la Tierra
$m\vec{g}$	$\frac{1}{2}mv^2 - mgz$ si $\vec{g} = g\hat{k}$	
$-\frac{GmM}{r^2}\hat{u}_\rho$	$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$	Gravitatoria de largo alcance
$-k(x - x_e)\hat{i}$	$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2$	Elástica causada por un resorte

Tabla 1: Expresiones para la energía para distintos tipos de fuerza

Una manera alternativa de llegar a la función de movimiento de un cuerpo enganchado a un resorte, a partir del concepto de energía, puede verse en el apéndice A. Todo lo analizado en esta sección ignora el efecto de las fuerzas viscosas estudiadas en la sec. 7; en el apéndice B se desarrolla el problema teniendo en cuenta esta situación.

## 8.2. Movimiento oscilatorio bajo acción de una fuerza constante

Analizaremos ahora el caso de una masa  $m$  suspendida de un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $x_0$ , como se indica en la Fig. 25. Como ya es usual, elegimos un sistema de coordenadas, planteamos la ecuación de movimiento y la resolvemos para obtener las funciones de movimiento.

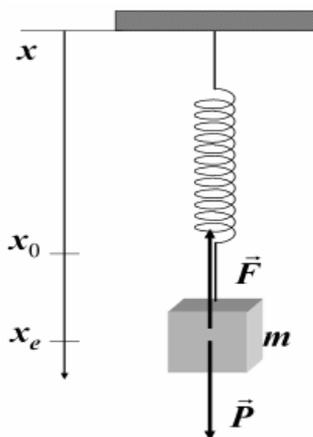


Figura 25: Movimiento oscilatorio bajo la acción del peso.

Las fuerzas que actúan sobre la masa  $m$  son: su peso  $\vec{P} = mg\hat{i}$  y la fuerza del resorte  $\vec{F} = -k(x - x_0)\hat{i}$ , de manera que la segunda Ley de Newton para este caso toma la expresión

$$mg\hat{i} - k(x - x_0)\hat{i} = m\vec{a} . \quad (162)$$

¿Cuál es la posición de equilibrio de la masa colgada? No tiene por qué ser la misma que la longitud natural del resorte. Llamemos  $x_e$  a la posición de equilibrio y  $x_0$  a la posición del resorte sin carga (longitud natural), como indica la figura. Dado que en el equilibrio se cumple  $\vec{F} + m\vec{g} = 0$  y esto es equivalente a

$$-k(x_e - x_0) + mg = 0 , \quad (163)$$

entonces,  $x_e = mg/k + x_0$ . Si el cuerpo está en cualquier otra posición, ya no estará en equilibrio. La ecuación de movimiento que satisface la posición  $x$  de la masa  $m$  es la dada en la ec.(162) de manera vectorial:

$$mg - k(x - x_0) = m \frac{d^2x}{dt^2} . \quad (164)$$

Si dentro del paréntesis del miembro izquierdo sumamos y restamos  $x_e$ , no modificamos la igualdad, por lo tanto resulta

$$mg - k(x - x_e - x_0 + x_e) = m \frac{d^2x}{dt^2} , \quad (165)$$

$$-k(x - x_e) - k(x_e - x_0) + mg = m \frac{d^2x}{dt^2} . \quad (166)$$

Usando la ec.(163) podemos escribir:

$$-k(x - x_e) = m \frac{d^2x}{dt^2} . \quad (167)$$

En la ec.(167) se ve que la ecuación de movimiento para la masa colgada del resorte tiene la misma forma que la de la masa unida al extremo de un resorte que se mueve sobre una superficie horizontal, como puede verse en la ecuación de movimiento del resorte, ec.(131), sólo que ahora la posición  $x_e$  no es la longitud natural del resorte, sino la nueva posición de equilibrio de la masa suspendida. Como se vio en la sección 8.1, la función de movimiento que satisface esta ecuación es de la forma

$$u(t) = x(t) - x_e = A \sen(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad \text{o} \quad u(t) = x_m \sen(\omega t + \phi_0) , \quad (168)$$

donde  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . La función de movimiento que resulta es idéntica a la del caso anterior, salvo que ahora la masa oscila alrededor de una nueva posición de equilibrio. El movimiento tiene el mismo período y frecuencia que el caso anterior, porque ninguna de estas magnitudes depende de dónde está la posición de equilibrio. En cuanto a la energía, dado que la ecuación es la misma, podremos identificar nuevamente una constante de movimiento cuya expresión será igual a la del resorte horizontal; según la ec.(161):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 . \quad (169)$$

Sólo que ahora  $x_e$  no es más  $x_0$ , sino  $mg/k + x_0$ . El segundo término, correspondiente a la energía potencial no incluye explícitamente un término para la energía potencial gravitatoria del tipo  $mgx$ , en el sistema de coordenadas usado. Sin embargo, si sustituimos el valor de  $x_e$  tenemos

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(x - \frac{mg}{k} - x_0\right)^2 , \quad (170)$$

es decir

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 - mgx + mgx_0 + \frac{(mg)^2}{2k} . \quad (171)$$

Los dos últimos términos son constantes, con lo cual, puesto que  $E$  es una constante de movimiento, la magnitud

$$E' = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 - mgx \quad (172)$$

también lo es, y también representa la energía mecánica del sistema. En la última expresión para la energía aparecen explícitamente los términos elástico y gravitatorio.

### 8.2.1. Ejemplo: cuerpo enganchado a un resorte sobre un plano inclinado

Consideremos el sistema de la Fig. 26, en el cual un cuerpo de masa  $m$  está enganchado a un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $\ell_0$ , y el sistema oscila sobre un plano inclinado en un ángulo  $\theta$  respecto de la horizontal. En primer lugar encontraremos la coordenada  $x_e$  de equilibrio; para ello

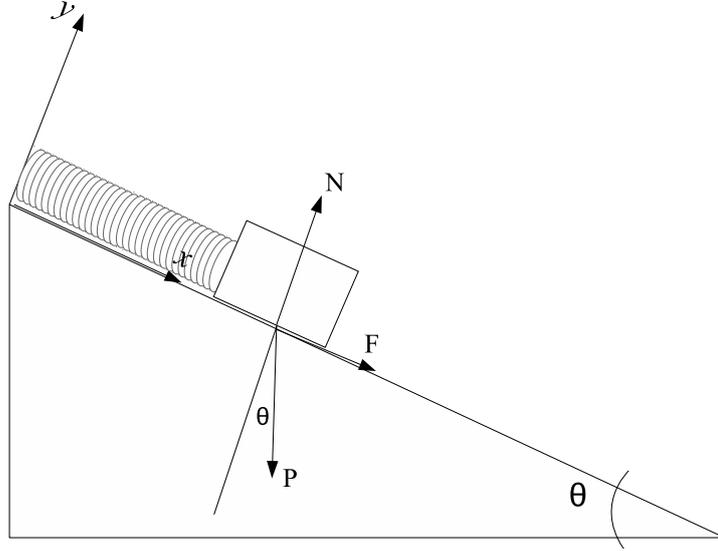


Figura 26: Cuerpo enganchado a un resorte sobre un plano inclinado.

planteamos el sistema en equilibrio:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = 0 \quad \text{con} \quad \vec{F} = -k(x - \ell_0)\hat{i}. \quad (173)$$

En la componente  $x$ :

$$mg \sen(\theta) - k(x - \ell_0) = 0. \quad (174)$$

Despejando la coordenada de equilibrio  $x = x_e$  de esta ecuación tenemos:

$$x_e = \ell_0 + \frac{mg}{k} \sen(\theta). \quad (175)$$

Ahora planteamos la ecuación de movimiento (fuera del equilibrio):

$$mg \sen(\theta) - k(x - \ell_0) = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (176)$$

Esta última ecuación puede reescribirse como

$$-k \left[ x - \ell_0 - \frac{mg}{k} \sen(\theta) \right] = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (177)$$

Si consideramos la expresión para  $x_e$  dada en ec.(175) obtenemos una expresión que ya conocemos:

$$-k(x - x_e) = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (178)$$

Esta es la ec.(167), que como vimos, conduce a la solución

$$u(t) = x(t) - x_e = x_m \sen(\omega t + \phi_0). \quad (179)$$

En este caso, igual que en el anterior,  $\omega$  sigue siendo  $\sqrt{k/m}$  y el único cambio es desde dónde se mide la coordenada: en este caso, desde un valor  $x_e$  dado por la ec.(175).

### 8.3. Propiedades elásticas de los sólidos

Consideremos un arreglo ordenado de pequeñas masas  $m$  en tres dimensiones (supuestas todas iguales por simplicidad) unidas mediante resortes que pueden ser paralelos a la dirección  $x$ ,  $y$  ó  $z$  (que también supondremos todos iguales). La Fig. 27 muestra una representación en dos dimensiones de tal arreglo. Al aplicar una fuerza sobre este arreglo, va a producirse una deformación que involucra, en principio, a todas las masas porque todas están ligadas: son cuerpos interactuantes. Este tipo de construcción es un modelo adecuado para representar algunas características de los sólidos. En este modelo microscópico, las masas  $m$  representan los átomos y las barras que los unen actúan como resortes y son las fuerzas interatómicas que mantienen ligado al sólido. De esta manera, podemos esperar que un sólido sufra deformaciones en respuesta a la aplicación de una fuerza externa. Si se aplica una fuerza en alguna de las direcciones  $x$ ,  $y$  ó  $z$ , por ejemplo la dirección  $x$ , capaz de apartar al átomo  $j$ -ésimo en una cantidad  $\Delta x_j$ , la fuerza restitutoria capaz de devolver el átomo a su lugar será  $F_x^j = -k\Delta x_j$ . Algo similar pasará si la fuerza es aplicada en otra dirección. Si pensamos en

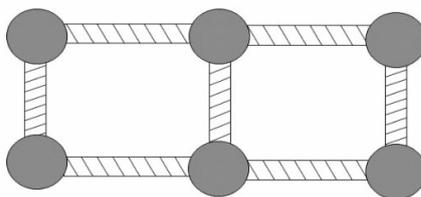


Figura 27: Modelo microscópico de un sólido elástico.

fuerzas y deformaciones macroscópicas que se pueden medir en el laboratorio, es lógico prever que el comportamiento tendrá relación con el modelo microscópico (si es que éste es un buen modelo). Si consideramos una barra de longitud  $L$  y sección transversal  $A$  a la cual le aplicamos una fuerza  $F$  en la dirección longitudinal, podríamos esperar observar una pequeña variación  $\Delta L$  proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada; es decir, sería esperable una relación tipo

$$F \propto \Delta L . \quad (180)$$

Ahora bien, podemos pensar esta barra como una gran cantidad de resortes en serie a lo largo de la longitud y en paralelo cubriendo toda la sección transversal. Teniendo en cuenta que la constante equivalente de resortes en paralelo aumenta, pues se suman las constantes, y que la constante equivalente de resortes en serie disminuye, pues se suman las inversas, para una dada fuerza, la variación de  $L$  aumentará si el “resorte” es blando, es decir, si la longitud es larga, y disminuirá si el “resorte” es duro, es decir, si el área es grande. Entonces podemos escribir:

$$F = Y \frac{A}{L} \Delta L , \quad (181)$$

donde la constante de proporcionalidad  $Y$  se llama módulo de Young y efectivamente vemos que para una dada fuerza  $F$ , la variación de  $L$  aumenta con  $L$  y disminuye con  $A$ . La expresión dada en ec.(181) se observa experimentalmente, lo que habla bien del modelo microscópico supuesto. En la tabla 2 se muestran los módulos de Young para algunos materiales frecuentemente utilizados en la industria.

La fuerza por unidad de área  $\sigma = F/A$ , recibe el nombre de tensión, mientras que la variación relativa de la longitud de la barra  $\epsilon = \Delta L/L$  se denomina deformación. Con estas definiciones, la expresión anterior se escribe

$$\sigma = Y \epsilon , \quad (182)$$

que indica que la tensión y la deformación son proporcionales. Esta relación vale tanto para valores positivos como negativos de la tensión, es decir tanto para fuerzas de tracción como de compresión.

Tabla 2: Módulos de Young de varios sólidos.

Material	$Y[\times 10^9 \text{N/m}^2]$	Material	$Y[\times 10^9 \text{N/m}^2]$
Níquel	205	Vidrio	70
Acero	200	Aluminio	70
Hierro forjado	190	Hormigón	23
Cobre	110	Plomo	16
Hierro fundido	100	Hueso	16
Bronce	90	Goma	15
Oro	81	Poliestireno	3
Plata	80	Caucho	0,001

## 9. Péndulo ideal o matemático

Analicemos ahora otro movimiento particular: el que realiza una masa puntual suspendida de un hilo, cerca de la superficie de la Tierra. Esto es, la masa puntual está bajo la acción de la gravedad (constante) y está sostenida por un hilo de longitud  $l$ , sin masa e inextensible. En el movimiento pendular, la trayectoria del cuerpo suspendido será un arco de circunferencia, contenida en un plano vertical. En la Fig. (28) se muestran las fuerzas que actúan sobre el péndulo de masa  $m$ , el vector velocidad que es tangente a la trayectoria y el vector aceleración.

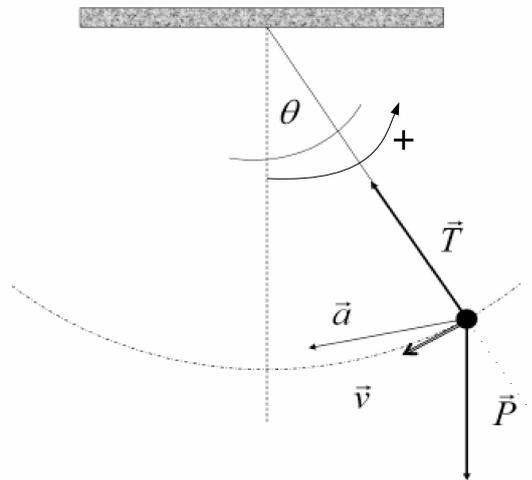


Figura 28: Péndulo ideal.

La segunda ley de Newton para este problema se expresa como

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} . \quad (183)$$

Elegimos un sistema de coordenadas polares con origen en el punto de suspensión del hilo, en el cual consideramos que el ángulo  $\theta$  es positivo cuando crece en sentido antihorario. Está claro que de

las dos coordenadas, sólo la coordenada angular  $\theta$  es relevante, ya que  $\rho = \ell = \text{cte}$ . En este sistema las fuerzas son

$$\vec{P} = mg \cos(\theta) \hat{u}_\rho - mg \sin(\theta) \hat{u}_\theta \quad \text{y} \quad \vec{T} = -|T| \hat{u}_\rho . \quad (184)$$

Mientras que a la aceleración podemos escribirla en sus componentes normal y tangencial:

$$\vec{a} = a_n \hat{u}_\rho + a_t \hat{u}_\theta . \quad (185)$$

Ahora podemos analizar las ecuaciones de movimiento según cada coordenada.

Según  $\hat{u}_\rho$ ,

$$-T + mg \cos(\theta) = ma_n . \quad (186)$$

Como se trata de un movimiento circular,  $ma_n = -m\omega^2 \ell$ . Entonces queda:

$$-T + mg \cos(\theta) = -m\omega^2 \ell = -m\ell \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 . \quad (187)$$

La solución de esta ecuación relacionará la función de movimiento  $\theta(t)$  con  $T$ .

Según  $\hat{u}_\theta$ ,

$$-mg \sin(\theta) = ma_t , \quad (188)$$

donde  $a_t$  es la componente tangencial de la aceleración. Sabemos que

$$a_t = \frac{d(\omega \ell)}{dt} = \frac{d^2 \theta}{dt^2} \ell . \quad (189)$$

Entonces, la ec.(188) puede escribirse

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta) . \quad (190)$$

La solución de esta ecuación diferencial es una función tal que derivada dos veces es igual a una constante multiplicada por el seno de esa función. Enseguida nos damos cuenta de que... no podemos encontrar la función de movimiento  $\theta(t)$  para el péndulo ideal. Sin darnos por vencidos, veamos qué información podemos extraer de este problema. Sabemos que

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \omega = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{2} \omega^2 \right) . \quad (191)$$

Además,

$$-\frac{g}{\ell} \sin(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{g}{\ell} \cos(\theta) \right] . \quad (192)$$

Sustituyendo el primer miembro de esta última ecuación por el primer miembro de la ec.(190) y haciendo pasaje de términos,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{g}{\ell} \cos(\theta) \right] = 0 . \quad (193)$$

Entonces, utilizando la ec.(191) podemos escribir:

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{g}{\ell} \cos(\theta) \right] = 0 . \quad (194)$$

El término entre corchetes es necesariamente una constante de movimiento. Si multiplicamos ese término por  $m\ell^2$  obtenemos la energía mecánica del péndulo ideal:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - m g \ell \cos(\theta) . \quad (195)$$

Para llegar a la ec.(195) hemos descrito el problema desde un sistema de coordenadas polares. Podemos reescribir este resultado desde un sistema de coordenadas cartesiano en que el eje  $x$  coincida

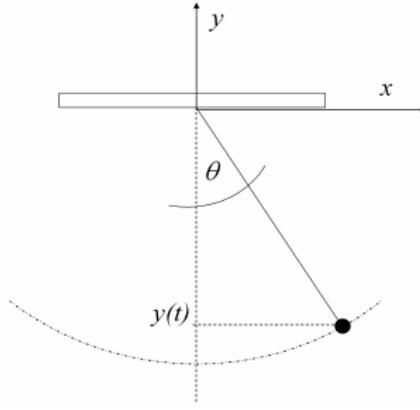


Figura 29: Péndulo ideal en coordenadas cartesianas.

con la horizontal, el eje  $y$  con la vertical y tal que el origen esté en el punto de suspensión del péndulo, como se muestra en la Fig. (29).

Puede verse que la coordenada vertical del péndulo es, para todo tiempo  $y(t) = -\ell \cos[\theta(t)]$ . Reemplazando esto en la ec.(195), queda

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy(t) . \quad (196)$$

Como vemos, la energía potencial del péndulo coincide con la energía potencial de la interacción gravitatoria cerca de la Tierra.

En principio, puede utilizarse la expresión de la energía dada en la ec.(195) para averiguar algo más sobre el movimiento del péndulo. Si la posición y la velocidad del péndulo son conocidas para algún instante, puede determinarse el valor de la energía. Luego, usando un sistema de coordenadas polares como el de la Fig. 28 se puede escribir la velocidad a un tiempo  $t$  arbitrario en función de  $E$ .

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + 2g\ell \cos(\theta)} . \quad (197)$$

Como  $v = \ell \frac{d\theta}{dt}$ , se cumple que  $dt = \ell \frac{d\theta}{v}$ . Reemplazando en esta ecuación la expresión para  $v$  dada en la ec.(197):

$$dt = \pm \frac{\ell d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{m} + 2g\ell \cos(\theta)}} . \quad (198)$$

La integración de esta ecuación para obtener el tiempo en función de la coordenada  $\theta$ , y a partir de allí obtener  $\theta(t)$ , no puede hacerse de manera analítica y exacta, sino sólo mediante métodos numéricos. Vamos a plantear el problema del péndulo ideal en una situación particular, para resolverlo de manera aproximada.

### 9.1. Pequeñas oscilaciones

Recordemos la ecuación de movimiento (190):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta) . \quad (199)$$

Consideremos ahora que las oscilaciones del péndulo se apartan poco de la posición de equilibrio  $\theta = 0$ . Veamos a qué se puede aproximar la función  $\sin(\theta)$  en este caso de pequeñas oscilaciones. Para ello manipulemos su derivada:

$$d \sin(\theta) = \frac{d \sin(\theta)}{d\theta} d\theta = \cos(\theta) d\theta . \quad (200)$$

Tabla 3: La aproximación de ángulos  $\theta$  pequeños.

$\theta$ (°)	$\theta$ (rad)	$\text{sen}(\theta)$	dif. relativa	$\text{cos}(\theta)$	$1-\text{cos}(\theta)$
0,1	0,0017453293	0,00174532836	$5 \times 10^{-7}$	0,9999985	$2 \times 10^{-6}$
0,5	0,0087266	0,00872654	$7 \times 10^{-6}$	0,999962	$4 \times 10^{-5}$
1	0,0174533	0,0174524	$5 \times 10^{-5}$	0,99985	$2 \times 10^{-4}$
2	0,034907	0,034899	$2 \times 10^{-4}$	0,99939	$6 \times 10^{-4}$
5	0,08727	0,08716	$1 \times 10^{-3}$	0,9962	$4 \times 10^{-3}$
10	0,1745	0,1736	$5 \times 10^{-3}$	0,985	$1,5 \times 10^{-2}$
20	0,3491	0,3420	$2 \times 10^{-2}$ (2 %)	0,940	$6 \times 10^{-2}$ (6 %)
30	0,524	0,500	$5 \times 10^{-2}$ (5 %)	0,87	0,13 (13 %)
40	0,698	0,643	$8 \times 10^{-2}$ (8 %)	0,77	0,23 (23 %)
50	0,873	0,766	0,12 (12 %)	0,64	0,36 (36 %)

Para  $\theta$  cerca de 0,  $\text{cos}(\theta) \approx 1$ , con lo cual podemos hacer la siguiente aproximación:

$$d \text{sen}(\theta) \approx d\theta. \quad (201)$$

Luego, en esta aproximación  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ , y la ecuación de movimiento queda

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta. \quad (202)$$

Esta ecuación es igual a la de oscilador armónico, cuya solución ya conocemos, de manera que la función de movimiento del péndulo en la aproximación de oscilaciones de pequeña amplitud queda

$$\theta(t) = \theta_{\text{máx}} \text{sen}(\omega t + \phi_0), \quad (203)$$

donde la frecuencia angular es  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ , y  $\theta_{\text{máx}}$  y  $\phi_0$  son constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales. El período de oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad (204)$$

es decir,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (205)$$

Tabla 4: Relación entre el período exacto  $T_{ex}$  y los períodos aproximados  $T$  para distintos valores de  $\theta_{\text{máx}}$ .

$\theta_{\text{máx}}$ (°)	$T_{ex}/T$
1	1,0000
4	1,0000
5	1,0005
10	1,002
15	1,004
20	1,007
30	1,017
40	1,031
50	1,049

Debemos notar que el período es independiente de la amplitud (en esta aproximación) y tampoco depende de la masa del péndulo. El período sólo depende de la longitud del péndulo y de la gravedad del lugar. En relación a cuándo podemos considerar que la aproximación realizada es “buena”, podríamos decir que con un  $\theta_{m\acute{a}x}$  de hasta  $40^\circ$  la aproximación está dentro del 10%. Para más detalles véase la Tabla 3. La calidad de la aproximación efectuada se manifiesta en la duración del período de oscilación: a medida que aumenta  $\theta_{m\acute{a}x}$ , el período se aparta más del expresado en la ec.(205). En la Tabla 4 se muestra la relación entre el período exacto  $T_{ex}$ , obtenido mediante resolución numérica de la ecuación de movimiento sin hacer la aproximación de pequeñas oscilaciones, ec.(190), y el valor aproximado  $T$  que obtiene resolviendo la ecuación, ec.(202), para distintos valores de  $\theta_{m\acute{a}x}$ .

Nótese que el error cometido al hacer la aproximación para un ángulo bastante grande ( $50^\circ$ ) es sólo del 5%; sin embargo, por un efecto acumulativo, al cabo de unos pocos períodos, la coordenada predicha por la ecuación aproximada comienza a apartarse de manera importante de la solución exacta. Para mayor información sobre el problema de grandes oscilaciones, ver el apéndice C.

## Capítulo 2: Momento lineal y momento angular.

### 10. Momento lineal

#### 10.1. Momento lineal de una partícula

Consideremos una partícula sometida a la acción de muchas fuerzas. La segunda ley de Newton nos dice:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}. \quad (206)$$

Si expresamos el segundo miembro en términos de la velocidad, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\sum_i \vec{F}_i = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (207)$$

Definimos la cantidad entre paréntesis como  $\vec{p} = m\vec{v}$ , de manera que en términos de este nuevo vector, la segunda ley de Newton se escribe:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (208)$$

El vector  $\vec{p}$  será, en general, una función del tiempo característica de la partícula en cuestión y recibe muchos nombres: momento lineal, impulso lineal, cantidad de movimiento, momento e ímpetu. Las unidades del momento lineal están dadas por  $[p] = [m][v]$ , es decir:

$$\text{en MKS } [p] = \frac{kg m}{s} \quad \text{y en cgs } [p] = \frac{g cm}{s}. \quad (209)$$

#### 10.2. Interacción entre dos partículas

Consideremos ahora un sistema de dos masas puntuales interactuantes “aislado”, es decir, un sistema sobre el cual no se ejerce ninguna fuerza exterior. Por ejemplo, dos masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas por un resorte sin masa, como muestra la Fig. 30.



Figura 30: Sistema aislado de dos masas interactuantes.

En la figura, las fuerzas de interacción se han dibujado cuando el resorte está estirado, pero esta situación irá cambiando con el tiempo. La tercera ley de Newton nos asegura que  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ . Combinando esta relación con la segunda ley:

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0. \quad (210)$$

La última ecuación puede escribirse en términos de la velocidad:

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0, \quad (211)$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0, \quad (212)$$

donde  $\vec{p}_1$  y  $\vec{p}_2$  son los momentos de las partículas. Vamos a definir el vector momento de un sistema de partículas como la suma vectorial de los momentos de cada una de ellas, así como la masa de un sistema es la suma de las masas de todas sus partes. En este caso de dos masas puntuales tenemos que  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ , donde con  $\vec{P}$  nos referimos al momento total del sistema de partículas. Entonces podemos escribir:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 . \quad (213)$$

Por lo tanto, para un sistema de dos partículas interactuantes, sobre el que no actúan fuerzas exteriores, el momento lineal total es una cantidad que se conserva. Esto nos dice que si conocemos las velocidades  $\vec{v}_{10}$  y  $\vec{v}_{20}$  en algún instante  $t_0$ , el momento total  $\vec{P} = m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20}$  tendrá siempre ese valor, aunque las velocidades individuales cambien a lo largo del tiempo. Cabe destacar que no importa qué tipo de interacción existe entre ambas masas puntuales, ya que en ningún momento hemos usado el hecho de que están unidas por un resorte.

Podemos pensar que el sistema está caracterizado por un vector momento  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  y por una sola masa  $M = m_1 + m_2$ , como si se tratara de una única partícula. Surge entonces una pregunta: ¿cómo se mueve esa partícula ficticia? En primer lugar, sabemos que para una única partícula  $\vec{p} = m\vec{v}$ , con lo cual,  $\vec{v} = \vec{p}/m$ . Siguiendo este razonamiento, en nuestro caso, podemos pensar que la velocidad “del sistema” estará dada por

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} . \quad (214)$$

El subíndice  $_{CM}$  se refiere a “centro de masa”, que es el nombre del punto ficticio que representa a todo el sistema que se mueve con  $\vec{V}_{CM}$ . Para encontrar la posición del centro de masa sólo hay que integrar su velocidad:

$$\vec{r}_{CM} = \int \vec{V}_{CM} dt = \frac{m_1 \int \vec{v}_1 dt + m_2 \int \vec{v}_2 dt}{m_1 + m_2} , \quad (215)$$

es decir,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} . \quad (216)$$

Si el sistema está aislado  $\vec{P}=\text{cte.}$ , es decir, puede representarse por una única partícula cuya posición está dada por el vector posición del centro de masa  $\vec{r}_{CM}$  de la ec.(216), que se mueve con velocidad  $\vec{V}_{CM}$  constante, dada por la ec.(214). Si elegimos un sistema de coordenadas que se mueva con velocidad  $\vec{V}_{CM}$  (podemos hacerlo sin problemas, ya que se trata de un sistema inercial), entonces en ese sistema la velocidad del centro de masa es nula y la posición, constante.

### 10.3. Sistemas de muchas partículas

Consideremos ahora un sistema de varias masas puntuales interactuantes aislado de la influencia de toda fuerza exterior. La Fig. 31 muestra un ejemplo con cuatro partículas, pero podrían ser muchas más. Sobre cada partícula actúan varias fuerzas que sumadas dan la fuerza resultante sobre ella, así:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \dots \\ \vec{F}_2 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \dots \\ \vec{F}_3 &= \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} + \dots \\ \vec{F}_4 &= \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34} + \dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (217)$$

Podemos ver que para cada fuerza del tipo  $\vec{F}_{ij}$  hay una fuerza del tipo  $\vec{F}_{ji}$ . Por la tercera ley de Newton, sabemos que  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ . Esto nos dice que si sumamos todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas, el resultado será nulo:

$$\vec{F} \equiv \sum_i \vec{F}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = 0 . \quad (218)$$

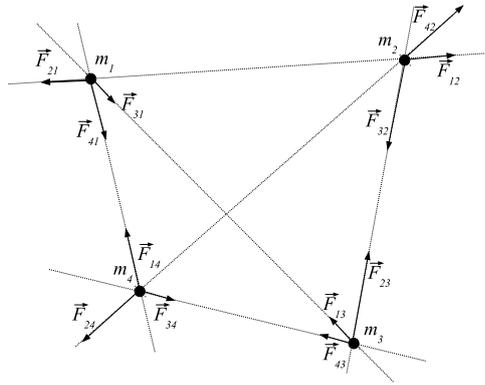


Figura 31: Sistema aislado de varias masas interactuantes.

Pero  $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$ , entonces:

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \vec{p}_i \right) = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0. \quad (219)$$

Por lo tanto, en un sistema aislado, se conserva el momento total del sistema, ya que si  $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ , entonces  $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{cte}$ .

Si en cambio existen fuerzas exteriores aplicadas a una o más partículas constituyentes del sistema (es decir, el sistema ya no está aislado), entonces se da una situación como la que ilustra la Fig. 32.

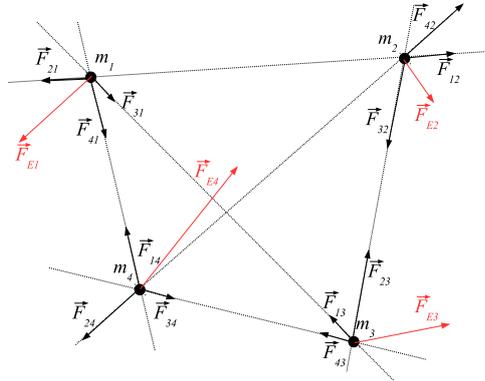


Figura 32: Sistema no aislado de varias masas interactuantes.

Ahora, el sistema de ecuaciones (217) debe incluir las fuerzas externas  $\vec{F}_{Ei}$ , cada una de las cuales actúa sobre la partícula  $i$ .

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_{E1} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \dots \\ \vec{F}_2 &= \vec{F}_{E2} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \dots \\ \vec{F}_3 &= \vec{F}_{E3} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} + \dots \\ \vec{F}_4 &= \vec{F}_{E4} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34} + \dots \\ &\dots \end{aligned} \quad (220)$$

Si separamos las fuerzas en dos categorías: fuerzas internas y fuerzas externas, claramente vemos que

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_{Ei}; \quad (221)$$

pero la suma de las fuerzas internas  $\sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$  es nula, con lo cual,

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{Ei} . \quad (222)$$

Por otro lado,  $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$  y  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$ . Esto nos dice que

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = \frac{d\vec{P}}{dt} , \quad (223)$$

es decir, la suma de las fuerzas externas aplicadas sobre un sistema de partículas es igual a la derivada del vector momento lineal total del sistema. Cuando el sistema está aislado (no se aplican fuerzas externas) se cumple que  $\vec{P}$  es una constante de movimiento. Este resultado generaliza a un número arbitrario de masas puntuales lo que habíamos visto para dos partículas en la ec.(213). En este caso general, la velocidad del centro de masa del sistema sigue estando dada por la relación  $\vec{V}_{CM} = \vec{P}/M$ , donde  $M$  es la masa total. Entonces:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} \quad \text{y} \quad \vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} . \quad (224)$$

Estas dos ecuaciones muestran que la velocidad y la posición del centro de masa son, respectivamente, promedios pesados de las velocidades y posiciones de las partículas que componen el sistema, donde los pesos son las masas correspondientes.

La aceleración del centro de masa es la derivada del vector  $\vec{V}_{CM} = \vec{P}/M$ . Reemplazando en la ec.(223):

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = M \vec{a}_{CM} . \quad (225)$$

### 10.3.1. Ejemplo

Determinemos la posición del CM de un sistema simple formado por 4 masas puntuales tales que  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  y  $m_4 = 5m$  dispuestas en los vértices de un cuadrado de lado de longitud  $L$ , como indica la Fig. 33.

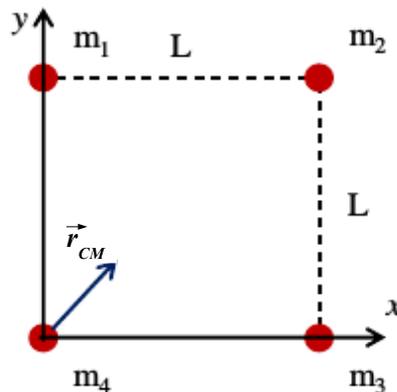


Figura 33: Sistema de cuatro masas puntuales.

Para encontrar  $\vec{r}_{CM}$ , primero debemos determinar las posiciones  $\vec{r}_i$  de todas las masas y la masa total  $M$ , como sugiere la ec.(224). Utilizando un sistema de coordenadas como el mostrado en la figura, tenemos:

$$\vec{r}_1 = L\hat{j} , \quad \vec{r}_2 = L(\hat{i} + \hat{j}) , \quad \vec{r}_3 = L\hat{i} , \quad \vec{r}_4 = 0 \quad \text{y} \quad M = 8m . \quad (226)$$

Entonces,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{mL\hat{j} + mL(\hat{i} + \hat{j}) + mL\hat{i} + 0}{M} = \frac{2mL\hat{i} + 2mL\hat{j}}{8m} . \quad (227)$$

Luego,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{L}{4}\hat{i} + \frac{L}{4}\hat{j}. \quad (228)$$

Vemos en la Fig. 33 que el centro de masa se ubica a la misma distancia de las masas  $m_1$  y  $m_3$ , que son iguales pero más cerca de  $m_4$  que de  $m_2$ , ya que la primera masa es mayor que la segunda.

