

**Universidad Nacional de Córdoba**

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

*INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA  
NEWTONIANA*

*Primera Edición  
Febrero de 2022*

Alberto Wolfenson - Jorge Trincavelli - Pablo Serra



# Índice general

<b>I</b>	<b>CINEMÁTICA</b>	<b>9</b>
<b>1.</b>	<b>Movimiento en Una Dimensión</b>	<b>11</b>
1.1.	Consideraciones generales . . . . .	11
1.2.	Sistema de coordenadas unidimensional . . . . .	12
1.3.	Distancia entre dos puntos . . . . .	15
1.4.	Relación entre posición y tiempo . . . . .	16
1.5.	Función de movimiento . . . . .	18
1.5.1.	Ejemplos de funciones de movimiento . . . . .	21
1.6.	Encuentro . . . . .	24
1.7.	Distancia recorrida y desplazamiento . . . . .	27
<b>2.</b>	<b>Velocidad y Derivadas</b>	<b>31</b>
2.1.	Velocidad media . . . . .	31
2.1.1.	Cálculo de la velocidad media para algunas funciones de movimiento . . . . .	33
2.2.	Velocidad instantánea - parte I . . . . .	35
2.3.	El concepto de límite de una función . . . . .	37
2.3.1.	Algunas propiedades del límite de funciones . . . . .	39
2.3.2.	El límite de $\text{sen}(x)/x$ para $x \rightarrow 0$ . . . . .	39
2.4.	Derivadas . . . . .	41
2.4.1.	Definición de derivada . . . . .	41
2.4.2.	Reglas de derivación . . . . .	42
2.4.3.	Derivadas de funciones simples . . . . .	44

2.5. Análisis de gráficos de funciones . . . . .	51
2.6. Velocidad instantánea - parte II . . . . .	59
<b>3. Aceleración e Integración</b>	<b>61</b>
3.1. Aceleración . . . . .	61
3.2. Condiciones sobre las funciones de movimiento, velocidad y aceleración . . . . .	62
3.3. Ejemplos simples de funciones de movimiento . . . . .	64
3.4. Relación entre aceleración, velocidad y función de movimiento . . . . .	64
3.5. Integración de funciones . . . . .	65
3.6. Integración de las funciones de movimiento . . . . .	68
3.6.1. Aceleración definida a trozos . . . . .	73
3.7. Integrales definidas . . . . .	74
3.8. Aplicación de las integrales definidas en cinemática . . . . .	80
<b>4. Movimiento en el Plano</b>	<b>85</b>
4.1. Localización de un punto en el plano . . . . .	85
4.1.1. Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales . . . . .	85
4.2. Trayectoria y Funciones de Movimiento . . . . .	87
4.3. Vectores . . . . .	96
4.3.1. Operaciones con vectores . . . . .	97
4.3.2. Base vectorial . . . . .	102
4.3.3. Vectores en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales . . . . .	103
4.3.4. Producto escalar . . . . .	107
4.4. Descripción vectorial del movimiento en el plano . . . . .	113
4.4.1. Vector posición . . . . .	113
4.4.2. Función vectorial de movimiento . . . . .	114
4.4.3. Vector desplazamiento . . . . .	114
4.4.4. Vector velocidad media . . . . .	115
4.4.5. Vector velocidad . . . . .	118
4.4.6. Trayectoria y vector velocidad . . . . .	120

4.4.7. Vector aceleración . . . . .	122
4.4.8. Determinación del vector posición a partir del vector aceleración . . . . .	131
4.4.9. Tiro parabólico . . . . .	134
4.4.10. Encuentro de dos móviles en el plano . . . . .	143
<b>5. Movimiento Circular y Movimiento Periódico</b>	<b>145</b>
5.1. Movimiento circular - parte I . . . . .	145
5.2. Coordenadas polares . . . . .	150
5.2.1. Coordenadas polares y funciones de movimiento . . . . .	152
5.3. Movimiento circular - parte II . . . . .	158
5.3.1. Integración de las ecuaciones de movimiento para un movimiento circular . . . . .	160
5.3.2. Encuentro en movimiento circular . . . . .	162
5.4. Movimiento periódico . . . . .	166
<b>6. Movimiento Relativo</b>	<b>169</b>
6.1. Cambio de coordenadas . . . . .	169
6.2. Ejemplos . . . . .	172
<b>7. Movimiento en Tres Dimensiones</b>	<b>177</b>
7.1. Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales . . . . .	177
7.2. Vector posición y función vectorial de movimiento . . . . .	178
7.3. Velocidad y aceleración . . . . .	180
7.4. Trayectoria . . . . .	181
7.5. Encuentro de dos móviles en $3 - D$ . . . . .	184
<b>II DINÁMICA</b>	<b>187</b>
<b>8. Dinámica de una Partícula</b>	<b>189</b>
8.1. Leyes de Newton . . . . .	190
8.1.1. Primera ley . . . . .	190
8.1.2. Segunda ley . . . . .	191

8.1.3.	Tercera ley . . . . .	196
8.2.	Aplicación de las leyes de Newton . . . . .	196
8.2.1.	Masa puntual . . . . .	196
8.2.2.	Ecuaciones de movimiento . . . . .	197
8.3.	Energía . . . . .	199
8.4.	Diversas fuerzas aplicadas sobre una masa puntual . . . . .	201
8.4.1.	Tensión de una cuerda . . . . .	201
8.4.2.	Fuerzas de contacto . . . . .	204
8.4.3.	Fuerza centrípeta . . . . .	207
8.4.4.	Aplicación combinada de varias fuerzas de vínculo . . . . .	208
8.5.	Fuerzas de rozamiento . . . . .	212
8.6.	Fuerza gravitatoria . . . . .	214
8.6.1.	Marco histórico . . . . .	214
8.6.2.	Ley de gravitación universal . . . . .	216
8.6.3.	Masa inercial y masa gravitatoria . . . . .	216
8.6.4.	Tiro vertical a gran altura . . . . .	217
8.6.5.	Satélite en órbita circular . . . . .	220
8.7.	Fuerzas viscosas . . . . .	221
8.8.	Fuerzas elásticas . . . . .	227
8.8.1.	Movimiento oscilatorio . . . . .	227
8.8.2.	Movimiento oscilatorio bajo acción de una fuerza constante . . . . .	232
8.8.3.	Propiedades elásticas de los sólidos . . . . .	234
8.9.	Péndulo ideal o matemático . . . . .	236
8.9.1.	Pequeñas oscilaciones . . . . .	238
<b>9.</b>	<b>Momento Lineal y Momento angular</b>	<b>241</b>
9.1.	Momento lineal . . . . .	241
9.1.1.	Momento lineal de una partícula . . . . .	241
9.1.2.	Interacción entre dos partículas . . . . .	241
9.1.3.	Sistemas de muchas partículas . . . . .	243

9.1.4.	Movimiento del centro de masa . . . . .	245
9.1.5.	Ejemplos de conservación del momento lineal . . . . .	247
9.1.6.	Relación entre impulso y fuerza . . . . .	248
9.2.	Colisiones . . . . .	249
9.2.1.	Choque en una dimensión . . . . .	249
9.2.2.	Choques en dos y tres dimensiones . . . . .	252
9.3.	Algunas definiciones vectoriales . . . . .	253
9.3.1.	Producto vectorial . . . . .	253
9.3.2.	Momento de un vector . . . . .	254
9.4.	Vectores velocidad angular y momento angular . . . . .	256
9.4.1.	Vector velocidad angular . . . . .	256
9.4.2.	Momento angular . . . . .	256
<b>10.</b>	<b>Trabajo y Energía</b>	<b>263</b>
10.1.	Energías cinética y potencial . . . . .	263
10.2.	Trabajo de una fuerza . . . . .	263
10.2.1.	Cálculo del trabajo; ejemplos . . . . .	266
10.2.2.	Potencia . . . . .	267
10.3.	Fuerzas conservativas y no conservativas; conservación de la energía mecánica . . . . .	268
10.3.1.	Ejemplos de aplicación de la conservación de la energía mecánica . . . . .	271
10.3.2.	Análisis del movimiento de una partícula en un potencial unidimensional . . . . .	273
<b>11.</b>	<b>Cuerpo Rígido</b>	<b>277</b>
11.1.	Cinemática del cuerpo rígido . . . . .	278
11.1.1.	Centro de masa . . . . .	278
11.1.2.	Tipos de movimiento de un cuerpo rígido . . . . .	283
11.1.3.	Rodadura . . . . .	288
11.1.4.	Aceleración de los puntos de un cuerpo rígido . . . . .	290
11.2.	Dinámica del cuerpo rígido . . . . .	292
11.2.1.	Ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido . . . . .	292

11.2.2. Equilibrio en un cuerpo rígido . . . . .	297
11.2.3. Dirección del momento angular y de la velocidad angular . . . . .	299
11.2.4. Momento de inercia . . . . .	300
11.2.5. Momento angular respecto del eje de rotación pura . . . . .	306
11.2.6. Sistemas de fuerzas equivalentes . . . . .	308
11.2.7. Ejemplos de movimiento de cuerpo rígido . . . . .	310
11.2.8. Energía del cuerpo rígido . . . . .	318
11.2.9. Trabajo y energía potencial . . . . .	319
11.2.10. Giróscopo y trompo . . . . .	322
<b>A. Resolución alternativa del movimiento oscilatorio armónico</b>	<b>327</b>
A.1. Movimiento oscilatorio amortiguado . . . . .	328
<b>B. Período del péndulo en función de la amplitud (grandes oscilaciones)</b>	<b>333</b>

**Parte I**

**CINEMÁTICA**



# 1

## Movimiento en Una Dimensión

### SECCIÓN 1.1

### Consideraciones generales

Desde los tiempos más remotos la especie humana ha intentado explicar el mundo que lo rodea. La ciencia, la filosofía, e incluso el propio lenguaje humano no son ajenos a este afán. Durante milenios, cuestiones científicas y filosóficas han formado un conjunto bastante inextricable, en particular, el nombre de la disciplina bajo consideración, es decir la Física, ha sido durante mucho tiempo *Filosofía Natural*. La complejidad del proceso de evolución de la Física a lo largo del tiempo, hasta llegar a lo que es hoy, unida al desarrollo de gran número de ciencias, cuyas áreas de estudio muchas veces se superponen con las de la Física, hace que sea extremadamente difícil dar una definición útil y valedera de esta última, lo que sería deseable antes de comenzar un primer curso de Física. Una definición completamente valedera sería decir que la física es la ciencia que estudia los fenómenos físicos. El problema es que esta definición es también perfectamente inútil, a no ser que se explique a conciencia la naturaleza de los fenómenos físicos, lo cual plantea el grave riesgo de hacerlo en términos de la Física, generando un círculo sin fin. En lugar de caer en este tipo de enredos conviene desarrollar los conceptos que han sido considerados parte de la Física por varias generaciones de científicos, sin tratar de dar una definición de la disciplina que los integra.

El término "física" deriva del latín *Physica*, que significa natural, el cual a su vez viene del griego φυσικς (physis), es decir naturaleza. Este último término proviene del griego φῦω (phío), que significa nacer, brotar, engendrar. En este sentido, desde los tiempos de Tales de Mileto y Aristóteles de Estagira, el concepto de Física ha estado ligado al estudio de la naturaleza. Durante la Edad Media el término "físico" se utilizaba para designar a los médicos (lo que sigue ocurriendo hasta el día de hoy en el idioma inglés, que denomina *physician* a una persona que ejerce la medicina). A partir del siglo XVI, con los trabajos de Galileo, y más particularmente, durante el siglo XVII, con la publicación de los *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* de Isaac Newton, la disciplina comienza a diferenciarse del resto y en el siglo XVIII empieza a usarse el término "Física" para denominarla.

Si bien no daremos una "definición rigurosa" de qué involucra la disciplina Física, sí diremos que es una **ciencia experimental**, es decir que **toda** afirmación que se haga en esta ciencia **debe** estar verificada por la experiencia. De la experimentación nacen las leyes de la Física. Estas leyes sintetizan los resultados de las experiencias pues han sido deducidas de estos mismos experimentos. Las leyes además permiten predecir nuevos eventos físicos que también deben ser verificados experimentalmente.

Si deseamos estudiar Física, o sea realizar una descripción de la naturaleza, lo podemos hacer de una manera cualitativa. Sin embargo, para hacer una descripción más precisa, es decir si deseamos cuantificar esta descripción, vamos a necesitar de un lenguaje que represente los conceptos con la precisión

requerida. El lenguaje de la Física es la Matemática, es decir, los conceptos de la Física son representados mediante expresiones matemáticas. Por esta razón iremos desarrollando la matemática que necesitamos para expresar los conceptos de la Física.

En este curso de Física iniciaremos el estudio de lo que se denomina Mecánica Elemental, y en particular comenzaremos estudiando la Cinemática, que es la descripción del movimiento de los cuerpos, sin interesarnos la causa por la cual se mueven. El análisis sobre qué hace que los cuerpos se muevan de determinada forma lo abordaremos más adelante cuando estudiemos la Dinámica. Comenzaremos, entonces, estudiando el movimiento de cuerpos, es decir trataremos de describir qué posiciones del espacio van ocupando a medida que transcurre el tiempo.

Antes de iniciar nuestro estudio en concreto, discutiremos un aspecto característico de la forma de pensar la naturaleza por parte de los físicos: Comenzaremos todo abordaje del estudio de un problema simplificando al máximo las hipótesis a plantear, tratando de dejar de lado toda “complicación superflua”(al menos en un inicio) para quedarnos solo con el carozo fundamental de la cuestión a estudiar. Así, si queremos describir la posición de un cuerpo en función del tiempo (por ejemplo un auto que viaja entre dos ciudades, o la pelota en algún deporte) podemos pensar al cuerpo como un punto (por ejemplo el punto central) y describir solo la posición de este punto en función del tiempo. Esta aproximación, llamada de *cuerpo puntual* ó *punto material* ya fue usada por Kepler en 1609 para describir las órbitas planetarias, donde ambos, planeta y sol, fueron considerados cuerpos puntuales (Notemos que esta aproximación, muy buena para describir el movimiento de los planetas alrededor del sol, es totalmente inútil para explicar el día y la noche o las estaciones).