#### 10.4. Movimiento del centro de masa

Aunque el movimiento de un sistema de partículas puede ser muy complicado si se considera el comportamiento individual de cada una de ellas, el movimiento del centro de masa es mucho más sencillo, por tratarse de un único punto, que representa de alguna manera la posición “global” del sistema. Consideremos un sistema de dos carritos (supuestos) puntuales, de masas  $m_A$  y  $m_B$ , unidos por un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $\ell_0$ , como indica la Fig. 34.

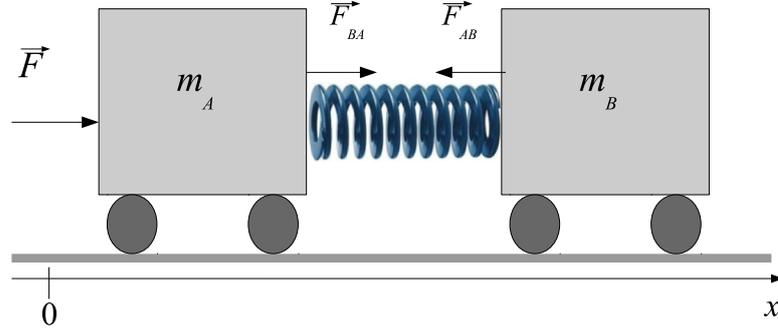


Figura 34: Sistema de dos carritos unidos por un resorte.

Sobre este sistema, en particular sobre el carrito  $A$ , se aplica una fuerza  $\vec{F}$ . Vamos a considerar primero el movimiento del centro de masa, que será un punto situado entre los carritos, equidistante de ambos si las masas son iguales y más cercano al de mayor masa en una situación general, como sugiere el ejemplo 10.3.1. Usando la segunda ley de Newton para sistemas de partículas, expresada en la ec.(225), podemos escribir:

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = \vec{F} = M\vec{a}_{CM} = (m_A + m_B)\vec{a}_{CM}. \quad (229)$$

Si la fuerza  $\vec{F}$  es constante y está aplicada sobre la dirección del vector  $\hat{i}$ , es inmediato ver que la velocidad del centro de masa estará dada por

$$V_{CM} = a_{CM}t + V_{CM}^0, \quad (230)$$

mientras que la función de movimiento será

$$x_{CM} = \frac{1}{2}a_{CM}t^2 + V_{CM}^0t + x_{CM}^0. \quad (231)$$

Las constantes  $V_{CM}^0$  y  $x_{CM}^0$  representan, respectivamente, la velocidad del CM y su posición, en el instante  $t = 0$ . Sus valores dependerán de la elección adoptada para el sistema de coordenadas.

Ahora consideremos el movimiento de cada una de las masas por separado. Pensemos que el sistema de coordenadas tiene su origen a la izquierda de los carritos; en ese caso, el estiramiento (o compresión) del resorte estará dado por  $\Delta\ell = \ell - \ell_0 = x_B - x_A - \ell_0$ , donde  $\ell = x_B - x_A$  es la longitud que adopta el resorte en algún momento arbitrario del movimiento. Sobre el carrito  $A$  se aplican las fuerzas  $F$  y  $F_{BA} = k\Delta\ell$ , de manera que

$$F + k(x_B - x_A - \ell_0) = m_A \frac{d^2x_A}{dt^2}. \quad (232)$$

Sobre el carrito  $B$  la única fuerza aplicada es  $F_{AB} = -F_{BA} = -k\Delta\ell$ , entonces,

$$-k(x_B - x_A - \ell_0) = m_B \frac{d^2 x_B}{dt^2}. \quad (233)$$

Para encontrar las funciones de movimiento  $x_A$  y  $x_B$  de ambas masas es necesario resolver el sistema de dos ecuaciones diferenciales formado por las ecs. (232) y (233). Una estrategia posible es dividir la ec.(233) por  $m_B$ , la ec.(232) por  $m_A$  y restar ambas ecuaciones:

$$\frac{F}{m_A} + \frac{k}{m_A}(x_B - x_A - \ell_0) = \frac{d^2 x_A}{dt^2}; \quad (234)$$

$$-\frac{k}{m_B}(x_B - x_A - \ell_0) = \frac{d^2 x_B}{dt^2}; \quad (235)$$

$$-\frac{F}{m_A} - \left( \frac{k}{m_B} + \frac{k}{m_A} \right) (x_B - x_A - \ell_0) = \frac{d^2 x_B}{dt^2} - \frac{d^2 x_A}{dt^2} = \frac{d^2(x_B - x_A)}{dt^2}. \quad (236)$$

Definiendo una variable  $u = \Delta\ell = x_B - x_A - \ell_0$ , la ecuación anterior puede escribirse de la siguiente forma:

$$-\frac{F}{m_A} - uk \left( \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_A} \right) = \frac{d^2 u}{dt^2}. \quad (237)$$

El factor entre paréntesis es  $(m_A + m_B)/(m_A m_B)$ . Definiendo la masa reducida  $\mu = m_A m_B / (m_A + m_B)$ :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{k}{\mu} u - \frac{F}{m_A} = -\frac{k}{\mu} \left( u + \frac{\mu F}{k m_A} \right). \quad (238)$$

Esta ecuación es parecida a la que satisface un único cuerpo unido a un resorte y su solución es también similar:

$$u(t) = C \text{sen}(\omega t + \phi_0) - \frac{\mu F}{k m_A}, \quad (239)$$

lo cual puede comprobarse sustituyendo en ec.(238) (las constantes  $C$  y  $\phi_0$  dependen de las condiciones iniciales). La diferencia fundamental es que la variable  $u$  no corresponde a la posición de ninguno de los dos carritos, sino que está relacionada a la diferencia de sus coordenadas. Para obtener la posición de cada uno, es necesario relacionar las coordenadas entre sí a través de la posición del centro de masa:

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \Rightarrow x_B = \frac{(m_A + m_B)x_{CM} - m_A x_A}{m_B}. \quad (240)$$

Reemplazando esta expresión para  $x_B$  en  $u = x_B - x_A - \ell_0$  se llega a que

$$x_A = x_{CM} - \frac{u + \ell_0}{m_A + m_B} m_B, \quad (241)$$

donde  $x_{CM}(t)$  describe un movimiento acelerado uniformemente como se indica en ec.(231) y  $u(t)$  un movimiento oscilatorio descrito en la ec.(239).

A partir de este ejemplo se observa que es más fácil describir el movimiento del CM, por ser un único punto, que el de todas las partículas que componen el sistema. Esto podría complicarse más si la fuerza de interacción dependiera de otra manera de las coordenadas y mucho más aún, si se tratara de más masas puntuales.

## 10.5. Ejemplos de conservación del momento lineal

En la subsección 10.4 estudiamos el caso en que sobre un sistema de masas puntuales actúa una fuerza externa; ahora veremos el caso más sencillo en que el sistema está aislado, es decir, no actúan fuerzas exteriores.

### 10.5.1. Ejemplo 1: conservación del vector $\vec{P}$

Un astronauta de masa  $M$  que flota en el espacio intergaláctico al lado de una estación espacial arroja un martillo de masa  $m$  con velocidad  $v_m$  medida respecto de la estación espacial. ¿Qué velocidad  $v_a$  adquiere el astronauta?

El sistema astronauta-martillo está aislado, por lo tanto se conserva el vector  $\vec{P} = M\vec{v}_A + m\vec{v}_m$ . Inicialmente el astronauta y el martillo (en la mano del astronauta) flotan en reposo con respecto a la estación espacial, es decir, sus velocidades son nulas. Entonces podemos escribir:

$$\vec{P}_{inicial} = 0 \quad \vec{P}_{final} = M\vec{v}_A + m\vec{v}_m . \quad (242)$$

Como  $\vec{P} = \text{cte.}$ ,  $\vec{v}_A = -\frac{m}{M}\vec{v}_m$ .

### 10.5.2. Ejemplo 2: conservación de una componente del vector $\vec{P}$

Un cañón de masa  $M$  inicialmente en reposo dispara horizontalmente (en la dirección  $x$ ) una bala de masa  $m$  con velocidad  $v_b$  respecto de tierra. ¿Cuál es la velocidad del cañón?

Este caso es similar al anterior, con la salvedad de que ahora el sistema cañón-bala no está aislado, ya que cuando la bala es disparada actúa sobre ella la fuerza peso, que es exterior al sistema. Por otro lado, en todo momento también actúa la fuerza peso del cañón, pero ésta es compensada por la normal del suelo.

Como el sistema no está aislado, no podemos apelar a la conservación del vector  $\vec{P}$ . De todas maneras, la ec.(223)

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = \frac{d\vec{P}}{dt} , \quad (243)$$

como toda ecuación vectorial, debe satisfacerse componente a componente; es decir, si alguna componente de  $\sum_i \vec{F}_{Ei}$  es nula, la componente correspondiente de  $\frac{d\vec{P}}{dt}$  también lo es. Dicho de otro modo, basta con que sea nula alguna de las componentes de la fuerza resultante exterior aplicada para que se conserve esa componente del momento lineal. En nuestro caso, ninguna fuerza exterior es aplicada en la dirección horizontal, razón por la cual, debe conservarse  $P_x$ . Luego:

$$P_x^{antes} = 0 \quad P_x^{después} = Mv_c + mv_b , \quad (244)$$

donde *antes* hace referencia a lo que ocurre antes del disparo y *después*, a lo que ocurre *inmediatamente* después del disparo. Está claro que  $v_c$  sólo tiene componente horizontal y que  $v_b$  también si es que consideramos el instante inmediatamente posterior al disparo; luego, la bala se verá afectada por su peso e iniciará un movimiento parabólico de caída. Teniendo en cuenta estas consideraciones, podemos despejar la velocidad del cañón:

$$v_c = -\frac{m}{M}v_b . \quad (245)$$

## 10.6. Relación entre impulso y fuerza

Consideremos una única fuerza  $\vec{F}$  que se aplica a una masa puntual o a un sistema de partículas. Si  $\vec{P}$  es el momento lineal del sistema, hemos visto que se cumple

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} . \quad (246)$$

Esto nos dice que si integramos entre un instante inicial  $t_0$  y un instante arbitrario  $t$ ,

$$\vec{J} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt' = \int_{t_0}^t \frac{d\vec{P}}{dt'} dt' = \vec{P}(t) - \vec{P}(t_0) \equiv \Delta\vec{P} . \quad (247)$$

La cantidad  $\vec{J}$  tiene las mismas unidades que el momento lineal y se denomina impulso. Entonces, si una fuerza actúa durante un cierto período sobre un sistema, producirá un impulso igual a la variación del momento lineal del sistema. En particular, si la fuerza es constante durante ese período, el impulso correspondiente será igual al producto de la fuerza aplicada por el tiempo durante el cual se aplica.

## 11. Colisiones

Llamamos choque o colisión al proceso de interacción entre dos o más cuerpos durante un intervalo de tiempo muy corto. La longitud del intervalo de tiempo será corta o larga dependiendo de la escala de tiempo en la que estemos interesados. Por ejemplo, si el problema de estudio son dos galaxias que colisionan, un segundo es un tiempo extremadamente corto. En cambio, si se trata del choque de dos bolas de billar, un segundo es mucho tiempo.

Vamos a considerar colisiones entre dos cuerpos aislados del resto, de manera que para estudiar el problema se puede hacer uso de la conservación del momento lineal del sistema. Si conocemos el vector  $\vec{P}$  antes del choque, podemos asegurar que *después* va a seguir valiendo lo mismo. Acá las palabras *antes* y *después* hacen referencia a instantes *suficientemente* alejados de la colisión propiamente dicha; es en ese contexto en el cual se considera que el choque ocurre en un tiempo *suficientemente* corto.

### 11.1. Choque en una dimensión

Sean dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que tienen velocidades iniciales  $v_1$  y  $v_2$ . Vamos a suponer que las partículas viajan sobre el mismo eje, que las velocidades son tales que en algún momento va a haber colisión y que después de ella ambas seguirán viajando sobre el mismo eje con velocidades  $v'_1$  y  $v'_2$ .

Como el sistema es aislado, se conserva el vector  $\vec{P}$  del sistema; en particular, basta hablar de una única componente, que llamaremos  $P$ . Entonces, podemos escribir:

$$P = P' \quad \Rightarrow \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 . \quad (248)$$

Agrupando los términos correspondientes según cada partícula:

$$-m_1(v'_1 - v_1) = m_2(v'_2 - v_2) . \quad (249)$$

La energía del sistema no es necesariamente una magnitud que se conserve a lo largo del movimiento, ya que no sabemos exactamente qué es lo que ocurre durante el choque propiamente dicho. Es conveniente estudiar la variación de energía en términos de las masas y velocidades que intervienen. Lo primero que vamos a observar es que antes del choque la energía  $E$  de las partículas es sólo de tipo cinético ( $T$ ), ya que no hay ninguna fuerza en juego y la energía potencial, como hemos visto, siempre se relaciona con alguna fuerza. Después del choque la situación es análoga, entonces:

$$\Delta E = \Delta T = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 - \frac{1}{2} m_1 v^2_1 - \frac{1}{2} m_2 v^2_2 . \quad (250)$$

Luego,

$$2\Delta T = m_1(v'^2_1 - v^2_1) + m_2(v'^2_2 - v^2_2) . \quad (251)$$

Si dividimos ambos miembros por la masa reducida  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  definida en la sección 10.4,

$$\frac{2}{\mu} \Delta T = \frac{m_1 + m_2}{m_2} (v'^2_1 - v^2_1) + \frac{m_1 + m_2}{m_1} (v'^2_2 - v^2_2) . \quad (252)$$

Desarrollando la diferencia de cuadrados, la ecuación anterior queda:

$$\frac{2}{\mu} \Delta T = \left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right) (v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) + \left( \frac{m_2}{m_1} + 1 \right) (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) ; \quad (253)$$

$$\frac{2}{\mu} \Delta T = \frac{m_1}{m_2} (v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) + (v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) + \frac{m_2}{m_1} (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) + (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) . \quad (254)$$

Ahora, teniendo en cuenta la ec.(249), reemplazamos  $\frac{m_1}{m_2}(v'_1 - v_1)$  por  $-(v'_2 - v_2)$  y  $\frac{m_2}{m_1}(v'_2 - v_2)$  por  $-(v'_1 - v_1)$ :

$$\frac{2}{\mu} \Delta T = -(v'_2 - v_2)(v'_1 + v_1) + (v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) - (v'_1 - v_1)(v'_2 + v_2) + (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) ; \quad (255)$$

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = -(v'_1 + v_1)[(v'_2 - v_2) - (v'_1 - v_1)] + (v'_2 + v_2)[-(v'_1 - v_1) + (v'_2 - v_2)]; \quad (256)$$

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = [(v'_2 - v_2) - (v'_1 - v_1)][(v'_2 + v_2) - (v'_1 + v_1)]. \quad (257)$$

Si ahora ordenamos la expresión anterior de otra forma nos queda:

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = [(v'_2 - v'_1) - (v_2 - v_1)][(v'_2 - v'_1) + (v_2 - v_1)]. \quad (258)$$

Utilizando la expresión para la diferencia de cuadrados,

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = (v'_2 - v'_1)^2 - (v_2 - v_1)^2. \quad (259)$$

La diferencia  $v_2 - v_1$  es la velocidad de la masa 2 relativa a la masa 1. Entonces definimos  $v_r = v_2 - v_1$  y  $v'_r = v'_2 - v'_1$  para las situaciones antes y después del choque, respectivamente; con ello,

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = v'^2_r - v^2_r \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\mu}{2}v'^2_r - \frac{\mu}{2}v^2_r. \quad (260)$$

La última ecuación muestra que la variación de la energía del sistema depende cuadráticamente de la velocidad relativa entre las partículas después del choque. Este comportamiento está graficado en la Fig. 35.

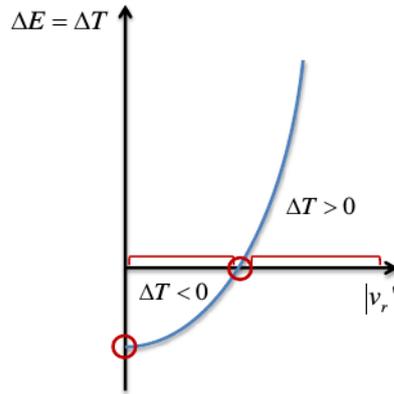


Figura 35: Variación de la energía en un choque unidimensional.

Vemos que según sea la relación entre las velocidades relativas antes y después del choque, será el signo de  $\Delta E$ . Por lo tanto hay tres casos:

- $\Delta E < 0$  corresponde a la situación  $|v'_r| < |v_r|$  y se denomina choque plástico.
- $\Delta E = 0$  corresponde a la situación  $|v'_r| = |v_r|$  y se denomina choque elástico.
- $\Delta E > 0$  corresponde a la situación  $|v'_r| > |v_r|$  y se denomina choque explosivo.

Existe un caso particular de choque plástico que corresponde a la situación de máxima pérdida de energía posible y ocurre cuando  $v'_r = 0$ , es decir, cuando después del choque las dos masas se mueven formando un “pegote” con la misma velocidad. Este caso se llama choque totalmente plástico o perfectamente plástico.

La ec.(249) nos dice que si conocemos tres velocidades podemos averiguar la cuarta. Usando la ec.(260) podríamos averiguar dos velocidades conociendo las otras dos y la variación de energía. En definitiva, en ambos casos hay que conocer tres cosas para poder describir el movimiento de las dos masas antes y después del choque.

### 11.1.1. Choque perfectamente plástico

En este caso, además de saber que se conserva  $P$ , sabemos que

$$v'_1 = v'_2 \equiv v' . \quad (261)$$

Usando que

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' , \quad (262)$$

es inmediato obtener la velocidad final en términos de las iniciales:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} . \quad (263)$$

### 11.1.2. Choque elástico

Vamos a resolver el problema particular del choque elástico en una dimensión. Supondremos conocidas las masas, las velocidades iniciales y además sabemos que  $\Delta E = 0$ . Como el choque es elástico sabemos por la ec.(260) que  $v_r^2 = v_r'^2$ . Esta última relación nos dice que

$$|v'_2 - v'_1| = |v_2 - v_1| \quad \Rightarrow \quad v'_2 - v'_1 = v_2 - v_1 \quad (A) \quad \text{o bien} \quad v'_2 - v'_1 = -(v_2 - v_1) \quad (B) . \quad (264)$$

Para dilucidar cuál de los dos casos (A) o (B) es el correcto, vamos a volver a escribir la ec.(251), para este caso en que se conserva la energía y la ec.(249):

$$-m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) ; \quad (265)$$

$$-m_1(v'_1 - v_1) = m_2(v'_2 - v_2) . \quad (266)$$

Si dividimos la primera ecuación, factorizando las diferencias de cuadrados, por la segunda, obtenemos

$$v'_1 + v_1 = v'_2 + v_2 . \quad (267)$$

Es decir:

$$v_1 - v_2 = v'_2 - v'_1 \quad \Rightarrow \quad v'_2 - v'_1 = -(v_2 - v_1) , \quad (268)$$

que corresponde al caso (B). Al dividir la ec.(265) por la ec.(266) deberíamos habernos preguntado si alguno de los denominadores podría ser cero. Para que ello ocurra deberían ser  $v'_1 = v_1$  o  $v'_2 = v_2$ , pero cualquiera de estas condiciones nos lleva a la otra, por la ec.(249), y ambas significan que las masas siguieron después del choque “como si nada”, como si se hubieran atravesado sin interactuar, lo cual no tiene mucho sentido y es precisamente lo que reflejaría el caso (A), que hemos descartado.

En definitiva, podemos escribir dos ecuaciones, que corresponden a la conservación de  $P$  y a la conservación de la energía:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad \text{y} \quad v'_2 - v'_1 = -(v_2 - v_1) . \quad (269)$$

La resolución de estas ecuaciones es sencilla y permite obtener

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad \text{y} \quad v'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 . \quad (270)$$

Analicemos algunos casos particulares de choque elástico a la luz de las últimas ecuaciones:

- $m_1 = m_2 \Rightarrow v'_1 = v_2$  y  $v'_2 = v_1$ . Las partículas intercambian sus velocidades.

- $v_2 = 0$  y  $m_1 > m_2 \Rightarrow v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 < v_1$  y  $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 > v_1$ .

Si la partícula incidente es más pesada, las dos salen hacia adelante.

- $v_2 = 0$  y  $m_1 < m_2 \Rightarrow v'_1 = -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_1$  y  $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 < v_1$ .

Si la partícula incidente es más liviana, rebota hacia atrás y la que estaba en reposo sale hacia adelante.

- $v_2 = 0$  y  $m_1 = m_2 \Rightarrow v'_1 = 0$  y  $v'_2 = v_1$ . Puede verse que este es un caso particular del primero.

## 11.2. Choques en dos y tres dimensiones

En este caso, la conservación del vector  $\vec{P}$  lleva a plantear la conservación de cada componente:

$$P_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} ; \quad (271)$$

$$P_y = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} . \quad (272)$$

Suponiendo que se conocen las velocidades iniciales, las últimas igualdades constituyen un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas: dos componentes de velocidad por cada partícula. Si se conoce la variación de la energía (por ejemplo, se sabe que el choque es elástico) entonces se tiene una ecuación más:

$$\Delta E = \Delta T = \frac{1}{2} m_1 (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x}^2 + v_{2y}^2) - \frac{1}{2} m_1 (v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2) - \frac{1}{2} m_2 (v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2) . \quad (273)$$

En este caso, es necesario conocer una de las componentes finales de la velocidad de alguna de las dos partículas para obtener las otras tres.

La situación de un choque en tres dimensiones es análoga a la anterior, sólo que en este caso, la conservación de  $\vec{P}$  impone tres ecuaciones e incluye seis incógnitas (suponiendo conocidas las velocidades iniciales): tres componentes de velocidad por cada partícula. Suponiendo que se conoce la variación de la energía, lo que aporta otra ecuación, es necesario conocer dos de las componentes finales de la velocidad de alguna de las dos partículas para obtener las otras cuatro.

## 12. Algunas definiciones vectoriales

### 12.1. Producto vectorial

Sabemos que dados dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  que forman un ángulo  $\theta$  su producto escalar es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\theta) \quad \text{o bien} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z , \quad (274)$$

donde  $A$  y  $B$  denotan los módulos de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , respectivamente.

Ahora definimos la operación *producto vectorial*  $\vec{A} \times \vec{B}$  entre dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  cuyo resultado es otro vector  $\vec{C}$  que satisface las siguientes propiedades:

- El módulo está dado por el producto de los módulos y el seno del ángulo comprendido  $\theta$ :  $|\vec{C}| = AB \sin(\theta)$ , lo cual nos dice que el producto vectorial de vectores paralelos es nulo.
- La dirección del vector  $\vec{C}$  es perpendicular al plano formado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .
- El sentido está dado por la regla de la mano derecha ilustrada en la Fig. 36. Es decir, el sentido es hacia donde apunta el pulgar de la mano derecha al hacer girar el vector  $\vec{A}$  hacia el vector  $\vec{B}$ . Otra forma de verlo es que el vector  $\vec{C}$  apunta hacia el sentido de avance de una canilla que se gira desde  $\vec{A}$  hacia  $\vec{B}$ : hacia arriba en el ejemplo de la figura. El producto  $\vec{B} \times \vec{A}$  tiene el sentido opuesto, ya que en este caso hay que llevar (con la mano derecha) el vector  $\vec{B}$  hacia el vector  $\vec{A}$ , con lo que el pulgar apuntaría hacia abajo. Entonces,  $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$ , es decir, el producto vectorial es anticonmutativo.

Se puede demostrar que el producto vectorial posee la propiedad distributiva respecto de la suma de vectores. Para calcular el producto vectorial entre dos vectores suele ser práctico escribirlos en componentes y operar aplicando esta propiedad:

$$\text{Si } \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} , \quad (275)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) ; \quad (276)$$

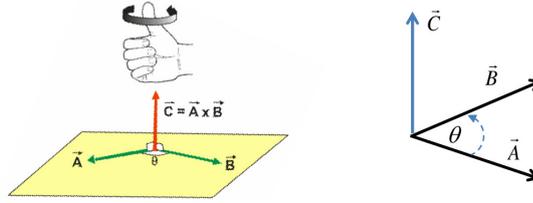


Figura 36: Regla de la mano derecha.

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = & A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \times \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} + \\ & A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \times \hat{k} . \end{aligned} \quad (277)$$

Como el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo, la expresi3n anterior se reduce a:

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} + A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} . \quad (278)$$

Si ahora usamos la anticonmutatividad del producto vectorial,

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \hat{i} \times \hat{j} + (A_x B_z - A_z B_x) \hat{i} \times \hat{k} + (A_y B_z - A_z B_y) \hat{j} \times \hat{k} . \quad (279)$$

Para ver cu3nto valen los productos vectoriales entre versores podemos usar la regla de la mano derecha y ayudarnos con el esquema de la Fig. 37.

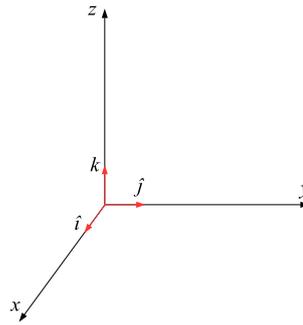


Figura 37: Ejes cartesianos y sus versores.

Es f3cil ver que:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} , \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \quad \text{y} \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} , \quad (280)$$

con lo cual podemos escribir:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} . \quad (281)$$

Otra forma m3s compacta de expresar el resultado de la ec.(281) es usando el determinante de una matriz:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} . \quad (282)$$

Esta expresi3n conduce al mismo resultado que la ec.(281).

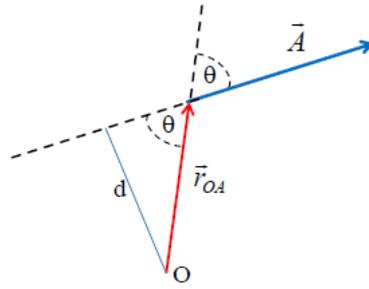


Figura 38: Momento de un vector  $\vec{A}$ .

## 12.2. Momento de un vector

Consideremos un vector  $\vec{A}$  cuya posición respecto de un origen  $O$  está indicada por el vector  $r_{\vec{O}A}$ , como muestra la Fig. 38.

Se define el vector momento  $\vec{M}_O$  del vector  $\vec{A}$  respecto del punto  $O$ , denominado centro de momentos, como el producto vectorial

$$\vec{M}_O = r_{\vec{O}A} \times \vec{A}. \quad (283)$$

Usando la definición de producto vectorial

$$|\vec{M}_O| = |\vec{A}| |r_{\vec{O}A}| \text{sen}(\theta) = d |\vec{A}|. \quad (284)$$

Por otro lado, el vector  $\vec{M}_O$  es perpendicular al plano determinado por los vectores  $\vec{A}$  y  $r_{\vec{O}A}$ . El momento de un vector depende del centro de momentos que se elija. Por lo tanto, siempre que se haga mención al momento de un vector hay que aclarar cuál es el centro de momentos respecto del cual ha sido calculado.

### 12.2.1. Momento de un par de vectores

Se denomina par de vectores al sistema formado por dos vectores de igual módulo, sentido opuesto y cuyas direcciones, o rectas de acción, son paralelas entre sí. En la Fig. 39 se muestra el par de vectores  $\vec{A}_1$ ;  $\vec{A}_2$ .

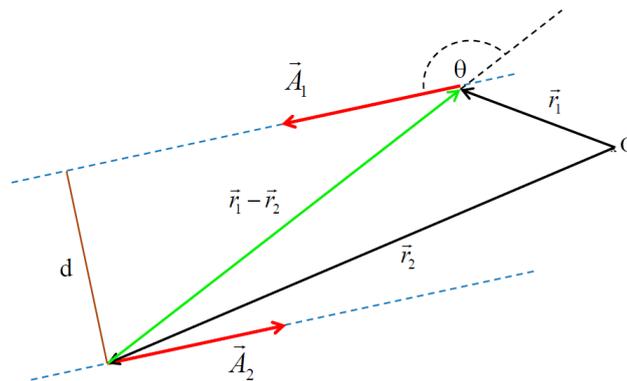


Figura 39: Par de vectores.

Se llama momento del par respecto del punto  $O$  a la suma de los momentos, respecto del punto  $O$ , de los vectores que forman el par:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O}, \quad (285)$$

donde

$$\vec{M}_{1O} = \vec{r}_1 \times \vec{A}_1 \quad \text{y} \quad \vec{M}_{2O} = \vec{r}_2 \times \vec{A}_2 \quad (286)$$

son los momentos de  $\vec{A}_1$  y  $\vec{A}_2$  respecto de  $O$ . Entonces,

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{A}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{A}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{A}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{A}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{A}_1 . \quad (287)$$

El módulo de este vector esta dado por

$$|\vec{M}_O| = |\vec{A}_1| |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \text{sen}(\theta) = d|\vec{A}_1| . \quad (288)$$

Es decir, el módulo del momento de un par de vectores de módulo  $A$  separados entre sí por una distancia  $d$  es igual al producto del módulo por la distancia y no depende del centro de momentos elegido.

## 13. Vectores velocidad angular y momento angular

### 13.1. Vector velocidad angular

Consideremos una partícula que describe un movimiento circular. Si el sistema de coordenadas tiene origen en el centro del círculo, los vectores posición  $\vec{r}$  y velocidad  $\vec{v}$  de la partícula son ortogonales en cualquier instante (siempre que no se anule la velocidad). Además sabemos que la velocidad angular  $\omega$  está dada por el cociente entre los módulos de los vectores velocidad y posición. Vamos a definir el vector velocidad angular  $\vec{\omega}$  de manera que  $|\vec{\omega}| = \omega = |\vec{v}|/|\vec{r}|$ , cuya dirección sea perpendicular al plano del movimiento (determinado por  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ ) y cuyo sentido esté dado por la regla de la mano derecha desde  $\vec{r}$  hacia  $\vec{v}$  (trasladando estos vectores de manera que tengan un origen común), como se indica en la Fig. 40.



Figura 40: Dirección del vector velocidad angular.

Vemos que con esta definición de  $\vec{\omega}$  se cumple que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} , \quad (289)$$

ya que según esta expresión,  $|\vec{v}| = |\vec{\omega}| |\vec{r}|$ , como debe ser, y además, recurriendo otra vez a la Fig. 40, puede verse que la dirección del vector  $\vec{v}$  también queda bien definida.

### 13.2. Momento angular

#### 13.2.1. Momento angular de una partícula

Sea una partícula de masa  $m$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$ , es decir tiene un momento  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Se define el momento angular (o impulso angular)  $\vec{L}$  de la partícula con respecto al punto  $O$  como el

producto vectorial de los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{p}$ , es decir:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (290)$$

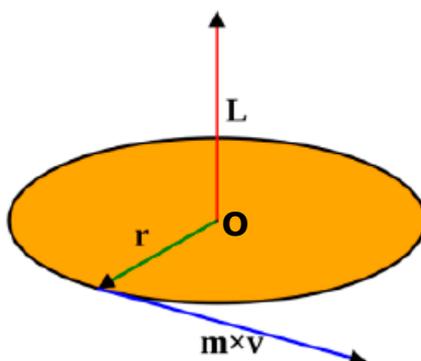


Figura 41: Momento angular de una partícula.

La Fig. 41 muestra que el vector  $\vec{L}$  en un dado instante del movimiento es perpendicular al plano formado por los vectores posición y velocidad en ese instante. Esta observación, que se desprende trivialmente de la definición de producto vectorial, tiene como consecuencia interesante que, **en el caso en que  $\vec{L}$  es constante**, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{p}$  permanecen siempre en un mismo plano, que constituye el plano del movimiento.

Según la definición vista en la sección 12.2, vemos que  $\vec{L}$  es el momento del vector  $\vec{p}$ . Las unidades del momento angular están dadas por:

$$[\vec{L}] = [\vec{r}][\vec{p}] = \begin{cases} \frac{kgm^2}{s} & \text{MKS} \\ \frac{gcm^2}{s} & \text{cgs} \end{cases}. \quad (291)$$

Analicemos la variación temporal del momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}, \quad (292)$$

donde con  $\vec{F}$  denotamos la suma de las fuerzas aplicadas sobre la partícula y se ha hecho uso de la relación entre el momento de una partícula y la fuerza aplicada, dada en ec.(208). Además, como  $\vec{v} // \vec{p}$ ,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{\tau}, \quad (293)$$

donde  $\vec{\tau}$  es el momento de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al punto  $O$  (el mismo centro de momentos usado para  $\vec{L}$ ).

De la ec.(293) vemos que si  $\vec{\tau} = 0$  se cumple que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad (294)$$

es decir, *si el momento de la resultante de las fuerzas exteriores es nulo, el momento angular de una partícula es una constante de movimiento*. Podemos ver que aunque la fuerza aplicada no sea nula, el momento  $\tau$  podría serlo. Pensemos en el siguiente ejemplo: una boleadora es mantenida en movimiento circular uniforme en el plano horizontal. Obviamente, la mano que está en el centro del movimiento ejerce una fuerza  $\vec{F} \neq 0$ , de tipo central, es decir, provee la aceleración centrípeta necesaria para torcer el vector velocidad en todo instante. En este caso, si consideramos como centro de momentos el centro del movimiento, donde está situada la mano,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad \forall t, \quad (295)$$

pues  $\vec{r} // \vec{F}$  para todo tiempo. Por la ec.(293), vemos que  $\vec{L}$  se conserva. Si elegimos otro centro de momentos,  $\vec{r}$  no es paralelo a  $\vec{F}$ , con lo cual  $\vec{\tau}$  no se anula y  $\vec{L}$  no se conserva.

Es interesante analizar el caso en que se aplica una fuerza de tal manera que su momento  $\vec{\tau}$  es normal al vector  $\vec{L}$ , como muestra la Fig. 42, donde se da como ejemplo la situación en que  $\vec{L} // \hat{i}$  y  $\vec{\tau} // \hat{j}$ . En virtud de la ec.(293), en este caso la derivada temporal de  $\vec{L}$  es perpendicular al propio vector  $\vec{L}$ , por lo tanto, para intervalos pequeños  $\vec{L} \perp \Delta\vec{L}$ , es decir, el vector momento angular gira alrededor del eje  $z$  en el ejemplo ilustrado en la figura.