Entonces estudiaremos el movimiento de cuerpos puntuales. Y siempre comenzaremos por los sistemas más simples para luego ir complicando los problemas a resolver. Sin duda pensamos que debe ser más sencillo describir el movimiento de un automóvil (considerado puntual), que viaja entre dos ciudades de la provincia de la Pampa unidas por una ruta recta que el vuelo de una mosca. Así empezaremos describiendo cuerpos puntuales que solo pueden moverse sobre una recta, esto es, en una dimensión. En capítulos posteriores veremos como describir movimientos en dos y tres dimensiones.

## SECCIÓN 1.2

# Sistema de coordenadas unidimensional

Para abordar el estudio del movimiento de traslación de un cuerpo comenzaremos analizando los casos más sencillos. Por esta razón, inicialmente estudiaremos el movimiento de cuerpos que se desplazan sobre una recta. En este tipo de movimiento la recta es el universo en el cual se mueven los cuerpos (figura 1.1).



Figura 1.1: Cuerpo puntual que puede moverse solo sobre una recta dada.

Como nuestro objetivo es analizar el movimiento del cuerpo, necesitamos poder determinar su ubicación o posición. Para ello fijamos un punto sobre la recta, respecto del cual referiremos la posición del cuerpo. A ese punto lo llamaremos origen, y lo denotaremos indistintamente por la letra  $O$  o el número  $0$ .

Una posibilidad para determinar la posición del cuerpo es dar la distancia que existe entre este y el origen, es decir, dar la longitud del segmento de recta que se extiende entre el punto elegido como origen y el punto que corresponde a la posición del cuerpo (ver figura 1.2). Lo que debemos analizar es si de esa manera queda identificada de forma unívoca la posición del cuerpo.

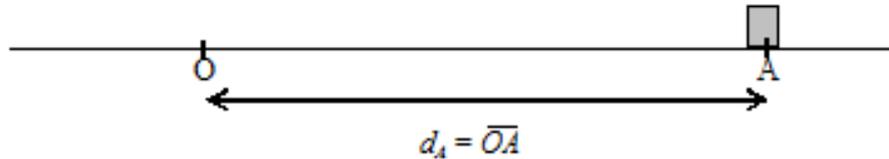


Figura 1.2: Distancia de un cuerpo al origen de coordenadas  $O$ .

El problema es que con esta manera de definir la posición del cuerpo se nos presenta una ambigüedad. Si damos la posición del cuerpo mediante la distancia  $d_A$  estamos ante dos posibilidades, una es que esté a la derecha de  $O$  y la otra es que esté a la izquierda de  $O$ . Entonces vemos que de esta forma no podemos definir unívocamente la posición del cuerpo y por lo tanto debemos encontrar un modo de eliminar esta dualidad. La forma más simple y directa es agregar si el cuerpo está a la derecha o a la izquierda del origen. Así, para indicar la posición de los cuerpos mostrados en la figura 1.3, diríamos:

$A$  está a una distancia  $d_A$  y a la derecha de  $O$ .  
 $B$  está a una distancia  $d_B$  y a la derecha de  $O$ .  
 $C$  está a una distancia  $d_C$  y a la izquierda de  $O$ .

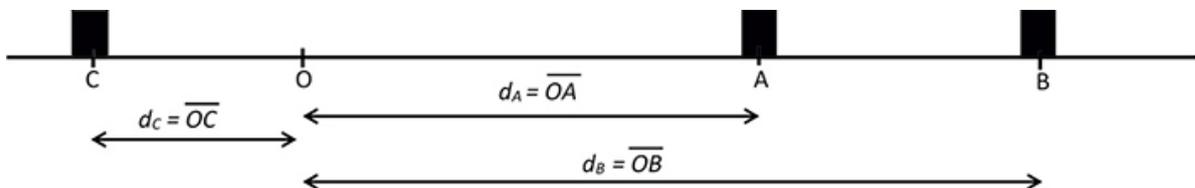


Figura 1.3: Posición de varios cuerpos situados sobre una misma recta.

Lamentablemente esta manera de expresar la ubicación de los puntos tiene dos inconvenientes: a) la noción de derecha o izquierda de la recta no está unívocamente determinada, pues depende desde qué lado de la recta se está observando. b) Esta forma de especificar la posición de un cuerpo es complicada, muy extensa.

Una manera de solucionar este inconveniente es usar la distancia para definir la ubicación de puntos que se hallan de un lado del origen, y la distancia precedida por un signo menos del otro lado. Entonces, para expresar de manera precisa la ubicación de los puntos (o cuerpos puntuales) en nuestro universo (recta) definiremos un ente que denominaremos *sistema de coordenadas unidimensional*, caracterizado por

1. Una recta (sobre la que se desplaza el cuerpo cuyo movimiento queremos describir).
2. Un punto arbitrario en la recta elegido como origen de coordenadas.
3. Una unidad de medida de longitudes.

4. Una y sólo una punta de flecha que indica hacia dónde crecen las coordenadas, es decir, cuál es el sentido positivo.
5. Un nombre para las coordenadas, por ejemplo,  $x$ .

Una vez definido un sistema de coordenadas, **todo punto** sobre la recta tendrá asignada una coordenada, dada por

1. Un número positivo que indica la longitud del segmento con extremos en el origen y el punto en cuestión, esto es, la distancia del punto al origen.
2. Un signo que indica si el punto se encuentra desde el origen hacia la flecha (+) o en sentido opuesto (-).

Entonces, cuando deseamos describir el movimiento de un cuerpo que se desplaza sobre una recta debemos colocar el sistema de coordenadas sobre dicha recta. En la figura 1.4 se muestra una recta con un sistema de coordenadas definido y dos cuerpos,  $A$  con coordenada  $x_A$  positiva y  $B$  con coordenada  $x_B$  negativa.

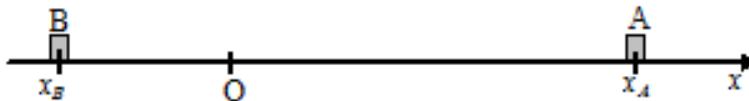


Figura 1.4: Dos cuerpos sobre una recta con un sistema de coordenadas unidimensional.

El origen de coordenadas  $O$  y el sentido positivo son totalmente arbitrarios. En la figura 1.5, podemos observar dos sistemas de coordenadas diferentes definidos sobre la **misma** recta; es posible expresar las coordenadas del cuerpo en cualquiera de ellos. Lo importante es que, elegido uno de ellos, mantengamos el mismo sistema mientras estemos efectuando la descripción del movimiento del cuerpo.

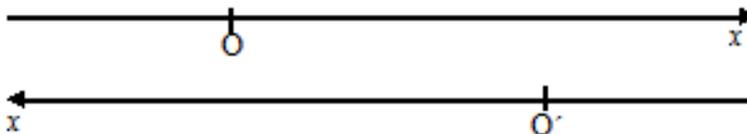


Figura 1.5: Ejemplos de dos sistemas de coordenadas, definidos sobre una misma recta.

A la luz de estos conceptos, vemos que la utilización de un sistema de coordenadas y de la coordenada del cuerpo en dicho sistema es la forma matemática de describir la posición del cuerpo en el espacio (unidimensional en este caso).

## SECCIÓN 1.3

## Distancia entre dos puntos

En el espacio usual, también denominado espacio euclidiano, la distancia  $d$  entre dos puntos distintos es la longitud del segmento de recta que los une. Es decir, la distancia es la longitud del camino que hay que recorrer para ir directamente de un punto al otro. Entonces, por definición,  $d > 0$ .

Veamos ahora cómo podemos calcular la distancia entre dos puntos en función de sus coordenadas.



Figura 1.6: Distancia entre dos puntos con coordenadas positivas,  $d_{AB} = x_B - x_A$ .

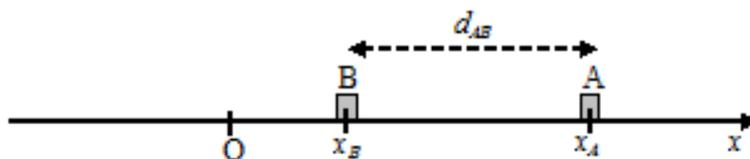


Figura 1.7: Distancia entre dos puntos con coordenadas positivas,  $d_{AB} = x_A - x_B$ .

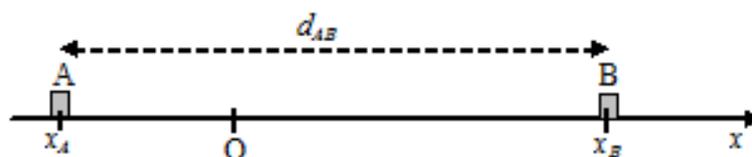


Figura 1.8: Distancia entre dos puntos con coordenadas de distinto signo,  $d_{AB} = x_B - x_A$ .

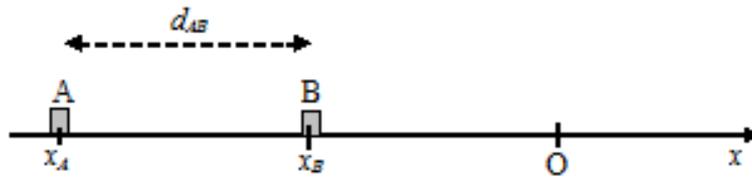


Figura 1.9: Distancia entre dos puntos con coordenadas negativas,  $d_{AB} = x_B - x_A$ .

De los casos ilustrados en las figuras 1.6 a 1.9, vemos que la distancia depende de las coordenadas de los cuerpos  $A$  y  $B$ . En ciertos casos la distancia es  $x_A - x_B$  (figura 1.7) y en otras es  $x_B - x_A$  (figuras 1.6, 1.8, 1.9), ya que, como dijimos, la distancia nunca puede ser un número negativo. Para no tener que analizar en cada caso en particular qué diferencia es la que debemos calcular, definimos

$$d_{AB} = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|. \quad (1.1)$$

Es decir que en nuestro universo unidimensional *la distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de ambos puntos*.

## SECCIÓN 1.4

# Relación entre posición y tiempo

Hemos dicho que vamos a describir el movimiento de cuerpos que se mueven sobre líneas rectas. Hasta ahora hemos desarrollado los elementos necesarios para dar la posición (sistema de coordenadas y coordenadas de los cuerpos) en la recta. Decir que estudiaremos cómo se mueven significa analizar cómo se modifica su posición a medida que transcurre el tiempo. Si bien el concepto de tiempo es algo difícil de definir, pensemos por ahora que el tiempo es simplemente aquello que medimos con un reloj y que siempre aumenta.

Supongamos que tenemos un cuerpo que se desplaza sobre una recta. A esa recta le adosamos un sistema de coordenadas para poder dar su posición de manera unívoca. Ahora saquemos fotos del sistema a distintos tiempos. La figura 1.10 representa esta situación.

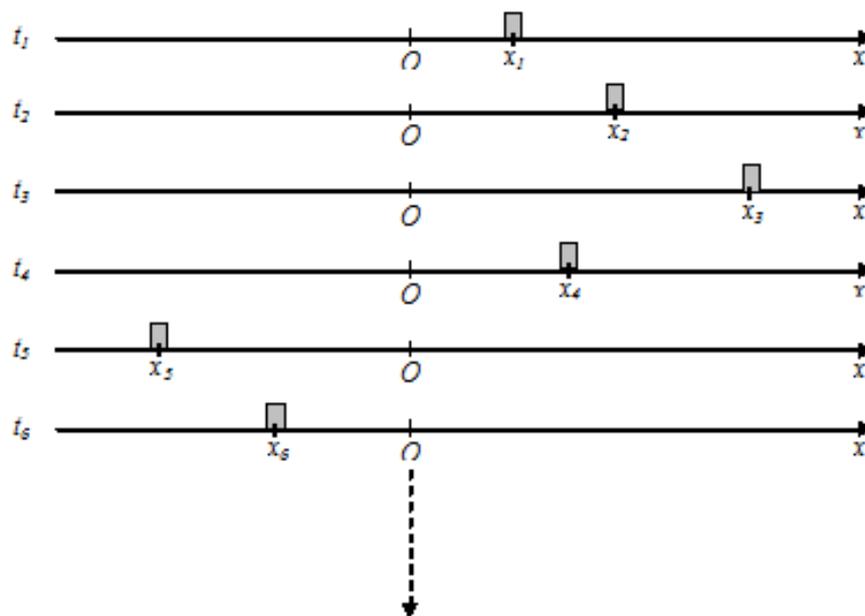


Figura 1.10: Posiciones sucesivas de un móvil a lo largo del tiempo.

Entonces, tenemos que las coordenadas son sucesivamente  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots$  correspondientes a los instantes  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, \dots$  que son sucesivos y crecientes ( $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_6 < \dots$ ). Con estos valores de  $x$  y  $t$  podemos confeccionar la tabla 1.1.

$t$	$x$
$t_1$	$x_1$
$t_2$	$x_2$
$t_3$	$x_3$
$t_4$	$x_4$
$t_5$	$x_5$
$t_6$	$x_6$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$

Tabla 1.1: Tiempos y posiciones registradas para un móvil.

Sabemos cómo medir las coordenadas  $x_i$ ; analicemos ahora cómo definir los valores de tiempo,  $t_i$ . Podríamos tomar para  $t$  la “hora civil” por ejemplo:

$$t_1 = \text{las } 12 \text{ hs } 35 \text{ min } 48,3 \text{ s del } 9 \text{ de marzo de } 1993$$

$$t_2 = \text{las } 9 \text{ hs } 28 \text{ min } 15,2 \text{ s del } 10 \text{ de octubre de } 2007$$

Al hacer esto estamos aceptando una convención, pues asignamos a  $t$  el tiempo transcurrido a partir de cierto momento histórico que arbitrariamente se definió como cero. En los ejemplos, el origen de la

medición del tiempo coincide con el nacimiento de Jesús y esto es lo que generalmente se tomó como origen temporal para narrar la historia de la humanidad en Occidente. En este marco, se toma como tiempos negativos los que corresponden a instantes previos al origen (por ejemplo, el año -59 corresponde al año 59 AC). Este origen del tiempo, como cualquier elección de punto de partida, es arbitrario y no es compartido por todas las culturas. Así, resulta más razonable hacer lo mismo que ya hemos hecho con el origen del sistema de coordenadas: elegir arbitrariamente el origen del tiempo que sea más conveniente para nuestra descripción del movimiento. Esto es, nuestro aparato de medición de tiempos, más que un reloj usual, funciona como un cronómetro.