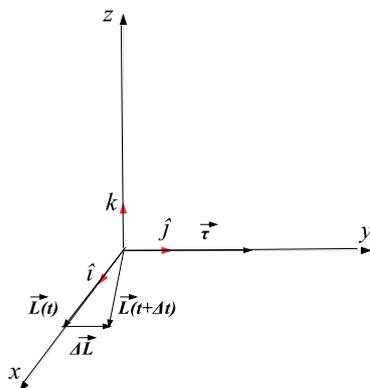


Figura 42: Momento angular de una partícula.

### 13.2.2. El momento angular y la segunda ley de Kepler

Consideremos una partícula de masa  $m$  que se mueve en un plano, como hemos mencionado que ocurre en el caso en que actúa una fuerza central. Vamos a describir este movimiento en un sistema de coordenadas polares. En la Fig. 43 se indica, para un dado instante, su posición, dada por el vector  $\vec{r}$  y su momento lineal  $\vec{p}$ , descompuesto según las direcciones de los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$ , paralelos a la dirección de  $\vec{r}$  y a la dirección de crecimiento del ángulo  $\theta$ , respectivamente.

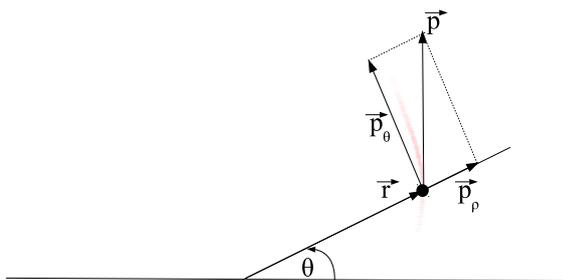


Figura 43: Movimiento de una partícula en coordenadas polares.

El momento angular de esta partícula estará dado por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\vec{p}_\rho + \vec{p}_\theta) = rp_\theta \hat{k}, \quad (296)$$

donde  $\hat{k}$  es el versor en la dirección perpendicular al plano formado por los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$ , apuntando hacia afuera de la hoja (o pantalla). Sabemos que  $\vec{r} = r\hat{u}_\rho$ . Derivando podemos obtener el vector velocidad en coordenadas polares:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_\rho + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta. \quad (297)$$

En la expresión anterior hemos usado la notación que consiste en indicar la derivada temporal agregando un punto encima de la magnitud derivada. Luego,

$$\vec{v} = \overbrace{\dot{r}}^{v_\rho} \hat{u}_\rho + \overbrace{r\dot{\theta}}^{v_\theta} \hat{u}_\theta \quad \text{pues} \quad \dot{\hat{u}}_\rho = \dot{\theta} \hat{u}_\theta. \quad (298)$$

Sabemos que la componente del momento lineal,  $p_\theta$  que sobrevivió al producto vectorial de la ec.(296) es  $mv_\theta$ , por lo tanto:

$$\vec{L} = rmv_\theta \hat{k} = mr^2 \dot{\theta} \hat{k} = mr^2 \omega \hat{k}. \quad (299)$$

Analicemos ahora el movimiento de un planeta alrededor del Sol. En la Fig. 44 se observa que el área  $\Delta A$  barrida por la línea que une el planeta con el Sol en un tiempo  $\Delta t$  puede aproximarse por el área del triángulo  $ABC$ . Esta área será:

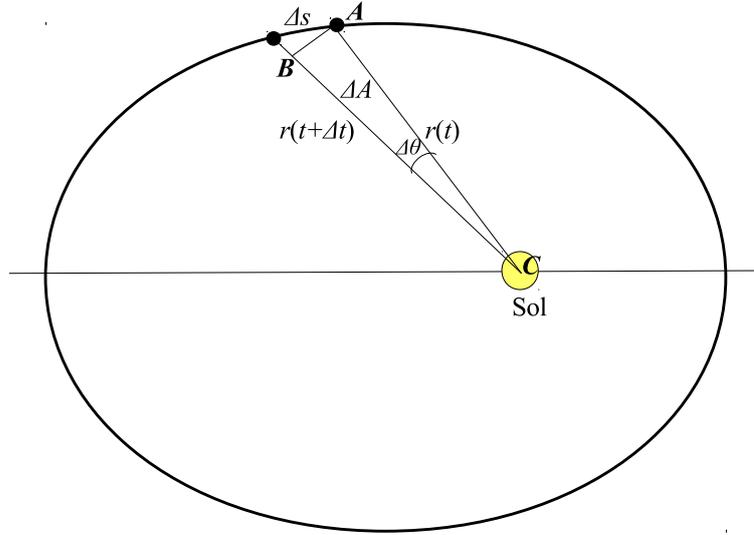


Figura 44: Movimiento de un planeta alrededor del Sol.

$$\Delta A = \frac{\overline{AB} r}{2} \simeq \frac{\Delta s r}{2} = \frac{r \Delta \theta r}{2} = \frac{r^2 \Delta \theta}{2}. \quad (300)$$

Si definimos la velocidad areolar de la segunda ley de Kepler como  $\dot{A} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$ ,

$$\dot{A} = \frac{r^2 \Delta \theta}{2 \Delta t}. \quad (301)$$

Pasando al límite para  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\dot{A} = \frac{r^2 d\theta}{2 dt} = \frac{r^2 \omega}{2}. \quad (302)$$

Pero esta última ecuación puede reescribirse utilizando la expresión de  $\vec{L}$  de la ec.(299):

$$\dot{A} = \frac{L}{2m}. \quad (303)$$

La fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre el planeta es siempre paralela al vector posición (fuerza central), por lo tanto  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ . Entonces, por la ec.(293),  $\vec{L} = L \hat{k} = \text{cte}$ . Esto nos dice que  $\dot{A}$  es constante, como afirma la segunda ley de Kepler.

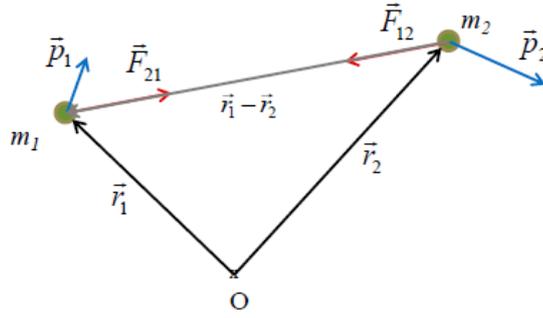


Figura 45: Momento angular de un sistema de dos partículas interactuantes.

### 13.2.3. Momento angular de dos partículas

Analicemos ahora el momento angular de un sistema aislado de dos partículas interactuantes como el ilustrado en la Fig. 45.

Definimos el momento angular de dos partículas como la suma de los momentos individuales:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 . \quad (304)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) + \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 \times \vec{p}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} \times \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{v}_1 \times \vec{p}_1 + \\ &\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{v}_2 \times \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} . \end{aligned} \quad (305)$$

Como  $\vec{v}_1 // \vec{p}_1$  y  $\vec{v}_2 // \vec{p}_2$ ,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} . \quad (306)$$

Además, por la tercera ley de Newton,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ , luego:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21} . \quad (307)$$

Puede verse claramente en la Fig. 45 que  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) // \vec{F}_{21}$ . Esto último nos dice que para un sistema aislado de dos partículas interactuantes

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 , \quad (308)$$

es decir, el momento angular total del sistema se conserva.

Vemos en la ec.(307) que la derivada temporal del momento angular del sistema es igual al momento del par de fuerzas  $\vec{F}_{12}; \vec{F}_{21}$ , que como vimos en la sección 12.2.1, es independientemente del centro de momentos elegido, con lo cual  $\vec{L}$  es una constante de movimiento para un sistema aislado de dos partículas sin importar dónde se ubique el centro de momentos. Sin embargo, si ponemos el centro de momentos en el centro de masa del sistema pueden sacarse conclusiones interesantes. Recordemos que desde el centro de masa

$$\vec{r}_{CM} = 0 = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} , \quad (309)$$

lo que implica que  $\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1$ . Por otra parte, desde el centro de masa,

$$\vec{V}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{P} = 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 ; \quad (310)$$

entonces, podemos expresar el momento angular de la partícula 2 en términos de la coordenada y el momento de la partícula 1:

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \frac{m_1}{m_2} \vec{L}_1 . \quad (311)$$



Esta última expresión corresponde al momento de un par de fuerzas que están sobre la misma recta de acción, es decir, la distancia  $d$  que separa sus rectas de acción es nula, como muestra la Fig. 46. Entonces, de acuerdo a lo visto en la ec.(288),  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = 0$  (para cualquier valor de  $i$  y de  $j$ ).

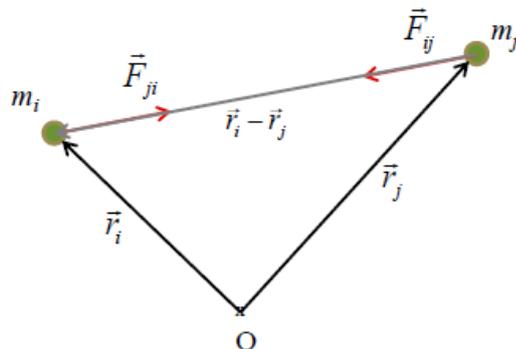


Figura 46: Esquema considerando sólo dos partículas interactuantes.

Volviendo a la ec.(315), podemos escribir:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{Ei} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_{Ei} . \quad (318)$$

Es decir, la derivada del momento angular de un sistema de partículas es igual a la suma de los momentos de las fuerzas exteriores al sistema. La ec.(318) nos recuerda a la ec.(223). Ambos casos encierran como caso particular cantidades conservadas: en la ec.(318) vemos que si la resultante de los momentos de fuerzas exteriores aplicadas al sistema es nula, se conserva el momento angular  $\vec{L}$  del sistema, mientras que en el caso de la ec.(223), si la resultante de las fuerzas exteriores aplicadas al sistema es nula, se conserva el momento lineal  $\vec{P}$  del sistema.

## Capítulo 3: Trabajo y energía.

### 14. Energías cinética y potencial

Hemos visto que en algunos casos en que hay ciertas fuerzas aplicadas podemos encontrar una constante de movimiento que llamamos energía mecánica. En la Tabla 1 habíamos presentado las expresiones de la energía mecánica correspondientes a distintos tipos de fuerza.

Para casos como los mostrados en la Tabla 1, podemos escribir  $E = T + V$ , donde la energía cinética  $T = \frac{1}{2}mv^2$  depende de la velocidad y la energía potencial  $V$  depende de las coordenadas. Entonces, para modificar la energía cinética del cuerpo es necesario modificar el módulo de la velocidad. Pero, como hemos visto, para modificar el módulo de la velocidad es necesario que exista una aceleración tangencial y para ello debe existir una componente tangencial de la fuerza aplicada sobre el cuerpo.

### 15. Trabajo de una fuerza

Consideremos un caso particular en el que una fuerza constante se aplica en la dirección del desplazamiento de una masa puntual. En la Fig. 47 se muestra una fuerza  $\vec{F}$  que es aplicada sobre un cuerpo de masa  $m$  inicialmente en la posición  $x_0$  y con una velocidad  $v_0$ , cuya dirección es la misma que la de la fuerza.

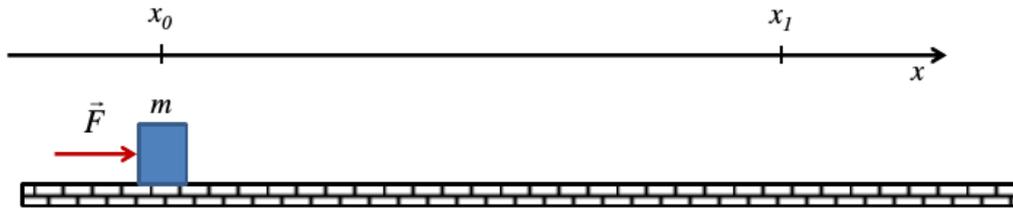


Figura 47: Fuerza aplicada paralelamente al desplazamiento.

Queremos calcular la variación de la energía cinética desde la posición inicial hasta una posición  $x_1$ , también indicada en la figura. Para ello integramos la aceleración  $a = \frac{F}{m}$ :

$$v = at + v_0, \quad (319)$$

e integramos nuevamente para obtener la posición:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0. \quad (320)$$

La variación de la energía cinética es

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv^2(t_1) - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m [v^2(t_1) - v_0^2]. \quad (321)$$

Vamos a despejar  $t_1$  de la ec.(319) para expresar  $x_1$  en términos de  $v_1 \equiv v(t_1)$ :

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a}, \quad (322)$$

entonces, reemplazando en ec.(320),

$$x_1 = \frac{1}{2}a \left( \frac{v_1 - v_0}{a} \right)^2 + v_0 \frac{v_1 - v_0}{a} + x_0 = \frac{v_1^2/2 + v_0^2/2 - v_1v_0 + v_0v_1 - v_0^2}{a} + x_0; \quad (323)$$

es decir,

$$x_1 - x_0 = \frac{v_1^2/2 - v_0^2/2}{a} \Rightarrow \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = a(x_1 - x_0) . \quad (324)$$

Sustituyendo en ec.(321) podemos escribir:

$$\Delta T = ma(x_1 - x_0) = F(x_1 - x_0) , \quad (325)$$

o bien,

$$\Delta T = F\Delta x , \quad (326)$$

donde  $\Delta x$  representa el desplazamiento del bloque. El segundo miembro de la ec.(326) se denomina trabajo realizado por la fuerza aplicada y se denota con la letra  $W$ .

La Fig. 48 muestra una situación más general, donde la fuerza constante  $\vec{F}$  se aplica en forma oblicua a la dirección del desplazamiento.

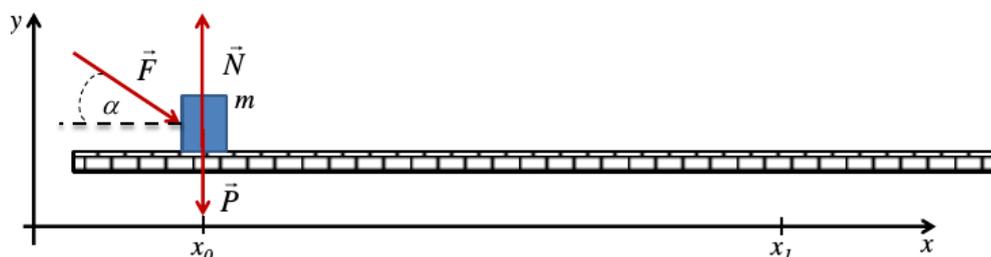


Figura 48: Fuerza aplicada en forma oblicua al desplazamiento.

Si planteamos la segunda ley de Newton tenemos que

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a} . \quad (327)$$

Estamos interesados solamente en lo que ocurre según el eje  $x$ , que es la dirección del desplazamiento, entonces

$$F \cos(\alpha) = ma \Rightarrow a = \frac{F \cos(\alpha)}{m} . \quad (328)$$

La primera igualdad de la ec.(325) fue obtenida de manera independiente al valor de la fuerza. Sólo se utilizó para su deducción el hecho de que se trata de una fuerza constante, por lo tanto sigue siendo válida en este caso. Sustituyendo el valor encontrado para la aceleración,

$$\Delta T = F \cos(\alpha)(x_1 - x_0) \Rightarrow \Delta T = F \cos(\alpha)d . \quad (329)$$

Esta última expresión incluye la ec.(326) como caso particular con  $\alpha = 0$ . Vemos que si  $\cos(\alpha) > 0$ , es decir, si la componente de la fuerza aplicada en la dirección el desplazamiento es positiva, el trabajo es positivo, mientras que si  $\cos(\alpha) < 0$ , es decir, si la componente de la fuerza aplicada en la dirección el desplazamiento es negativa, el trabajo es negativo.

Analicemos ahora el caso más general posible, ilustrado en la Fig. 49.

En este caso se aplica una fuerza de módulo y dirección variable sobre una trayectoria curvilínea  $C$  entre los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$ . Podemos imaginar la trayectoria como una sucesión de pequeños tramos rectos de longitud  $\delta s$  como indica la figura. En virtud de la ec. (329) la variación de la energía cinética en cada uno de ellos estará dada por  $\delta T = F \cos(\alpha)\delta s$ . Para la variación de energía cinética entre los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$  podemos escribir:

$$\Delta T = \sum_i \Delta T_i = \sum_i F_i \cos(\theta_i)\delta s_i . \quad (330)$$

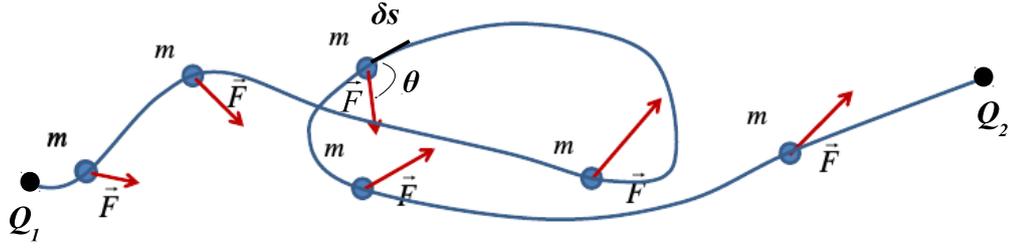


Figura 49: Fuerza variable aplicada sobre una trayectoria curvilínea  $C$ .

Pasando al límite cuando los  $\delta s_i$  tienden a cero,

$$\Delta T = \int_{C|Q_1}^{Q_2} F \cos(\theta) ds . \quad (331)$$

La letra  $C$  en el límite inferior de la integral significa que ésta debe efectuarse “a lo largo de la curva  $C$ ”. Integrales de este tipo se denominan integrales de línea. Definimos ahora el vector  $d\vec{s}$ , de módulo  $ds$  y dirección dada por la dirección del versor  $\hat{v}$ , es decir, siempre tangente a la curva y apuntando hacia la dirección de avance de la masa  $m$ . Entonces la expresión anterior puede escribirse de manera más compacta:

$$\Delta T = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = W . \quad (332)$$

Es decir, el trabajo  $W$  realizado por la fuerza  $\vec{F}$  aplicada sobre una masa puntual  $m$  entre los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$  sobre la trayectoria  $C$  es igual a la variación de la energía cinética de la partícula entre esos dos puntos.

Las unidades del trabajo son las mismas que las de energía y están dadas por:

$$[W] = [E] = [F][\ell] = \begin{cases} \text{Nm} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \equiv \text{Joule (J)} & \text{MKS} \\ \text{dyn cm} = \frac{\text{g cm}^2}{\text{s}^2} \equiv \text{ergio (erg)} & \text{cgs} \end{cases} . \quad (333)$$

### 15.1. Cálculo del trabajo; ejemplos

Supongamos que queremos calcular el trabajo  $W$  de una fuerza  $\vec{F}$  a lo largo de una trayectoria entre dos puntos. Para poder hacerlo necesitamos las coordenadas de los puntos de partida  $Q_1$  y de llegada  $Q_2$ , la expresión de cada componente  $F_i$  de la fuerza en función de las coordenadas  $x_i$  y la ecuación de la trayectoria  $C$ . En el caso de una fuerza con componentes en el plano  $x$ - $y$  y una trayectoria sobre el mismo plano necesitaremos:

$$Q_{1,x}, \quad Q_{1,y}, \quad Q_{2,x}, \quad Q_{2,y}, \quad (334)$$

$$F_x(x, y), \quad F_y(x, y) \quad \text{y la forma funcional de la curva } C : y(x) . \quad (335)$$

Para resolver la integral de línea dada en ec.(332) debemos ser capaces de expresar el vector  $d\vec{s}$  en términos de las coordenadas  $x$  e  $y$ . En la Fig. 50 se muestra que  $\Delta\vec{s} = \Delta\vec{r}$ , es decir, es la variación del vector posición cuando transcurre un intervalo pequeño  $\Delta t$ . Para obtener  $d\vec{s}$  solo hace falta hacer tender  $\Delta t$  a cero:

$$d\vec{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\vec{s} . \quad (336)$$

Luego, las componentes de  $d\vec{s}$  son las componentes  $dx$  y  $dy$  del vector  $d\vec{r}$ :

$$d\vec{s} = dx \hat{i} + dy \hat{j} . \quad (337)$$

Entonces podemos escribir:

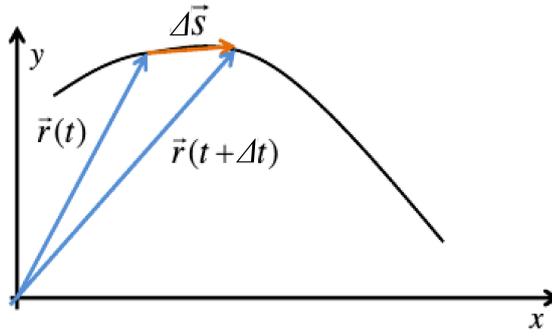


Figura 50: Vector  $d\vec{s}$ .

$$W = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C|(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} [F_x(x, y) \hat{i} + F_y(x, y) \hat{j}] \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) \quad (338)$$

$$= \int_{C|(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} F_x(x, y) dx + \int_{C|(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} F_y(x, y) dy . \quad (339)$$

Si expresamos  $y$  como función de  $x$  podemos pasar de tener integrales de línea a tener integrales en una sola variable:

$$\int_{C|(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} F_x(x, y) dx = \int_{x_1}^{x_2} F_x[x, y(x)] dx ; \quad \int_{C|(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} F_y(x, y) dy = \int_{x_1}^{x_2} F_y[x, y(x)] \frac{dy}{dx} dx . \quad (340)$$

Veamos cómo se hace esto en la práctica.

### Ejemplo

Calcular el trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F} = x^2 y \text{ N m}^{-3} \hat{i} + xy \text{ N m}^{-2} \hat{j}$  a lo largo de la curva  $y(x) = 2x^2 \text{ m}^{-1}$  entre los puntos  $(x_1, y_1) = (-2, 8) \text{ m}$  y  $(x_2, y_2) = (2, 8) \text{ m}$ .

$$W = \int_{C|(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} F_x(x, y) dx + \int_{C|(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} F_y(x, y) dy \quad (341)$$

$$= \int_{C|(-2, 8) \text{ m}}^{(2, 8) \text{ m}} x^2 y \text{ N m}^{-3} dx + \int_{C|(-2, 8) \text{ m}}^{(2, 8) \text{ m}} xy \text{ N m}^{-2} dy \quad (342)$$

$$= \int_{-2 \text{ m}}^{2 \text{ m}} x^2 2x^2 \text{ m}^{-1} \text{ N m}^{-3} dx + \int_{-2 \text{ m}}^{2 \text{ m}} x 2x^2 \text{ m}^{-1} \text{ N m}^{-2} \frac{dy}{dx} dx \quad (343)$$

$$= \int_{-2 \text{ m}}^{2 \text{ m}} 2x^4 \text{ N m}^{-4} dx + \int_{-2 \text{ m}}^{2 \text{ m}} 2x^3 \text{ N m}^{-3} 4x \text{ m}^{-1} dx \quad (344)$$

$$= \int_{-2 \text{ m}}^{2 \text{ m}} 2x^4 \text{ N m}^{-4} dx + \int_{-2 \text{ m}}^{2 \text{ m}} 8x^4 \text{ N m}^{-4} dx \quad (345)$$

$$= 2 \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-2 \text{ m}}^{2 \text{ m}} \text{ N m}^{-4} + 8 \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-2 \text{ m}}^{2 \text{ m}} \text{ N m}^{-4} \quad (346)$$

$$= 10 \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-2 \text{ m}}^{2 \text{ m}} \text{ N m}^{-4} = 2 x^5 \Big|_{-2 \text{ m}}^{2 \text{ m}} \text{ N m}^{-4} = 4 \cdot (2 \text{ m})^5 \text{ N m}^{-4} = 128 \text{ N m} = 128 \text{ J} . \quad (347)$$

## 15.2. Potencia

La ec.(332) nos dice que si una fuerza constante  $\vec{F}$  trabaja sobre una masa puntual mientras ésta se desplaza en  $\Delta\vec{s}$ , el trabajo  $\Delta W$  estará dado por

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}. \quad (348)$$

Si esto ocurre durante un intervalo tiempo  $\Delta t$ , podemos escribir

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}. \quad (349)$$

Haciendo tender  $\Delta t$  a 0 obtenemos la “potencia” instantánea  $P$ :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (350)$$

Las unidades de potencia son unidades de fuerza por unidades de velocidad. En el sistema MKS:

$$[P] = [F][v] = \text{N} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} \equiv \text{watt o vatio (w)}. \quad (351)$$

## 16. Fuerzas conservativas y no conservativas; conservación de la energía mecánica

Vamos a estudiar ahora un caso muy interesante: ciertas fuerzas presentan la particularidad de que el trabajo que realizan entre dos puntos determinados no depende de la trayectoria que une esos puntos. Veamos dos ejemplos.

### Trabajo de la fuerza peso

Consideremos el trabajo que la fuerza peso ejerce sobre un cuerpo de masa  $m$  cuando desliza sobre la superficie de un plano inclinado entre las posiciones  $x_i$  y  $x_f$ , como muestra la Fig. 51.

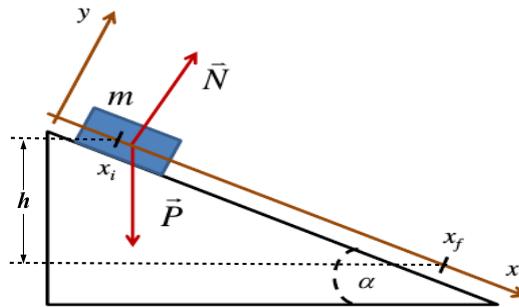


Figura 51: Trabajo de la fuerza peso.

En este caso,  $d\vec{s} = dx\hat{i}$ , por lo tanto,

$$W_P = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_{x_i}^{x_f} P_x dx \quad (352)$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} mg \text{sen}(\alpha) dx = mg [\text{sen}(\alpha)x_f - \text{sen}(\alpha)x_i]. \quad (353)$$

pero  $\text{sen}(\alpha)x_f - \text{sen}(\alpha)x_i = h = h_i - h_f > 0$ , donde las alturas  $h$  se miden desde la base del plano, por ejemplo. Entonces vemos que

$$W_P = mg(h_i - h_f) = V_i - V_f = -\Delta V. \quad (354)$$

De esta última ecuación se pueden decir dos cosas: por un lado, vemos que el trabajo realizado por la fuerza peso no depende del camino elegido, ya que el resultado sólo depende de los estados inicial y final, sea que consideremos  $x_i$  y  $x_f$ , o  $h_i$  y  $h_f$ , o  $V_i$  y  $V_f$ . Por otro lado, el valor del trabajo coincide con la variación de la energía potencial cambiada de signo.

### Trabajo de la fuerza de atracción gravitatoria lejos de la superficie de la Tierra

Calculemos ahora el trabajo de la fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa  $m$  que se mueve bajo la atracción gravitatoria de un objeto de masa  $M$ , como está esquematizado en la Fig. 52.

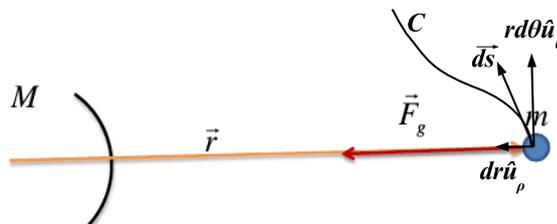


Figura 52: Trabajo de la fuerza de atracción gravitatoria.

$$W_{F_g} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{s}. \quad (355)$$

En este caso,  $\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \hat{u}_\rho$  y  $d\vec{s} = dr \hat{u}_\rho + r d\theta \hat{u}_\theta$ . Entonces, el trabajo realizado entre dos puntos de coordenadas  $(r_1, \theta_1)$  y  $(r_2, \theta_2)$  puede escribirse como

$$W_{F_g} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} -\frac{GMm}{r^2} \hat{u}_\rho \cdot (dr \hat{u}_\rho + r d\theta \hat{u}_\theta) = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}. \quad (356)$$

Según las expresiones de energía potencial presentadas en la Tabla ??, podemos escribir:

$$W_{F_g} = -V(r_2) + V(r_1) = -[V(r_2) - V(r_1)] = -\Delta V. \quad (357)$$

En este caso también vemos que el trabajo de la fuerza aplicada corresponde a la variación de la energía potencial cambiada de signo y que no depende del camino elegido para llegar al punto final.

En ambos casos estudiados, la fuerza depende de una única variable, digamos,  $u$  y el trabajo  $W = -\Delta V$ :

$$W = \int_{u_1}^{u_2} F(u) du = -[V(u_2) - V(u_1)]. \quad (358)$$

Entonces, la función  $-V(u)$  es una primitiva de la función  $F(u)$ ; dicho de otra forma:

$$F(u) = -\frac{dV}{du}. \quad (359)$$

Esta última ecuación nos da la receta para obtener la energía potencial si se conoce la fuerza, o viceversa. Sin embargo, no siempre es posible encontrar una función  $V(u)$  para una fuerza; para que ello ocurra, en primer lugar debe poder expresarse la fuerza como función de la coordenada  $u$  y en segundo lugar, la función debe ser integrable. Cuando se dan estas condiciones y la fuerza tiene asociada una función energía potencial, se dice que la fuerza es *conservativa*. Claramente, las fuerzas mencionadas en la Tabla ?? son conservativas, ya que tienen una energía potencial asociada. Las fuerzas que no son conservativas se denominan fuerzas *no conservativas*.

Por un lado hemos visto que el trabajo de las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética:  $W = \Delta T$ . Por otro lado, si las fuerzas aplicadas son conservativas ( $F_c$ ), se cumple que  $W = -\Delta V$ ; entonces:

$$W_{F_c} = \int F_c(u) du = \Delta T = -\Delta V. \quad (360)$$

La última igualdad nos dice que

$$\Delta T + \Delta V = 0, \quad (361)$$

pero  $\Delta E = \Delta T + \Delta V$ , por lo tanto, cuando la fuerza aplicada es conservativa, la energía se conserva, lo que explica el nombre elegido para designar este tipo de fuerzas. Aquí es importante mencionar que lo significativo de la energía mecánica es su variación, y no su valor, que dependerá del origen de coordenadas utilizado para describirla. Dicho de otra manera, no cambia sustancialmente en nada medir la energía desde un origen de coordenadas o de otro, ya que lo que cuenta es su variación (nula si se conserva o distinta de cero si no se conserva) entre dos puntos de la trayectoria de un móvil.

Si una fuerza conservativa depende de más de una coordenada, por ejemplo de las coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , puede generalizarse lo explicado hasta aquí. En este caso,

$$-dV(x, y, z) = \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = (F_{cx}\hat{i} + F_{cy}\hat{j} + F_{cz}\hat{k}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) : \quad (362)$$

entonces,

$$F_{cx}dx + F_{cy}dy + F_{cz}dz = -dV(x, y, z). \quad (363)$$

Consideremos variaciones de una coordenada independientemente de las otras dos, por ejemplo, hagamos variar  $x$  dejando fijas  $y$  y  $z$ . En este caso, los sumandos segundo y tercero del primer miembro no contribuyen a la suma. Pasando el incremento  $dx$  dividiendo y tomando límite se obtiene:

$$F_{cx} = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}. \quad (364)$$

En palabras: la componente  $x$  de la fuerza  $\vec{F}_c$  es igual a menos la *derivada parcial* de  $V$  respecto de la variable  $x$ . El significado de este concepto es justamente lo que hemos hecho: considerar la variación de una sola de las variables, la variable  $x$ , pensando a las otras como fijas. Podríamos haber hecho lo mismo considerando la coordenada  $y$  o la coordenada  $z$  como variable. En general tenemos:

$$F_{cx} = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}, \quad F_{cy} = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}, \quad F_{cz} = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}. \quad (365)$$

Un vector  $\vec{A}$  dependiente de las coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , cuyas componentes cartesianas pueden escribirse como las derivadas parciales de una función escalar  $B(x, y, z)$  se denomina *gradiente*: si

$$A_x = \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial y} \quad \text{y} \quad A_z = \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial z}, \quad (366)$$

entonces,  $\vec{A}$  es el gradiente de  $B(x, y, z)$  y se denota mediante el símbolo “nabla” ( $\nabla$ ):  $\vec{A} = \nabla B$ . En virtud de las ecuaciones (365) podemos escribir:

$$\vec{F}_c = -\nabla V(x, y, z). \quad (367)$$

Sabemos que todas las fuerzas aplicadas a un cuerpo pueden agruparse en dos conjuntos: las fuerzas conservativas  $\vec{F}_c$  y las fuerzas no conservativas  $\vec{F}_{nc}$ . El trabajo de todas las fuerzas aplicadas cuando la masa puntual se desplaza por la curva  $C$  desde el punto  $Q_1$  al punto  $Q_2$  será:

$$W = W_{F_c} + W_{F_{nc}} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{s} + \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{s}. \quad (368)$$

Además, sabemos que el trabajo de todas las fuerzas aplicadas es igual a la variación de la energía cinética –ver ec.(332)– y que el trabajo de las fuerzas conservativas es menos la variación de la energía potencial –ec.(360); entonces:

$$\Delta T = -\Delta V + W_{F_{nc}}. \quad (369)$$

Esto nos dice que

$$W_{F_{nc}} = \Delta T + \Delta V = \Delta E, \quad (370)$$

es decir, el trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica del sistema. Resumiendo:

$$W_{F_c+F_{nc}} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} (\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}) \cdot d\vec{s} = \Delta T ; \quad (371)$$

$$W_{F_c} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = -\Delta V ; \quad (372)$$

$$W_{F_{nc}} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{s} = \Delta E . \quad (373)$$

Como hemos dicho, las fuerzas conservativas dependen de las coordenadas. Una propiedad que depende de las coordenadas, y eventualmente del tiempo, se denomina *campo*. En particular, si esta propiedad es una magnitud vectorial, se denomina *campo vectorial*. Un campo de fuerzas en dos o tres dimensiones es un campo vectorial. Si existe una función potencial  $V(u)$  dada por ec.(359) en el caso unidimensional, o una función potencial  $V(x, y, z)$  dada por la ec.(367) en el caso tridimensional (en coordenadas cartesianas), entonces se dice que este campo de fuerzas es conservativo.