Al igual que la unidad de longitud, la unidad de tiempo dependerá del fenómeno que estamos describiendo, podemos usar como unidad *millones de años* si se trata de eventos geológicos, o *nanosegundos* si describimos fenómenos atómicos, aunque en la vida diaria, describiendo movimientos de automóviles, pelotas, proyectiles, etc, resulta adecuado en general usar horas (*h*), minutos (*min*) o segundos (*s*). Además el sentido será **siempre** creciente hacia el futuro. Por lo tanto, elegimos el origen del tiempo  $t$  en la tabla de manera que nos resulte más cómodo, por ejemplo, podemos elegir uno de los valores de  $t$  de la tabla 1.1 como origen, y considerar que:

- El tiempo correspondiente al origen es igual a 0
- Tiempos posteriores al origen son positivos ( $t > 0$ )
- Tiempos anteriores al origen son negativos ( $t < 0$ )

Con estos elementos podemos representar los valores de tiempo de manera similar a lo que hicimos con los del espacio, como se muestra en la figura 1.11. Es decir que tendremos un sistema de coordenadas temporales donde cada punto de la recta asociada representa un instante. La separación entre dos puntos de este eje se denomina intervalo de tiempo.

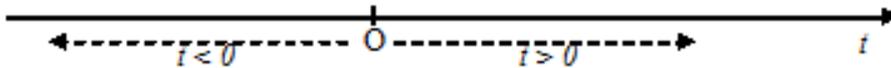


Figura 1.11: Representación gráfica del eje temporal.

## SECCIÓN 1.5

# Función de movimiento

Para describir el movimiento de los cuerpos usaremos coordenadas espaciales  $x$  y temporales  $t$ , que están relacionadas entre sí. Las coordenadas espaciales se expresan en unidades de longitud, tales como *cm*, *m*, *km*, etc., mientras que las temporales en unidades de tiempo, por ejemplo, *s*, *min*, *h*, *años*, etc. Es importante notar que la determinación experimental de una magnitud, por ejemplo la longitud de un objeto, debe comunicarse haciendo referencia a alguna unidad de medida, por ejemplo metros. De lo contrario, decir que el objeto en cuestión “tiene una longitud de 7” carece totalmente de sentido, ya que podría tratarse de una galaxia o un átomo, según cuál sea la unidad no comunicada. A partir de ahora, para referirnos a unidades de distintas magnitudes utilizaremos corchetes; por ejemplo:  $[\ell] = m$  significa “las unidades de longitud son metros”, o bien:  $[t] = s$  quiere decir “las unidades de tiempo son segundos”.

En el ejemplo de la figura 1.10, la relación entre  $t$  y  $x$  se pone en evidencia en la tabla 1.1, que hemos confeccionado con los valores de  $t_i$  y  $x_i$ . Allí queda explícita la posición del cuerpo (coordenada espacial) observada, es decir medida, para cada valor de tiempo (coordenada temporal). Sin embargo, para todos los instantes existentes entre dos instantes consecutivos medidos  $t_i$  y  $t_{i+1}$ , desconocemos cuál es la posición del cuerpo. Podemos realizar nuevos experimentos tomando mayor cantidad de datos  $(t_i, x_i)$ , pero nunca podremos conocer experimentalmente la posición del cuerpo para todo instante. Si graficamos los valores de la tabla colocando en el eje de las abscisas los valores de  $t$  y en el de las ordenadas los correspondientes de  $x$ , este conjunto de puntos mostrará la información experimental que disponemos sobre el movimiento del cuerpo como se muestra en el gráfico de la izquierda de la figura 1.12. Pero el hecho de **no** poder medir la posición en todo instante nos lleva a hacer dos hipótesis:

- I) En cada instante en el intervalo de observación un cuerpo puntual está en un y solo un lugar.
- II) El movimiento de todo cuerpo es **continuo**. Es decir, en una dimensión, un cuerpo para llegar de un punto a otro **debe** pasar por todos los puntos intermedios.

Estas hipótesis equivalen a asumir la existencia de una función matemática  $x(t)$ , denominada *función de movimiento* del cuerpo (también llamada *función posición*), que al ser evaluada en cada uno de los instantes de la tabla 1.1 resulta en la coordenada del cuerpo correspondiente a dicho instante. La función de movimiento  $x(t)$  es la descripción matemática del movimiento del cuerpo. Supondremos, hasta tener evidencia experimental de lo contrario, que esta función evaluada en cualquier valor de  $t$  (tabulado o no) da la coordenada del cuerpo en ese instante (ver figura 1.12). Si realizamos nuevas mediciones y esta función de movimiento no logra describir alguna o algunas de las nuevas mediciones, deberemos buscar una nueva función de movimiento  $x(t)$  que describa la totalidad de la información experimental que tengamos sobre el movimiento del cuerpo.

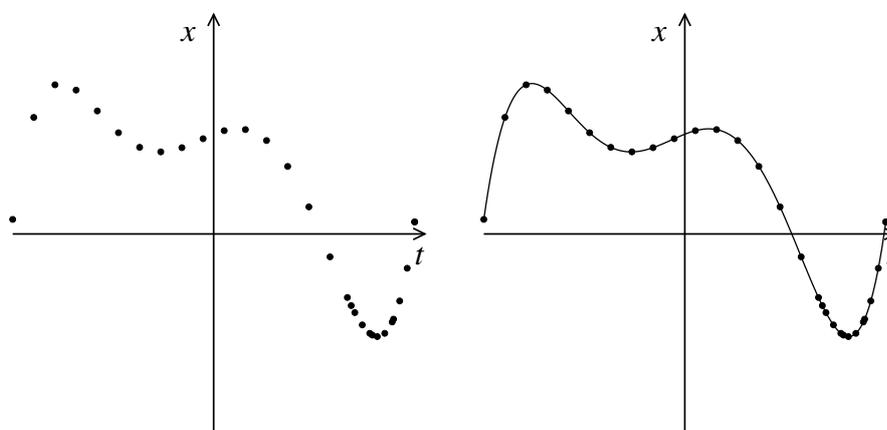


Figura 1.12: En el gráfico de la izquierda vemos la representación gráfica arbitraria de los puntos experimentales de la tabla 1.1. En la figura de la derecha se superpone la función de movimiento continua  $x(t)$ .

Veamos ahora cómo pueden ser las gráficas de las funciones de movimiento de un cuerpo. En la figura 1.12 ya vimos una función de movimiento posible de un cuerpo. Puede verse del gráfico que para cada instante está determinada la posición del cuerpo, es decir su coordenada  $x$ .

En la figura 1.13 se muestran dos gráficos que corresponden a funciones del tiempo; sin embargo estos no pueden representar funciones de movimiento ya que no describen situaciones posibles. La función de la izquierda **no** está definida en el intervalo  $(t_1, t_2)$ , lo cual correspondería a la descripción del movimiento de un cuerpo que desaparece en el instante  $t_1$ , reapareciendo en el instante  $t_2$ ; pero como no existe evidencia experimental de que un cuerpo pueda desaparecer y luego reaparecer, esta no es una

descripción física admisible. Por otro lado, en el gráfico de la derecha se describiría el movimiento de un cuerpo que en un determinado instante  $t_1$  está en un lugar e inmediatamente después está en otra posición diferente sin haber pasado por todas las otras posiciones que unen dichos puntos; nuevamente, no existe ninguna evidencia experimental de que la posición de un cuerpo pueda variar en forma discontinua. Así, ninguna de las funciones de la figura 1.13 corresponde a funciones de movimiento.

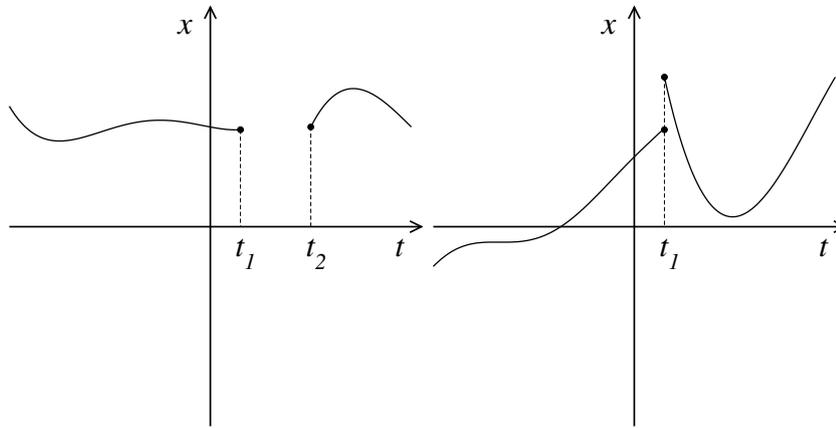


Figura 1.13: Ejemplo de dos funciones que no pueden ser de funciones movimiento: la de la izquierda no está definida en el intervalo  $(t_1, t_2)$ ; la de la derecha es discontinua en  $t = t_1$ .

La relación mostrada en la figura 1.14 no corresponde a una función y en particular, no puede representar el movimiento de un cuerpo, pues para cualquier instante en el intervalo  $(t_1, t_2)$  el cuerpo se encuentra en tres posiciones diferentes simultáneamente, lo que contradice nuestra suposición fundamental de que todo cuerpo se encuentra en un y solo un lugar en un dado instante.

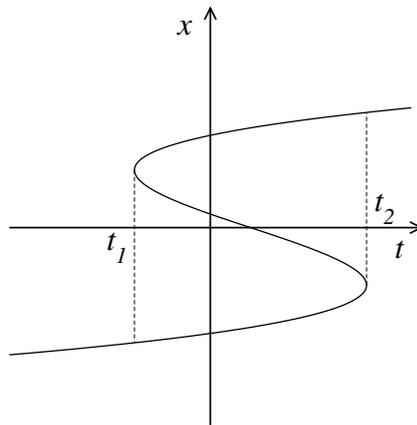


Figura 1.14: Ejemplo de una relación que no puede ser función de movimiento, ya que representaría un cuerpo que se halla al mismo tiempo en más de un lugar para  $t \in [t_1, t_2]$ .

En resumen, la relación entre los valores de las coordenadas  $x_i$  y los tiempos  $t_i$  que representan el movimiento de un cuerpo debe ser una función, y esta función debe ser continua (es decir que su gráfica no puede tener saltos) y además debe estar definida en todo el intervalo de interés. Más adelante veremos que es necesario imponer mayores condiciones a una función para que pueda representar el movimiento de un cuerpo.

### 1.5.1. Ejemplos de funciones de movimiento

A continuación vamos a analizar algunas funciones matemáticas que pueden representar funciones de movimiento.

#### Función constante

Consideremos la función  $x(t) = c$ , donde  $c$  es un número real. En particular, elegiremos un valor positivo para  $c$ , a los fines de graficar la función, tal como se muestra en la figura 1.15.

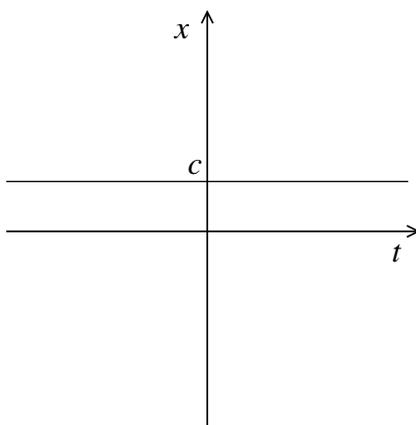


Figura 1.15: Función de movimiento de un cuerpo en reposo en  $x = c$ .

Este gráfico representa la función de movimiento de un cuerpo que está en reposo, es decir que para todo tiempo el cuerpo está en la misma posición  $x = c$ .

#### Función lineal

Una función de movimiento lineal constituye un caso más interesante. La expresión matemática correspondiente está dada por

$$x(t) = at + b; \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Sabemos que el gráfico de esta función (ver figura 1.16) es una recta y que la constante  $a$  es la pendiente y  $b$ , la ordenada al origen. Al movimiento representado por esta función se lo denomina “Movimiento Rectilíneo Uniforme” (MRU). Ya veremos más adelante a qué se debe esta denominación. Por ahora trataremos de entender cómo se “lee” un gráfico de este tipo. En primer lugar, no debe olvidarse nunca que el tipo de movimiento que estamos describiendo es unidimensional y que las coordenadas espaciales están en el eje  $x$ . Esto nos dice que el móvil “camina” por el eje  $x$ , no por el gráfico de la función de movimiento, en este caso la recta de pendiente  $a$ . Si esta pendiente es positiva, como la mostrada en la figura 1.16, a medida que transcurre el tiempo el cuerpo va cambiando su posición siguiendo la dirección de crecimiento del eje  $x$ , se mueve en sentido positivo. Si  $a$  fuera negativo, eso querría decir que a medida que pasa el tiempo, se va desplazando hacia la dirección opuesta a la flecha del eje  $x$ , se mueve en sentido negativo. Cuando  $a$  vale cero, estamos en el caso anterior, es decir, el reposo es un caso particular del

MRU. El valor de la constante  $b$  indica la posición para  $t=0$ ; en particular, si  $b=0$ , el cuerpo está en el origen de coordenadas cuando  $t=0$ .

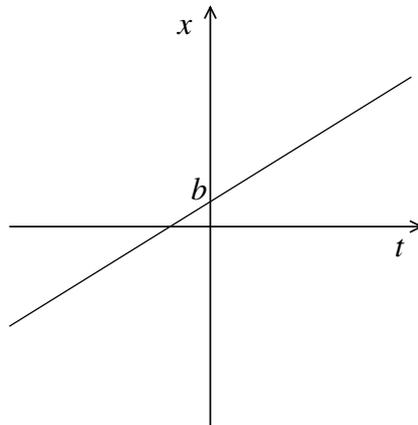


Figura 1.16: Función de movimiento lineal con  $a, b > 0$ .