Volvamos al ejemplo del plano inclinado de la Fig. 51. Si en vez de calcular el trabajo de la fuerza peso deseáramos calcular el trabajo de todas las fuerzas actuantes sobre el bloque, tendríamos:

$$W = \int_{C|Q_1}^{Q_2} (\vec{P} + \vec{N}) \cdot d\vec{s} = \int_{x_i}^{x_f} P_x dx + \int_{x_i}^{x_f} \vec{N} \cdot d\vec{s} = \int_{x_i}^{x_f} P_x dx , \quad (374)$$

pues  $\vec{N}$  es perpendicular a  $d\vec{s} = dx\hat{i}$ , con lo cual la segunda integral se anula y el resultado es el mismo que si hubiéramos calculado el trabajo de la fuerza peso solamente. Dicho de otra manera, el trabajo de las fuerzas normales al desplazamiento es nulo; tal es el caso de las fuerzas de reacción debidas a superficies de apoyo.

## 16.1. Ejemplos de aplicación de la conservación de la energía mecánica

### 16.1.1. Movimiento de un satélite

Como vimos en la Tabla ??, la expresión para la energía de un objeto de masa  $m$  sometido al campo gravitatorio de un planeta de masa  $M$  es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{r_0} , \quad (375)$$

donde  $v_0$  y  $r_0$  son la velocidad y la posición del objeto en algún instante determinado; por ejemplo, sobre la superficie de la Tierra. Si despejamos la velocidad de la expresión anterior obtenemos el resultado de la ec.(87):

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2GM \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)} = \sqrt{v_0^2 - v_e^2 + \frac{2GM}{r}} , \quad (376)$$

donde  $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$  es la velocidad de escape. Debemos notar que  $V(r) = -\frac{GmM}{r}$  es siempre menor que cero, como puede verse en la Fig. 53. A partir de la ec.(375) vemos que  $E = 0$  corresponde a  $v_0^2 = \frac{2GM}{r_0} = v_e^2$ . Entonces, podemos plantear dos casos:

- a)  $E < 0$ , que corresponde a  $v_0 < v_e$  ;
- b)  $E \geq 0$ , que corresponde a  $v_0 \geq v_e$  .

Sabemos que  $T = E - V$ . Para valores muy grandes de  $r$ ,  $V \rightarrow 0$ , es decir,  $T \rightarrow E$ . Si  $E < 0$  ( $v_0 < v_e$ ), deberíamos concluir que para valores grandes de  $r$ ,  $T$  se hace negativa, pero esto no es posible por la definición de  $T$ , lo cual significa que el móvil no puede alcanzar grandes valores de  $r$ ,

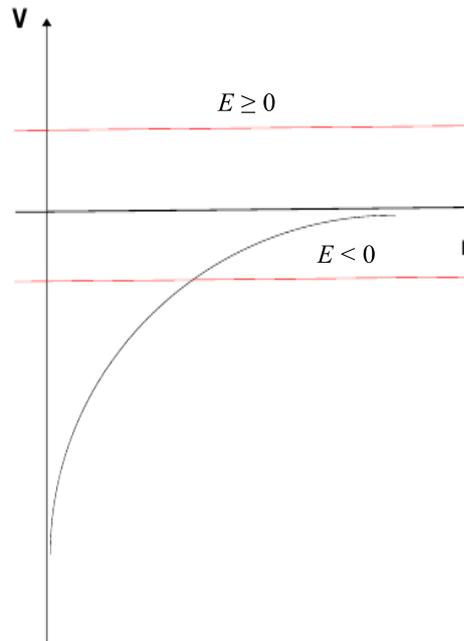


Figura 53: Energía potencial en el campo gravitatorio.

es decir, el movimiento está acotado o ligado y puede mostrarse que consiste en órbitas circulares o elípticas.

Si, en cambio,  $E \geq 0$  ( $v_0 \geq v_e$ ), para valores grandes de  $r$ ,  $T$  sigue siendo positiva (o cero), lo cual no impone ninguna restricción. Esto nos dice que si  $v_0 \geq v_e$  el móvil no está limitado a una parte del espacio y sus trayectorias son abiertas; en particular puede mostrarse que son hiperbólicas o parabólicas.

En el caso de órbitas elípticas, a partir de la ec.(375) de conservación de la energía podemos ver que a mayor distancia al centro del campo de fuerzas (centro del planeta), menor será la velocidad. En particular, la máxima velocidad se alcanza en el punto de máxima proximidad (perigeo) y la mínima velocidad, cuando el satélite está a la máxima distancia (apogeo).

### 16.1.2. Acción combinada de una fuerza conservativa y una reacción de vínculo

Consideremos ahora el movimiento de una masa puntual  $m$  que puede deslizar sin rozamiento sobre una esfera rígida de radio  $R$  bajo la acción de la gravedad (constante), tal como muestra la Fig. 54.

Si la masa puntual parte desde el punto superior con velocidad  $\vec{v}_0$  dirigida horizontalmente, ¿en que punto se despega de la superficie? Para averiguarlo vamos a plantear la segunda ley de Newton usando un sistema de coordenadas cartesiano con el eje  $y$  en la dirección radial. Las ecuaciones resultan:

$$\text{en } x, \quad mg \operatorname{sen}(\alpha) = ma_t ; \quad (377)$$

$$\text{en } y, \quad N - mg \cos(\alpha) = ma_c . \quad (378)$$

De la segunda ecuación obtenemos:

$$N - mg \cos(\alpha) = -m \frac{v^2}{R} . \quad (379)$$

El ángulo de despegue corresponde al instante en que se anula la reacción normal, con lo cual

$$g \cos(\alpha_d) = \frac{v_d^2}{R} , \quad (380)$$

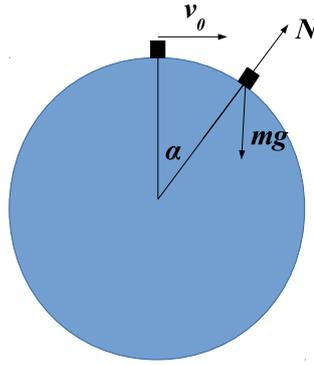


Figura 54: Trabajo de la fuerza de atracción gravitatoria.

donde el subíndice  $d$  hace referencia a la situación de *despegue*. Por otro lado, como el peso es una fuerza conservativa y la reacción normal no trabaja, podemos afirmar que la energía se conserva:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos(\alpha) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR, \quad (381)$$

donde la altura  $h$  se mide desde el centro de la esfera. La última igualdad, considerada en la situación de despegue y la ec.(380) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:  $v_d$  y  $\alpha_d$ . De la ec.(380) se obtiene  $v_d^2 = Rg \cos(\alpha_d)$ . Sustituyendo en la otra ecuación:

$$\frac{1}{2}Rg \cos(\alpha_d) + gR \cos(\alpha_d) = \frac{1}{2}v_0^2 + gR. \quad (382)$$

Es decir:

$$\frac{3}{2}gR \cos(\alpha_d) = \frac{1}{2}v_0^2 + gR \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha_d) = \frac{v_0^2}{3Rg} + \frac{2}{3}, \quad (383)$$

de donde puede sacarse el valor de  $\alpha_d$ , es decir, el ángulo para el cual la masa puntual deja de estar en contacto con la esfera. Debe notarse que siempre debe ser  $\cos(\alpha_d) \leq 1$ , con lo cual tiene que cumplirse que  $v_0^2 \leq Rg$ . Para velocidades iniciales mayores lo que sucede es que la masa puntual nunca llega a estar en contacto con la esfera.

## 16.2. Análisis del movimiento de una partícula en un potencial unidimensional

Consideremos una partícula moviéndose a lo largo de la coordenada  $r$  bajo la acción de una fuerza que se deriva de un potencial  $V(r)$ , como se muestra en la Fig. 55.

Lo primero que debemos observar es que el movimiento se produce sobre el eje  $r$ , y no sobre la curva. Dicho esto, recordemos que  $F(r) = -\frac{dV}{dr}$ ; entonces, según sea la pendiente de la curva, será el sentido de la fuerza actuante sobre el móvil. En la Fig. 55 están indicados estos sentidos en varias posiciones características; es importante notar que en los máximos y mínimos de la curva el valor de la fuerza es nulo. Las posiciones correspondientes a las situaciones en las que el móvil está libre de fuerzas se denominan posiciones de equilibrio, como ya sabíamos. En el caso de los mínimos, podemos ver que si el móvil está en reposo en uno de ellos y es apartado levemente de la posición de equilibrio, la fuerza que aparece es del sentido necesario para que la masa puntual sea llevada nuevamente hacia la posición de equilibrio; por ese motivo, los mínimos son posiciones de *equilibrio estable*. Por otro lado, si el móvil se encuentra en reposo en un máximo y es apartado levemente de esa posición, la fuerza que actúa sobre él lo aleja de la posición de equilibrio, denominada por lo tanto, de *equilibrio inestable*.

Los casos en los que la curva  $V(r)$  presenta un punto de inflexión con derivada primera nula (no mostrados en la figura), corresponden también a situaciones de equilibrio inestable: cuando se

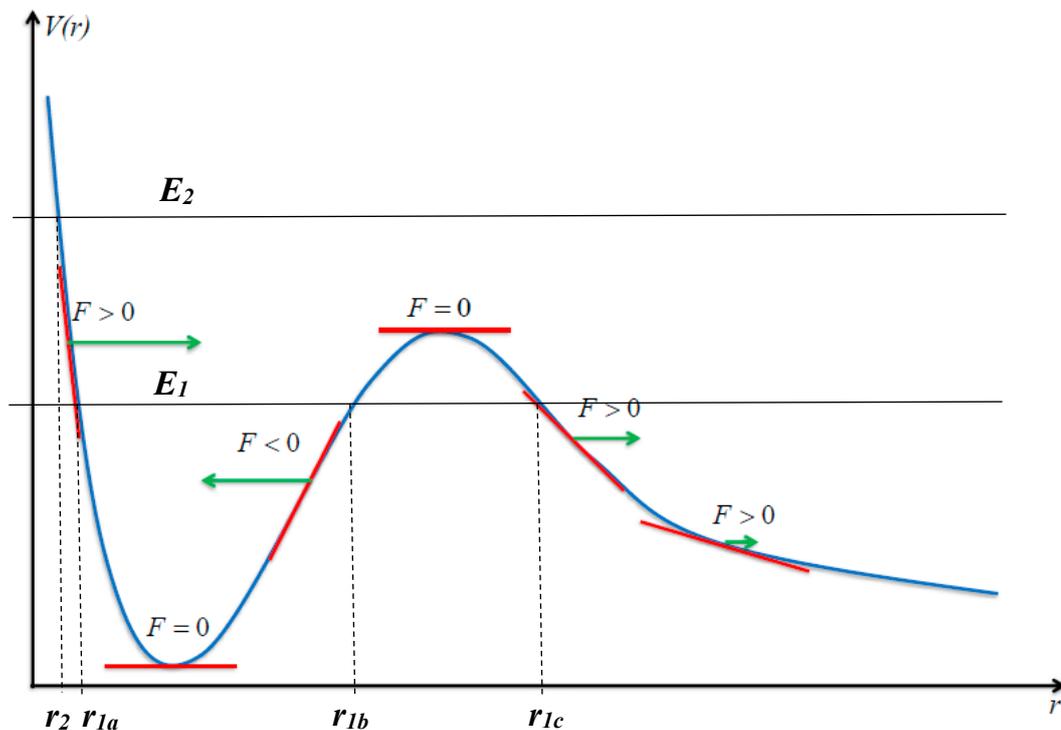


Figura 55: Curva de potencial unidimensional.

aparta el móvil hacia la región donde el potencial decrece, la fuerza que surge, lo alejará del equilibrio: si, en cambio, se aparta el móvil en la dirección hacia donde  $V$  crece, la fuerza llevará el móvil a la posición de equilibrio con velocidad no nula, de manera que “pasará de largo” y se alejará del equilibrio definitivamente. Existe otra posibilidad, tampoco representada en la figura: las posiciones de *equilibrio metaestable o indiferente*, que se observan como mesetas a lo largo de las cuales la pendiente de la curva  $V(r)$  se anula. En estos casos, si un móvil en reposo es apartado de la posición de equilibrio sigue estando en equilibrio, por lo cual se queda donde es colocado.

El movimiento será distinto, incluso cualitativamente distinto, según sea el valor de la energía mecánica  $E$ . Supongamos primero que el valor de la energía mecánica es  $E_1$ . Como  $T = E - V$  debe ser siempre mayor o igual que cero, debe cumplirse siempre que  $E \geq V$ , por lo tanto, el movimiento sólo es posible entre las posiciones  $r_{1a}$  y  $r_{1b}$ , y también para  $r \geq r_{1c}$ . Es decir, si  $E = E_1$  la partícula no puede moverse libremente por todo el espacio, sino que su movimiento está acotado: si su posición está alguna vez entre  $r_{1a}$  y  $r_{1b}$  nunca podrá salir de ese intervalo, y si se cumple que  $r \geq r_{1c}$ , jamás podrá ingresar a la región de los  $r < r_{1c}$ . Pensemos que el móvil está entre las posiciones  $r_{1a}$  y  $r_{1b}$ ; ¿qué ocurrirá cuando llegue a los extremos de ese intervalo? Podemos observar que tanto para  $r = r_{1a}$  como para  $r = r_{1b}$ ,  $E = V$ , con lo cual  $T = 0$ , es decir,  $v = 0$ . Esto nos dice que el móvil llega, por ejemplo, a la posición  $r_{1a}$  con velocidad nula, pero allí la fuerza tiene sentido positivo, como indica la figura, por lo tanto “rebotará” hacia los  $r$  mayores. Otro tanto ocurrirá cuando el móvil llegue a la posición  $r_{1b}$ : en este caso también se anula la velocidad y la fuerza negativa actuante obliga a la partícula a regresar a posiciones con  $r$  menor. Si el móvil hubiera estado inicialmente en la región  $r \geq r_{1c}$ , al llegar a  $r = r_{1c}$  lo haría con velocidad nula y rebotaría hacia los  $r$  mayores sin volver a regresar nunca; en cambio, si el movimiento ocurre entre  $r_{1a}$  y  $r_{1b}$ , el regreso a estos puntos se repetirá mientras dure el movimiento, siendo éste de característica periódica. Las posiciones  $r_{1a}$ ,  $r_{1b}$  y  $r_{1c}$  se denominan *puntos de retorno*.

Pensemos ahora que el valor de la energía mecánica es  $E_2$ . Existe un único punto de retorno, correspondiente a la posición  $r_2$ , de manera que el movimiento no es acotado: la única restricción es que el móvil no se podrá acercar al origen más allá de  $r = r_2$ .

## Capítulo 4: Cuerpo rígido.

Entendemos por cuerpo rígido a un cuerpo cuyos puntos mantienen invariable la distancia entre sí, sin importar las fuerzas que estén aplicadas.

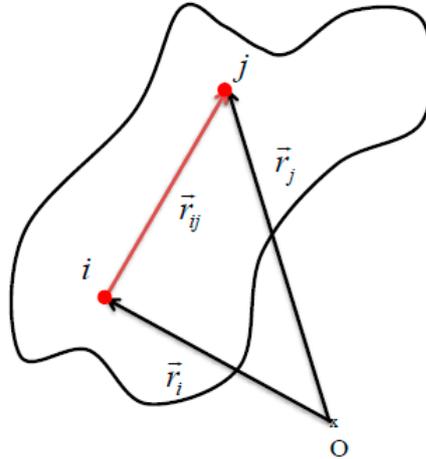


Figura 56: Cuerpo rígido.

En la Fig. 56 vemos que la condición de rígido equivale a plantear que la distancia  $|\vec{r}_{ij}|$  entre dos puntos cualesquiera es constante:

$$|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{cte.} \quad (384)$$

Estrictamente hablando, no existen los cuerpos rígidos, pues todos los cuerpos se deforman cuando se les aplican fuerzas suficientemente intensas. Consideraremos como cuerpos rígidos a aquellos que cuando se les aplican fuerzas, sufren deformaciones que son despreciables frente a sus dimensiones. Otra forma de abordar el tema es pensar que trabajaremos con cuerpos rígidos ideales, donde se cumple perfectamente la condición de rigidez. Las situaciones reales se aproximarán mejor o peor a esta abstracción matemática, según sea el caso, al igual que ocurría al considerar cuerpos puntuales.

## 17. Cinemática del cuerpo rígido

### 17.1. Centro de masa

Con la definición dada, un cuerpo rígido podría ser un sistema discreto de partículas cuyas distancias relativas permanecen inalterables. Podríamos también pensar que las distancias entre ellas son tan pequeñas que ocupan el espacio en forma continua: es la imagen intuitiva que podemos tener de un sólido (rígido), es decir, una porción continua de materia indeformable, como se ilustra en la Fig. 57.

Consideremos el cuerpo rígido continuo de la Fig. 57 como un conjunto de celdas, cada una de las cuales está ubicada en la posición  $\vec{r}_i$ , ocupa un volumen  $\delta V_i$  y tiene una masa  $\delta m_i$ . Para la masa  $M$  y el volumen  $V$  totales podemos escribir:

$$M = \sum_i \delta m_i \quad \text{y} \quad V = \sum_i \delta V_i. \quad (385)$$

Por otro lado, la densidad de la celda  $i$ -ésima será

$$\rho_i = \frac{\delta m_i}{\delta V_i} \quad \Rightarrow \quad \delta m_i = \rho_i \delta V_i. \quad (386)$$

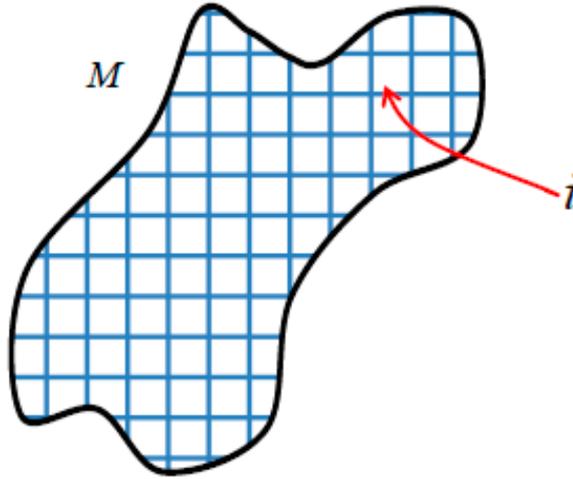


Figura 57: Cuerpo rígido continuo.

Como el rígido es continuo, podemos hacer tender a cero los volúmenes de las celdas, con lo cual se obtiene:

$$\rho(x, y, z) = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV . \quad (387)$$

Entonces, para la masa total tenemos:

$$M = \int dm = \int_{V_c} \rho dV , \quad (388)$$

donde las integrales deben efectuarse sobre todo el volumen  $V_c$  del rígido.

De acuerdo con la definición de centro de masa, podemos escribir

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \delta m_i}{\sum_{i=1}^N \delta m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \rho_i \delta V_i}{\sum_{i=1}^N \rho_i \delta V_i} . \quad (389)$$

Si hacemos tender  $\delta V_i$  a cero, las sumas se convierten en integrales:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_{V_c} \vec{r} \rho dV}{\int_{V_c} \rho dV} = \frac{\int_{V_c} \vec{r} \rho dV}{M} . \quad (390)$$

La última ecuación en realidad involucra tres ecuaciones, ya que  $\vec{r}_{CM} = x_{CM} \hat{i} + y_{CM} \hat{j} + z_{CM} \hat{k}$ , donde

$$x_{CM} = \frac{\int_{V_c} x \rho dV}{M} , \quad y_{CM} = \frac{\int_{V_c} y \rho dV}{M} \quad \text{y} \quad z_{CM} = \frac{\int_{V_c} z \rho dV}{M} . \quad (391)$$

### 17.1.1. Ejemplos de cálculo del vector centro de masa

#### Prisma rectangular homogéneo

Calculemos el centro de masa del prisma homogéneo ( $\rho = \text{cte.}$ ) de la Fig. 58:

Vamos a utilizar coordenadas cartesianas para resolver la integral de la ec.(390), de manera que el diferencial de volumen  $dV$  corresponde a un cubo cuyos lados son  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ , es decir,  $dV = dx dy dz$ . El cálculo de la coordenada  $x$  del centro de masa está dado por

$$x_{CM} = \frac{\int_{V_c} x \rho dV}{M} = \rho \frac{\int_{V_c} x dV}{M} , \quad (392)$$

pues  $\rho = \text{cte.}$  Reemplazando la expresión para  $dV$  en cartesianas,

$$x_{CM} = \rho \frac{\int_{V_c} x dx dy dz}{M} = \rho \frac{\int_0^a x dx \int_0^b dy \int_0^c dz}{M} = \frac{\rho}{M} \frac{a^2}{2} bc = \frac{\rho}{M} \frac{a}{2} V = \frac{a}{2} . \quad (393)$$

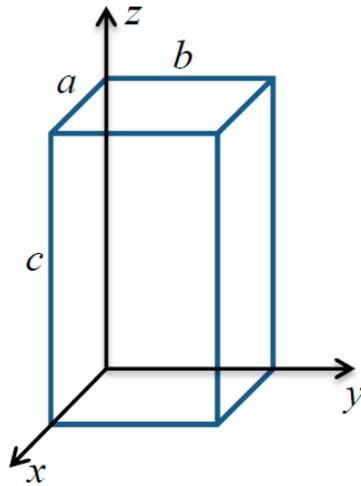


Figura 58: Prisma rectangular homogéneo.

Aquí se ha reemplazado la integral triple por el producto de tres integrales simples, como haríamos con una suma sobre tres índices, que puede expresarse como el producto de tres sumas cuidando que cada una de ellas contenga todos los términos que dependen del índice correspondiente. Análogamente,

$$y_{CM} = \rho \frac{\int_{V_c} y dx dy dz}{M} = \rho \frac{\int_0^a dx \int_0^b y dy \int_0^c dz}{M} = \frac{\rho}{M} \frac{b^2}{2} ac = \frac{\rho}{M} \frac{b}{2} V = \frac{b}{2}; \quad (394)$$

$$z_{CM} = \rho \frac{\int_{V_c} z dx dy dz}{M} = \rho \frac{\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c z dz}{M} = \frac{\rho}{M} \frac{c^2}{2} ab = \frac{\rho}{M} \frac{c}{2} V = \frac{c}{2}. \quad (395)$$

Entonces,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{a}{2} \hat{i} + \frac{b}{2} \hat{j} + \frac{c}{2} \hat{k}. \quad (396)$$

Es decir, el centro de masa coincide con el centro geométrico del rígido.

### Cilindro homogéneo

Calculemos el centro de masa del cilindro homogéneo ( $\rho = \text{cte.}$ ) de radio  $R$  y altura  $h$  de la Fig. 59:

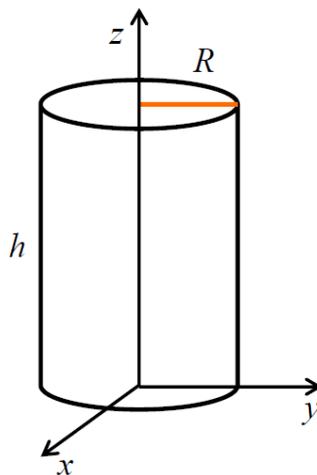


Figura 59: Cilindro homogéneo.

Para esta geometría las coordenadas cartesianas no resultan convenientes para barrer todo el volumen del cilindro; para ello usaremos coordenadas cilíndricas. El diferencial de volumen  $dV$  se ilustra en la Fig. 60. El diferencial de volumen es el volumen del cuerpo delimitado por las líneas rojas, es decir,

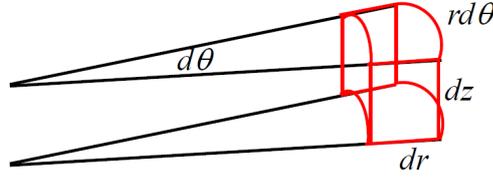


Figura 60: Diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas.

$$dV = r d\theta dr dz \quad (397)$$

Por otra parte, las coordenadas cartesianas pueden expresarse en términos de las cilíndricas, de manera que

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z. \quad (398)$$

Entonces,

$$x_{CM} = \frac{\rho}{M} \int_{V_c} x dV = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r \cos(\theta) r d\theta dr dz = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta \int_0^R r^2 dr \int_0^h dz. \quad (399)$$

La integral en  $\theta$  se anula, por lo tanto,  $x_{CM} = 0$ .

$$y_{CM} = \frac{\rho}{M} \int_{V_c} y dV = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r \sin(\theta) r d\theta dr dz = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^R r^2 dr \int_0^h dz. \quad (400)$$

La integral en  $\theta$  se anula, por lo tanto,  $y_{CM} = 0$ .

$$z_{CM} = \frac{\rho}{M} \int_{V_c} z dV = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h z r d\theta dr dz = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_0^h z dz. \quad (401)$$

Entonces,

$$z_{CM} = \frac{\rho}{M} 2\pi \frac{R^2}{2} \frac{h^2}{2} = \frac{\rho}{M} \frac{(\pi R^2 h) h}{2} = \frac{\rho}{M} \frac{V h}{2} = \frac{h}{2}. \quad (402)$$

Luego,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{h}{2} \hat{k}. \quad (403)$$

Es decir, en este caso, también el centro de masa coincide con el centro geométrico. En los cuerpos homogéneos el centro de masa siempre coincide con el centro geométrico. Resulta sencillo calcular el centro de masa de cuerpos que son combinaciones de cuerpos homogéneos de geometría simple. En primer lugar, pensemos que tenemos un sistema de dos cuerpos 1 y 2. Estos cuerpos pueden pensarse como dos sistemas de  $N_1$  y  $N_2$  partículas con posiciones  $\vec{r}_{1i}$  y  $\vec{r}_{2i}$ , respectivamente: el centro de masa del sistema estará dado por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1+N_2} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N_1+N_2} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} m_i \vec{r}_{1i}}{\sum_{i=1}^{N_1+N_2} m_i} + \frac{\sum_{i=N_1+1}^{N_2} m_i \vec{r}_{2i}}{\sum_{i=1}^{N_1+N_2} m_i} \quad (404)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N_1} m_i \vec{r}_{1i}}{M} + \frac{\sum_{i=N_1+1}^{N_2} m_i \vec{r}_{2i}}{M} \quad (405)$$

$$= \frac{M_1}{M} \vec{r}_{CM1} + \frac{M_2}{M} \vec{r}_{CM2} = \frac{M_1 \vec{r}_{CM1} + M_2 \vec{r}_{CM2}}{M}. \quad (406)$$

Entonces, el centro de masa  $\vec{r}_{CM}$  de todo el sistema puede calcularse pensando que los cuerpos 1 y 2 están representados por masas puntuales  $M_1$  y  $M_2$  ubicadas en las posiciones de sus respectivos centros de masa. La extensión de este razonamiento a un número arbitrario de cuerpos es trivial. Cuando los cuerpos que componen el sistema son homogéneos y tienen una geometría sencilla se puede encontrar los centros de masa de cada uno de ellos utilizando argumentos geométricos.

Veamos el caso de un cuerpo formado por dos discos homogéneos de masas  $m_1$  y  $m_3$  unidos por una barra homogénea de masa  $m_2$  (Fig. 61).

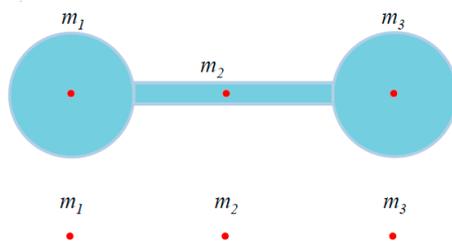


Figura 61: Cuerpo compuesto por partes con geometría sencilla.

Debajo de cada una de las partes que componen el cuerpo se indica la posición del centro de masa correspondiente. La posición del centro de masa del sistema total se determina utilizando la fórmula de centro de masa aplicada a las tres masas puntuales  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  ubicadas como se indica.

#### Disco homogéneo con un agujero circular

Consideremos ahora el cuerpo homogéneo de masa  $M$  de la Fig. 62

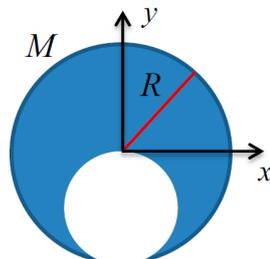


Figura 62: Disco homogéneo con un agujero circular.

Para determinar su centro de masa vamos a ayudarnos utilizando otro cuerpo de la misma densidad: un disco de radio  $R$  y masa  $m_T$ , cuya geometría es mucho más sencilla. Podemos pensar que este disco completo está formado por el cuerpo de la Fig. 62 y por el disco más pequeño faltante, de masa  $m$  y radio  $R/2$ , como se muestra en la Fig. 63.

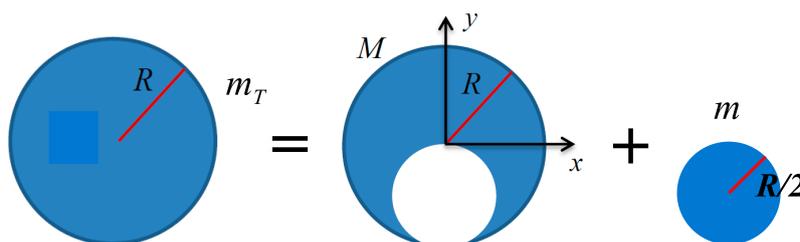


Figura 63: Disco homogéneo con un agujero circular.

Según lo que habíamos visto, el centro de masa del disco completo,  $\vec{r}_{CMT}$  puede calcularse a partir de los centros de masa de sus dos partes:

$$\vec{r}_{CMT} = \frac{M\vec{r}_{CM} + m\vec{r}'_{CM}}{m_T}. \quad (407)$$

Es fácil determinar el centro de masa del disco completo  $\vec{r}_{CMT}$  y el centro de masa del disco pequeño  $\vec{r}'_{CM}$ ; usando argumentos de simetría se obtiene:

$$\vec{r}_{CMT} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{r}'_{CM} = -\frac{R}{2}\hat{j}. \quad (408)$$

Por lo tanto,

$$0 = M\vec{r}_{CM} - \frac{R}{2}m\hat{j}. \quad (409)$$

Despejando en la última ecuación la incógnita buscada, tenemos que

$$\vec{r}_{CM} = \frac{mR}{2M}\hat{j}. \quad (410)$$

Para obtener la relación  $m/M$  pensemos que

$$m = \rho V' \quad \text{y} \quad M = \rho V, \quad (411)$$

donde los volúmenes  $V'$  y  $V$  de los discos pequeño y hueco, respectivamente, son en realidad áreas (aunque podría pensarse que son volúmenes de discos de cierto espesor, pero eso no agrega nada importante a la discusión). Sabemos que

$$V' = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi \frac{R^2}{4} \quad \text{y} \quad V = V_T - V' = \pi R^2 - \pi \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}\pi R^2, \quad (412)$$

donde  $V_T$  es el volumen del disco grande completo. Por lo tanto,

$$\frac{m}{M} = \frac{V'}{V} = \frac{1}{3}. \quad (413)$$

Entonces, finalmente se obtiene

$$\vec{r}_{CM} = \frac{R}{6}\hat{j} \quad (414)$$

## 17.2. Tipos de movimiento de un cuerpo rígido

### Movimiento de traslación

En un movimiento de traslación pura todos los puntos del rígido se mueven con la misma velocidad; en el caso de la Fig. 64,  $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0$ . Es decir, existe un *campo vectorial de velocidades*, ya que cada punto del rígido tiene asignada una velocidad, que es igual a  $\vec{v}_0$ .

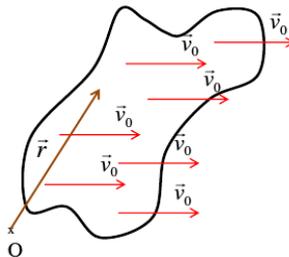


Figura 64: Movimiento de traslación de un cuerpo rígido.

### Movimiento de rotación

En un movimiento de rotación pura todos los puntos del cuerpo rígido giran alrededor de un eje fijo. En la Fig. 65 se muestra un ejemplo en el cual la velocidad angular está dada por el vector  $\vec{\omega}$ , que coincide con ese eje, como habíamos visto en la sección 13.1 (ver Fig. 40). Si cortamos el rígido con un plano perpendicular al vector  $\vec{\omega}$ , los puntos del rígido pertenecientes a ese plano giran en circunferencias concéntricas en torno al vector  $\vec{\omega}$  con velocidades tangenciales de igual módulo en cada circunferencia; esta velocidad disminuye a medida que nos acercamos al eje de rotación. Es decir, para que se cumpla la condición de rigidez (distancia invariable entre dos puntos cualesquiera), todos los puntos rotan el mismo ángulo en un dado  $\Delta t$ . Esto significa que todos los puntos tienen la misma velocidad angular alrededor del eje.

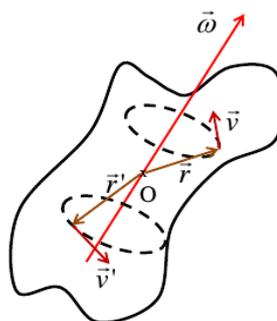


Figura 65: Movimiento de rotación de un cuerpo rígido.

Como habíamos visto en la ec.(289), cuando definimos el vector velocidad angular, la velocidad de cualquier punto del rígido estará dada por el producto vectorial del vector velocidad angular por el vector posición, así, para dos puntos ubicados en las posiciones  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ , la velocidad será:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{y} \quad \vec{v}' = \vec{v}(\vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{r}' . \quad (415)$$

Entonces, vemos que el campo vectorial de velocidades está determinado por el vector  $\vec{\omega}$ .

### Movimiento de roto-traslación

Si a un movimiento de rotación con velocidad angular  $\vec{\omega}$  alrededor de un eje le superponemos un movimiento de traslación del eje, caracterizado por el vector velocidad  $\vec{v}_0$ , igual para cada punto del rígido, la velocidad resultante para cada punto del rígido se calcula por adición de velocidades:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0 , \quad (416)$$

como ilustra la Fig. 66.

Los puntos del cuerpo rígido que están sobre el eje de rotación tienen la misma velocidad: la velocidad  $\vec{v}_0$ , ya que en este caso  $\vec{r} = 0$ , o bien  $\vec{r} \parallel \vec{\omega}$ . Es decir: en un movimiento de roto-traslación, todos los puntos del rígido giran en torno a un eje de rotación; todos los puntos del eje, a su vez, se trasladan con la misma velocidad  $\vec{v}_0$ . Vamos a mostrar que el campo de velocidades dado por la ec. (416) satisface la condición de rigidez del cuerpo, es decir, la invariancia de la distancia  $d_{12}$  entre dos puntos arbitrarios del rígido, de posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , ilustrados en la Fig. 67.

Para probar la condición de rigidez entonces basta con corroborar que la derivada temporal de  $d_{12}^2$  es nula. Podemos ver que

$$\frac{d d_{12}^2}{dt} = \frac{d}{dt} [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = 2(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) . \quad (417)$$

Por otro lado sabemos que

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1 + \vec{v}_0 \quad \text{y} \quad \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \vec{r}_2 + \vec{v}_0 . \quad (418)$$

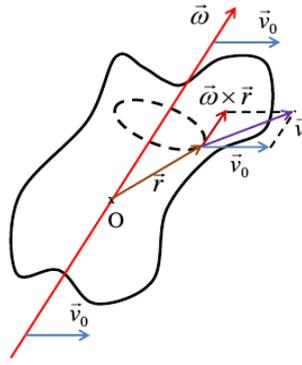


Figura 66: Movimiento de roto-traslación de un cuerpo rígido.

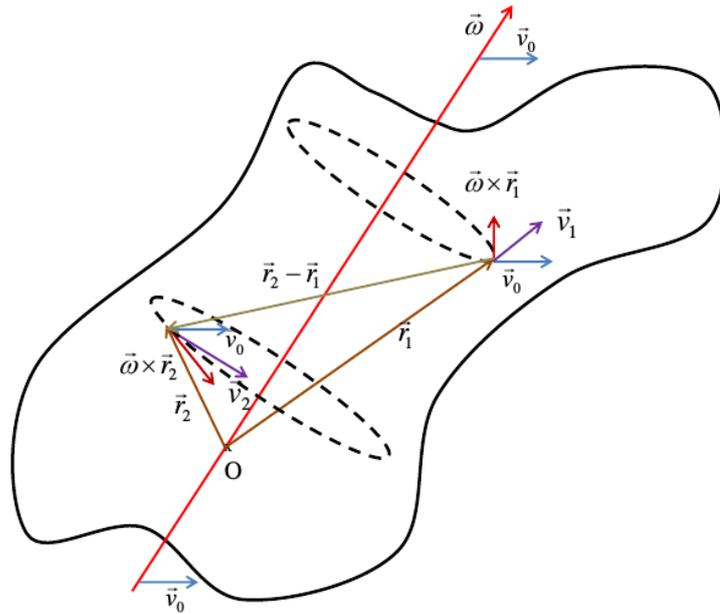


Figura 67: Condición de rigidez en un movimiento de roto-traslación.

Restando estas dos ecuaciones,

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{\omega} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) . \quad (419)$$

Esta expresión nos dice que  $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \perp (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ , pero entonces el producto escalar del tercer miembro de ec.(417) se anula, con lo cual se demuestra que la distancia entre dos puntos cualesquiera del rígido es constante, como debe ser.

La roto-traslación es la forma más general de movimiento de un cuerpo rígido; cualquier expresión para la velocidad que no fuese reductible a la ec.(416) no nos habría conducido a la condición de rigidez. Es interesante notar que a pesar de esta gran generalidad, basta sólo dos vectores:  $\vec{\omega}$  y  $\vec{v}_0$ , para describir la velocidad de cada punto del rígido. Es decir, la restricción impuesta por la condición de rigidez es tal que con sólo seis funciones del tiempo: tres para  $\vec{\omega}$  y tres para  $\vec{v}_0$ , podemos describir las velocidades de cualquier punto del rígido, de hecho infinitos puntos, para todo tiempo y con ello, la posición de cada punto en función del tiempo.

Veamos ahora qué relación existe entre las velocidades de dos puntos que están sobre una recta paralela al eje de rotación. Consideremos la velocidad de dos puntos  $O'$  y  $J$  (sobre una recta paralela al eje de rotación), como indica la Fig. 68:

$$\vec{v}_{O'} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{O'O} + \vec{v}_0 \quad \text{y} \quad \vec{v}_J = \vec{\omega} \times \vec{r}_{JO} + \vec{v}_0 . \quad (420)$$

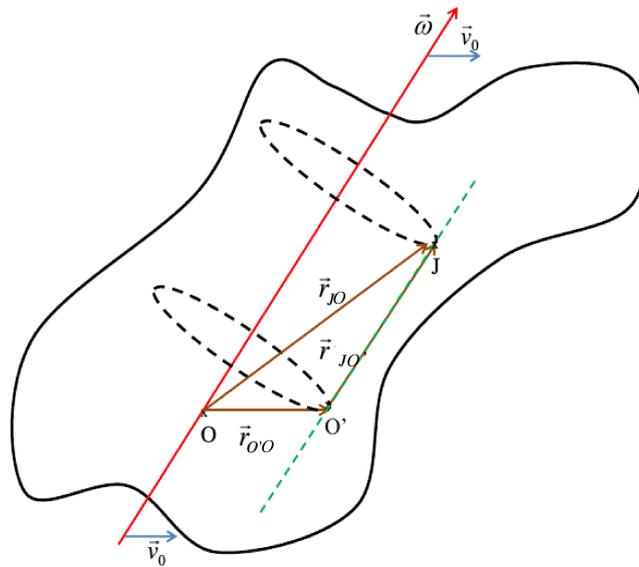


Figura 68: Velocidad de puntos en una recta paralela al eje de rotación.

Restando miembro a miembro,

$$\vec{v}_J - \vec{v}_{O'} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{JO} - \vec{r}_{O'O}), \quad (421)$$

pero  $\vec{r}_{JO} - \vec{r}_{O'O} = \vec{r}_{JO'}$  es un vector paralelo a  $\vec{\omega}$ , con lo cual el producto vectorial se anula y queda demostrado que  $\vec{v}_J = \vec{v}_{O'}$ . Como estos puntos son puntos arbitrarios de cualquier recta paralela al eje de rotación, podemos afirmar que en cualquier recta paralela al eje todos los puntos se mueven con la misma velocidad. Entonces, cualquier recta paralela al eje de rotación podría ser tomada como eje de rotación.

Consideremos el rígido de la Fig. 69, que rota alrededor de un eje que pasa por el punto  $O$  con velocidad angular  $\vec{\omega}$ . La velocidad de traslación de este eje  $O$  es  $\vec{v}_0$ .

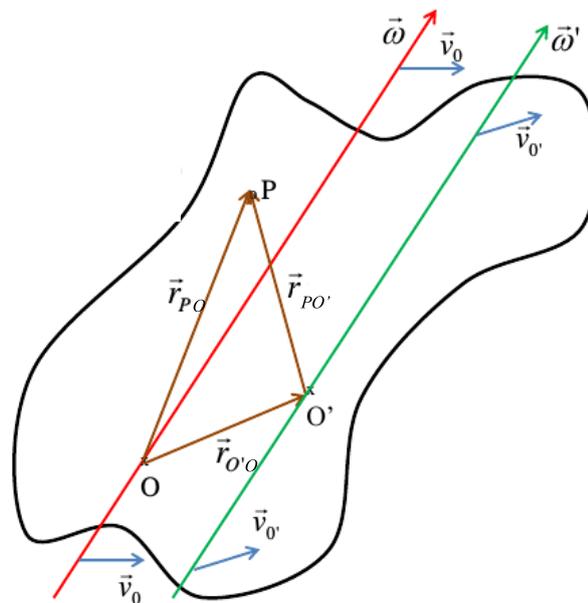


Figura 69: Velocidad referida a distintos ejes de rotación.

Podemos referir el movimiento a otro eje, paralelo al anterior; por ejemplo al eje que pasa por

$O'$  indicado en la figura. La velocidad de traslación de este eje tendrá algún valor  $\vec{v}'_0$ . ¿Cuál será la velocidad angular de rotación  $\vec{\omega}'$  en torno a este nuevo eje? Para responder a esta pregunta debemos tener en cuenta que la velocidad de un dado punto P del rígido respecto del sistema de referencia considerado es la misma, independientemente del eje de rotación elegido. Si referimos el movimiento al eje que pasa por  $O$ ,

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO} + \vec{v}_0 . \quad (422)$$

Si el eje elegido es el que pasa por  $O'$ ,

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}' \times \vec{r}_{PO'} + \vec{v}'_0 . \quad (423)$$

Además,

$$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{PO'} + \vec{r}_{O'O} . \quad (424)$$

Reemplazando en ec.(422),

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{PO'} + \vec{r}_{O'O}) + \vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O'O} + \vec{v}_0 , \quad (425)$$

pero la velocidad del punto  $O'$ , que es la velocidad del eje correspondiente,  $\vec{v}'_0$ , puede expresarse como la composición de una rotación alrededor del eje  $O$  con velocidad angular  $\vec{\omega}$  más una traslación de este eje con velocidad  $\vec{v}_0$ , de manera que

$$\vec{v}'_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{O'O} + \vec{v}_0 . \quad (426)$$

Reemplazando esta expresión en ec.(425),

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO'} + \vec{v}'_0 . \quad (427)$$

Comparando esta última ecuación con la ec.(423) es inmediato concluir que  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ . Esto nos dice que si un cuerpo rígido rota alrededor de un eje con una velocidad angular  $\vec{\omega}$ , para describir el movimiento de rotación puedo elegir ese, o cualquier otro eje paralelo, siendo la velocidad de rotación la misma. Lo único que se modifica es la velocidad de traslación del nuevo eje elegido.

Hemos visto que en todo sistema de partículas el centro de masa es un punto notable dentro del cuerpo. Como dado un eje de rotación podemos arbitrariamente elegir cualquier otro eje de rotación mientras que sea paralelo al primero, podemos elegir uno que pase por el centro de masa del cuerpo. En este caso particular, la expresión de la velocidad será:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{CM} . \quad (428)$$

Por último, si a un movimiento rotatorio puro de velocidad angular  $\vec{\Omega}_1$  le superponemos otro movimiento rotatorio puro de velocidad angular  $\vec{\Omega}_2$ , como se ve en la Fig. 70, la velocidad de cualquier punto de posición  $\vec{r}$  puede determinarse mediante la adición de las velocidades de ambos movimientos:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{\Omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\Omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2) \times \vec{r} . \quad (429)$$

Es decir, el movimiento resultante será otro movimiento rotatorio puro con velocidad angular

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2 , \quad (430)$$

cuyo eje de rotación es el vector  $\vec{\Omega}$  y pasa por el punto de intersección de los ejes de rotación de los movimientos rotatorios simples. En este ejemplo, el eje correspondiente a  $\vec{\Omega}_1$  es móvil, pues rota alrededor del eje  $\vec{\Omega}_2$  fijo a la pared. Naturalmente, el vector  $\vec{\Omega}$  resultante tampoco es fijo, sino que también rota en torno al eje fijo  $\vec{\Omega}_2$ .

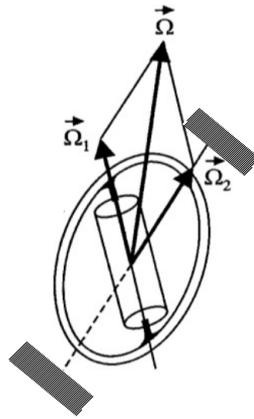


Figura 70: Movimiento rotatorio compuesto.

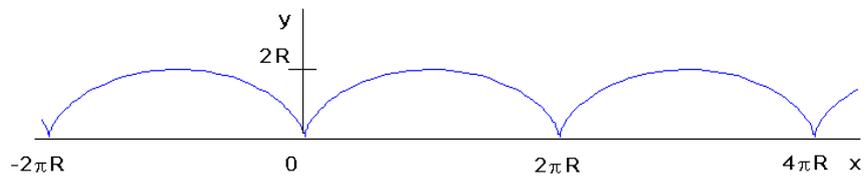


Figura 71: Trayectoria de un punto del borde de una rueda que rueda sin deslizar.

### 17.3. Rodadura

Se llama rodadura al movimiento que describen los puntos situados sobre el perímetro de una rueda que rueda sin deslizar sobre una superficie plana. La condición de rodadura implica entonces que un punto situado sobre el borde de la rueda no tiene una velocidad horizontal en el momento en que toca el suelo, de lo contrario habría deslizamiento. Puede verse que los puntos del borde de la rueda describen una trayectoria llamada cicloide, que se muestra en la Fig. 71.

Podemos considerar que el movimiento de cualquier punto de la rueda es la composición de un movimiento de traslación de su eje  $O$ , que se desplaza con velocidad  $\vec{v}_0$  y una rotación alrededor de este eje con velocidad angular  $\vec{\omega}$ , tal como está esquematizado en la Fig. 72.

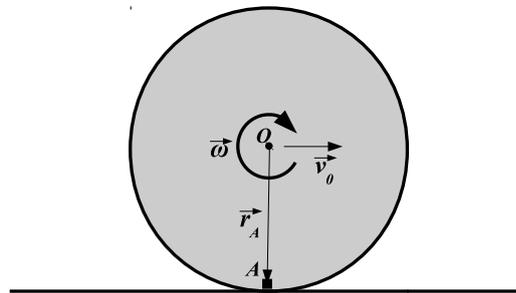


Figura 72: Rodadura. Rotación alrededor del eje  $O$ .

La velocidad del punto  $A$  entonces sería

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A + \vec{v}_0 ; \quad (431)$$

pero sabemos que  $\vec{v}_A = 0$ , con lo cual

$$\vec{v}_0 = -\vec{\omega} \times \vec{r}_A . \quad (432)$$

Vemos entonces, que cuando hay rodadura la velocidad angular y la velocidad de traslación están ligadas por la ecuación anterior; es decir,  $|\vec{v}_0| = |\vec{\omega}|R$ , donde  $R$  es el radio de la rueda. Por otro lado, podemos pensar que el movimiento es una rotación alrededor de un eje paralelo al anterior, pero que pasa por el punto de contacto (ver Fig. 73).

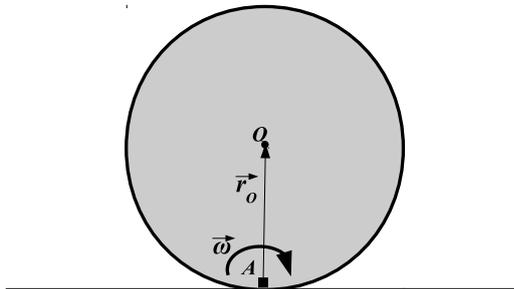


Figura 73: Rodadura. Rotación alrededor del eje instantáneo que está en contacto con el suelo.

En este caso, la velocidad de traslación del eje es cero, ya que no hay deslizamiento. Entonces, a la velocidad del centro de masa podemos expresarla como

$$\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM} = \vec{\omega} \times (-\vec{r}_A) = -\vec{\omega} \times \vec{r}_A = \vec{v}_0. \quad (433)$$

Es decir, describiendo el movimiento como una rotación pura alrededor del eje *instantáneo* de rotación que pasa por el punto de contacto con el suelo, se obtiene para el punto  $O$ , la velocidad de traslación  $\vec{v}_0$  del movimiento roto-traslatorio considerado inicialmente. El término *instantáneo*, aplicado a este eje de rotación que pasa por el punto de contacto, se refiere a que solo permanecerá un instante en contacto con la superficie plana; al siguiente instante estará situado más arriba. En particular, puede verse a partir de la figura 71 que dicho eje tiene instantáneamente velocidad nula, pero está acelerado hacia arriba.

#### 17.4. Aceleración de los puntos de un cuerpo rígido

Consideremos el cuerpo rígido de la Fig. 74. A partir de ahora, los vectores posición medidos desde un sistema inercial  $Q$  serán denotados por  $\vec{R}$ , mientras que los medidos desde el eje de rotación, se indicarán con  $\vec{r}$ .

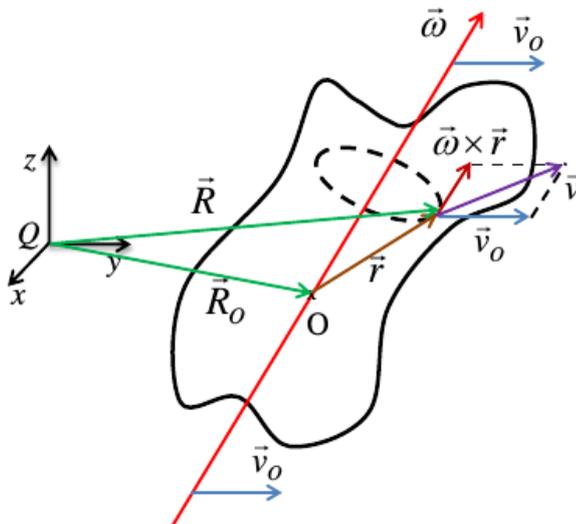


Figura 74: Aceleración de los puntos de un cuerpo rígido.

El cuerpo rígido describe un movimiento de roto-traslación compuesto por la traslación del eje que pasa por  $O$  con velocidad  $\vec{v}_0$  medida respecto de un referencial  $Q$  y la rotación alrededor de este eje con velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Un punto cualquiera del sólido, cuyo vector posición respecto de  $Q$  es  $\vec{R}$ , tendrá una velocidad  $\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}$  dada por

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0, \quad (434)$$

donde  $\vec{r}$  es el vector posición del punto medido desde un punto  $O$  del eje de rotación.

Para determinar la aceleración del punto en cuestión es necesario derivar el vector velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{v}_0}{dt}. \quad (435)$$

Llamando  $\vec{\gamma}$  al vector aceleración angular y  $\vec{a}_0$  a la aceleración de traslación del eje,

$$\vec{a} = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{a}_0. \quad (436)$$

Como puede verse en la Fig. 74,  $\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r}$ ; por lo tanto,  $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_O$  y  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} - \frac{d\vec{R}_O}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_0$ ; entonces podemos reescribir la última ecuación:

$$\vec{a} = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{v}_0) + \vec{a}_0. \quad (437)$$

Pero, por la ec.(434),  $\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , con lo cual la aceleración queda:

$$\vec{a} = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}_0. \quad (438)$$

El último término del vector aceleración corresponde a la aceleración con que se traslada el eje de rotación, mientras que los dos primeros son aceleraciones debidas al movimiento de rotación; estudiemos el significado de estos primeros términos. El movimiento de cualquier punto del rígido es un movimiento circular, superpuesto eventualmente a un movimiento de traslación. En el caso particular en el que el eje de rotación no cambia su dirección, el vector velocidad angular tampoco lo hace:  $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  es paralelo a  $\vec{\omega}$  y el significado de los dos primeros términos de la ec.(438) se ilustra en la Fig. 75.

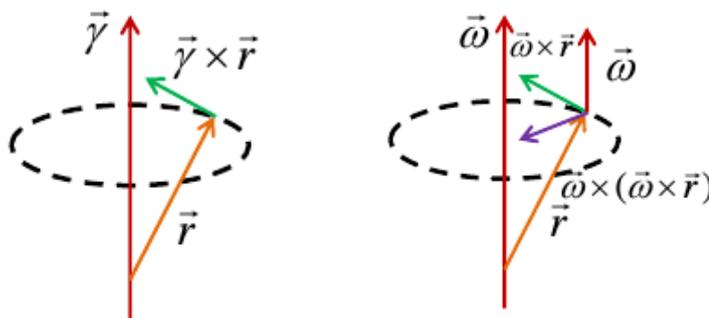


Figura 75: Aceleración de un rígido cuyo eje de rotación se mantiene paralelo a sí mismo.

En primer lugar, vemos que  $\vec{\gamma} \times \vec{r}$  apunta en la dirección tangente al movimiento y además su módulo es  $\gamma R$ , donde  $R$  es el radio del círculo descrito por el punto estudiado. Por lo tanto, el primer término de la ec.(438) es la aceleración tangencial.

Por otro lado,  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  apunta hacia el eje de rotación y su módulo es  $\omega^2 R$ ; esto nos dice que el segundo término de la ec.(438) es la aceleración normal. Resumiendo, en este caso particular:

$$\vec{\gamma} \times \vec{r} = \vec{a}_t \quad \text{y} \quad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_n. \quad (439)$$

### 17.4.1. Relación entre las aceleraciones en la condición de rodadura

Como habíamos visto, cuando un disco o un cilindro rueda sin deslizar, significa que el punto que está en contacto con el piso (punto  $A$  en la Fig. 73) tiene velocidad nula con respecto a él. Si escribimos la primera parte de la ec.(433)

$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \times \vec{r}_O \quad (440)$$

y derivamos respecto del tiempo para obtener la aceleración del punto  $O$ , es decir, el centro de masa, ¡¡habremos caído en una trampa!!

Pensemos con cuidado cuál es la expresión de la velocidad del punto  $O$  considerando una rotación alrededor del punto  $A$ :

$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \times \vec{r}_O + \vec{v}_A . \quad (441)$$

Podríamos decir que  $\vec{v}_A = 0$ , ya que se trata de un eje instantáneo de rotación pura y que se trata de un punto de la rueda que no desliza respecto del suelo y entonces su velocidad tiene que ser la misma que la del suelo, es decir, nula. Eso es todo cierto, pero **solamente** en un instante particular: cuando el punto  $A$  toca el suelo. Antes de eso el punto  $A$  desciende hacia el suelo y después, asciende desde el suelo, como se puede apreciar en la Fig. 71. Ahora queda claro cuál es la trampa en la que estuvimos a punto de caer: primero evaluar la función velocidad en un instante particular y luego derivar. Sabemos que eso no debe hacerse porque cualquier función evaluada en un valor particular se convierte en una constante y su derivada es cero. En lugar de eso escribiremos

$$\vec{a}_{CM} = \vec{a}_O = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_O + \vec{v}_A) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_O + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{\gamma} \times \vec{r}_O + \vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{a}_A , \quad (442)$$

o bien,

$$\vec{a}_{CM} = \vec{\gamma} \times \vec{r}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{CM} + \vec{a}_A . \quad (443)$$

Si analizamos esta última ecuación, podemos observar que el primer término del segundo miembro tiene la dirección tangencial, es decir, la dirección del movimiento del centro de masa, mientras que el segundo apunta radialmente desde el centro de masa hacia el punto de contacto (de manera análoga a lo ilustrado en la Fig. 75). Por otro lado, sabemos que la aceleración del centro de masa sólo tiene componente tangencial, ya que el vínculo con el suelo impone la condición de que el centro de masa se desplace paralelo a su superficie. Entonces podemos escribir:

$$\vec{a}_{CM} = \vec{\gamma} \times \vec{r}_{CM} \quad \text{y} \quad 0 = \vec{\omega} \times \vec{v}_{CM} + \vec{a}_A . \quad (444)$$

La aceleración del punto  $A$  resulta ser

$$\vec{a}_A = -\vec{\omega} \times \vec{v}_{CM} , \quad (445)$$

es decir, hacia arriba, como se mostró en la Fig. 71.

## 18. Dinámica del cuerpo rígido

Hasta aquí, en esta unidad se ha descrito el movimiento de un cuerpo rígido; a partir de ahora nos interesaremos en relacionar las causas (fuerzas y torques) con las variaciones que ellas producen en el movimiento de un rígido.

### 18.1. Ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido

Puesto que los cuerpos rígidos son sistemas de partículas, valen también para ellos las ecs.(223) y (318):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{Ei} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} . \quad (446)$$

Sabemos que

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i, \quad (447)$$

y en el caso de un rígido continuo,  $\vec{p}_i = \delta m_i \vec{v}_i = \rho_i \delta V_i \vec{v}_i$ . Pasando al límite  $\delta V_i \rightarrow 0$ ,

$$\vec{P} = \int_{V_c} \rho \vec{v} dV. \quad (448)$$

Si reemplazamos la expresión para la velocidad de un rígido  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0$  en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\vec{P} = \int_{V_c} \rho (\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0) dV \quad (449)$$

$$= \int_{V_c} \rho \vec{\omega} \times \vec{r} dV + \int_{V_c} \rho \vec{v}_0 dV \quad (450)$$

$$= \vec{\omega} \times \int_{V_c} \rho \vec{r} dV + \vec{v}_0 \int_{V_c} \rho dV. \quad (451)$$

Utilizando las ecs.(388) y (390), la última ecuación queda:

$$\vec{P} = \vec{\omega} \times M \vec{r}_{CM} + \vec{v}_0 M = M(\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM} + \vec{v}_0); \quad (452)$$

es decir,

$$\vec{P} = M \vec{v}_{CM}, \quad (453)$$

con lo cual corroboramos para el caso particular de un cuerpo rígido algo que ya sabíamos en general para cualquier sistema de partículas. En relación con la ec.(223) vale la pena recordar que la aceleración del centro de masa de un sistema de partículas, en particular de un cuerpo rígido, depende de las fuerzas externas aplicadas, pero sin importar en qué parte del sistema están aplicadas. Esta ecuación, sin embargo, solo nos da información sobre la traslación del centro de masa. Analicemos ahora la ec.(318) aplicada a un cuerpo rígido; en primer lugar veamos cuál es la expresión del momento angular para un cuerpo rígido. Llamaremos  $\vec{R}$  al vector posición de los puntos del rígido respecto de un sistema inercial  $Q$  ilustrado en la Fig. 76.

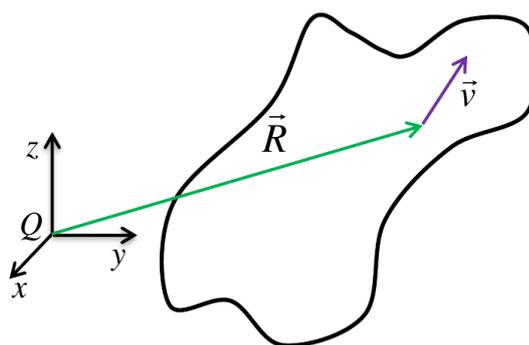


Figura 76: Momento angular en un rígido que se traslada.

Para cualquier sistema de partículas tenemos que

$$\vec{L}_Q = \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (454)$$

Si el cuerpo es continuo, la expresión para el momento de un rígido queda:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \vec{R} \times \vec{v} \rho dV. \quad (455)$$

Ahora vamos a reemplazar la expresión para la velocidad:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) dV ; \quad (456)$$

o sea,

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times \vec{v}_0 dV + \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV . \quad (457)$$

La ec.(457) es la expresión general. Vamos a estudiar dos casos por separado: cuando hay traslación pura y cuando hay rotación pura. En el primer caso,  $\vec{\omega} = 0$ , con lo cual la expresión para el momento angular se reduce a

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times \vec{v}_0 dV = \int_{V_c} \rho \vec{R} dV \times \vec{v}_0 = M \vec{R}_{CM} \times \vec{v}_0 . \quad (458)$$

Si el rígido se traslada sin rotar, todos sus puntos tienen la misma velocidad  $\vec{v}_0$ , en particular  $\vec{v}_{CM} = \vec{v}_0$ ; entonces,

$$\vec{L}_Q = \vec{R}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} \equiv \vec{L}_O , \quad (459)$$

donde el vector  $\vec{R}_{CM} \times M \vec{v}_{CM}$  se denomina momento angular orbital,  $\vec{L}_O$ , independientemente del tipo de movimiento que describa el rígido.

Ahora veamos qué pasa si el rígido tiene un movimiento de rotación pura; en ese caso, la velocidad del eje de rotación  $\vec{v}_0$  es nula y el primer sumando de la ec.(457) se anula, de manera que

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV . \quad (460)$$

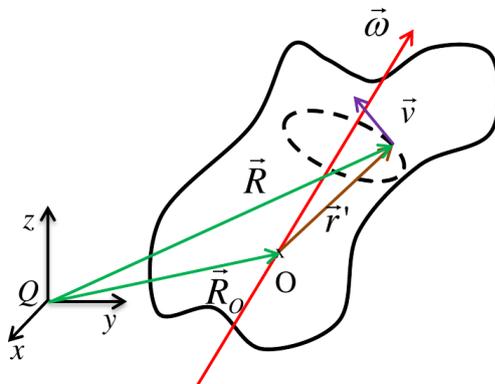


Figura 77: Momento angular en un rígido que rota.

Vamos a introducir un cambio en la notación: si el eje de rotación pasa por el centro de masa del rígido, al vector posición de un punto del rígido medido desde cualquier punto del eje lo denominaremos  $\vec{r}$ , pero si el eje no pasa por el centro de masa, el vector posición medido desde este eje será llamado  $\vec{r}'$ , como en el caso de la Fig. 77; con este cambio, la expresión anterior queda:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV . \quad (461)$$

Podemos expresar el vector posición de un punto del rígido medido desde el sistema  $Q$  como el vector posición del punto  $O$  del eje de rotación más el vector posición del punto en cuestión medido desde

ese punto  $O$ :  $\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r}'$ ; entonces podemos escribir

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho(\vec{R}_O + \vec{r}') \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (462)$$

$$= \int_{V_c} \rho \vec{R}_O \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (463)$$

$$= \vec{R}_O \times \left( \vec{\omega} \times \int_{V_c} \rho \vec{r}' dV \right) + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (464)$$

$$= \vec{R}_O \times (\vec{\omega} \times M \vec{r}'_{CM}) + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (465)$$

$$= \vec{R}_O \times M (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{CM}) + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (466)$$

$$= \vec{R}_O \times M \vec{v}_{CM} + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV . \quad (467)$$

Vemos que el centro de masa juega un papel importante en la expresión para el momento angular. Si el rígido rota alrededor de un eje que pasa por el centro de masa,  $\vec{r}' = \vec{r}$  y  $\vec{v}_{CM} = 0$ , con lo cual la expresión para el momento angular en el caso de rotación pura queda un poco más simple:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV \equiv \vec{L}_S , \quad (468)$$

donde  $\vec{L}_S$  se denomina momento angular intrínseco o de espín.

Finalmente veamos cuál es la expresión del momento angular para un cuerpo que tiene un movimiento de roto-traslación. Podemos partir de la ec.(457) pensando que en general, el eje de rotación no pasa por el centro de masa, con lo cual hay que sustituir  $\vec{r}$  por  $\vec{r}'$ , según la notación utilizada. Además vamos a usar que  $\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r}'$  (ver Fig. 77):

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho(\vec{R}_O + \vec{r}') \times \vec{v}_0 dV + \int_{V_c} \rho(\vec{R}_O + \vec{r}') \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (469)$$

$$= \int_{V_c} \rho \vec{R}_O \times \vec{v}_0 dV + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times \vec{v}_0 dV + \int_{V_c} \rho \vec{R}_O \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (470)$$

$$= \vec{R}_O \times \vec{v}_0 \int_{V_c} \rho dV + \left( \int_{V_c} \rho \vec{r}' dV \right) \times \vec{v}_0 + \vec{R}_O \times \left( \vec{\omega} \times \int_{V_c} \rho \vec{r}' dV \right) + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (471)$$

$$= \vec{R}_O \times \vec{v}_0 M + M \vec{r}'_{CM} \times \vec{v}_0 + \vec{R}_O \times (\vec{\omega} \times M \vec{r}'_{CM}) + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (472)$$

$$= M \vec{R}_O \times [\vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{CM})] + M \vec{r}'_{CM} \times \vec{v}_0 + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (473)$$

$$= \vec{R}_O \times M \vec{v}_{CM} + M \vec{r}'_{CM} \times \vec{v}_0 + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV . \quad (474)$$

Esta es la expresión para el momento angular de un cuerpo rígido, respecto a un sistema de coordenadas (y centro de momentos)  $Q$ , cuando el movimiento puede describirse como una rotación alrededor de un eje que pasa por el punto  $O$ , más la traslación de dicho eje. Podemos elegir cualquier eje de rotación que sea paralelo al eje dado; si elegimos como eje de rotación uno paralelo al anterior y que pase por el centro de masa se simplifica la expresión del momento angular, ya que:

$$\vec{r} = \vec{r}' , \quad \vec{r}_{CM} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{R}_O = \vec{R}_{CM} . \quad (475)$$

Sustituyendo en la última expresión se obtiene:

$$\vec{L}_Q = \vec{R}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} + \int_{V_c} \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV . \quad (476)$$

Comparando con las definiciones de momento angular orbital y de espín, queda claro que, en general, el momento angular de un rígido puede expresarse como la suma de los momentos angulares orbital y de espín:

$$\vec{L} = \vec{L}_O + \vec{L}_S . \quad (477)$$

El momento angular orbital es el momento angular debido al movimiento de traslación del cuerpo y depende del centro de momentos elegido. Este momento angular es idéntico al que tendría una partícula de igual masa que el rígido, ubicada en su centro de masa. El momento angular intrínseco o de espín es el momento angular debido al movimiento de rotación del cuerpo rígido alrededor de un eje que pasa por el centro de masa. Por su definición puede verse que tiene en cuenta la distribución de la masa respecto al centro de masa. El valor del momento angular intrínseco no depende del centro de momentos elegido, ya que siempre se calcula respecto de un eje que pasa por el centro de masa.

Volviendo a la ec.(318), podemos escribir:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} . \quad (478)$$

Reemplazando la expresión de  $\vec{L}_O$  dada en la ec.(459),

$$\frac{d}{dt}(\vec{R}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}) + \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} . \quad (479)$$

Vamos a estudiar la primera derivada:

$$\frac{d}{dt}(\vec{R}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}) = M \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} \times \vec{v}_{CM} + M\vec{R}_{CM} \times \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} \quad (480)$$

$$= M\vec{v}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + M\vec{R}_{CM} \times \vec{a}_{CM} \quad (481)$$

$$= \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei} , \quad (482)$$

donde en la última línea se sustituyó  $M\vec{a}_{CM}$  usando la segunda ley de Newton —ec.(223)—. Entonces, sustituyendo en ec.(479) podemos escribir,

$$\vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei} + \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} . \quad (483)$$

Podemos despejar el término que involucra la derivada temporal de  $\vec{L}_S$ :

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} - \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei} \quad (484)$$

$$= \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_{Ei} - \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei} \quad (485)$$

$$= \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_{Ei} - \sum_i \vec{R}_{CM} \times \vec{F}_{Ei} \quad (486)$$

$$= \sum_i (\vec{R}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{F}_{Ei} \quad (487)$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{Ei} . \quad (488)$$

Los vectores involucrados en las ecuaciones precedentes se indican en la Fig. 78.