Si nos plantean que un cuerpo se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, y que en el instante  $t_1$  se encuentra en la posición  $x_1$  y en otro instante  $t_2$  está en la posición  $x_2$ , como por dos puntos dados pasa una y solo una recta, podemos determinar cuál es su función de movimiento. Saber que el cuerpo se mueve con movimiento rectilíneo uniforme nos indica que la función de movimiento será una función lineal,  $x(t) = at + b$ , cuya gráfica es una línea recta. Además sabemos que los pares ordenados  $(t_1, x_1)$  y  $(t_2, x_2)$  pertenecen a dicha recta. Por lo tanto el problema de encontrar la función de movimiento se reduce a resolver el problema matemático de encontrar la ecuación de la recta que pasa por los dos pares ordenados indicados (ver figura 1.17).

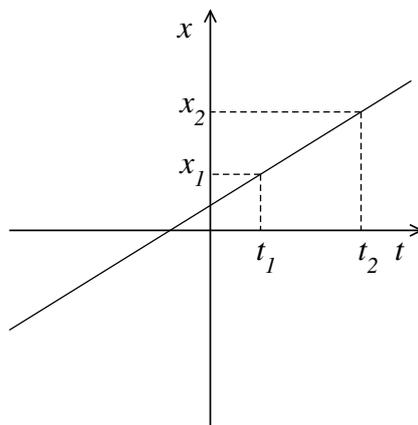


Figura 1.17: Recta que pasa por dos puntos dados.

Con la información proporcionada podemos escribir las ecuaciones

$$x_1 = at_1 + b ; x_2 = at_2 + b, \quad (1.3)$$

y resolviendo este sistema de ecuaciones podemos calcular los valores de las constantes  $a$  y  $b$ ,

$$a = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} ; b = \frac{t_2 x_1 - t_1 x_2}{t_2 - t_1}, \quad (1.4)$$

obteniendo así la expresión de la función de movimiento.

### Función cuadrática

Veamos ahora el caso en que la función de movimiento de un cuerpo es dada por una función cuadrática,

$$x(t) = at^2 + bt + c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}; ; a \neq 0. \quad (1.5)$$

El gráfico de esta función es una parábola, con ramas hacia arriba si  $a > 0$  (caso mostrado en la figura 1.18 izquierda), o hacia abajo si  $a < 0$  (caso mostrado en la figura 1.18 derecha), el vértice de la parábola se encuentra en  $t = -b/2a$ ;  $x = c - b^2/4a$ .

Notar que la figura 1.18 (izquierda) representa el movimiento de un cuerpo que viene de coordenadas positivas hacia las negativas, llega al vértice, que es el punto mínimo  $x_m = c - b^2/4a$ , y se vuelve hacia las coordenadas positivas cada vez mayores. Por otro lado, la figura 1.18 (derecha) muestra el movimiento de un cuerpo que viene de coordenadas negativas hacia las positivas, llega al vértice, que en este caso es un punto máximo,  $x_M = c - b^2/4a$ , y se vuelve hacia las coordenadas negativas cada vez menores.

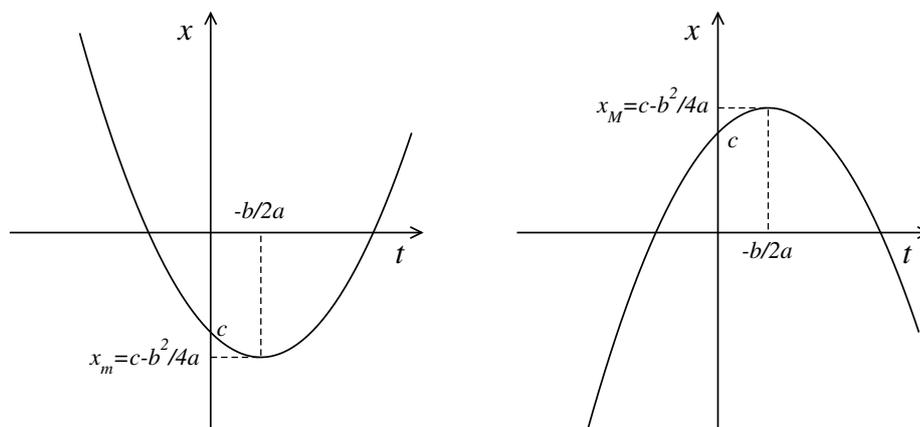


Figura 1.18: Función de movimiento cuadrática con  $a > 0$ ;  $b, c < 0$  (izquierda) y  $a < 0$ ;  $b, c > 0$  (derecha).

Sabemos que por tres puntos no alineados pasa una y solo una parábola, entonces si nos dicen que un cuerpo tiene un movimiento parabólico, necesitaremos medir la posición del cuerpo en tres instantes distintos para calcular los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  que definen la función de movimiento. Genéricamente llamaremos  $(t_1, x_1)$ ;  $(t_2, x_2)$ ;  $(t_3, x_3)$  a estos tres puntos; obtener los coeficientes de la parábola resulta algo más complicado que en el caso lineal, pero después de un poco de álgebra obtenemos

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{(x_2 - x_1)(t_3 - t_1) - (x_3 - x_2)(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_1 - t_3)} \\
 b &= \frac{t_1^2(x_2 - x_3) + t_2^2(x_3 - x_1) + t_3^2(x_1 - x_2)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_1 - t_3)} \\
 c &= \frac{t_2 t_3 (t_2 - t_3)x_1 + t_1 t_3 (t_3 - t_1)x_2 + t_1 t_2 (t_1 - t_2)x_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_1 - t_3)}.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

## SECCIÓN 1.6

## Encuentro

Diremos que dos cuerpos se encuentran si en un dado instante estos se hallan en un mismo lugar. Si graficamos las funciones de movimiento de ambos cuerpos es posible visualizar el encuentro como el punto donde las gráficas se cortan.

En general, decir que dos cuerpos  $A$  y  $B$  se encuentran, cualesquiera sean las funciones que describan sus posiciones en función del tiempo,  $x_A(t)$  y  $x_B(t)$ , implica que están en la misma posición (misma coordenada) al mismo tiempo, esto es, cumplen las ecuaciones

$$x_A(t_e) = x_e \quad ; \quad x_B(t_e) = x_e, \tag{1.7}$$

donde  $t_e$  es el tiempo de encuentro y  $x_e$  la coordenada de ambos móviles en dicho instante.

Analicemos un par de ejemplos simples:

a) Supongamos el caso particular de dos cuerpos (denominados  $A$  y  $B$ ) que se desplazan con movimiento rectilíneo uniforme, y por lo tanto sus funciones de movimiento son descritas por funciones lineales. Si las gráficas de estas funciones son rectas no paralelas, entonces estas se cortarán en un punto, tal como se muestra en la figura 1.19. Físicamente entendemos esto como que en ese punto ambos cuerpos se encuentran, es decir los dos cuerpos están en la misma posición en el mismo instante.

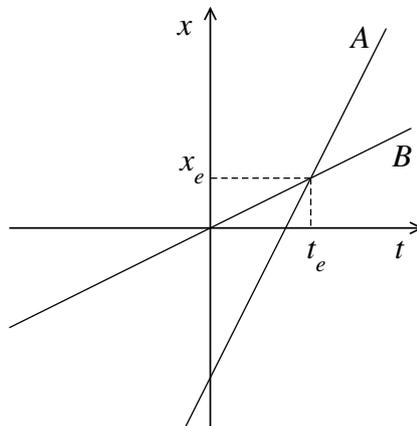


Figura 1.19: Encuentro de dos móviles con MRU.

Si las funciones de movimiento de los cuerpos  $A$  y  $B$  son

$$x_A(t) = a_A t + b_A ; x_B(t) = a_B t + b_B , \quad (1.8)$$

entonces, para determinar el tiempo  $t_e$  y la coordenada  $x_e$  de encuentro, debemos resolver las ecuaciones (1.7) para las funciones de movimiento dadas en (1.8),

$$t_e = \frac{b_B - b_A}{a_A - a_B} ; x_e = \frac{a_A b_B - a_B b_A}{a_A - a_B} . \quad (1.9)$$

b) Supongamos que las funciones de movimiento de cuatro cuerpos son:

$$x_A(t) = 2 \frac{m}{s^2} t^2 - 1 \frac{m}{s} t - 2 m ; \quad (1.10)$$

$$x_B(t) = 1 \frac{m}{s} t + 2 m ; \quad (1.11)$$

$$x_C(t) = 1 \frac{m}{s} t - \frac{5}{2} m ; \quad (1.12)$$

$$x_D(t) = 1 \frac{m}{s} t - 4 m . \quad (1.13)$$

Notar que a las constantes que multiplican las distintas potencias de  $t$  le adjudicamos unidades tales que las coordenadas tengan las dimensiones de longitud adecuadas. En el capítulo siguiente volveremos sobre este tema.

La función de movimiento del cuerpo  $A$ , dada en la ecuación (1.10), es una función cuadrática, cuyo gráfico es una parábola, mientras que las funciones de movimiento de los otros tres cuerpos ( $B$ ,  $C$  y  $D$ ) son funciones lineales y sus gráficas serán rectas. Si analizamos estas tres funciones lineales veremos que tienen la misma pendiente y diferentes ordenadas al origen; es decir sus gráficos son rectas paralelas y por lo tanto no se cortarían en ningún punto. Físicamente esto implica que no habrá ningún encuentro entre los cuerpos  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Por lo tanto sólo es necesario analizar los posibles encuentros del cuerpo  $A$  con cada uno de los otros tres cuerpos.

Analicemos primero el problema de encuentro del móvil  $A$  con el  $B$ . Si se encuentran se debe verificar que

$$x_e = 2 \frac{m}{s^2} t_e^2 - 1 \frac{m}{s} t_e - 2 m ; x_e = 1 \frac{m}{s} t_e + 2 m . \quad (1.14)$$

Este sistema de ecuaciones arroja dos soluciones para  $t_e$ ,  $-1 s$  y  $2 s$ . Esto implica que los cuerpos  $A$  y  $B$  se encontrarán dos veces. Reemplazando estos valores de tiempo en la ecuación correspondiente al cuerpo  $A$  o al cuerpo  $B$  podemos determinar la posición donde se produce el encuentro. Para  $t_e = -1 s$  se encontrarán en  $x_e = 1 m$ ; y para  $t_e = 2 s$  los cuerpos se encontrarán en  $x_e = 4 m$ .

Para analizar el encuentro de los cuerpos  $A$  y  $C$  planteamos las ecuaciones

$$x_e = 2 \frac{m}{s^2} t_e^2 - 1 \frac{m}{s} t_e - 2 m ; x_e = 1 \frac{m}{s} t_e - \frac{5}{2} m , \quad (1.15)$$

y dado que un único valor de  $t_e$  es solución de este sistema de ecuaciones, esto nos permite determinar

que los cuerpos  $A$  y  $C$  se encontrarán en el instante  $t_e = 0,5 \text{ s}$  y en la posición  $x_e = -2 \text{ m}$ .

Finalmente, para estudiar el encuentro entre los cuerpos  $A$  y  $D$  planteamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$x_e = 2 \frac{m}{s^2} t_e^2 - 1 \frac{m}{s} t_e - 2 \text{ m} \quad ; \quad x_e = 1 \frac{m}{s} t_e - 4 \text{ m}. \quad (1.16)$$

Podemos verificar que no existe ningún número  $t_e$  real que sea solución de este sistema. Físicamente esto significa que los cuerpos  $A$  y  $D$  no se encuentran nunca.

Las soluciones que hemos obtenido para el encuentro de los cuerpos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se corresponden con lo que se puede observar en las gráficas de las funciones de movimiento de estos cuerpos, representadas en la figura 1.20.

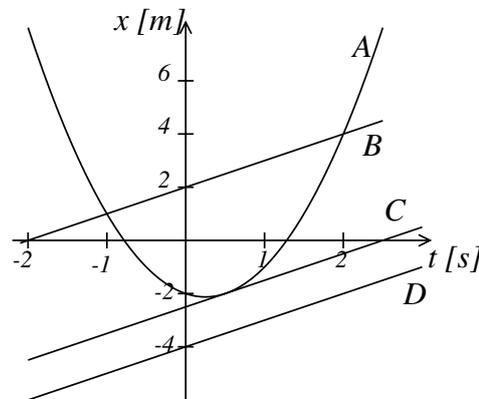


Figura 1.20: Encuentro del móvil  $A$  con los móviles  $B$ ,  $C$  y  $D$ .

Debemos tener especial cuidado si buscamos puntos de encuentro entre dos cuerpos cuando alguna, o ambas funciones de movimiento están definidas a trozos. Supongamos que deseamos determinar si dos cuerpos, llamados  $A$  y  $B$ , se encuentran, si sus funciones de movimiento están dadas por:

$$x_A(t) = -1 \frac{m}{s} t + 2 \text{ m}; \quad (1.17)$$

$$x_B(t) = \begin{cases} 1 \frac{m}{s} t - 1 \text{ m} & ; \quad t < 0 \text{ s} \\ 1 \frac{m}{s^2} t^2 + 1 \frac{m}{s} t - 1 \text{ m} & ; \quad t \geq 0 \text{ s}. \end{cases} \quad (1.18)$$

La función de movimiento del cuerpo  $A$  es una función lineal y describe la coordenada del cuerpo para todo tiempo. La coordenada del cuerpo  $B$  no puede ser descrita por una única expresión que sea válida para todo tiempo y por ello está definida en dos tramos (ecuación (1.18)). Para tiempos menores que cero la función de movimiento es lineal y para tiempos iguales o mayores que cero es una función cuadrática. Para resolver el problema de encuentro entre estos cuerpos necesitamos analizar qué ocurre en cada uno de los intervalos de tiempo.

Para tiempos menores que cero planteamos la condición de encuentro escribiendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$x_e = -1 \frac{m}{s} t_e + 2 \text{ m} \quad ; \quad x_e = 1 \frac{m}{s} t_e - 1 \text{ m}. \quad (1.19)$$

Al resolver este sistema obtenemos como solución que el tiempo de encuentro es  $t_e = 1,5s$ . Si bien este valor es solución de las ecuaciones (1.19), no tiene sentido físico pues está fuera del intervalo de tiempo  $t < 0$  que estamos considerando. Por lo tanto no ocurre ningún encuentro para tiempos menores que cero.