Resumiendo, podemos escribir:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_{Ei} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} , \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{Ei} . \quad (489)$$

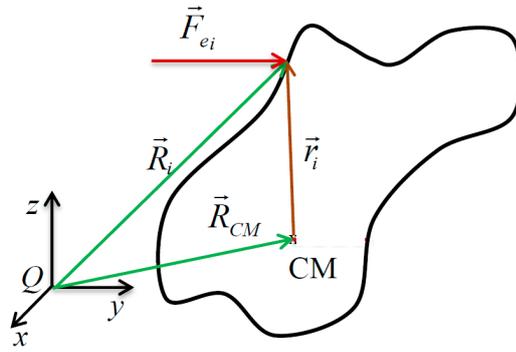


Figura 78: Cuerpo rígido sometido a fuerzas externas.

Es decir, la derivada del momento angular orbital respecto del tiempo es el momento de la resultante de todas las fuerzas exteriores como si estuvieran aplicadas sobre el centro de masa del sistema. Por otro lado, la derivada temporal del momento angular de espín es la suma de los momentos de las fuerzas exteriores respecto de un eje que pasa por el centro de masa del sistema. Así, podemos relacionar el primer término con el movimiento del centro de masa y el segundo con la rotación del cuerpo alrededor del centro de masa.

## 18.2. Equilibrio en un cuerpo rígido

Se dice que un cuerpo rígido está en equilibrio si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = 0 \quad \text{y} \quad \sum_i \vec{\tau}_{Ei} = 0, \quad (490)$$

es decir:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{cte.} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte.} \quad (491)$$

Debe notarse que en el caso de una masa puntual, solamente la primera condición es necesaria para definir el equilibrio. Veamos con un par de ejemplos qué ocurre si no se cumple alguna de las dos condiciones enunciadas.

En la Fig. 79 se muestra el caso en que una única fuerza externa se aplica en la misma dirección del vector posición del centro de masa. En este caso se cumple que  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$ , pues  $\vec{R}_{CM} \parallel \vec{F}_E$  y  $\frac{d\vec{L}_S}{dt} = 0$ , pues el vector  $\vec{r}$  del punto de aplicación de la fuerza externa medido desde el centro de masa es nulo. Sin embargo,  $\vec{P}$  no es constante pues hay una fuerza externa aplicada y entonces el cuerpo no está en equilibrio.

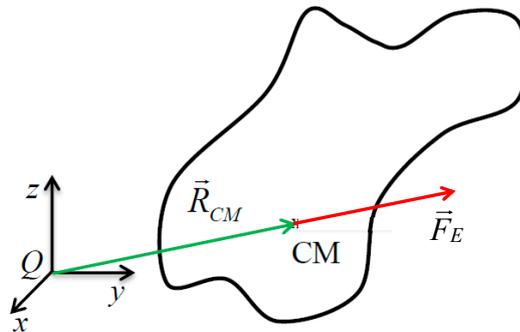


Figura 79: Rígido fuera del equilibrio con centro de masa acelerado.

La Fig. 80 presenta la situación de un par de fuerzas aplicado sobre un rígido. Como en todo par de fuerzas, la resultante es nula, de manera que  $\vec{P}$  en este caso sí es constante y  $\vec{a}_{CM} = 0$ . Esto también nos dice, en virtud de la ec.(489), que  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$ . Sin embargo,

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{Ei} = \vec{r}_1 \times (-\vec{F}_E) + \vec{r}_2 \times \vec{F}_E = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_E \neq 0. \quad (492)$$

Luego, en este caso,  $\vec{L}_S$  (y por lo tanto  $\vec{L}$ ) no es constante y el cuerpo tampoco está en equilibrio.

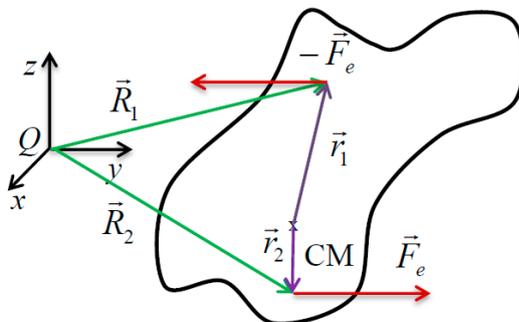


Figura 80: Rígido fuera del equilibrio con centro de masa no acelerado.

### 18.3. Dirección del momento angular y de la velocidad angular

Si consideramos una única partícula que describe un movimiento circular alrededor del punto  $O$ , es fácil ver que el vector  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , respecto del punto  $O$ , es perpendicular al plano del movimiento, y por lo tanto paralelo al vector  $\vec{\omega}$ . Sin embargo, no siempre el momento angular de un rígido es paralelo al vector velocidad angular. Consideremos, para convencernos, el sencillo caso de dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas por una barra rígida de masa despreciable, que giran alrededor de un eje fijo que pasa por el centro de masa del sistema, como indica la Fig. 81.

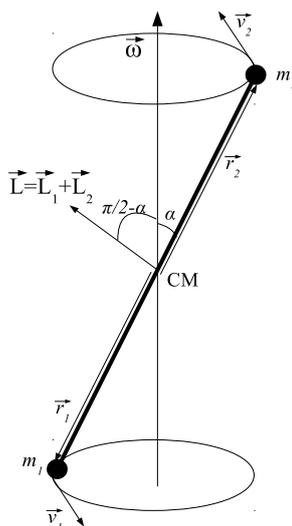


Figura 81: Dos masas puntuales unidas por una barra rígida:  $\vec{L}$  no es paralelo a  $\vec{\omega}$ .

El momento angular  $\vec{L}_1$  de la masa  $m_1$  está dado por el producto vectorial  $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1$  y por lo tanto es perpendicular al plano  $\mu$  determinado por  $\vec{r}_1$  y  $\vec{v}_1$ , mientras que  $\vec{L}_2$  es perpendicular al plano determinado por  $\vec{r}_2$  y  $\vec{v}_2$ , que justamente es el mismo plano  $\mu$ . Más aun,  $\vec{L}_2$  tiene el mismo sentido

que  $\vec{L}_1$ , de manera que el momento angular del sistema  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$  tiene también el mismo sentido. Entonces, en este caso,  $\vec{L}$  y  $\vec{\omega}$  no son vectores paralelos, sino que forman un ángulo  $\pi/2 - \alpha$ , como indica la Fig. 81. La situación  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  sólo ocurre cuando  $\alpha = \pi/2$ . Esta situación está esquematizada en la Fig. 82.

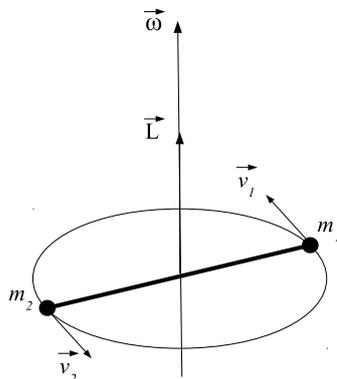


Figura 82: Dos masas puntuales unidas por una barra rígida:  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ .

Queda claro que en los casos estudiados de las masas puntuales unidas a una barra rígida, el momento angular coincide con el momento angular de espín, pues la velocidad del centro de masa es nula y por lo tanto el momento angular orbital también lo es. Entonces, hemos visto que a veces  $\vec{L}_S \parallel \vec{\omega}$  y a veces no. A continuación vamos a calcular la proyección del vector  $\vec{L}_S$  en la dirección de  $\vec{\omega}$  para un caso general.

#### 18.4. Momento de inercia

Para calcular la proyección de  $\vec{L}_S$  en la dirección de  $\vec{\omega}$ , multiplicaremos escalarmente  $\vec{L}_S$  por el versor en la dirección de  $\vec{\omega}$ :

$$L_{S\omega} = \vec{L}_S \cdot \hat{\omega} = \int_{V_c} \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV \cdot \hat{\omega} . \quad (493)$$

Para operar con el triple producto vectorial que está en el integrando vamos a usar un resultado que el lector interesado podrá demostrar fácilmente: dados tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , se cumple que

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) , \quad (494)$$

regla conocida popularmente como “*baca menos caballo*”. En el caso que nos ocupa,

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) = \omega[\hat{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \hat{\omega})] . \quad (495)$$

Sustituyendo esta expresión en ec.(493),

$$L_{S\omega} = \int_{V_c} \rho \omega[\hat{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \hat{\omega})] dV \cdot \hat{\omega} \quad (496)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega[\hat{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \hat{\omega})] \cdot \hat{\omega} dV \quad (497)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega[r^2 - (\vec{r} \cdot \hat{\omega})(\vec{r} \cdot \hat{\omega})] dV \quad (498)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega[r^2 - (\vec{r} \cdot \hat{\omega})^2] dV . \quad (499)$$

En la Fig. 83 se muestra que la diferencia  $r^2 - (\vec{r} \cdot \hat{\omega})^2$  es igual (por el teorema de Pitágoras) al cuadrado de la distancia  $s$  al eje de rotación que pasa por el centro de masa.

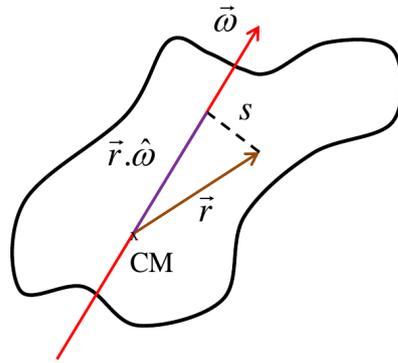


Figura 83: Proyección de  $\vec{L}_S$  en la dirección de  $\vec{\omega}$ .

Luego, podemos sustituir en la ecuación anterior, con lo que se obtiene

$$L_{S\omega} = \omega \int_{V_c} \rho s^2 dV . \quad (500)$$

La integral de la última ecuación se denomina *momento de inercia* respecto de un eje que pasa por el centro de masa  $I_G$  (también denotado como  $I^*$ ), o *momento de inercia baricéntrico*:

$$I_G = \int_{V_c} \rho s^2 dV . \quad (501)$$

Con esta última definición, vemos que la componente del momento angular de espín en la dirección del vector velocidad angular queda:

$$L_{S\omega} = I_G \omega . \quad (502)$$

Vemos que el momento de inercia baricéntrico depende de cómo está distribuida la masa alrededor de un eje que pasa por el centro de masa. En particular,  $I_G$  será mayor cuanto mayor sea la cantidad de masa que se distribuya lejos de ese eje. Entonces, si dos cuerpos tienen la misma masa, el mayor valor de  $I_G$  corresponderá al cuerpo cuya masa esté más lejos del eje. También puede verse a partir de su definición, que el momento de inercia es un concepto aditivo; es decir, el momento de inercia de dos rígidos respecto de un eje de rotación es igual a la suma de los momentos de inercia de cada rígido respecto del mismo eje de rotación.

Como hemos visto, el momento angular de espín no es necesariamente paralelo al vector velocidad angular. Sin embargo, puede demostrarse que en todo cuerpo rígido existen tres direcciones, perpendiculares entre sí, llamadas ejes principales de inercia, tales que si el cuerpo está rotando alrededor de alguno de esos ejes, entonces el momento angular intrínseco es paralelo al vector velocidad angular. Cuando un cuerpo homogéneo tiene algún eje de simetría, éste es también eje principal de inercia.

Entonces, por la ec.(502), sólo si el cuerpo está rotando alrededor de uno de estos ejes, es decir, en el caso en que  $\vec{\omega}$  es paralelo a un eje principal de inercia, podemos escribir una relación vectorial entre el momento angular de espín y la velocidad angular:

$$\vec{L}_S = I_G \vec{\omega} . \quad (503)$$

Los momentos de inercia baricéntricos ( $I_G$  o  $I^*$ ) de un rígido respecto de sus ejes principales de inercia se denominan momentos principales de inercia.

Si  $\vec{\omega}$  no es paralelo a un eje principal de inercia, es posible descomponerlo en las direcciones 1, 2 y 3 de los ejes principales de inercia, de manera que el vector velocidad angular puede escribirse como

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 , \quad (504)$$

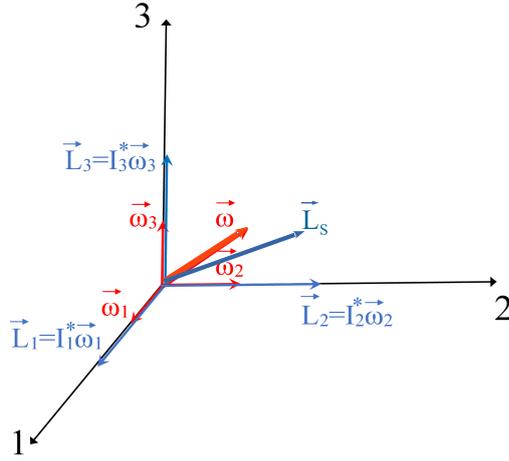


Figura 84: Velocidad angular descompuesta según los ejes principales de inercia.

como se muestra en la Fig. 84. Para cada una de estas tres rotaciones valdrá una relación vectorial del tipo (503), con lo cual el momento angular total resulta

$$\vec{L}_S = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = I_1^* \vec{\omega}_1 + I_2^* \vec{\omega}_2 + I_3^* \vec{\omega}_3, \quad (505)$$

donde  $I_1^*$ ,  $I_2^*$  y  $I_3^*$  son los tres momentos principales de inercia. Queda claro que  $\vec{\omega}$  no será paralelo a  $\vec{L}_S$  a menos que  $I_1^* = I_2^* = I_3^*$ , o que  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_i$ , donde  $i$  denota algún eje principal de inercia.

A pesar de que estos casos son muy particulares, son bastante frecuentes en la práctica, y para ellos, las ecuaciones de movimiento adquieren una forma muy sencilla. Pensemos en un rígido cuyo centro de masa no se traslada, es decir se trata de una rotación pura, y que esta se produce alrededor de un eje principal de inercia. En este caso,

$$\sum_i \vec{\tau}_{Ei} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \frac{d(I_G \vec{\omega})}{dt} = I_G \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_G \vec{\gamma}. \quad (506)$$

Si además el centro de masa se traslada, para estudiar la variación del momento angular habrá que agregar la otra ecuación referida al momento angular orbital:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei}. \quad (507)$$

Comparando las ecs.(506) y (225),

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = M \vec{a}_{CM}, \quad (508)$$

vemos que así como la masa  $M$  en (225) representa una especie de resistencia a la aceleración lineal, el momento de inercia  $I_G$  en (506) da una idea de cuán difícil es producir una aceleración angular.

#### 18.4.1. Cálculo de algunos momentos de inercia

En esta sección vamos a dar ejemplos de cálculo del momento de inercia de cuerpos con geometría sencilla. Para empezar, consideremos una masa puntual  $m$  que gira con velocidad angular  $\vec{\omega}$ . De acuerdo con la definición

$$I = \int_{V_c} \rho s^2 dV. \quad (509)$$

En este caso, en que la masa es discreta, la expresión anterior adopta la forma

$$I = \sum_i m_i s^2. \quad (510)$$

Vemos, entonces, que el momento de inercia respecto del eje de rotación se reduce a  $I = ms^2$ , donde la distancia  $s$  es simplemente la distancia de la partícula al eje (ver. Fig. 83). Nótese que no se trata del momento baricéntrico del punto, que obviamente es nulo por carecer éste de dimensiones. Ahora pasemos a un rígido de verdad.

#### Momento de inercia de un aro

Consideremos un aro de radio  $R$  cuya masa  $m$  está distribuida uniformemente con densidad  $\rho$ , como muestra la Fig. 85.

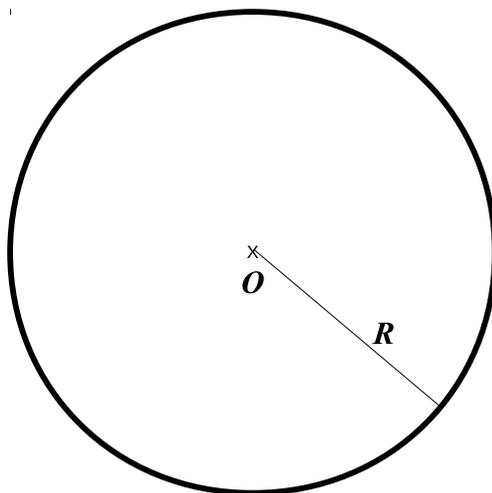


Figura 85: Momento de inercia de un aro.

El momento de inercia del aro con respecto a un eje que pasa por el punto  $O$  (centro de masa del aro) y es perpendicular al plano del aro resulta ser

$$I_{aro} = \int_{V_c} \rho s^2 dV = R^2 \int_{V_c} \rho dV = R^2 m \quad \Rightarrow \quad I_{aro} = mR^2 . \quad (511)$$

En este caso,  $\rho$  es una densidad lineal de masa y  $V_c$  representa una longitud.

#### Momento de inercia de un disco

Ahora analicemos un disco de radio  $R$  de masa  $m$  distribuida uniformemente con densidad  $\rho$ , como muestra la Fig. 86.

El momento de inercia del disco con respecto a un eje que pasa por el punto  $O$  (centro de masa del disco) y es perpendicular al plano del disco puede calcularse como

$$I_{disco} = \int_{V_c} \rho r^2 dV = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r d\theta dr = \rho 2\pi \frac{R^4}{4} = \rho \pi R^2 \frac{R^2}{2} = m \frac{R^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_{disco} = m \frac{R^2}{2} . \quad (512)$$

En este caso,  $\rho$  es una densidad superficial de masa y  $V_c$  representa el área del disco  $\pi R^2$ .

#### Momento de inercia de un cilindro

El momento de inercia de un cilindro uniforme de radio  $R$  y altura  $h$  con respecto a un eje que coincide con el eje del cilindro es análogo al caso anterior, sólo que ahora hay que agregar una integral en la coordenada axial  $z$ :

$$I_{cil} = \int_{V_c} \rho r^2 dV = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dz d\theta dr = \rho h 2\pi \frac{R^4}{4} = \rho h \pi R^2 \frac{R^2}{2} = m \frac{R^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_{cil} = m \frac{R^2}{2} . \quad (513)$$

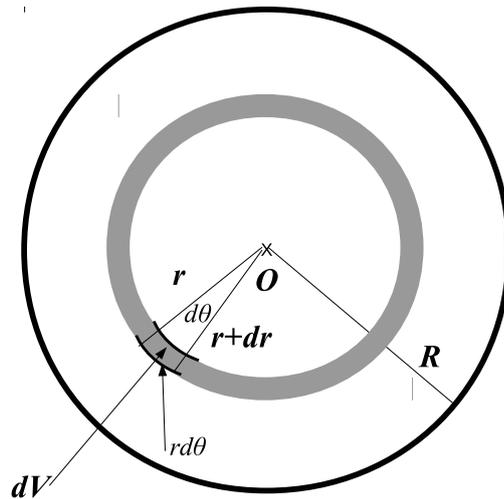


Figura 86: Momento de inercia de un disco.

### Momento de inercia de una esfera

Pensemos ahora en una esfera de radio  $R$  y masa  $m$  distribuida uniformemente con densidad  $\rho$  que rota alrededor de un eje que pasa por su centro de masa. Para calcular el momento de inercia correspondiente a ese eje vamos a utilizar la construcción de la Fig. 87.

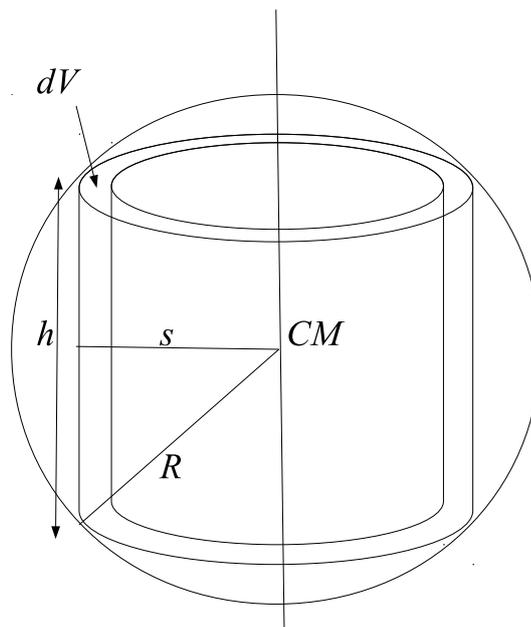


Figura 87: Momento de inercia de una esfera.

Sabemos que

$$I_{esf} = \int_{V_e} \rho s^2 dV . \quad (514)$$

En este caso vamos a pensar que el diferencial de volumen  $dV$  es el volumen del casquete cilíndrico; es decir,

$$dV = 2\pi s ds h . \quad (515)$$

Además

$$h = 2\sqrt{R^2 - s^2} , \quad (516)$$

con lo cual,

$$I_{esf} = \int_0^R \rho s^2 2\pi s 2\sqrt{R^2 - s^2} ds , \quad (517)$$

donde la variable  $s$  se integra entre 0 y el radio de la esfera. Entonces,

$$I_{esf} = 4\pi \rho \int_0^R s^3 \sqrt{R^2 - s^2} ds . \quad (518)$$

La integral puede resolverse fácilmente haciendo la sustitución  $u = R^2 - s^2$ ; queda como ejercicio mostrar que el resultado de la misma es  $\frac{8}{15}\pi\rho R^5$ . Por otro lado,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3} , \quad (519)$$

por lo tanto,

$$I_{esf} = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{8}{15}\pi \frac{3m}{4\pi R^3} R^5 \Rightarrow I_{esf} = \frac{2}{5}mR^2 . \quad (520)$$

#### 18.4.2. Teorema de Steiner

Consideremos un rígido que rota con velocidad angular  $\vec{\omega}$  como se muestra en la Fig. 88. Podemos referir la rotación a un eje paralelo a la dirección de  $\vec{\omega}$ , pero que no pasa por el centro de masa, sino por otro punto  $O$ . Un buen motivo para querer hacer esto es que la rotación alrededor del nuevo eje sea una rotación pura, como en el caso de la rueda que rueda sin deslizar. Llamemos  $d$  a la distancia entre los dos ejes. El momento de inercia respecto del eje  $P$  tendrá una expresión análoga a la que habíamos encontrado para  $I_G$ :

$$I_G = \int_{V_c} \rho s^2 dV , \quad (521)$$

sólo que habrá que reemplazar la proyección  $s$  del vector  $\vec{r}$  respecto de la dirección perpendicular al eje que pasa por el centro de masa, por la proyección del vector  $\vec{r}'$  respecto de la dirección perpendicular al eje que pasa por  $O$ , es decir,  $s'$ . Para convencerse de esto basta repetir la construcción de la definición de momento de inercia baricéntrico, pero reemplazando en la ec.(493) el vector  $\vec{r}$  por el vector  $\vec{r}'$ . Entonces,

$$I = \int_{V_c} \rho s'^2 dV , \quad (522)$$

Ahora vamos a utilizar los vectores coplanares  $\vec{s}$ ,  $\vec{s}'$  y  $\vec{d}$ , definidos como se muestra en la Fig. 88. La relación entre ellos es

$$\vec{s}' = \vec{s} + \vec{d} , \quad (523)$$

por lo tanto,

$$s'^2 = (\vec{s} + \vec{d}) \cdot (\vec{s} + \vec{d}) = s^2 + d^2 + 2\vec{s} \cdot \vec{d} . \quad (524)$$

Reemplazando en la integral:

$$I = \int_{V_c} \rho (s^2 + d^2 + 2\vec{s} \cdot \vec{d}) dV \quad (525)$$

$$= \int_{V_c} \rho s^2 dV + \int_{V_c} \rho d^2 dV + 2 \int_{V_c} \rho \vec{s} \cdot \vec{d} dV \quad (526)$$

$$= I_G + d^2 \int_{V_c} \rho dV + 2\vec{d} \cdot \int_{V_c} \vec{s} \rho dV \quad (527)$$

$$= I_G + d^2 m + 2\vec{d} \cdot \int_{V_c} \vec{s} \rho dV . \quad (528)$$

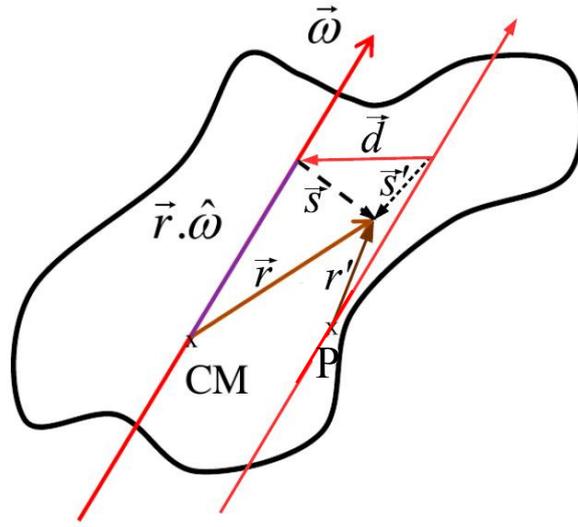


Figura 88: Momento de inercia respecto de un eje que no pasa por el centro de masa.

La última integral es  $\vec{s}_{CM}$ , es decir, la componente del vector posición del centro de masa en la dirección perpendicular al eje, pero medida desde ese eje, por lo tanto, la integral se anula. Entonces finalmente estamos en condiciones de escribir el teorema de Steiner:

$$I = I_G + md^2 . \quad (529)$$

Esta expresión nos permite calcular el momento de inercia  $I$  respecto de un eje que pasa a una distancia  $d$  del centro de masa, en términos del momento de inercia baricéntrico  $I_G$ , referido a un eje paralelo al anterior.

### 18.5. Momento angular respecto del eje de rotación pura

Vamos a aprovechar el teorema de Steiner para describir el momento angular respecto del eje de rotación pura en cualquier movimiento roto-traslatorio. Sabemos que si el eje de rotación pura pasa por el centro de masa, entonces  $\vec{L} = \vec{L}_S$ , pero ahora consideraremos el caso general en que dicho eje no pasa necesariamente por el centro de masa. La expresión para el momento angular de un rígido continuo respecto de un sistema inercial con origen en el punto  $Q$  es

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times \vec{v} dV , \quad (530)$$

donde los vectores están indicados en la Fig. 77.

Reemplazando en la integral  $\vec{v}$  por  $\vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_o$  podemos escribir:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV + \int_{V_c} \rho \vec{R} \times \vec{v}_o dV . \quad (531)$$

En el caso de una rotación pura, la velocidad del eje  $\vec{v}_o = 0$ , con lo cual se anula la segunda integral:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV . \quad (532)$$

Es posible utilizar el punto  $O$ , perteneciente al eje de rotación como origen del sistema inercial de coordenadas; en ese caso,  $O$  pasa a ser  $Q$  y  $\vec{R}$  coincide con  $\vec{r}'$ . Sustituyendo en la última ecuación:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV . \quad (533)$$

Vamos ahora a calcular la componente de  $\vec{L}_Q$  en la dirección del eje de rotación:

$$L_{Q\omega} = \vec{L}_Q \cdot \hat{\omega} = \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \cdot \hat{\omega} . \quad (534)$$

Usando “*baca menos caballo*” se obtiene:

$$\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega}(\vec{r}' \cdot \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{\omega}) = \omega[\hat{\omega}r'^2 - \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \hat{\omega})] . \quad (535)$$

Sustituyendo esta expresión en ec.(534),

$$L_{Q\omega} = \int_{V_c} \rho \omega[\hat{\omega}r'^2 - \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \hat{\omega})] dV \cdot \hat{\omega} \quad (536)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega[\hat{\omega}r'^2 - \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \hat{\omega})] \cdot \hat{\omega} dV \quad (537)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega[r'^2 - (\vec{r}' \cdot \hat{\omega})(\vec{r}' \cdot \hat{\omega})] dV \quad (538)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega[r'^2 - (\vec{r}' \cdot \hat{\omega})^2] dV . \quad (539)$$

En la Fig. 89 se muestra que la diferencia  $r'^2 - (\vec{r}' \cdot \hat{\omega})^2$  es igual (por el teorema de Pitágoras) al cuadrado de la distancia  $s'$  al eje de rotación que pasa por el punto  $Q$ .

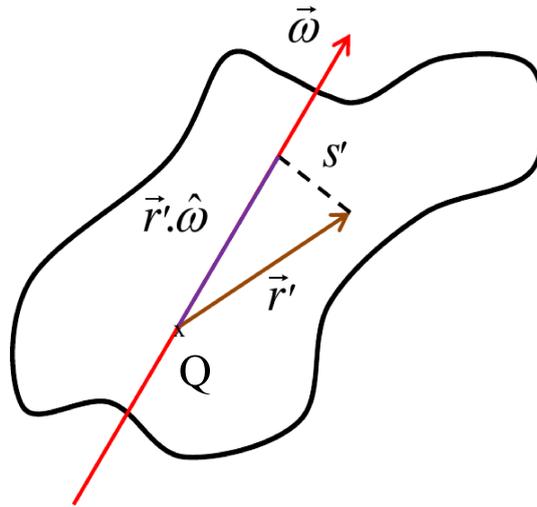


Figura 89: Momento angular respecto de un eje de rotación pura.

Luego, podemos sustituir en la ecuación anterior, con lo que se obtiene

$$L_{Q\omega} = \omega \int_{V_c} \rho s'^2 dV . \quad (540)$$

La integral de la última ecuación es el momento de inercia  $I_Q$  respecto de un eje que pasa por el punto  $Q$ , por lo tanto, vemos que la componente del momento angular  $\vec{L}_Q$  en la dirección del vector velocidad angular queda:

$$L_{Q\omega} = I_Q \omega . \quad (541)$$

Finalmente, podemos concluir que cuando el eje de rotación es paralelo a un eje principal de inercia y, por lo tanto, se cumple que  $\vec{L}_Q$  es paralelo a  $\vec{\omega}$ , entonces

$$\vec{L}_Q = I_Q \vec{\omega} . \quad (542)$$

Es importante señalar que aunque esta expresión tiene la misma forma que la del momento angular de espín dado en la ec. (503), no significa lo mismo. En el caso de la ec. (542), el momento angular incluye la contribución del momento angular de espín y la del momento angular orbital, pues el momento de inercia  $I_Q$ , que no es el baricéntrico, involucra ambas componentes.

## 18.6. Sistemas de fuerzas equivalentes

Recordemos otra vez las ecs. (223) y (318) que nos permiten estudiar la evolución del movimiento de un cuerpo rígido.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{Ei} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei}. \quad (543)$$

Si tenemos una fuerza  $\vec{F}$  aplicada sobre un punto  $P$  de un rígido, tal como muestra la Fig. 90, podremos reemplazar ésta por otra fuerza igual  $\vec{F}'$  que esté aplicada sobre la misma recta de acción.

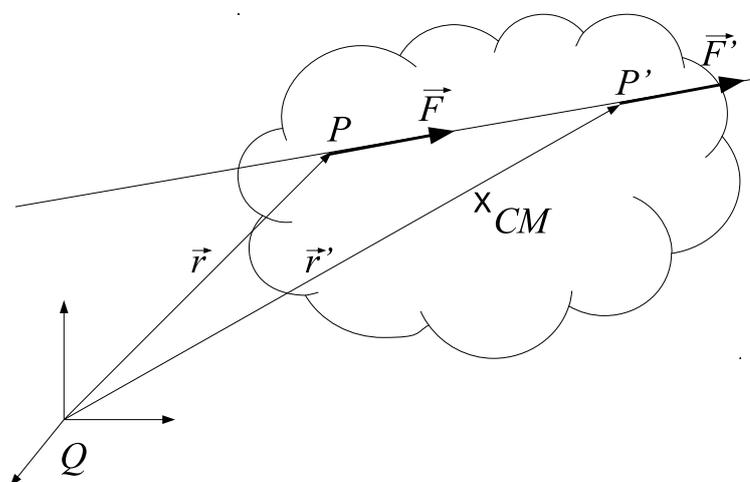


Figura 90: Desplazamiento de una fuerza sobre su recta de acción.

En efecto, es obvio que no cambia la resultante de las fuerzas externas  $\sum_i \vec{F}_{Ei}$ , que es igual a  $\vec{F}$  en ambos casos. Por otro lado, la resultante de los torques externos  $\sum_i \vec{\tau}_{Ei}$  tampoco cambia, ya que puede verse de la figura que  $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}' \times \vec{F}'$ . Entonces podemos afirmar que el desplazamiento de una fuerza sobre su recta de acción no modifica su efecto sobre el rígido.

Si en cambio, pretendemos desplazar una fuerza fuera de su recta de acción, se modifica el efecto dinámico sobre el rígido. La Fig. 91 muestra dos situaciones. En la situación A una única fuerza  $\vec{F}$  se aplica sobre el punto  $P$ , mientras que en la situación B se ha desplazado la fuerza  $\vec{F}$  al punto de aplicación  $Q$  y además se ha agregado un par de fuerzas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  de módulo  $|\vec{F}|$  paralelas a  $\vec{F}$ , es decir dos fuerzas de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario. Es fácil ver que las dos situaciones son equivalentes, ya que si en la situación B consideramos las fuerzas  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}$ , vemos que tanto su resultante, como la resultante de sus torques es nula, con lo que solamente sobrevive la fuerza  $\vec{F}_1$ , lo que es idéntico a la situación A.

Dicho de otro modo, para desplazar el punto de aplicación de una fuerza sobre un rígido sin que se modifique nada, es necesario compensar ese desplazamiento agregando un par de fuerzas del mismo módulo  $F$  y cuyo torque sea igual a  $Fd$ , donde  $d$  es la distancia del desplazamiento realizado.

Si se aplican dos fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  sobre puntos  $P_1$  y  $P_2$ , como se muestra en la Fig. 92, sabemos que la fuerza resultante está dada por  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , pero lo que no queda claro es dónde habría que aplicar esa fuerza para que la situación no cambie.

Una forma de ver esto es teniendo en cuenta que desplazar una fuerza sobre su recta de acción no

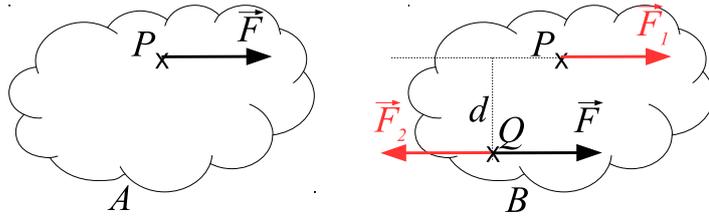


Figura 91: Desplazamiento de una fuerza fuera de su recta de acción.

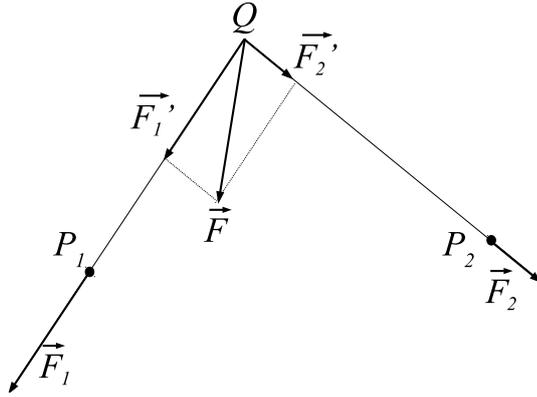


Figura 92: Fuerza equivalente.

afecta en nada la situación dinámica del rígido. En ese sentido, podemos desplazar las fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  sobre sus rectas de acción hasta ubicarlas en un origen común  $Q$ . Teniendo las dos fuerzas (ahora llamadas  $\vec{F}'_1$  y  $\vec{F}'_2$  en la Fig. 92), podemos sumarlas vectorialmente conservando el punto  $Q$  como punto de aplicación. La fuerza resultante  $\vec{F}$  aplicada sobre el punto  $Q$ , es también la fuerza *equivalente* para todo efecto, ya que es obvio que la suma del momento de las fuerzas  $\vec{F}'_1$  y  $\vec{F}'_2$  aplicadas sobre  $Q$  respecto de cualquier punto  $O$  será igual al momento de  $\vec{F}$  aplicada sobre  $Q$  respecto del mismo punto  $O$ .

## 18.7. Ejemplos de movimiento de cuerpo rígido

### 18.7.1. Movimiento bajo la acción de las fuerzas gravitatorias

Sea un cuerpo rígido de masa  $m$  constituido por elementos de volumen  $\delta V_i$  con masas  $\delta m_i$  sometido a la acción de la gravedad en las inmediaciones de la superficie de la Tierra. Cada  $\delta m_i$  se verá afectado por una fuerza  $\delta m_i \vec{g}$ , de manera que la resultante será:

$$\vec{F} = \sum_i (\delta m_i \vec{g}) = \left( \sum_i \delta m_i \right) \vec{g} = m \vec{g} = \vec{P}_G, \quad (544)$$

donde con  $\vec{P}_G$  indicamos el peso del cuerpo (el subíndice  $G$  sólo sirve para no confundirse con el momento lineal). La resultante del momento de estas fuerzas respecto de un punto  $Q$  está dada por

$$\vec{\tau} = \sum_i (\vec{R}_i \times \delta m_i \vec{g}) \rightarrow \left( \int_{V_c} \rho \vec{R} dV \right) \times \vec{g} = \vec{R}_{CM} \times m \vec{g} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_G. \quad (545)$$

Entonces, vemos que una única fuerza: el peso, aplicada sobre el centro de masa, es equivalente al sistema de fuerzas gravitatorias  $\delta m_i \vec{g}$  aplicadas sobre todo el rígido. El punto donde debe aplicarse la fuerza ficticia peso para reemplazar los efectos dinámicos de todas las fuerzas reales  $\delta m_i \vec{g}$  de

manera que ambas situaciones sean equivalentes se denomina centro de gravedad. Vemos que el centro de gravedad coincide con el centro de masa cuando las fuerzas gravitatorias se aplican cerca de la superficie terrestre. Esto no será así cuando las dimensiones del cuerpo sean grandes comparadas con la distancia al centro de la Tierra; tal es el caso de las fuerzas gravitatorias ejercidas sobre la Luna, ya que las fuerzas aplicadas sobre las distintas porciones  $\delta m_i$  no serán iguales.

En el caso de movimiento cerca de la superficie de la Tierra, por ejemplo, cuando se lanza un objeto al aire (despreciando el rozamiento), las ecuaciones de movimiento se escriben de la siguiente manera:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{P}_G \quad , \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_G \quad . \quad (546)$$

La primera ecuación nos dice que la aceleración del centro de masa será  $\vec{g}$ , constante; es decir, que el movimiento del centro de masa describirá una parábola dada por las condiciones iniciales, tal como vimos para cuerpos puntuales. La segunda ecuación nos muestra que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad , \quad (547)$$

por la segunda ec.(489). Entonces podemos concluir que

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = 0 \quad , \quad (548)$$

lo que a su vez nos dice que  $\vec{L}_S$  es una constante de movimiento. Como vimos, la expresión más general que relaciona el momento angular de espín con la velocidad angular es la ec.(505), según la cual,  $\vec{L}_S$  no es paralelo a  $\vec{\omega}$  a menos que la rotación se describa respecto de un eje principal de inercia (o que el cuerpo tenga geometría esférica). O sea que para este caso, la constante vectorial de movimiento  $\vec{L}_S$  debe cumplir que

$$\vec{L}_S = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = I_1^* \vec{\omega}_1 + I_2^* \vec{\omega}_2 + I_3^* \vec{\omega}_3 \quad , \quad (549)$$

pero los ejes principales de inercia  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  y  $\{3\}$ , solidarios al rígido van cambiando su orientación a lo largo del movimiento. Por lo tanto, pueden variar las tres componentes de  $\vec{\omega}$  de manera complicada mientras el vector  $\vec{L}_S$  sigue manteniéndose constante (movimiento de Poinsot).

Un caso simple de este tipo de movimiento —extremadamente particular— lo constituyen dos masas puntuales unidas por una varilla rígida y de masa despreciable girando alrededor de un eje principal de inercia perpendicular a la varilla (ver Fig. 93).

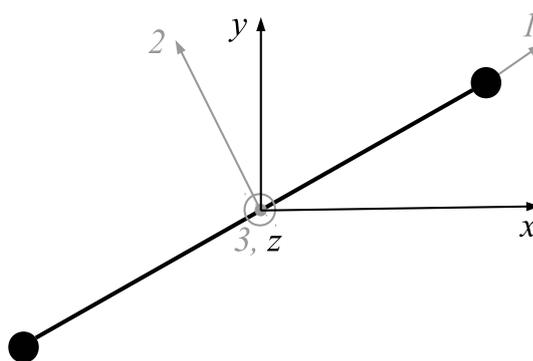


Figura 93: Movimiento de dos masas puntuales unidas por una varilla rígida de masa despreciable. Los ejes negros  $x, y, z$  constituyen un sistema de coordenadas inercial, fijo al laboratorio. Los ejes grises  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  y  $\{3\}$ , son ejes principales de inercia y se mueven solidarios al cuerpo rígido.

Tanto sea en una situación en la cual no actúa ninguna fuerza sobre el sistema, como en la situación de caída libre (con  $\vec{g} = -g\hat{j}$ , el momento angular de espín es una constante vectorial de movimiento

que tiene la expresión dada por la ec.(549). Si en un dado instante el eje de rotación coincide con el eje  $z$ , que a su vez es el eje  $\{3\}$ , para ese instante podemos escribir

$$\vec{L}_S = I_3^* \vec{\omega}_3, \quad (550)$$

pues  $\omega_2 = I_1^* = 0$ ; es decir,  $\vec{L}_S = I_3^* \vec{\omega} = I_3^* \omega \hat{k}$ . Por lo tanto, como  $\vec{L}_S$  es una constante de movimiento, debe cumplirse que  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$  también lo es. Esto nos dice que la varilla continuará girando con la misma velocidad angular, sin cambiar de orientación. En el caso en que el cuerpo esté afectado por la gravedad, el centro de masa además describirá una parábola. Es importante recalcar que la simplicidad del movimiento se restringe a casos muy particulares.

### 18.7.2. Golpe seco en una bola de billar

Lo que coloquialmente llamamos “golpe seco”, se denomina percusión, y consiste en aplicar una fuerza durante un tiempo extremadamente corto en comparación con la escala de tiempo en que se desarrolla el movimiento. Si se aplica una fuerza  $\vec{F}(t)$  sobre un punto  $P$  de un rígido durante un intervalo  $\Delta t$ , podemos calcular el momento lineal transferido  $\vec{J}$ :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \vec{J} \equiv \Delta\vec{P} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}(t) dt. \quad (551)$$

Para el momento angular transferido  $\Delta\vec{L}$  respecto de algún punto  $Q$  fijo a tierra podemos escribir:

$$\Delta\vec{L} = \int_0^{\Delta t} \vec{\tau}(t) dt = \int_0^{\Delta t} \vec{R} \times \vec{F}(t) dt = \int_0^{\Delta t} \vec{R}_{CM} \times \vec{F}(t) dt + \int_0^{\Delta t} \vec{r} \times \vec{F}(t) dt = \vec{R}_{CM} \times \vec{J} + \vec{r} \times \vec{J}, \quad (552)$$

donde el término orbital es  $\Delta\vec{L}_O = \vec{R}_{CM} \times \vec{J}$  y el término de espín corresponde a  $\Delta\vec{L}_S = \vec{r} \times \vec{J}$ .

Ahora consideremos que un momento lineal  $\vec{J}$  es transferido rápidamente a la bola de billar de radio  $R$  y masa  $m$  mostrada en la Fig. 94. En este ejemplo no consideraremos ningún tipo de rozamiento entre la bola y la mesa, con lo cual se sugiere tomar con pinzas los resultados que siguen a la hora de jugar un partido de billar.

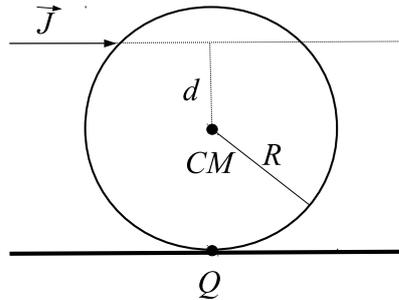


Figura 94: Percusión.

La transferencia de momento se producirá en la dirección de avance de la bola y las fuerzas peso y la reacción normal de la superficie se neutralizan mutuamente ya que tienen el mismo módulo, la misma dirección, la misma recta de acción y son de sentido contrario. Si consideramos que inicialmente la bola estaba en reposo, podemos escribir:

$$J = \Delta P = mv_{CM} \Rightarrow v_{CM} = \frac{J}{m}. \quad (553)$$

Por otro lado, para la transferencia de momento angular de espín tenemos:

$$\Delta L_S = L_S - L_S^0 = L_S = I^* \omega. \quad (554)$$

Además, como  $\vec{L}_S = \vec{r} \times \vec{J}$ , es decir,  $L_S = dJ$  y el momento baricéntrico de la esfera es  $I^* = \frac{2}{5}mR^2$

$$\omega = \frac{5Jd}{2mR^2} . \quad (555)$$

De este resultado puede verse que si se impacta la bola a la altura de su centro ( $d = 0$ ), la velocidad angular es nula. Para lograr que la bola no deslice, es decir, que esté en la condición de rodadura debe cumplirse que

$$\vec{v}_Q = 0 = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_Q \Rightarrow v_{CM} - \omega R = 0 \Rightarrow v_{CM} = \omega R . \quad (556)$$

Entonces podemos escribir

$$\frac{J}{m} = \frac{5Jd}{2mR^2} R \Rightarrow 1 = \frac{5d}{2R} . \quad (557)$$

Es decir, el punto de impacto debe estar a una distancia  $d$  del centro igual a  $\frac{2}{5}R$ . Sólo pegándole a esa altura la bola sale “sin efecto”, rodando sin deslizar. Podemos usar este ejemplo para convencernos de que puede haber rodadura sin rozamiento estático.

### 18.7.3. Péndulo físico

Sea un cuerpo rígido de masa  $m$  suspendido de un eje horizontal que pasa por el punto  $Q$ , bajo la acción de la gravedad, como muestra la Fig. 95.

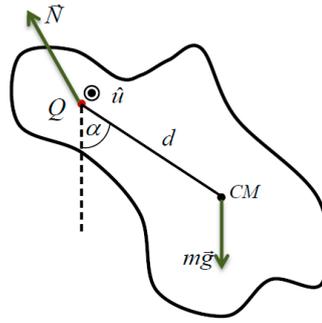


Figura 95: Péndulo físico.

El cuerpo efectuará un movimiento de rotación pura alrededor del eje que pasa por  $Q$  y la velocidad angular  $\vec{\omega}$  será paralela al versor  $\hat{u}$ , perpendicular a la hoja y hacia afuera. Para describir el problema utilizaremos un sistema de coordenadas polares con origen en  $Q$ . También  $Q$  será el centro de momentos. El eje soportará al objeto ejerciendo una fuerza  $\vec{N}$ , cuya dirección irá cambiando a lo largo del movimiento, de manera que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{Ei} = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM} . \quad (558)$$

Por otro lado,

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_i \vec{r}_{Ei} \times \vec{F}_{Ei} = \vec{r}'_{CM} \times m\vec{g} + \vec{r}'_N \times \vec{N} , \quad (559)$$

donde los vectores que tienen el supraíndice ' están medidos desde el punto de suspensión y centro de momentos  $Q$ , de manera que  $\vec{r}'_N = 0$  y la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = -dmg \operatorname{sen}(\alpha) \hat{u} . \quad (560)$$

En el caso particular en el que  $\hat{u}$  es paralelo a un eje principal de inercia, se cumple la ec.(542)

$$\vec{L}_Q = I_Q \vec{\omega} , \quad (561)$$

donde  $I_Q = I_G + md^2$ . Derivando la última ecuación respecto del tiempo, y teniendo en cuenta que  $\hat{u}$  corresponde a un eje fijo (a la pared, por ejemplo):

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = I_Q \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_Q \frac{d\omega}{dt} \hat{u} = I_Q \gamma \hat{u}, \quad (562)$$

donde  $\gamma = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$  es la aceleración angular. Relacionando las dos expresiones obtenidas para la derivada del momento angular obtenemos la ecuación de movimiento del péndulo físico:

$$I_Q \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -dmg \operatorname{sen}(\alpha), \quad (563)$$

donde  $d$  es la distancia del punto de suspensión al centro de masa.

Esta ecuación diferencial no tiene solución analítica y debe ser resuelta numéricamente. Sin embargo si nos restringimos, al igual que cuando analizamos el péndulo matemático, al caso en el cual el péndulo tiene oscilaciones de pequeña amplitud, podemos hacer la aproximación  $\operatorname{sen}(\alpha) \simeq \alpha$ , con lo cual,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{dmg}{I_Q} \alpha. \quad (564)$$

La función de movimiento resultante es

$$\alpha(t) = \alpha_{max} \operatorname{sen}(\Omega t + \phi_0), \quad (565)$$

donde  $\alpha_{max}$  representa la amplitud de la coordenada angular  $\alpha$ ,  $\phi_0$  está dado por las condiciones iniciales y

$$\Omega = \sqrt{\frac{dmg}{I_Q}} = \sqrt{\frac{dmg}{I_G + md^2}}. \quad (566)$$

Análogamente a lo que vimos para el péndulo matemático, el período  $T$  está dado por  $2\pi/\Omega$ , es decir,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + md^2}{dmg}}. \quad (567)$$

Un gráfico cualitativo de esta expresión para el período  $T$  en función de la distancia  $d$  puede verse en la Fig. 96. Se observa que existe un valor de la distancia entre el punto de suspensión y el centro de masa que minimiza el período del péndulo dado por  $d_{min} = \sqrt{I_G/m}$ .

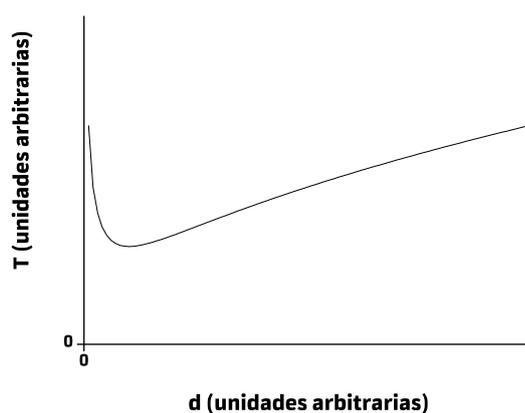


Figura 96: Péndulo físico.

Si el cuerpo es una masa puntual suspendida de un hilo de longitud  $\ell$ , entonces  $d = \ell$  y  $I_Q = m\ell^2$ , con lo cual,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2}{\ell mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad (568)$$

como habíamos obtenido para el péndulo matemático.

#### 18.7.4. Cilindro que rueda sin deslizar

Un cilindro de masa  $m$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre un plano con ángulo de inclinación  $\alpha$  como muestra la Fig. 97. Por hipótesis el cilindro rueda sin deslizar. Vamos a considerar como eje de rotación la generatriz de contacto del cilindro, es decir que se trata, por un lado, de un eje de rotación pura, ya que el eje tiene en ese instante velocidad nula y, por otro lado, es un eje instantáneo de rotación, ya que va a ir cambiando su posición a lo largo del movimiento. Poniendo, entonces centro de momentos en  $Q$ ,

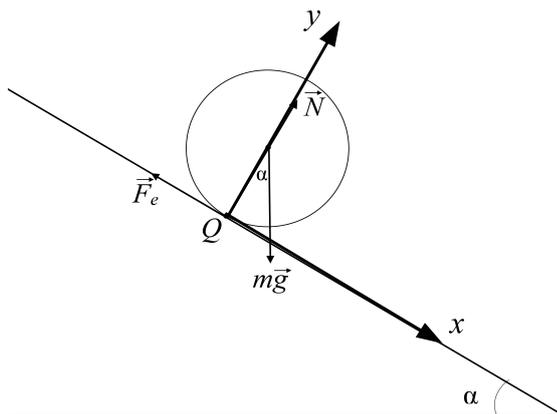


Figura 97: Cilindro que rueda por un plano inclinado.

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} = \vec{r}_{CM'} \times m\vec{g}, \quad (569)$$

ya que la reacción normal  $\vec{N}$  del plano y la fuerza de roce estático  $\vec{F}_e$  están aplicadas sobre el punto  $Q$ . Si describimos el movimiento de rotación alrededor de una dirección entrante y perpendicular a la hoja, teniendo en cuenta la ec.(542),

$$I\gamma = \frac{dL_Q}{dt} = Rmg \sen \alpha. \quad (570)$$

Es decir,

$$\gamma \left( \frac{mR^2}{2} + mR^2 \right) = Rmg \sen \alpha; \quad (571)$$

o bien,

$$\gamma = \frac{2g}{3R} \sen \alpha. \quad (572)$$

La condición de rodadura nos dice que  $v_Q = 0$ :

$$0 = \vec{v}_Q = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_Q \Rightarrow 0 = v_{CM} - \omega R \Rightarrow v_{CM} = \omega R. \quad (573)$$

Entonces, derivando la última igualdad respecto del tiempo,

$$a_{CM} = \gamma R. \quad (574)$$

Luego, la aceleración del centro de masa estará dada por

$$a_{CM} = \frac{2}{3}g \sen \alpha. \quad (575)$$

Este valor es claramente menor que  $g \sen \alpha$ , correspondiente a la aceleración de una masa puntual  $m$  que desliza sin rozamiento por el mismo plano. Para obtener la fuerza de rozamiento usamos que

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_{Ei} = \vec{F}_e + \vec{N} + m\vec{g}. \quad (576)$$

En la componente en la dirección del plano tenemos

$$ma_{CM} = -F_e + mg \sen \alpha; \quad (577)$$

por lo tanto, reemplazando el valor encontrado para  $a_{CM}$ ,

$$F_e = mg \sen \alpha - m \frac{2}{3} g \sen \alpha \Rightarrow F_e = \frac{1}{3} mg \sen \alpha. \quad (578)$$

Ahora resolveremos nuevamente el problema del cilindro rodando sin deslizar sobre un plano inclinado, pero utilizando otro sistema de referencia diferente al que coincidía con el eje instantáneo de rotación pura. Por otra parte, plantearemos la resolución sin intentar *adivinar* los sentidos de los vectores involucrados, sino que dejaremos que estos se revelen al final, después de resolver las ecuaciones planteadas. Es importante mencionar que no es el mismo método que el seguido en la primera resolución del problema del cilindro. Puede verse cómo habíamos elegido positivo el sentido entrante hacia la hoja, de manera que la aceleración angular resultase positiva. También vemos que habíamos pensado  $\vec{F}_e = -F_e \hat{i}$ , de tal forma que  $F_e$  fuese positivo. En la Fig. 98 se muestran las fuerzas aplicadas sobre el cilindro y el sistema de coordenadas fijo al plano que utilizaremos para la descripción del movimiento. El eje  $x$  coincide con el plano inclinado, el eje  $y$  es perpendicular a dicho plano y el eje  $z$  es perpendicular a la hoja y su sentido, saliente de ella.

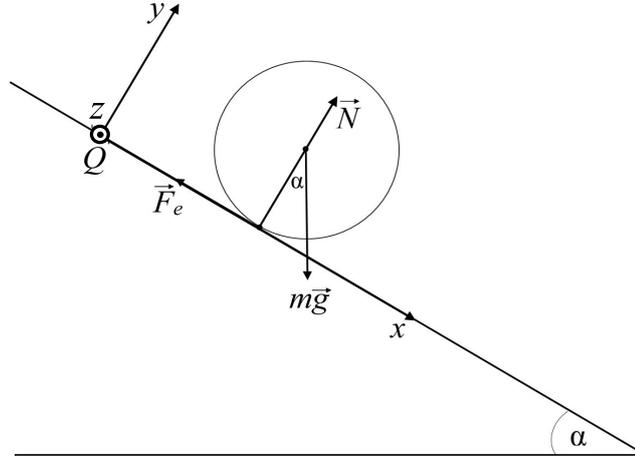


Figura 98: Cilindro que rueda por un plano inclinado con sistema de referencia fijo al plano.

Con esa convención, las expresiones para las fuerzas aplicadas sobre el cilindro resultan:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= mg \sen \alpha \hat{i} - mg \cos \alpha \hat{j}; \\ \vec{N} &= N \hat{j}; \\ \vec{F}_e &= F_e \hat{i}. \end{aligned} \quad (579)$$

Las ecuaciones de movimiento son:

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e; \quad (580)$$

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P} + \vec{R}_A \times \vec{N} + \vec{R}_A \times \vec{F}_e, \quad (581)$$

donde  $\vec{R}_{CM} = x_A \hat{i} + R \hat{j}$  y  $\vec{R}_A = x_A \hat{i}$ , siendo  $x_A$  la coordenada del punto de contacto.

Podemos escribir la derivada temporal del momento angular en términos de sus componentes orbital y de espín:

$$\frac{d\vec{L}_{OQ}}{dt} = \vec{R}_{CM} \times (\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e) ; \quad (582)$$

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{r}_A \times (\vec{N} + \vec{F}_e) . \quad (583)$$

donde  $\vec{r}_A = -R\hat{j}$  es la coordenada del punto de contacto medida desde el centro de masa.

Analizando la derivada del momento angular orbital con respecto al tiempo tenemos que

$$\frac{d\vec{L}_{OQ}}{dt} = \vec{R}_{CM} \times (\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e) ; \quad (584)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{R}_{CM} \times m\vec{V}_{CM} \right) = \vec{R}_{CM} \times (\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e) ; \quad (585)$$

$$\vec{R}_{CM} \times m\vec{a}_{CM} = \vec{R}_{CM} \times (\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e) . \quad (586)$$

La última ecuación es equivalente a  $m\vec{a}_{CM} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e$ , que es la ec.(580), y por lo tanto, no será tomada en cuenta.

Como el cilindro está rotando alrededor de un eje principal de inercia, la expresión de la derivada del momento angular de espín con respecto al tiempo queda

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \frac{d}{dt} (I_G \vec{\omega}) = \vec{r}_A \times (\vec{N} + \vec{F}_e) ; \quad (587)$$

$$I_G \vec{\gamma} = \vec{r}_A \times (\vec{N} + \vec{F}_e) . \quad (588)$$

Reemplazando en las ecs.(580) y (588) las expresiones de las fuerzas y teniendo en cuenta que  $\vec{a}_{CM} = a_{CM}\hat{i}$ ,

$$ma_{CM}\hat{i} = (mg \sen \alpha + F_e)\hat{i} + (N - mg \cos \alpha)\hat{j} ; \quad (589)$$

$$I_G \vec{\gamma} = -R\hat{j} \times (N\hat{j} + F_e\hat{i}) . \quad (590)$$

La ec.(590) indica que la aceleración angular sólo tiene componentes en la dirección del eje z ( $\vec{\gamma} = \gamma\hat{k}$ ).

Escribiendo las ecs.(589) y (590) en sus componentes cartesianas, queda

$$x : ma_{CM} = mg \sen \alpha + F_e ; \quad (591)$$

$$y : N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha ; \quad (592)$$

$$z : I_G \gamma = RF_e . \quad (593)$$

Vemos que aún tenemos tres incógnitas ( $a_{CM}$ ,  $\gamma$  y  $F_e$ ) y sólo dos ecuaciones. Para poder resolver el sistema es necesario considerar la condición de que el cilindro rueda sin deslizar. Vimos que cuando esto ocurre,  $\vec{a}_{CM} = \vec{\gamma} \times \vec{r}'_{CM}$ , donde  $\vec{r}'_{CM} = R\hat{j}$  es el vector posición del centro de masa respecto del eje de rotación. Entonces,

$$\vec{a}_{CM} = \vec{\gamma} \times \vec{r}'_{CM} ; \quad (594)$$

$$a_{CM}\hat{i} = \gamma\hat{k} \times R\hat{j} ; \quad (595)$$

$$a_{CM} = -\gamma R . \quad (596)$$

Resumiendo, el sistema de ecuaciones que tenemos que resolver está dado por las ecs. en  $x$  y  $z$  de (593) y por la ec.(596):

$$ma_{CM} = mg \sen \alpha + F_e ; \quad (597)$$

$$I_G \gamma = RF_e ; \quad (598)$$

$$a_{CM} = -\gamma R . \quad (599)$$

Teniendo en cuenta que el momento de inercia del cilindro respecto a su eje es  $I_G = \frac{1}{2} m R^2$ , la solución del sistema de ecuaciones (599) resulta:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{2}{3} g \operatorname{sen} \alpha \hat{i}; \quad (600)$$

$$\vec{\gamma} = -\frac{2g}{3R} \operatorname{sen} \alpha \hat{k}; \quad (601)$$

$$\vec{F}_e = -\frac{1}{3} mg \operatorname{sen} \alpha \hat{i}. \quad (602)$$

Como vemos, teniendo en cuenta las diferentes convenciones de signos utilizadas, los resultados coinciden con los obtenidos cuando analizamos el movimiento del cilindro desde un sistema con origen en el eje instantáneo de rotación pura.

## 18.8. Energía del cuerpo rígido

### 18.8.1. Energía cinética

Puesto que la energía cinética de una partícula está dada por  $T = \frac{1}{2} m v^2$ , podemos definir la energía cinética de un sistema de partículas como

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (603)$$

Un cuerpo rígido es un sistema de partículas. Además, si el rígido es continuo podemos escribir la ecuación anterior como una integral:

$$T = \int_{V_c} \frac{1}{2} v^2 \rho dV = \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho v^2 dV. \quad (604)$$

Considerando el caso más general, es decir, un movimiento de roto-traslación alrededor de un eje de rotación arbitrario (que pasa por el punto  $O$ , por ejemplo), la velocidad es  $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ , con lo cual,

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}')^2 dV \quad (605)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}') \cdot (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (606)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho [\vec{v}_O^2 + (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 + 2\vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}')] dV \quad (607)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho [\vec{v}_O^2 + (\omega r' \operatorname{sen} \alpha)^2 + 2\vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}')] dV, \quad (608)$$

donde  $r' \operatorname{sen} \alpha = s$  es la proyección del vector  $\vec{r}'$  sobre la dirección perpendicular a  $\hat{\omega}$ , como habíamos visto en la Fig. 83. Entonces,

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho [\vec{v}_O^2 + (\omega s)^2 + 2\vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}')] dV \quad (609)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho \vec{v}_O^2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho (\omega s)^2 dV + \int_{V_c} \rho \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (610)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{v}_O^2 \int_{V_c} \rho dV + \frac{1}{2} \omega^2 \int_{V_c} \rho s^2 dV + \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \int_{V_c} \rho \vec{r}') dV \quad (611)$$

$$= \frac{1}{2} m \vec{v}_O^2 + \frac{1}{2} \omega^2 I_O + \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times m \vec{r}_{CM}'), \quad (612)$$

donde  $I_O$  es el momento de inercia respecto del punto  $O$ .

Vamos a analizar algunos casos particulares.

- Traslación pura.

En este caso,  $\omega = 0$  y se cumple que

$$T = \frac{1}{2}mv_O^2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2, \quad (613)$$

ya que todo el rígido (en particular el centro de masa) se desplaza con  $\vec{v} = \vec{v}_O$ . Es decir, hemos obtenido la misma expresión que para la masa puntual.

- Movimiento de rotación pura alrededor de un eje que pasa por  $O$ .

En este caso,  $\vec{v}_O = 0$ , con lo cual

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 I_O. \quad (614)$$

- Movimiento de roto-traslación eligiendo un eje de rotación que pase por el centro de masa. En este caso,  $\vec{v}_O = \vec{v}_{CM}$ ,  $O = CM$  y  $\vec{r}'_{CM} = \vec{r}_{CM} = 0$ , de manera que

$$T = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2. \quad (615)$$

En esta última expresión, el primer término corresponde a la energía cinética de traslación y el segundo término, a la energía cinética de rotación.

## 18.9. Trabajo y energía potencial

Consideremos una fuerza que se aplica sobre un sistema de partículas. Vamos a definir el trabajo que ejerce esa fuerza sobre el sistema como la suma de los trabajos ejercidos por la fuerza sobre todas las partículas:

$$W = \sum_i W_i. \quad (616)$$

Por otro lado, sabemos que el trabajo  $W_i$  sobre la partícula  $i$  es igual a la variación de su energía cinética  $\Delta T_i$ , como habíamos visto en la ec.(332). Si tenemos muchas fuerzas aplicadas sobre el sistema, el trabajo total, es decir, el trabajo ejercido por todas esas fuerzas sobre el sistema será la suma de los trabajos de todas las fuerzas presentes, de manera que podemos escribir para un sistema de fuerzas actuando sobre un sistema de partículas designadas con el subíndice  $i$ :

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \Delta T_i = \Delta T, \quad (617)$$

donde  $\Delta T$  es la variación de la energía cinética de todo el sistema. Pensemos que cada partícula es desplazada en una cantidad pequeña  $\Delta \vec{s}_i$  a lo largo de su trayectoria por la acción conjunta de las fuerzas aplicadas. Por la definición de trabajo podemos escribir:

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i. \quad (618)$$

En esta última expresión  $\vec{F}_i$  es la fuerza aplicada sobre la partícula  $i$ , o más generalmente, la resultante de las fuerzas aplicadas sobre la partícula  $i$ . Dividiendo por el intervalo de tiempo  $\Delta t$  durante el cual se produce la variación de las posiciones de las partículas y usando que  $W = \Delta T$ ,

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\Delta \vec{s}_i}{\Delta t}. \quad (619)$$

Si hacemos tender  $\Delta t$  a cero nos queda,

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i (\vec{F}_{Ei} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}) \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_{Ei} \cdot \vec{v}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}_i, \quad (620)$$

donde con  $\vec{F}_{Ei}$  denotamos las fuerzas exteriores al sistema aplicadas sobre la partícula  $i$  y  $\vec{F}_{ji}$  es la fuerza que la partícula  $j$  aplica sobre la partícula  $i$ . La última suma doble de ec.(620) tendrá términos de la forma  $\vec{F}_{kl} \cdot \vec{v}_l$  y otros de la forma  $\vec{F}_{lk} \cdot \vec{v}_k$ . Considerando estos términos de a pares vemos que

$$\vec{F}_{kl} \cdot \vec{v}_l + \vec{F}_{lk} \cdot \vec{v}_k = \vec{F}_{kl} \cdot \vec{v}_l - \vec{F}_{kl} \cdot \vec{v}_k = \vec{F}_{kl} \cdot (\vec{v}_l - \vec{v}_k), \quad (621)$$

ya que, por la tercera ley de Newton,  $\vec{F}_{kl} = -\vec{F}_{lk}$ . Pero, por tratarse de un rígido, podemos escribir

$$\vec{v}_k = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_k' \quad \text{y} \quad \vec{v}_l = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_l', \quad (622)$$

con lo cual

$$\vec{v}_l - \vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_l' - \vec{\omega} \times \vec{r}_k' = \vec{\omega} \times (\vec{r}_l' - \vec{r}_k'). \quad (623)$$

Reemplazando en ec.(621):

$$\vec{F}_{kl} \cdot (\vec{v}_l - \vec{v}_k) = \vec{F}_{kl} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_l' - \vec{r}_k')], \quad (624)$$

pero el vector  $\vec{r}_l' - \vec{r}_k'$  está dirigido desde el punto  $k$  hasta el punto  $l$ , es decir, tiene la dirección de la fuerza  $\vec{F}_{kl}$  y por lo tanto  $\vec{F}_{kl} \perp [\vec{\omega} \times (\vec{r}_l' - \vec{r}_k')]$  y el producto escalar se anula. Entonces de la ec.(620) sólo sobrevive la suma que involucra las fuerzas exteriores:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \vec{F}_{Ei} \cdot \vec{v}_i. \quad (625)$$

Ahora reemplazamos en esta última ecuación la expresión para la velocidad:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \vec{F}_{Ei} \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i), \quad (626)$$

donde se ha elegido convenientemente un eje de rotación que pase por el centro de masa. La notación sigue siendo la que usamos habitualmente:  $\vec{R}_i$  es la posición del punto  $i$  vista desde un sistema inercial y  $\vec{r}_i$  es la posición del mismo punto vista desde el centro de masa.