Para tiempos iguales o mayores que cero, planteamos la condición de encuentro mediante el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x_e = -1 \frac{m}{s} t_e + 2 m \quad ; \quad x_e = 1 \frac{m}{s^2} t_e^2 + 1 \frac{m}{s} t_e - 1 m. \quad (1.20)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, vemos que tiene dos soluciones para el tiempo de encuentro, siendo ellas  $t_{e1} = -3 s < 0$  y  $t_{e2} = 1 s > 0$ . Aunque ambos valores satisfacen las ecuaciones (1.20), sólo  $t_{e2} = 1 s$  está dentro del intervalo de tiempo que estamos considerando. Reemplazando este valor en cualquiera de las funciones de movimiento correspondientes a  $t \geq 0$  podemos calcular el valor de la coordenada en que se produce el encuentro,  $x_e = 1 m$ .

Por lo tanto, los cuerpos A y B sólo se encontrarán una vez en  $t = 1 s$  y la coordenada del encuentro será  $x = 1 m$ , que se corresponde con el punto donde se cortan los gráficos de las funciones de movimiento mostrados en la figura 1.21.

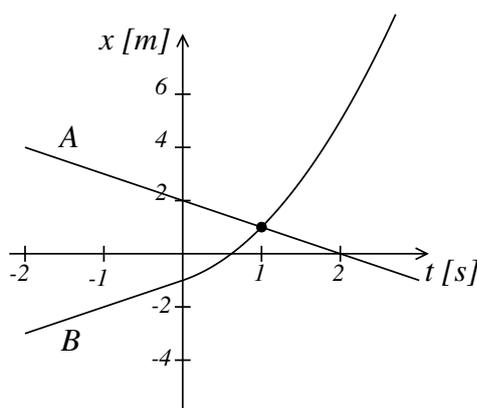


Figura 1.21: Funciones de movimiento dadas por las ecuaciones (1.17) y (1.18), esta última definida por tramos. El punto señala el encuentro en  $t_e = 1 s$ ,  $x_e = 1 m$ .

## SECCIÓN 1.7

# Distancia recorrida y desplazamiento

Si bien en el lenguaje cotidiano se suelen utilizar de manera indistinta las expresiones “distancia recorrida” y “desplazamiento”, en cinemática tienen dos significados totalmente diferentes.

Definimos como distancia recorrida *la longitud del camino que ha realizado el cuerpo en un determinado intervalo de tiempo*. La distancia recorrida es siempre una magnitud positiva y, por ejemplo, en un automóvil sería lo que leemos en el cuentakilómetros.

Por otra parte, el desplazamiento de un cuerpo es cuánto se ha modificado su posición en un determinado intervalo de tiempo con respecto a su posición inicial. Por lo tanto, si la función de movimiento de un cuerpo está dada por  $x = x(t)$ , su desplazamiento en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  será  $x(t_2) - x(t_1)$ .

Denotaremos este desplazamiento usando la letra griega “delta” mayúscula,  $\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$  (en pocos años, si bien no aprenderemos griego, su alfabeto nos resultará tan familiar como el latino). De manera similar, denotaremos la distancia recorrida en el mismo intervalo de tiempo como  $d_{12}$ .

Para ejemplificar calculemos el desplazamiento de un cuerpo en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  para algunas funciones de movimiento particulares. En la figura 1.22 vemos la gráfica de la función de movimiento de un cuerpo.

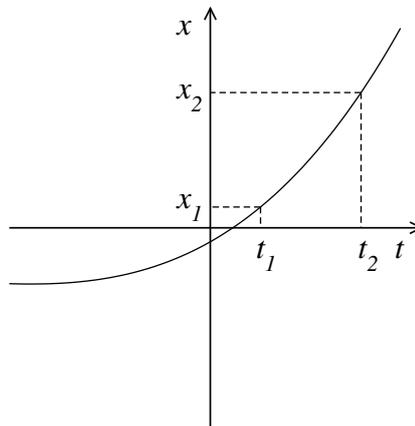


Figura 1.22: Función de movimiento de un móvil con dirección de viaje positiva en el intervalo  $[t_1, t_2]$ , donde se obtiene el mismo valor para la distancia recorrida y el desplazamiento.

En este caso la distancia recorrida y el desplazamiento del cuerpo en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  coinciden en sus valores:  $d_{12} = \Delta x = x_2 - x_1$ .

Supongamos ahora que la función de movimiento del cuerpo es la mostrada en la figura 1.23.

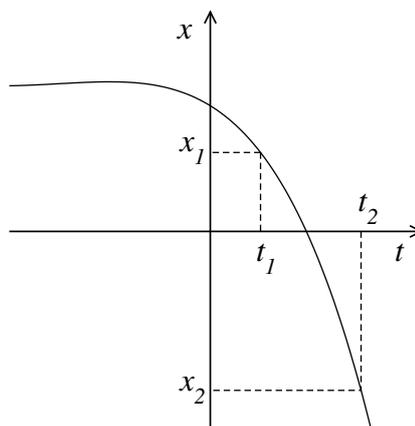


Figura 1.23: Función de movimiento de un móvil con dirección de viaje negativa en el intervalo  $[t_1, t_2]$ , donde se obtiene para la distancia recorrida el valor del desplazamiento cambiado de signo.

El cuerpo cuya función de movimiento se grafica ha recorrido una distancia  $d_{12} = |x_2 - x_1| (> 0)$  y ha sufrido un desplazamiento  $\Delta x = x_2 - x_1 (< 0)$ .

En el caso particular mostrado en la figura 1.24 vemos que el cuerpo al final del intervalo se encuentra en la misma posición que al inicio,  $x_1 = x_2$ ; por lo tanto el desplazamiento del cuerpo es  $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$ ,

mientras que la distancia que ha recorrido es  $d_{12} = 2(x_M - x_1)$ . Notar que no necesitamos conocer el instante en que el móvil estuvo en  $x_M$  para calcular la distancia recorrida.

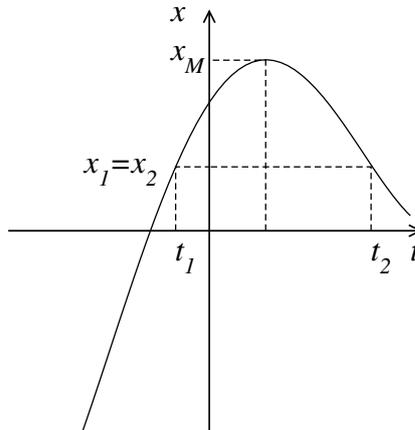


Figura 1.24: Función de movimiento de un móvil cuya dirección de viaje cambia de positiva a negativa en el intervalo  $[t_1, t_2]$ , donde el desplazamiento es nulo, mientras que la distancia recorrida es  $d_{12} = 2(x_M - x_1)$ .

¿Qué sucede si el móvil se mueve a veces hacia las coordenadas positivas y otras hacia las coordenadas negativas? Para el cálculo del desplazamiento esto no es relevante, ya que solo nos interesa conocer las posiciones inicial y final. En cambio, para calcular la distancia recorrida debemos calcular cada distancia parcial recorrida hacia las coordenadas positivas y hacia las coordenadas negativas y luego sumarlas. Veamos esto en un ejemplo concreto:

$$x(t) = \frac{1}{3} \frac{m}{s^3} t^3 - 1 \frac{m}{s} t + \frac{1}{2} m, \tag{1.21}$$

cuyo gráfico se muestra en la figura 1.25.

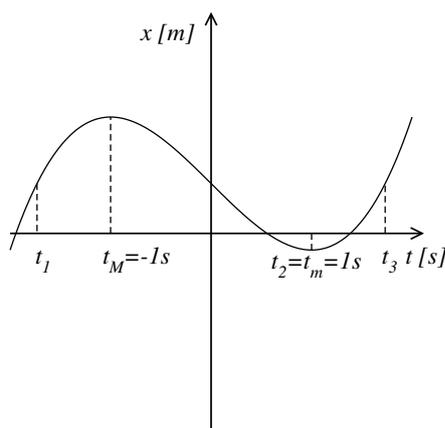


Figura 1.25: Función de movimiento de un móvil con dirección de viaje tanto hacia las coordenadas positivas como hacia las negativas en el intervalo  $[t_1, t_3]$ .

Sean los instantes  $t_1 = -\sqrt{3} s$ ;  $t_2 = 1 s$  y  $t_3 = \sqrt{3} s$ . Supongamos que queremos conocer las distancias y desplazamientos entre el instante  $t_1$  y los instantes  $t_2 = 1 s$  y  $t_3 = \sqrt{3} s$  y entre el instante  $t_2$  y el instante

$t_3$ . Lo primero que hacemos es calcular la posición del móvil en estos tres instantes:

$$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{2}m \quad ; \quad x_2 = x(t_2) = -\frac{1}{6}m \quad ; \quad x_3 = x(t_3) = \frac{1}{2}m. \quad (1.22)$$

Con estos datos ya estamos en condiciones de calcular los desplazamientos:

$$\Delta x_{12} = \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)m = -\frac{2}{3}m \quad ; \quad \Delta x_{13} = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}m = 0 \quad ; \quad \Delta x_{23} = \frac{1}{2}m - \left(-\frac{1}{6}m\right) = \frac{2}{3}m. \quad (1.23)$$

El cálculo de las distancias recorridas requiere más cuidado, ya que debemos conocer las distancias recorridas en sentido positivo y las recorridas en sentido negativo, así calculamos primeramente la posición en  $t_M$ ;  $x_M = (7/6)m$  (como  $t_m = t_2$ , ya conocemos  $x_m = x_2$ ). Con esto podemos averiguar las distancias recorridas en los intervalos  $[t_1, t_M]$ :  $d_{1M} = (2/3)m$ ;  $[t_M, t_m]$ :  $d_{Mm} = d_{M2} = |-1/6 - 7/6|m = (4/3)m$  y  $[t_m, t_3]$ :  $d_{m3} = d_{23} = (2/3)m$ . Así obtenemos finalmente

$$d_{12} = d_{1M} + d_{M2} = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right)m = 2m \quad ; \quad d_{13} = d_{12} + d_{23} = \left(2 + \frac{2}{3}\right)m = \frac{8}{3}m. \quad (1.24)$$

# 2 | Velocidad y Derivadas

## SECCIÓN 2.1

### Velocidad media

Hasta aquí hemos incorporado algunos elementos esenciales con el propósito de describir el movimiento de un cuerpo que se mueve sobre una recta. En primer lugar definimos un sistema de coordenadas y las coordenadas; con ello queda rigurosamente determinada la posición de un cuerpo en la recta. Luego definimos la función de movimiento del cuerpo,  $x = x(t)$ , que nos permite determinar la coordenada del cuerpo en cada instante.

Pero, como veremos, la función de movimiento guarda mucha más información, que en los siguientes capítulos aprenderemos a obtener. En particular, es claro que no solo nos importa qué distancia recorre un cuerpo, sino también en cuánto tiempo lo hace. Si vamos en 20 minutos de Córdoba a Carlos Paz diremos que fuimos “muy rápido”, si en cambio demoramos 2 horas, diremos que fuimos “muy lento”. Pero los físicos debemos cuantificar todas nuestras observaciones, así que en lugar de *rápido* y *lento* definimos:

**Velocidad media de un cuerpo** es el cociente entre el desplazamiento del móvil y el intervalo de tiempo en el cual lo ha realizado.

Denotaremos la velocidad media como  $\bar{v}$ . Si el movimiento de un cuerpo está descrito por  $x(t)$ , y el móvil está en  $x_1 = x(t_1)$  en el instante  $t_1$  y en un instante  $t_2 > t_1$  está en  $x_2 = x(t_2)$ , la expresión matemática para la velocidad media en el intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$  es

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \bar{v}(t_1, \Delta t) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (2.1)$$

donde  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Notar que la velocidad media depende de ambos instantes,  $t_1$  y  $t_2$ , o, equivalentemente del instante  $t_1$  y la duración del intervalo temporal  $\Delta t$ .

A diferencia de coordenadas y tiempos, no necesitamos definir unidades de velocidad, ya que esta es una *unidad derivada*, esto es, si ya definimos las unidades de longitud (metros o kilómetros, o...) y las de tiempo (segundos, u horas, o...), las de velocidad están dadas, siendo

$$[V] = \frac{[\ell]}{[t]} = \frac{m}{s} \text{ ó } \frac{km}{s} \text{ ó } \frac{km}{h} \text{ ó } \dots \quad (2.2)$$

La velocidad media nos da información acerca de la “rapidez” con que se desplaza el cuerpo, es decir cuán rápido modifica su posición. Como se puede ver en el gráfico 2.1, el valor de la velocidad media coincide con el valor de la pendiente de la recta secante a la curva  $x(t)$  que pasa por los puntos  $(t_1, x_1)$  y  $(t_2, x_2)$ .

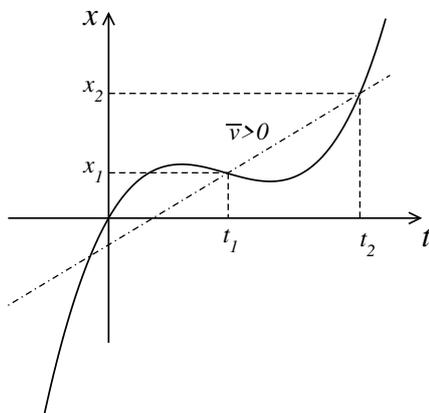


Figura 2.1: La velocidad media entre dos puntos es la pendiente de la recta secante a  $x(t)$  que pasa por dichos puntos.

Como  $\Delta t$  es siempre positivo, el signo de la velocidad media estará dado por el signo de  $\Delta x$ . En el gráfico 2.1 vemos que  $x_2 > x_1$  por lo que la velocidad media es positiva. En el gráfico 2.2 es  $x_2 < x_1$ , y la velocidad media es negativa.

Notemos que si hubiéramos elegido un sentido diferente para las coordenadas crecientes, los signos de la velocidad media cambiarían en ambos casos. Por lo tanto podemos decir que es el valor absoluto de la velocidad media el que nos da información de cuán rápido se movió el cuerpo que estamos observando en el intervalo de tiempo de interés y el signo nos dice hacia dónde se movió en dicho intervalo respecto del sistema de coordenadas utilizado para la descripción del movimiento.

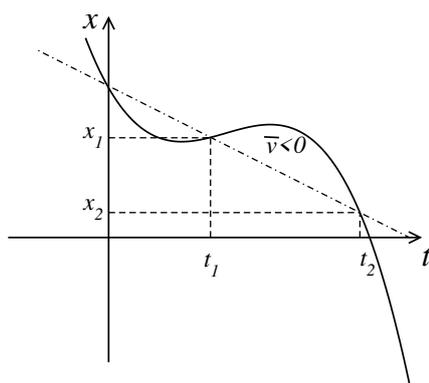


Figura 2.2: La velocidad media puede ser positiva, como en la figura 2.1, o negativa, como en este caso.

Analicemos el caso particular en que el cuerpo haya modificado su posición con el tiempo, pero que en el intervalo de tiempo considerado, la posición del cuerpo sea la misma en el instante inicial y el final, como se muestra en el gráfico 2.3. En este caso, aplicando la ecuación (2.1), obtendremos que la velocidad media será igual a cero.

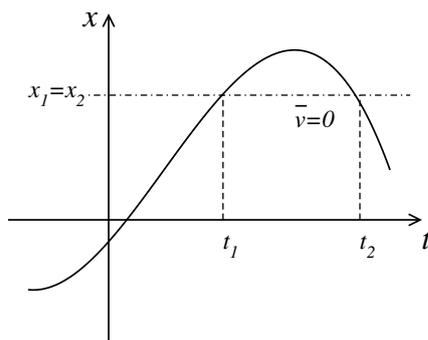


Figura 2.3: Aunque un cuerpo se esté moviendo, su velocidad media en un intervalo particular puede ser nula.

No debemos confundir nuestra definición de velocidad media con velocidad promedio  $\langle V \rangle = d/t$ , donde  $d$  es la distancia recorrida por el cuerpo y  $t$  el tiempo utilizado para recorrer dicha distancia. Por ejemplo cuando vemos una carrera (de autos, motos, bicicletas, etc.) el móvil parte del reposo y su velocidad varía en el transcurso de la competencia. Sin embargo la prensa nos da como información la velocidad promedio, este dato se calcula como el cociente entre la distancia **total** recorrida (¡que no debe confundirse con  $\Delta x$ !) y el tiempo que demoró en hacerlo y nos dice con qué velocidad constante el móvil hubiese recorrido la misma distancia en el mismo tiempo empleado. En contraste, de acuerdo con su definición, la velocidad media de un móvil en toda carrera donde el punto de partida coincide con el de llegada será cero.

### 2.1.1. Cálculo de la velocidad media para algunas funciones de movimiento

Analicemos ahora la velocidad media para algunas de las funciones de movimiento simples estudiadas en el capítulo 1.

a) Función de movimiento constante:  $x(t) = c$

$$x(t_1) = c \text{ y } x(t_2) = c \implies \bar{v} = \frac{c - c}{t_2 - t_1} = 0 \quad \forall t_1, t_2 > t_1. \quad (2.3)$$

Vemos que independientemente del intervalo de tiempo que tomemos la velocidad media es nula. Esto es compatible con el movimiento descrito por esta función de movimiento, la cual corresponde a un cuerpo en reposo.

b) Función de movimiento lineal:  $x(t) = at + b$ :

$$x(t_1) = at_1 + b; \quad x(t_2) = at_2 + b \implies$$

$$\bar{v} = \frac{(at_2 + b) - (at_1 + b)}{t_2 - t_1} = \frac{a(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = a \quad \forall t_1, t_2 > t_1. \quad (2.4)$$

Un cuerpo cuya función de movimiento es una función lineal tiene una velocidad media constante cuyo valor coincide con la pendiente de la recta  $x(t)$ . Es por este motivo que denominamos en el punto 1.5.1 al movimiento descrito por esta función como *Movimiento Rectilíneo Uniforme* (MRU) pues el cuerpo se mueve sobre una recta y su velocidad media es constante independientemente de los instantes  $t_1$  y  $t_2$

que elijamos para su cálculo. Notemos que la función de movimiento constante analizada en (a) es un caso particular de MRU con  $a = 0$ .

Para las dos funciones de movimiento (función constante y función lineal) cuya velocidad media hemos calculado, esta es constante, independiente del intervalo de tiempo utilizado para su cálculo. En ambos casos la recta secante, que une los dos puntos tomados para el cálculo de la velocidad media, coincide con la función de movimiento, esto es, la velocidad media es la pendiente de la recta  $x(t)$ .

c) Función de movimiento parabólica:  $x(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ . En la figura 2.4 mostramos una función de movimiento parabólica con  $a_2 > 0$ ,  $a_1 < 0$ ,  $a_0 > 0$  (¿cómo aseguramos esto?) con la correspondiente recta secante a los puntos  $(t_1, x(t_1))$  y  $(t_2, x(t_2))$ , cuya pendiente es  $\bar{v}(t_1, t_2)$ . Veamos explícitamente cómo la calculamos:

$$x(t_1) = a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0 \quad ; \quad x(t_2) = a_2 t_2^2 + a_1 t_2 + a_0 \Rightarrow \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{(a_2 t_2^2 + a_1 t_2 + a_0) - (a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{a_2(t_2^2 - t_1^2) + a_1(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= a_2(t_2 + t_1) + a_1 = a_2(2t_1 + \Delta t) + a_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

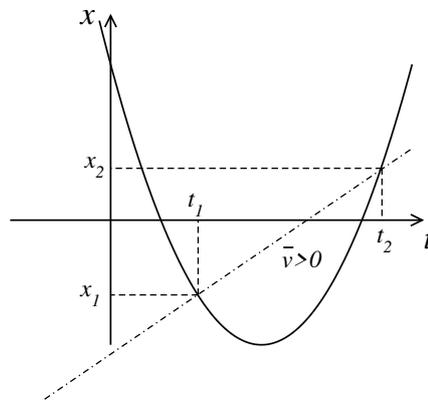


Figura 2.4: Función de movimiento parabólica mostrando la recta secante a dos puntos, cuya pendiente es  $\bar{v}(t_1, t_2) > 0$ .

Como vemos, en el caso en que la función de movimiento del cuerpo es un polinomio de segundo grado, la velocidad media ya no es constante y depende de los valores de  $t_1$  y  $t_2$ , o equivalentemente, de  $t_1$  y  $\Delta t$  elegidos para su determinación. Es decir que aunque mantengamos  $t_1$  constante, la velocidad media variará al cambiar el valor de  $\Delta t$  elegido. En la figura 2.5 se muestra una función de movimiento parabólica (también con  $a_2 > 0$ ,  $a_1 < 0$ ,  $a_0 > 0$ ) mostrando tres velocidades medias para un mismo valor de  $t_1$ , siendo una positiva, otra nula y una tercera negativa dependiendo del valor de  $\Delta t$ .

Podríamos seguir analizando la velocidad media para otras funciones de movimiento tanto o más complicadas que la anterior y encontraríamos que, salvo para la función lineal, la velocidad media depende de los valores elegidos para  $t_1$  y  $\Delta t$ .

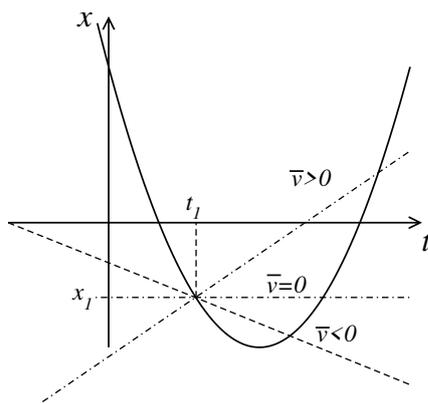


Figura 2.5: Función de movimiento parabólica mostrando tres rectas secantes, que, con igual valor de  $t_1$ , difieren en la elección de  $\Delta t$ , dando velocidades medias positiva, nula y negativa.

En particular podemos tener dos movimientos totalmente diferentes para los cuales la velocidad media sea la misma en un dado tiempo inicial e intervalo de tiempo, como se muestra en la figura 2.6.

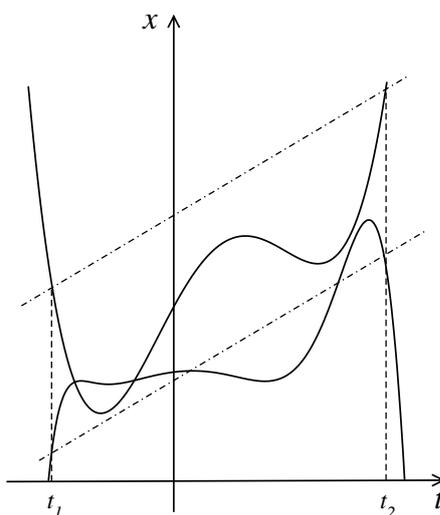


Figura 2.6: Dos funciones de movimiento diferentes pueden tener igual  $\bar{v}(t_1, t_2)$  para alguna elección particular de  $t_1, t_2$ .

## SECCIÓN 2.2

# Velocidad instantánea - parte I

Como vimos, salvo cuando la función de movimiento es una función constante o una función lineal (MRU), el concepto de velocidad media no es un parámetro que permita describir de manera clara el movimiento del cuerpo. Por lo tanto debemos ver cómo podemos definir la velocidad de un cuerpo con el propósito de obtener un parámetro que nos sea más útil en la caracterización de su movimiento. En particular, una velocidad que dependa solo de un instante dado, no de dos ( $t_1$  y  $t_2 = t_1 + \Delta t$ ). Intuitivamente sabemos qué estamos buscando: la velocidad que nos marca el velocímetro del auto depende solo del instante que miramos, es instantánea, veamos cómo podemos definirla.

La velocidad media caracteriza correctamente el movimiento rectilíneo uniforme. Como  $\bar{v}$  en este caso no depende de  $t_1$  ni de  $\Delta t$ , podemos genuinamente decir que la velocidad del móvil en cualquier instante es  $\bar{v}$ . En un caso general, lo que haremos es restringir el intervalo de tiempo en el cual vamos a calcular la velocidad media. Podemos elegir un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño de manera tal que en este intervalo el movimiento pueda ser considerado aproximadamente rectilíneo y uniforme como se muestra en la figura 2.7.

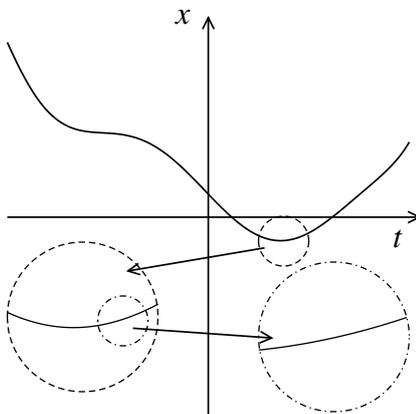


Figura 2.7: Siempre podemos magnificar un trozo de curva hasta que este se aproxime tanto como querramos a una recta.

Cuanto más pequeño sea el intervalo de tiempo elegido para el cálculo de la velocidad media, el movimiento en dicho intervalo más se parecerá a un movimiento rectilíneo uniforme. La velocidad media que calculemos será constante en dicho intervalo y por lo tanto nos dará información de cuán rápido varía la posición del cuerpo en un dado instante y un entorno reducido del mismo. Sin embargo, depende del comportamiento de la función de movimiento, cuán pequeño debe ser el intervalo de tiempo en el cual podemos considerar la función como (aproximadamente) lineal. Para solucionar este problema, lo que podemos hacer es, dado un instante  $t_1$ , tomar un intervalo de tiempo y luego analizar qué ocurre con la velocidad media cuando hacemos a éste cada vez más pequeño, esto es, hacer tender el tamaño del intervalo de tiempo a cero, lo que denotaremos como  $\Delta t \rightarrow 0$ . Es importante notar que hacer  $\Delta t$  tender a cero **excluye**  $\Delta t = 0$ , esto es, el tamaño del intervalo tiende a cero, pero es **siempre** no nulo.

En el cálculo de la velocidad media estamos haciendo tender a cero el denominador; sin embargo cuando el intervalo de tiempo tiende a cero también tiende a cero la variación de la posición del cuerpo ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) y por lo tanto podría esperarse que el cociente  $\Delta x/\Delta t$  tienda a un valor finito cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Si calculamos la velocidad media haciendo tender el intervalo de tiempo a cero,  $\Delta t \rightarrow 0$ , entonces la velocidad media ya no dependerá más del intervalo de tiempo sino solo del instante  $t_1$  en el cual estamos realizando el cálculo. Por lo tanto, estaremos obteniendo una información que es función de un determinado instante (tal como ocurre con la función de movimiento), así este cálculo ya no nos dará la velocidad media del cuerpo sino la velocidad instantánea en  $t = t_1$ . Definiremos entonces la función del tiempo velocidad instantánea como el límite del cociente entre el desplazamiento que realiza el cuerpo en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y el tiempo en que lo realiza,  $\Delta t$ , cuando  $\Delta t$  tiende a cero:

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Analicemos geométricamente qué es lo que estamos haciendo en este proceso de tomar límite. Recordando que la velocidad media se obtiene como la pendiente de la recta secante a  $x(t)$ , cuando tomamos intervalos de tiempo cada vez más pequeños, como se muestra en la figura 2.8, si  $\Delta t > \Delta t' > \Delta t''$ , ... ,

las distintas rectas secantes  $S, S', S'', \dots$  se van aproximando cada vez más a una recta que intersecta la función en un solo punto. Esta recta, señalada en la figura como  $T$ , se denomina *recta tangente* a la función de movimiento en el punto  $(t_1, x(t_1))$ . Por lo tanto, el valor de la velocidad instantánea del cuerpo para un determinado instante viene dado por el valor de la pendiente de la recta tangente a la función de movimiento en dicho instante.