Antes de seguir con el desarrollo, proponemos el siguiente

### Ejercicio

Dados tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , probar que

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}. \quad (627)$$

Usando este resultado podemos trabajar sobre la ec.(626):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{F}_{Ei} + \sum_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{F}_{Ei} \quad (628)$$

$$= \sum_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{F}_{Ei} + \sum_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_{Ei}) \quad (629)$$

$$= \sum_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{F}_{Ei} + \sum_i \vec{\omega} \cdot [(\vec{R}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{F}_{Ei}] \quad (630)$$

$$= \vec{v}_{CM} \cdot \sum_i \vec{F}_{Ei} + \vec{\omega} \cdot \sum_i (\vec{R}_i \times \vec{F}_{Ei} - \vec{R}_{CM} \times \vec{F}_{Ei}) \quad (631)$$

$$= \vec{v}_{CM} \cdot \sum_i \vec{F}_{Ei} + \vec{\omega} \cdot \left( \sum_i \vec{r}_{Ei} \times \vec{F}_{Ei} - \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei} \right) \quad (632)$$

$$= \vec{v}_{CM} \cdot \sum_i \vec{F}_{Ei} + \vec{\omega} \cdot \left( \frac{d\vec{L}}{dt} - \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right) \quad (633)$$

$$= \vec{v}_{CM} \cdot \sum_i \vec{F}_{Ei} + \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{L}_S}{dt} \quad (634)$$

$$= \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} \cdot \sum_i \vec{F}_{Ei} + \frac{d\theta}{dt} \hat{\omega} \cdot \frac{d\vec{L}_S}{dt}, \quad (635)$$

donde se ha introducido la coordenada angular  $\theta$ . En base a la última ecuación podemos escribir

$$dT = dW = \left( \sum_i \vec{F}_{Ei} \right) \cdot d\vec{R}_{CM} + \frac{d\vec{L}_S}{dt} \cdot \hat{\omega} d\theta . \quad (636)$$

Si existe una función potencial dependiente de las coordenadas  $V$  tal que su variación es el trabajo realizado sobre el rígido cambiado de signo (como ocurría en el caso de una masa puntual), puede escribirse

$$\Delta V = -\Delta W = - \int \left( \sum_i \vec{F}_{Ei} \right) \cdot d\vec{R}_{CM} - \int \frac{d\vec{L}_S}{dt} \cdot \hat{\omega} d\theta . \quad (637)$$

Cuando existe una función potencial definida en ec.(637), asociada a las fuerzas aplicadas, la energía mecánica del rígido es la suma de la energía cinética más la energía potencial  $V$ :

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 + V . \quad (638)$$

En este caso, la variación de la energía mecánica estará dada por:

$$\Delta E = \Delta T + \Delta V = \Delta W - \Delta W = 0 . \quad (639)$$

#### Ejemplo: caída libre

Calculemos la variación de la energía potencial de una piedra de masa  $m$  cuando es arrojada desde una posición inicial  $\vec{R}_{CM}^i$  en el suelo hasta una posición final  $\vec{R}_{CM}^f$  situada a una altura  $h$ . Cuando estudiamos este caso, en la sección 18.7.1, vimos que  $\sum_i \vec{F}_{Ei} = \vec{P}_G$  y que  $\frac{d\vec{L}_S}{dt} = 0$ . Entonces, reemplazando en la ec.(637) podemos escribir

$$\Delta V = - \int_{\vec{R}_{CM}^i}^{\vec{R}_{CM}^f} \vec{P}_G \cdot d\vec{R}_{CM} = - \int_{\vec{R}_{CM}^i}^{\vec{R}_{CM}^f} m(-g)\hat{j} \cdot d\vec{R}_{CM} , \quad (640)$$

donde se ha elegido el eje  $y$  apuntando hacia arriba. Vemos que a medida que varía la posición del centro de masa el producto escalar  $\hat{j} \cdot d\vec{R}_{CM}$  es igual a  $dy_{CM}$ , con lo cual se obtiene

$$\Delta V = \int_0^h mg dy_{CM} = mgh . \quad (641)$$

Si fijamos el origen de la energía potencial tenemos simplemente que  $V = mgh$ , igual que en el caso de una masa puntual ubicada en el centro de masa del rígido.

#### Ejemplo: cilindro que rueda por un plano inclinado

Consideremos nuevamente el cilindro de la Fig. 97. En este caso,

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = \vec{F}_e + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM} = \frac{2}{3} mg \text{ sen } \alpha \hat{i} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{L}_S}{dt} = I_G \vec{\gamma} = \frac{1}{2} m R^2 \frac{2g}{3R} \text{ sen } \alpha \hat{k} , \quad (642)$$

donde  $\hat{i}$  y  $\hat{k}$  son las direcciones paralela al plano hacia abajo y entrante a la hoja, respectivamente. Reemplazando estas expresiones en la ec.(637),

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int \frac{2}{3} mg \text{ sen } \alpha \hat{i} \cdot d\vec{R}_{CM} - \int m \frac{gR}{3} \text{ sen } \alpha \hat{k} \cdot \hat{\omega} d\theta \\ &= - \int \frac{2}{3} mg \text{ sen } \alpha dx_{CM} - \int \frac{mRg}{3} \text{ sen } \alpha d\theta . \end{aligned} \quad (643)$$

Pensemos que queremos calcular la variación de energía potencial desde que el centro de masa del cilindro parte de una posición  $x_{CM} = 0$  hasta una posición  $x_{CM} = d$ . Esa variación de la coordenada  $x$  se corresponderá con un giro entre  $\theta = 0$  y  $\theta = d/R$ . Entonces, en este caso,

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_0^d \frac{2}{3} mg \operatorname{sen} \alpha \, dx_{CM} - \int_0^{d/R} \frac{mRg}{3} \operatorname{sen} \alpha \, d\theta \\ &= -\frac{2}{3} mg \operatorname{sen} \alpha \, d - \frac{1}{3} mgR \operatorname{sen} \alpha \frac{d}{R} \\ &= -mgd \operatorname{sen} \alpha \\ &= -mgh, \end{aligned} \tag{644}$$

donde  $h$  es la coordenada vertical medida hacia abajo. Es decir, la variación de energía potencial es la misma que experimentaría una masa puntual, ubicada en la posición del centro de masa del cilindro, deslizando sobre el plano.

## 18.10. Giróscopo y trompo

### 18.10.1. Movimiento del giróscopo

Un giróscopo es un dispositivo como el mostrado en la Fig. 99, en el cual un volante de momento de inercia  $I^*$ , respecto de su eje de simetría, puede girar alrededor de dicho eje.

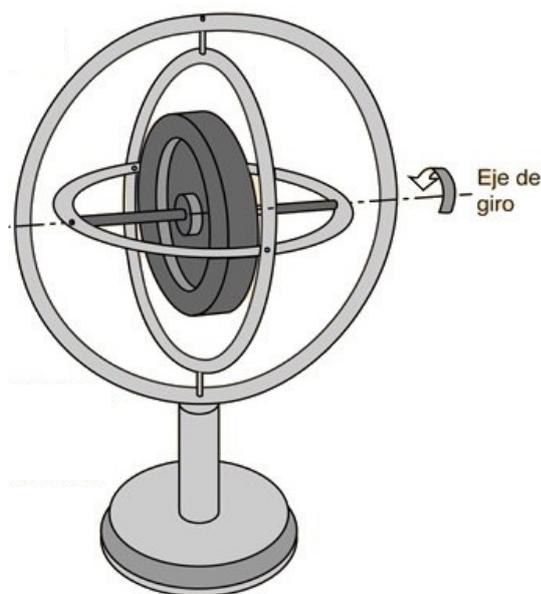


Figura 99: Giróscopo.

Los armazones circulares tienen masas pequeñas comparadas con la del volante. Los tres ejes, correspondientes a los tres armazones, son libres de cambiar su orientación, pero su intersección siempre se encuentra en el centro de masa del volante. Los armazones están montados en un dispositivo que tiene rozamiento despreciable, denominado suspensión cardánica. Con esta configuración sólo podrían ejercerse torques externos sobre el eje del volante, que pasa por su centro de masa, ya que el único contacto con el “exterior” es a través de este eje; sin embargo, esto no es posible debido al rozamiento ínfimo de los ejes. Entonces, como

$$0 = \sum \vec{r}_{Ei} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \tag{645}$$

podemos concluir que  $\vec{L} = \text{cte}$ . Si suponemos que el centro de masa del volante no se desplaza (producir tal desplazamiento caminando con el giróscopo en la mano, por ejemplo, solo aportaría confusión al

problema), y que originalmente el volante gira alrededor de su eje, que es un eje principal de inercia,

$$\vec{L} = \vec{L}_S = I_G \vec{\omega}, \quad (646)$$

pues el reposo del centro de masa asegura que el momento angular orbital es nulo. Vale decir que, por ser  $\vec{L}=\text{cte.}$ , también podemos afirmar que  $\vec{\omega}=\text{cte.}$  y el eje del volante apuntará siempre en la misma dirección a pesar de los intentos que se hagan de torcerlo. Sin embargo, si “hacemos trampa” al giróscopo y ejercemos directamente una fuerza sobre el eje del volante, habremos ejercido un torque externo sobre el volante y  $\vec{L}$  no será más constante. Es interesante estudiar cómo reacciona este dispositivo en esa situación. Para analizarlo consideremos que el eje del volante está inicialmente horizontal, como indica la Fig. 100, y girando con alguna velocidad angular  $\vec{\omega}$ , de manera que el valor inicial de  $\vec{L}$  es distinto de cero.

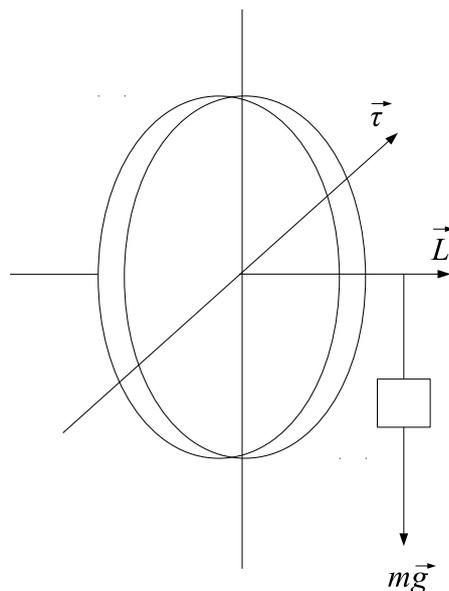


Figura 100: Giróscopo con una masa suspendida.

Si colgamos una masa  $m$ , como muestra la figura, aparecerá un torque  $\vec{\tau}$  en la dirección horizontal perpendicular al eje del volante. Como  $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$ , la variación de  $\vec{L}$  resultante será paralela a  $\vec{\tau}$  como muestra la Fig. 101. Entonces, al variar la dirección de  $\vec{L}$ , variará la dirección de  $\vec{\omega}$ , es decir, la dirección del eje del volante. Para tiempos pequeños podemos pensar que el ángulo girado  $d\phi = dL/L$ , con lo cual:

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{dL}{L dt} = \frac{\tau}{L} = \frac{\tau}{I_G \omega}, \quad (647)$$

donde  $\omega_p$  se denomina velocidad angular de precesión. El eje del volante, entonces, en vez de inclinarse hacia abajo como podría parecer, comienza a girar con velocidad angular  $\omega_p$  alrededor de la dirección vertical.

En realidad lo que ocurre es que la velocidad angular resultante es

$$\vec{\omega}_R = \vec{\omega} + \vec{\omega}_p. \quad (648)$$

Este vector  $\vec{\omega}_R$  no tendrá entonces la dirección de un eje principal de inercia, no podemos usar más que la velocidad angular es paralela al momento angular y la descripción del problema se complica, a menos que  $\omega_p \ll \omega$ . Cuando esta última condición no se cumple, si bien el vector  $\vec{L}$  precesa alrededor del eje vertical, los vectores  $\vec{\omega}_R$  y  $\vec{\omega}$  (y con este último, el eje del volante) realizarán un movimiento complicado denominado *nutación*. En particular, si el torque exterior aplicado es grande o la velocidad angular inicial  $\omega$  es pequeña, ocurre lo que esperaríamos: el eje del volante se inclina hacia abajo.

Sin embargo, es posible lograr que  $\omega_p \ll \omega$  mediante el uso de un motor eléctrico, por ejemplo. En este caso, el eje del volante se mantendrá estable, particularmente si se usa el giróscopo como se

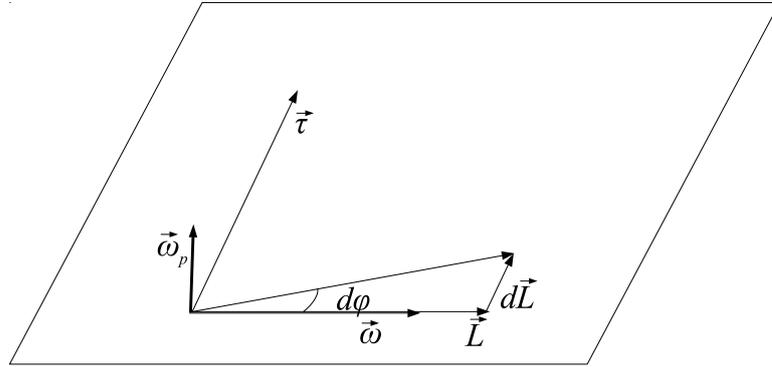


Figura 101: Precesión del giroscopio.

debe, es decir, sin tocar el eje del volante: si consideramos una velocidad de rotación  $\omega$  grande y un rozamiento despreciable en los ejes del giroscopio, el eje del volante se mantendrá siempre paralelo a sí mismo. Uno de los usos de este dispositivos es para orientación, particularmente en la navegación: en este caso, el giroscopio se denomina *girocompás*. Un girocompás es un giroscopio, cuyo eje (el eje del volante) se coloca paralelo al eje de la Tierra y es mantenido rotando a gran velocidad mediante un motor eléctrico. Por más que el explorador, el avión o el barco cambien su rumbo, el eje del girocompás siempre se mantendrá paralelo a sí mismo, de manera que su proyección horizontal siempre apuntará en la dirección sur-norte, lo que convierte al girocompás en una brújula no magnética. La proyección horizontal del eje del girocompás es un punto cuando su ubicación coincide con alguno de los polos terrestres; esto nos dice que el dispositivo no funciona en las zonas cercanas a los polos.

### 18.10.2. Movimiento del trompo

Un trompo es un cuerpo con geometría acimutal que puede rotar alrededor de su eje apoyado sobre uno de sus extremos bajo la acción de la fuerza gravitatoria. Consideremos un trompo de masa  $m$  y momento de inercia  $I$  respecto de su eje de simetría como el de la Fig. 102. El trompo gira alrededor de dicho eje apoyado sobre el punto  $P$ , formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal.

Si efectuamos un análisis similar al realizado con el giroscopio, vemos que

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{dL}{L \cos \alpha dt} = \frac{\tau}{L \cos \alpha} = \frac{mgh \sin(90^\circ - \alpha)}{I\omega \cos \alpha}, \quad (649)$$

donde  $90^\circ - \alpha$  es el ángulo que forman los vectores peso y posición del centro de masa (medido desde el punto  $P$ ). Por lo tanto tenemos:

$$\omega_p = \frac{mgh}{I\omega}. \quad (650)$$

Al igual que en el caso del giroscopio, esto vale siempre que  $\omega_p \ll \omega$ , es decir, cuando  $\omega$  coincide con un eje principal de inercia: el eje de simetría del trompo. Cuando esto no ocurre, el movimiento de precesión se combina con el de nutación, mucho más difícil de describir. La ec.(650) nos dice que en la aproximación de precesión pura, la velocidad angular de precesión no depende de la inclinación del trompo.

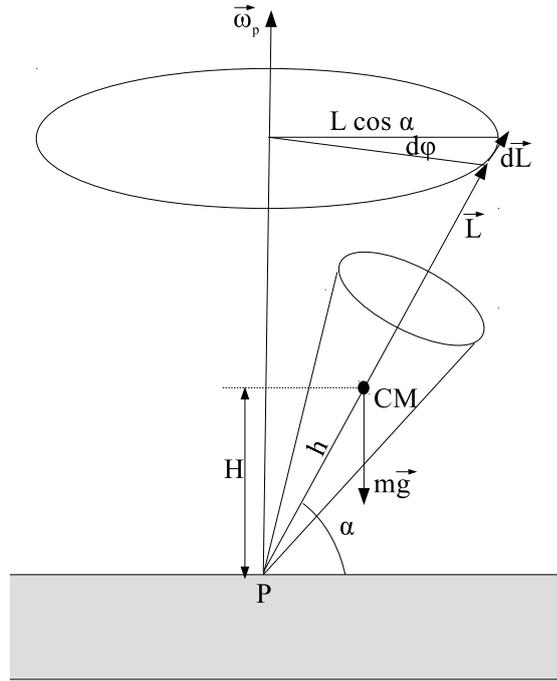


Figura 102: Movimiento del trompo.

## APÉNDICES

### A. Resolución alternativa del movimiento oscilatorio armónico

Existe una forma alternativa de obtener la función de movimiento correspondiente a la ecuación de movimiento de un cuerpo enganchado a un resorte, diferente a como hicimos al resolver la ecuación diferencial (134). Para ello utilizaremos el concepto de energía. Habíamos visto que la expresión de la energía para un cuerpo sobre el cuál está aplicada una fuerza elástica es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 . \quad (\text{A-1})$$

Despejando la velocidad obtenemos

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2} . \quad (\text{A-2})$$

Por lo tanto

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}} = dt . \quad (\text{A-3})$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \sqrt{\frac{k}{2E}}x$  e integrando, la ecuación anterior queda

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int dt . \quad (\text{A-4})$$

Resolviendo esta integral y escribiendo nuevamente en términos de la variable  $x$  tenemos

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsen \left( \sqrt{\frac{k}{2E}}x \right) = t + C . \quad (\text{A-5})$$

Despejando la expresión de  $x$  en función del tiempo,

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_0 \right), \quad \text{donde } \phi_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} C. \quad (\text{A-6})$$

En el punto de máxima elongación ( $x = x_m$ ) la energía mecánica es totalmente elástica

$$\frac{1}{2} k x_m^2 = E. \quad (\text{A-7})$$

Despejando  $x_m$  tenemos

$$x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}}. \quad (\text{A-8})$$

Reemplazando esta expresión en la ec. (A-6) y denominando  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  podemos escribir

$$x(t) = x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0). \quad (\text{A-9})$$

## B. Movimiento oscilatorio amortiguado

Hemos visto que si tenemos un cuerpo unido a un resorte de constante elástica  $k$ , y lo liberamos desde una posición diferente a la de equilibrio, oscilará alrededor de esta posición con un movimiento oscilatorio denominado armónico simple. La función de movimiento dada en la ec.(147) indica que el cuerpo nunca modificará su movimiento oscilatorio. Sin embargo, nuestra experiencia nos indica que en la práctica el cuerpo irá reduciendo la amplitud de las oscilaciones hasta detenerse. Esto se debe a que sobre el cuerpo, además de la fuerza elástica, existe la fuerza viscosa que el medio le ejerce, aunque despreciemos el posible rozamiento entre el resorte y la superficie sobre la que está apoyado. La ecuación de movimiento del cuerpo unido a un resorte que se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento o colgado verticalmente, será:

$$ma = -k(x - x_e) - D\eta v, \quad (\text{B-1})$$

donde hemos utilizado la ec.(101) para la fuerza viscosa, debido a que el cuerpo no alcanza grandes velocidades. La ecuación de movimiento, expresada en términos de la coordenada  $x$ , es:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_e) - D\eta \frac{dx}{dt}. \quad (\text{B-2})$$

Si llamamos  $u$  a la coordenada medida desde la posición de equilibrio ( $u = x - x_e$ ) la ec. (B-2) queda

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -ku - D\eta \frac{du}{dt}; \quad (\text{B-3})$$

o bien,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad (\text{B-4})$$

donde

$$2\alpha = \frac{D\eta}{m} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad (\text{B-5})$$

aquí,  $\omega_0$  es la frecuencia angular a la que oscilaría el cuerpo en el vacío y  $\alpha$  está relacionado con el rozamiento del cuerpo con el fluido. Para poder determinar la función de movimiento del cuerpo debemos encontrar una función  $u(t)$  que satisfaga la ec. (B-4). Proponemos como solución la función

$$u(t) = Ae^{\gamma t}, \quad \text{con } A = \text{cte}. \quad (\text{B-6})$$

Reemplazando esta función en la ec.(B-4) resulta

$$A\gamma^2 e^{\gamma t} + 2\alpha A\gamma e^{\gamma t} + \omega_0^2 A e^{\gamma t} = 0; \quad (\text{B-7})$$

$$Ae^{\gamma t} (\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2) = 0 . \quad (\text{B-8})$$

Entonces, para que la función  $u(t)$  dada en la ec.(B-6) sea solución de la ec.(B-4) se debe satisfacer que  $\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$ . Las soluciones a esta ecuación son:

$$\gamma_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{y} \quad \gamma_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} . \quad (\text{B-9})$$

Como cualquiera de estas dos posibilidades para  $\gamma$  permite encontrar una solución de la ec.(B-4), la expresión más general es una combinación lineal de ambas soluciones:

$$u(t) = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} , \quad (\text{B-10})$$

donde las constantes  $A_1$  y  $A_2$  se determinan a partir de las condiciones iniciales del movimiento. Analicemos algunos casos particulares.

$$\text{a) } \alpha^2 - \omega_0^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{D\eta}{2m}} > \frac{k}{m} .$$

En este caso, la fuerza viscosa predomina sobre la fuerza elástica en el movimiento del cuerpo; las soluciones dadas en la ec.(B-9) son reales y la función de movimiento del cuerpo es:

$$u(t) = e^{-\alpha t} \left( A_1 e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} \right) \quad (\text{B-11})$$

En esta situación, denominada *movimiento sobreamortiguado*, el cuerpo no oscila, sino que tiende a desplazarse hacia la posición de equilibrio. En la figura B-1 se muestra la función de movimiento para el caso particular en que la masa del cuerpo es 1 kg, la constante del resorte  $k = 100$  N/m y  $\alpha = 1,2\omega_0$ . La curva *a* corresponde a un cuerpo que para  $t = 0$ , está desplazado 0,1 m de la posición de equilibrio y es liberado a partir del reposo, mientras que la curva *b* corresponde a un cuerpo que para  $t = 0$  se encuentra en la posición de equilibrio con una velocidad de 2 m/s.

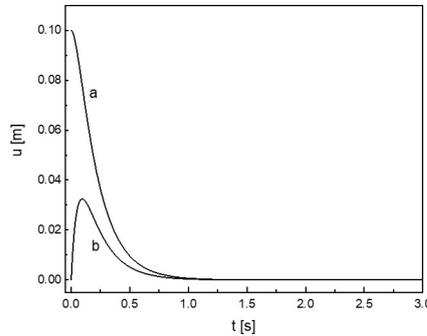


Figura B-1: Función de movimiento de un cuerpo cuyo movimiento es sobreamortiguado. a) Liberándolo desde fuera de la posición de equilibrio. b) Partiendo de la posición de equilibrio con velocidad mayor que cero.

$$\text{b) } \alpha^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{D\eta}{2m}} = \frac{k}{m} .$$

En este caso, la fuerza viscosa y la fuerza elástica son del mismo orden. Ahora la ecuación de movimiento (B-4) queda

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \alpha^2 u = 0 . \quad (\text{B-12})$$

Como la ec.(B-8) tiene una única solución real, la función de movimiento será

$$u(t) = A_1 e^{-\alpha t} . \quad (\text{B-13})$$

Sin embargo, es fácil comprobar que la función

$$u(t) = A_2 t e^{-\alpha t} \quad (\text{B-14})$$

también es solución de la ec.(B-12). Entonces la solución más general es la suma de ambas soluciones

$$u(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} . \quad (\text{B-15})$$

La función de movimiento muestra que en esta situación, denominada *amortiguamiento crítico*, el cuerpo no oscila y simplemente se desplaza hasta llegar a la posición de equilibrio de manera similar a lo que ocurre en el caso sobreamortiguado. En la figura B-2 se muestran las funciones de movimiento para el caso de amortiguamiento crítico para las mismas condiciones del ejemplo mostrado en el caso sobreamortiguado. En la figura B-3 se muestra comparativamente las funciones de movimiento de los

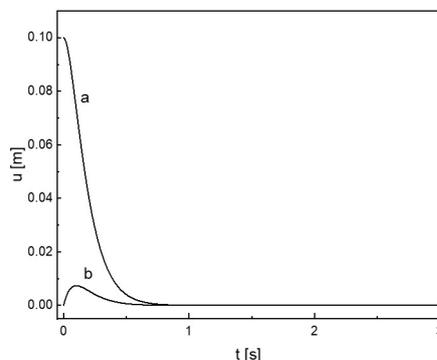


Figura B-2: Función de movimiento de un cuerpo cuyo movimiento corresponde al caso de amortiguamiento crítico. a) Liberándolo desde fuera de la posición de equilibrio. b) Partiendo de la posición de equilibrio.

casos sobreamortiguado y crítico. Cuanto más próximo es el valor  $\alpha$  a  $\omega_0$  más rápidamente retorna el cuerpo a la posición de equilibrio.

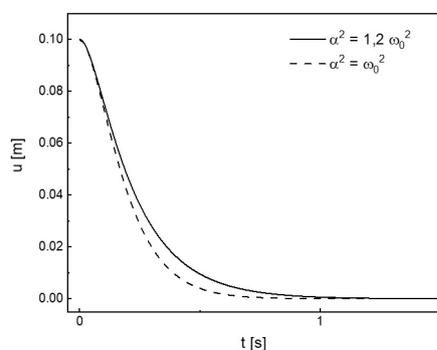


Figura B-3: Comparación entre las funciones de movimiento de los casos sobreamortiguado y crítico.

$$\text{c) } \alpha^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{D\eta}{2m}} < \frac{k}{m} .$$

En este caso las dos soluciones a la ec.(B-8) son números complejos conjugados:

$$\gamma_1 = -\alpha - i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad , \quad \gamma_2 = -\alpha + i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} , \quad (\text{B-16})$$

y la función de movimiento, de acuerdo a la ec.(B-10), es

$$u(t) = e^{-\alpha t} \left( A_1 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t} + A_2 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t} \right) . \quad (\text{B-17})$$

Debido a que la coordenada del cuerpo debe ser un número real, en este caso las constantes  $A_1$  y  $A_2$  son números complejos. Denominando  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  podemos escribir la ec.(B-17) como

$$u(t) = e^{-\alpha t} [B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \text{sen}(\omega_1 t)] , \quad (\text{B-18})$$

donde

$$B_1 = A_1 + A_2 \quad \text{y} \quad B_2 = i(A_2 - A_1) . \quad (\text{B-19})$$

Como la ec.(B-18) describe la coordenada del móvil, las constantes  $B_1$  y  $B_2$  tienen que ser necesariamente números reales. Sabemos que podemos escribir

$$B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \sin(\omega_1 t) = x_m \sin(\omega_1 t + \phi_0) . \quad (\text{B-20})$$

Entonces, la función de movimiento para este caso es

$$u(t) = x_m e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \phi_0) . \quad (\text{B-21})$$

Ahora el cuerpo oscilará con una frecuencia angular  $\omega_1$  y con una amplitud  $x_m e^{-\alpha t}$  que va disminuyendo con el tiempo. Este caso se denomina movimiento oscilatorio *subamortiguado*. En la figura B-4 se muestra un gráfico de la función de movimiento, suponiendo  $\alpha = 0,5 \omega_0$ ,  $v(0) = 0$  y  $x(0) = 0,1$  m. Vemos que el fluido modifica la frecuencia angular de oscilación del cuerpo respecto a la que tendría

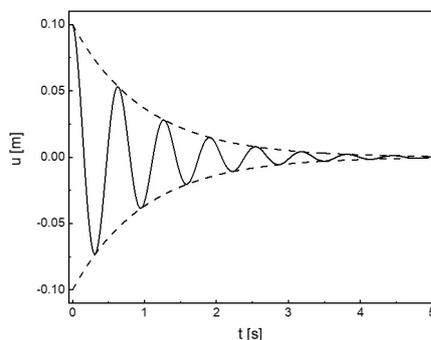


Figura B-4: Función de movimiento de un cuerpo con movimiento oscilatorio subamortiguado.

en el vacío. En este caso el período  $T_1$  será

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 . \quad (\text{B-22})$$

Una aplicación práctica de estos conceptos es en la suspensión de un automóvil, que está constituida por un resorte que tiene en su interior un amortiguador. El amortiguador, como su nombre indica, es el encargado de amortiguar las oscilaciones del resorte. En general se intenta que el automóvil vuelva lo antes posible a su posición original y por lo tanto se trata de que trabaje en el régimen de amortiguación crítica.

### C. Período del péndulo en función de la amplitud (grandes oscilaciones)

En la sec.(9) estudiamos el movimiento de un péndulo ideal y resolvimos la ecuación de movimiento para el caso de pequeñas oscilaciones. Ahora nos abocaremos a la situación más general, en la que no es válido hacer la aproximación  $\sin(\theta) \simeq \theta$ .

Como puede verse en la ec.(195), la energía mecánica de la masa del péndulo está dada por

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - m g l \cos(\theta) . \quad (\text{C-1})$$

Como  $v = l d\theta/dt$  podemos escribir

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - m g l \cos(\theta) = -m g l \cos(\theta_0) , \quad (\text{C-2})$$

donde  $\theta_0$  es la máxima amplitud angular del péndulo. Entonces podemos despejar la velocidad angular

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} \quad (\text{C-3})$$

y escribir

$$dt = \pm \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}. \quad (\text{C-4})$$

Integrando a ambos lados de la igualdad podríamos encontrar la relación entre el tiempo y la posición angular del péndulo. Sin embargo esta integral solo se puede resolver de manera numérica.

Utilizaremos la ec.(C-4) para determinar el período del péndulo en función de la amplitud angular, sin tener que hacer la aproximación de pequeñas amplitudes. Integrando la ec.(C-4) en el intervalo correspondiente a un período, que corresponde a 4 veces el tiempo que demora el péndulo en recorrer desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \theta_0$ ,

$$\int_0^T dt = 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}. \quad (\text{C-5})$$

Como  $\cos(\theta) = 1 - 2\text{sen}^2(\theta/2)$  la ec. (C-5) queda

$$T = \frac{2}{\text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left[\frac{\text{sen}(\theta/2)}{\text{sen}(\theta_0/2)}\right]^2}}. \quad (\text{C-6})$$

Haciendo el cambio de variable

$$\beta = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}, \quad (\text{C-7})$$

la ec.(C-6) resulta

$$T = 2 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^1 \frac{2d\beta}{\cos(\theta/2)\sqrt{1-\beta^2}} = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\beta^2\text{sen}^2(\theta_0/2)}}. \quad (\text{C-8})$$

La integral

$$K(v) = \int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta^2v^2)}} \quad (\text{C-9})$$

se denomina *integral elíptica completa de primera especie* y no tiene solución analítica cerrada. Sin embargo, se puede hacer un desarrollo en serie:

$$K(v) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 v^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 v^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 v^6 + \dots \right]. \quad (\text{C-10})$$

Es decir,

$$K(v) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right]^2 v^{2n}. \quad (\text{C-11})$$

Vemos que en la ec.(C-8) podemos identificar una integral elíptica completa de primera especie con  $v = \text{sen}(\theta_0/2)$ . Entonces podemos escribir

$$T(\theta) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right]^2 \text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^{2n}, \quad \text{donde } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (\text{C-12})$$

En la figura C-1 se muestra cómo varía el período del péndulo con la amplitud de oscilación. El cálculo se realizó con los 130 primeros términos de la sumatoria de la ec.(C-12).

En la Tabla C-1 se puede comparar el período del péndulo calculado por diversos métodos. En la primera columna están los valores  $\theta_0$  y en las siguientes columnas se detallan los valores de  $T/T_0$ . El

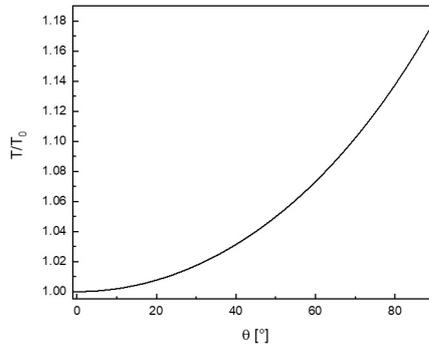


Figura C-1: Amplitud del péndulo en función de la amplitud

método 1 es integrando numéricamente la integral elíptica, el método 2 es incluyendo los 130 primeros términos de la sumatoria de la ec.(C-12) y el método 3 es tomando solo los 2 primeros términos de la sumatoria. Como puede verse es posible calcular con bastante precisión el período del péndulo utilizando solo algunos términos de la sumatoria. Si se tiene en cuenta solamente dos términos de la sumatoria para  $\theta_0 = \pi/2$  la diferencia con los otros métodos de cálculo es menor que el 2%.

Áng.	Mét. 1	Mét. 2	Mét. 3
0	1,0000	1,0000	1,0000
$\pi/6$ (30°)	1,0174	1,0174	1,0174
$\pi/4$ (45°)	1,0400	1,0400	1,0396
$\pi/3$ (60°)	1,0732	1,0732	1,0713
$\pi/2$ (90°)	1,1803	1,1803	1,1602

Tabla C-1:  $T/T_0$  integrando numéricamente la ecuación elíptica (Mét. 1), tomando los 130 primeros términos de la sumatoria (Mét. 2) y tomando solo los 2 primeros términos de la sumatoria (Mét. 3).