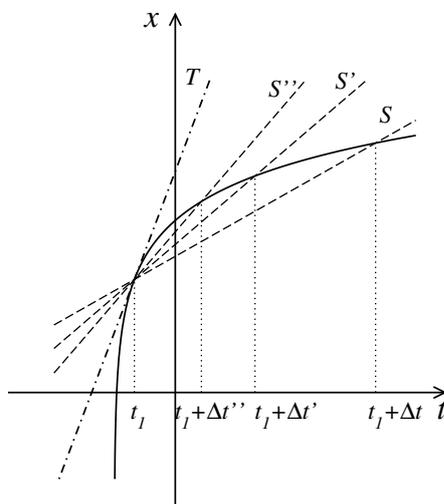


Figura 2.8: Idea geométrica de la velocidad instantánea: se muestran tres rectas secantes  $S, S', S''$  correspondientes a tres valores de intervalos temporales y la recta  $T$ , tangente a  $x(t)$  en el instante  $t = t_1$ .

Veremos más adelante cómo calcular la pendiente de la recta tangente sin necesidad de estudiar las rectas secantes para incrementos  $\Delta t$  cada vez más pequeños. Como dijimos en el capítulo 1, el lenguaje de la física es la matemática, e iremos aprendiendo este lenguaje a medida que los fenómenos físicos que queremos describir nos lo exijan. En particular, en los párrafos precedentes hemos introducido una nueva herramienta matemática: el límite. Utilizando este nuevo concepto, podremos definir la derivada de una función, que nos dará un método para calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. La gran importancia de estos dos conceptos merecen abrir un paréntesis matemático que nos permitirá analizar en profundidad la cinemática de un móvil.

### SECCIÓN 2.3

## El concepto de límite de una función

Nos restringiremos a dar una idea intuitiva y operacional de límite de una función, dejando su tratamiento riguroso para cursos de Análisis Matemático.

Diremos que el límite de una función  $f(x)$ , cuando la variable independiente  $x$  tiende a un determinado valor  $x_0$ , es el valor  $L$  al cual tiende la función, independientemente de que la función esté definida o no en dicho punto, y lo denotaremos como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L. \quad (2.8)$$

Notemos que tanto  $x_0$  como  $L$  podrían ser  $\pm\infty$ . En tales casos debemos tomar ciertos cuidados.

Analicemos algunos ejemplos simples,

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 & (2.9) \\ f(x) = \frac{1}{x^2} &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty ; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ f(x) = \begin{cases} 3x+7 & x < 3 \\ 4 & x = 3 \\ 2x^2-2 & x > 3 \end{cases} &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 16. \end{aligned}$$

Notar que el límite de una función para un cierto valor de la variable independiente no siempre existe, un ejemplo drástico es la famosa función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional} \end{cases}, \quad (2.10)$$

que no tiene límite definido para ningún valor real de  $x$ . Un caso “intermedio” importante es cuando la función no es continua en  $x = x_0$ , pero sí en cualquier punto de un entorno de  $x_0$ , y tiende a valores diferentes según nos aproximemos al punto por números mayores o menores que  $x_0$ , veamos un ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 4x+1 & \text{si } x < 1 \\ 9 & \text{si } x = 1 \\ 2x^3 & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Claramente no existe el límite de  $f$  para  $x \rightarrow 1$ , pero también es claro que la función tiende a 5 si nos acercamos por valores menores que 1, y a 2 si nos acercamos por valores mayores. Diremos entonces que  $f(x)$  tiende a 5 por valores menores que 1, y a 2 por valores mayores que 1, y lo denotaremos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5 ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \quad (2.12)$$

o, en general

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L^- ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L^+, \quad (2.13)$$

y diremos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe si  $L^- = L^+$ . Debemos tener en cuenta que cualquiera, o ambos de estos límites pueden resultar infinito, por ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty. \quad (2.14)$$

Es importante notar que si una función  $f(x)$  es continua en  $x = x_0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (aunque también puede darse vuelta el argumento, en algunos libros se define una función como continua en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ).

### 2.3.1. Algunas propiedades del límite de funciones

Si bien no desarrollaremos demostraciones, resulta importante conocer las siguientes propiedades:

I) Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones con límites definidos en  $x = x_0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F ; \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = G ; F, G \in \mathbb{R},$$

y  $\alpha$  una constante, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\alpha f(x)] = \alpha F ; \quad (2.15a)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = F + G ; \quad (2.15b)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) g(x)] = F G ; \quad (2.15c)$$

$$\text{si } G \neq 0 \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}. \quad (2.15d)$$

II) Sean  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  funciones tales que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para todo  $x$  en un entorno de  $x_0$ , excepto posiblemente en  $x = x_0$ , y

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F ; \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = F ,$$

entonces el límite de  $g(x)$  para  $x \rightarrow x_0$  existe y

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = F. \quad (2.16)$$

### 2.3.2. El límite de $\text{sen}(x)/x$ para $x \rightarrow 0$

Hemos analizado varios ejemplos sencillos, pero el cálculo de límite de funciones se complica cuando  $f(x)$  es, por ejemplo, un cociente de dos funciones,  $f(x) = g(x)/h(x)$ , y queremos calcular el límite en un punto en que ambas,  $g$  y  $h$ , se anulan o divergen, por lo que no podemos utilizar la propiedad descrita en la ecuación (2.15d). Estos casos deben estudiarse con sumo cuidado. En los cursos de Análisis Matemático se verán técnicas especiales para su cálculo. Ahora solo estudiaremos un caso particular, que resulta instructivo y nos será de utilidad en breve. Tomemos la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad (2.17)$$

que, para  $x \neq 0$ , es el cociente de dos funciones continuas que cumplen

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x) = 0, \quad (2.18)$$

y hemos incluido el punto  $f(0) = 1$  arbitrariamente (a *posteriori* justificaremos este valor) para que  $f$  esté definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

En la figura 2.9 podemos distinguir 3 áreas en orden creciente:  $A_a < A_b < A_c$ , cuyos valores podemos calcular:

(a)  $A_a$  es el área de un triángulo rectángulo de lados  $(1, \cos(x), \sin(x)) \Rightarrow A_a = \cos(x) \sin(x)/2$ .

(b)  $A_b$  es el área de un sector circular de radio  $R = 1$  y abertura  $x \Rightarrow A_b = x/2$ .

(c)  $A_c$  es el área de un triángulo rectángulo de lados  $(1/\cos(x), 1, \tan(x)) \Rightarrow A_c = \tan(x)/2$ .

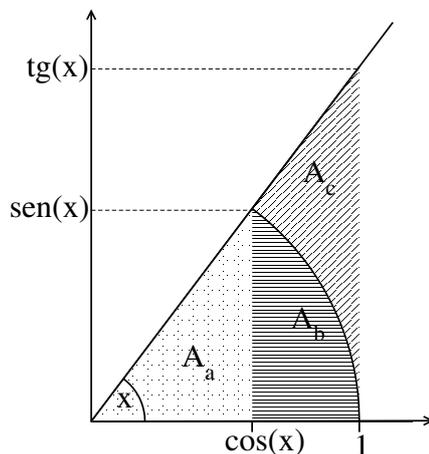


Figura 2.9: Áreas  $A_a$  (punteada)  $< A_b$  (punteada+rayada horizontal)  $< A_c$  (punteada+rayada horizontal+rayada oblicua).

Como  $A_a < A_b < A_c$ , tenemos que

$$\frac{1}{2} \cos(x) \sin(x) < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan(x),$$

multiplicando por 2 y dividiendo estas desigualdades por  $\sin(x)$  (que es no nulo y positivo para valores pequeños de  $x > 0$ ),

$$\cos(x) < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)},$$

invirtiendo los cocientes, lo cual invierte las desigualdades, obtenemos

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1,$$

entonces, por la propiedad (2.16), concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1. \quad (2.19)$$

Además, como tomamos  $f(0) = 1$  en la ecuación (2.17), tenemos que  $f(x)$  así definida resulta continua en  $x = 0$ , como se muestra en la figura 2.10.

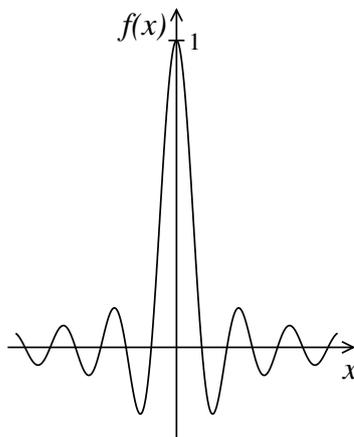


Figura 2.10: Gráfico de la función definida por la ecuación (2.17).

## SECCIÓN 2.4

# Derivadas

Ya hemos visto en la sección 2.2 el concepto geométrico de recta tangente a una función en un punto  $x_0$  como límite de las rectas secantes que cortan la curva en  $y(x_0)$  e  $y(x_0 + \Delta x)$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Introduciremos ahora un nuevo concepto matemático que formaliza y amplía estas ideas, *la derivada* de una función.

### 2.4.1. Definición de derivada

Supongamos que tenemos una función  $y$  de la variable independiente  $x$ ,  $y = y(x)$ , definimos la derivada de  $y(x)$  respecto de  $x$  en un dado punto  $x_0$  como

$$\frac{dy}{dx}(x_0) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (2.20)$$

donde  $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$ . El número así obtenido es el límite para  $\Delta x \rightarrow 0$  de las pendientes de las rectas secantes a  $y(x)$  entre los puntos  $(x_0, y(x_0))$  y  $(x_0 + \Delta x, y(x_0 + \Delta x))$ , entonces es la pendiente de la recta tangente a  $y(x)$  en el punto  $x = x_0$ .

Claramente podemos calcular este límite en cualquier punto del dominio de  $y(x)$ , y si este existe,

definimos la *función* derivada de  $y$  respecto de  $x$  como

$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (2.21)$$

Una vez definida, calculemos como ejemplo la derivada de

$$y(x) = \sqrt{\text{sen}^2[\ln(x)] + \frac{x+2}{x-2}}, \quad (2.22)$$

que, aplicando (2.21) resulta

$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\text{sen}^2[\ln(x + \Delta x)] + \frac{x + \Delta x + 2}{x + \Delta x - 2}} - \sqrt{\text{sen}^2[\ln(x)] + \frac{x+2}{x-2}}}{\Delta x}. \quad (2.23)$$

O no, mejor no intentemos calcular este límite, aprendamos primero reglas de derivación y las derivadas de algunas funciones, ¡y veremos que operativamente nunca usaremos la definición, ecuación (2.21) para derivar funciones como esta!

## 2.4.2. Reglas de derivación

Obtengamos a continuación algunas reglas para calcular derivadas.

a) Derivada de una función multiplicada por una constante:

Supongamos que tenemos una constante  $C$  y una función  $f(x)$  y queremos calcular derivada de  $y(x) = Cf(x)$ . Aplicando la definición de derivada tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Cf(x + \Delta x) - Cf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C \frac{df}{dx}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde hemos usado la propiedad (2.15a) de límite. Entonces:

*La derivada de una función multiplicada por una constante es la constante multiplicada por la derivada de la función.*

b) Derivada de una suma de funciones:

Sea  $y(x) = f(x) + g(x)$ , entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx},
\end{aligned} \tag{2.25}$$

donde hemos usado la propiedad (2.15b) de límite. Entonces:

*La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones.*

c) Derivada de un producto de dos funciones:

Sea la función  $y(x) = f(x)g(x)$ . Su derivada será

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x},$$

sumando y restando  $f(x)g(x + \Delta x)$  en el numerador, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x) \\
&= \frac{df}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg}{dx},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

donde hemos usado las propiedades (2.15b) y (2.15c) de límite. Entonces:

*La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda.*

d) Derivada de la función compuesta:

Sean las funciones  $z = z(y)$  e  $y = y(x)$ , definimos la función de la variable  $x$ ,  $z$  compuesta con  $y$ , como  $z[y(x)]$ . La pregunta que nos hacemos es, asumiendo conocidas

$$\frac{dz(y)}{dy}; \frac{dy(x)}{dx},$$

¿cuál es la derivada de la función compuesta  $z[y(x)]$  respecto de  $x$ ? Haremos el cálculo utilizando la definición:

$$\frac{dz[y(x)]}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z[y(x + \Delta x)] - z[y(x)]}{\Delta x},$$

multiplicando y dividiendo esta expresión por  $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ , obtenemos

$$\frac{dz[y(x)]}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z[y(x + \Delta x)] - z[y(x)]}{\Delta y} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x},$$

aplicando la propiedad del límite (2.15c), usando que  $\Delta y \rightarrow 0$  para  $\Delta x \rightarrow 0$  tenemos

$$\frac{dz[y(x)]}{dx} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z(y + \Delta y) - z(y)}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{dz(y)}{dy} \frac{dy(x)}{dx}. \quad (2.27)$$

Podemos generalizar para el caso de una composición de más de dos funciones, es decir, supongamos una función  $f = f\{g[h(j \dots (y(x)) \dots)]\}$ , la derivada será:

$$\frac{df\{g[h(j \dots (y(x)) \dots)]\}}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(h)}{dh} \frac{dh(j)}{dj} \dots \frac{dy(x)}{dx} \quad (2.28)$$

Esta regla de derivación se denomina *regla de la cadena*.

e) Derivada del cociente de dos funciones:

Podríamos calcularla como en los casos anteriores utilizando la definición (2.21) (dejamos a quien tenga curiosidad que realice esta cuenta). Aquí usaremos un camino más simple: primero aprenderemos la derivada de  $y(x) = 1/x$  y aplicaremos la regla de la derivada de la función compuesta para obtener la derivada de un cociente. Veremos entonces esta regla en la siguiente subsección.

### 2.4.3. Derivadas de funciones simples

Calcularemos ahora derivadas de funciones que usamos frecuentemente.

1.  $y(x) = x^0 = 1$ :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0,$$

que, junto con la regla (2.24) nos dice que si  $C$  es una constante, entonces

$$\frac{dC}{dx} = 0. \quad (2.29)$$

2.  $y(x) = x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

entonces

$$\frac{dx}{dx} = 1. \quad (2.30)$$

3.  $y(x) = x^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x. \quad (2.31)$$

Este resultado también puede obtenerse aplicando la regla del producto dada por la ecuación (2.26), con  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x \Rightarrow x^2 = fg$ , y la derivada de  $x$ , ecuación (2.30), así

$$\frac{dx^2}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

4.  $y(x) = x^3$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{dx^3}{dx} = 3x^2. \quad (2.32)$$

Similar al caso anterior, podemos obtener este resultado aplicando la regla del producto, ahora con  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x \Rightarrow x^3 = fg$ , junto a las derivadas ya calculadas, ecuaciones (2.30) y (2.31), así

$$\frac{dx^3}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

5.  $y(x) = x^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ :

Se puede obtener esta derivada usando la definición (2.21), pero como veremos, una vez aprendidas las reglas generales y las derivadas de las funciones elementales, usaremos muy pocas veces la definición para calcular derivadas (como ya hicimos al aplicar la regla del producto para derivar potencias cuadráticas y cúbicas). En particular, en este caso notamos que las ecuaciones (2.29-2.32) parecen insinuar que al derivar  $x^n$  “baja” la potencia  $n$  y se reduce en 1 la potencia de  $x$ , esto es, intuimos que

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}. \quad (2.33)$$

Esta fórmula contempla los casos ya calculados de  $x^n$ ,  $n = 0, \dots, 3$ , pero de aquí a decir que vale para todo  $n$  natural hay un gran paso y debemos probar que sea cierta. Para esto aprenderemos

un método muy interesante y muy útil para probar propiedades sobre los números naturales: *la demostración por inducción matemática*. Veremos aquí la idea intuitiva, y dejaremos su estudio en profundidad para los cursos de Álgebra. La idea es simple: si queremos probar una propiedad (no importa cómo la conocimos) para todo número natural, entonces probamos esta propiedad para  $n = 1$ , la asumimos válida para un número natural arbitrario  $n$ , y la demostramos para el número natural  $n + 1$ . Si logramos esto, la propiedad **debe** ser válida para todo número natural.

Probaremos ahora, utilizando inducción matemática, que la ecuación (2.33) es válida para todo número natural. Ya probamos explícitamente el caso  $n = 1$  (ecuación (2.30)), asumimos ahora que (2.33) es válida para  $n$ , debemos entonces verificar su validez para  $n + 1$ :

$$\frac{dx^{n+1}}{dx} = \frac{d(x^n x)}{dx} = \frac{dx^n}{dx} x + x^n \frac{dx}{dx} = nx^{n-1} x + x^n 1 = (n+1)x^n,$$

donde para llegar a la segunda igualdad usamos la regla de derivada de un producto, y para la siguiente igualdad usamos la ecuación (2.30). Esto completa la demostración. Si tenemos en cuenta la ecuación (2.29) tenemos que (2.33) es válida para  $n \in \mathbb{N} + \{0\}$ .

6.  $y(x) = 1/x = x^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x-x-\Delta x}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2 + x\Delta x} = -\frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d1/x}{dx} = \frac{dx^{-1}}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}. \quad (2.34)$$

7.  $y(x) = 1/x^n = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

Para obtener esta derivada, definimos  $g(h) = 1/h$  y  $h(x) = x^n$ , así  $y(x) = g[h(x)]$  y podemos usar la regla de la derivada de composición de funciones (2.27):

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dg(h)}{dh} \frac{dh(x)}{dx} = -\frac{1}{h^2(x)} nx^{n-1} = -\frac{1}{x^{2n}} nx^{n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-(n+1)},$$

esto es, podemos generalizar el resultado (2.33):

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.35)$$

8.  $y = x^{1/n}$ :

Elevando ambos lados a la potencia  $n$ ,  $y^n = x$ , definiendo  $h(y) = y^n$  y derivando a ambos lados esta ecuación, podemos nuevamente aplicar la regla de la función compuesta:

$$\frac{dh[y(x)]}{dx} = \frac{dh(y)}{dy} \frac{dy(x)}{dx} = ny^{n-1} \frac{dy(x)}{dx} = nx^{(n-1)/n} \frac{dy(x)}{dx} = 1,$$

despejando  $dy/dx$  obtenemos

$$\frac{dx^{1/n}}{dx} = \frac{1}{n} x^{(1/n)-1}; \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.36)$$

Recordar que  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ , por lo que la ecuación (2.36) es la regla de derivación para raíces  $n$ -ésimas.

9.  $y = x^{\frac{m}{n}}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ :

Podemos generalizar el caso anterior a potencias racionales,  $y = x^{\frac{m}{n}}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Nuevamente podemos elevar esta igualdad a la potencia  $n \Rightarrow y^n = x^m$ , y utilizando la misma técnica que en el punto anterior, definimos  $h(y) = y^n$  y derivamos a ambos lados esta ecuación, aplicando la regla de la función compuesta:

$$\frac{dh[y(x)]}{dx} = \frac{dh(y)}{dy} \frac{dy(x)}{dx} = ny^{n-1} \frac{dy(x)}{dx} = nx^{m(n-1)/n} \frac{dy(x)}{dx} = mx^{m-1},$$

despejando  $dy/dx$  obtenemos

$$\frac{dx^{m/n}}{dx} = \frac{m}{n} x^{(m/n)-1}; \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (2.37)$$

Entonces la ecuación (2.37) nos dice que la regla de derivación de una potencia de  $x$  vale para todo número racional. ¿Valdrá entonces para todo número real? La respuesta es **sí**, y si bien la demostración requiere conocimientos de límite que aún no tenemos, igualmente enunciaremos la regla de derivada de una potencia real de  $x$ :

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}; \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.38)$$

10.  $y = \text{sen}(x)$ :

Dejemos ahora las potencias de  $x$ , y veamos derivadas de funciones trigonométricas, comenzando por  $y(x) = \text{sen}(x)$ , recurriremos nuevamente a la definición de derivada:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x},$$

utilizando la identidad trigonométrica para el ángulo suma,  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \text{sen}(\beta)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d \text{sen}(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \cos(\Delta x) + \cos(x) \text{sen}(\Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \cos(x) \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} + \text{sen}(x) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \right], \end{aligned}$$

utilizando en el segundo término la identidad trigonométrica para el ángulo mitad,  $2 \text{sen}^2(\alpha/2) = 1 - \cos(\alpha)$  obtenemos

$$\frac{d \text{sen}(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \cos(x) \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} - 2 \text{sen}^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\text{sen}(x)}{\Delta x} \right],$$

multiplicando y dividiendo por  $\Delta x/4$  el segundo miembro,

$$\begin{aligned} \frac{d \text{sen}(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \cos(x) \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} - 2 \frac{\text{sen}(x)}{\Delta x} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x}{\frac{\Delta x}{4} \cdot 4} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \cos(x) \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{1}{2} \text{sen}(x) \left( \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \right)^2 \Delta x \right], \end{aligned} \quad (2.39)$$

utilizando ahora las propiedades del límite enumeradas en la sección 2.3.1,

$$\frac{d \operatorname{sen}(x)}{dx} = \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \left[ \frac{\operatorname{sen}(\frac{\Delta x}{2})}{(\frac{\Delta x}{2})} \right]^2 \Delta x \right\}, \quad (2.40)$$

usando también la ecuación (2.19):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1,$$

tenemos que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \left[ \frac{\operatorname{sen}(\frac{\Delta x}{2})}{(\frac{\Delta x}{2})} \right]^2 \Delta x \right\} = \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\Delta x}{2})}{(\frac{\Delta x}{2})} \right]^2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0,$$

usando estos resultados en (2.40) obtenemos finalmente,

$$\frac{d \operatorname{sen}(x)}{dx} = \cos(x). \quad (2.41)$$

#### 11. $y = \cos(x)$

Ahora calculemos la derivada de la función  $y(x) = \cos(x)$ , podemos calcular esta derivada por definición, con un esfuerzo similar al realizado para obtener la derivada del  $\operatorname{sen}(x)$ . Pero, como ya dijimos, siempre que sea posible evitaremos el cálculo por definición. Así, usando las relaciones trigonométricas  $\cos(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$ ,  $\operatorname{sen}(x) = -\cos(x + \pi/2)$ , tenemos que

$$\frac{d \cos(x)}{dx} = \frac{d \operatorname{sen}(x + \pi/2)}{dx} = \cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen}(x). \quad (2.42)$$

Dejamos como ejercicio reobtener este resultado partiendo de la bien conocida relación  $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ .

#### 12. Finalmente, sin demostración, daremos también las derivadas de las funciones logaritmo y exponencial,

$$\frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{d e^x}{dx} = e^x. \quad (2.43)$$

Volvemos ahora a las reglas de derivación. En la sección 2.4.2 no calculamos la derivada de un cociente de funciones porque no habíamos aún calculado la derivada de  $y(x) = 1/x$ .

e) Derivada del cociente de dos funciones:

Aplicaremos ahora la derivada de la función compuesta para calcular la derivada de un cociente de funciones  $y(x) = f(x)/g(x)$ . Para esto usamos la función  $h(g) = 1/g$ , así  $y(x) = f(x)h(g(x))$ . Usamos primero la regla del producto de dos funciones,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\{f(x)h[g(x)]\}}{dx} = \frac{df(x)}{dx}h[g(x)] + f(x)\frac{dh[g(x)]}{dx}, \quad (2.44)$$

por la regla de derivada de la función compuesta tenemos que

$$\frac{dh[g(x)]}{dx} = \frac{dh(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{1}{g^2} \frac{dg(x)}{dx}, \quad (2.45)$$

reemplazando (2.45) en (2.44) y poniendo un denominador común  $g^2$  obtenemos finalmente

$$\frac{d[f(x)/g(x)]}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx}g(x) - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)}. \quad (2.46)$$

Entonces:

*La derivada de un cociente de funciones es la derivada de la de arriba por la de abajo menos la de arriba por la derivada de la de abajo dividido el cuadrado de la de abajo.*

Dejamos como ejercicio aplicar esta regla para obtener la derivada de  $y(x) = \tan(x) = \text{sen}(x)/\cos(x)$ .

Ahora sí estamos en condiciones de calcular la derivada de la función (2.22),

$$y(x) = \sqrt{\text{sen}^2[\ln(x)] + \frac{x+2}{x-2}},$$

Lo que debemos hacer es definir nuevas funciones que nos permitan aplicar las reglas y casos ya conocidos:

$$\begin{aligned} f(g) &= \sqrt{g}; \quad g(x) = \text{sen}^2[\ln(x)] + \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow \\ y(x) &= f[g(x)] \Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

la primera derivada es (2.38) con  $\alpha = 1/2$ , mientras que  $g(x)$  es la suma de dos funciones

$$\begin{aligned} g(x) &= h(x) + i(x); \quad h(x) = \text{sen}^2(\ln(x)); \quad i(x) = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow \\ \frac{dg(x)}{dx} &= \frac{dh(x)}{dx} + \frac{di(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

definiendo  $k(x) = \ln(x)$  podemos aplicar la regla de la función compuesta a  $h(x) = h(k(x))$ , mientras que a  $i(x)$  la regla de derivada de un cociente,

$$\begin{aligned} \frac{dh(k)}{dk} &= \frac{d \text{sen}^2(k)}{dk} = 2 \text{sen}(k) \cos(k); \\ \frac{dk(x)}{dx} &= \frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}; \\ \frac{di(x)}{dx} &= \frac{d \frac{x+2}{x-2}}{dx} = -\frac{4}{(x-2)^2}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Juntando los resultados obtenidos en las ecuaciones (2.47) a (2.49) obtenemos finalmente

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{2y(x)} \left( \frac{2 \cos[\ln(x)] \operatorname{sen}[\ln(x)]}{x} - \frac{4}{(x-2)^2} \right). \quad (2.50)$$

Mostrando con este ejemplo que, con cuidado y con paciencia, podemos utilizar el conjunto de reglas simples aprendidas para calcular las derivadas de funciones muy complicadas.

Resumimos en la tabla 2.1 las derivadas obtenidas en esta sección.

$y(x)$	$y'(x)$
$C f(x)$	$C f'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) g(x)$	$f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$
$f(x)/g(x)$	$[f'(x) g(x) - f(x) g'(x)]/g^2(x)$
$f(g(x))$	$f'(g) g'(x)$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
$e^x$	$e^x$
$\ln(x)$	$1/x$

Tabla 2.1: Tabla de derivadas (la prima significa derivación respecto al argumento de la función).

Cerraremos esta sección con una breve discusión sobre distintas notaciones usadas en derivación de funciones,

- Una notación muy usada para la derivada de  $y(x)$  es

$$y'(x) \equiv \frac{dy(x)}{dx}. \quad (2.51)$$

- En Física se suele usar (aunque no lo haremos aquí) una notación particular cuando la derivada de una función es **específicamente** respecto del tiempo:

$$\dot{f}(t) \equiv \frac{df(t)}{dt}. \quad (2.52)$$

- Si queremos la derivada de  $y(x)$  en un punto dado  $x_0$  es **incorrecto** usar como notación  $\frac{dy(x_0)}{dx}$  ya que esto significa “primero evalúe  $y(x)$  en el punto  $x_0$  y luego derive”, lo que, trivialmente, siempre da cero. Notaciones equivalentes usadas para la derivada de una función valuada en un punto dado son:

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=x_0}; \quad \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x_0}; \quad y'(x_0); \quad \frac{dy}{dx}(x_0), \quad (2.53)$$

en todos los casos estas notaciones indican claramente la operación correcta: primero derivar  $y(x)$ , luego evaluar la función derivada en  $x_0$ .

- La derivada de la función derivada de  $y(x)$  es también una función que llamamos *derivada segunda de y respecto de x dos veces*, y la denotamos

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = y''(x), \quad (2.54)$$

y podemos continuar con derivada tercera, cuarta, ...,  $n$ -ésima, que se denotan como

$$\frac{d^ny(x)}{dx^n} = y^{(n)}(x). \quad (2.55)$$

## SECCIÓN 2.5

# Análisis de gráficos de funciones

En Física resulta importante analizar las funciones que describen cualquier fenómeno que querramos estudiar, por ejemplo, en cinemática, la función de movimiento  $x(t)$  o la velocidad  $v(t)$ . Resulta muy útil visualizar estas funciones para tener una idea cualitativa del fenómeno físico en cuestión. Para esto, dada una función  $f(x)$  buscamos saber

- Si es continua, o en qué puntos es discontinua y qué valores toma en las discontinuidades.
- Si tiene máximos y mínimos.
- Si tiene ceros, esto es, puntos  $x / f(x) = 0$ .
- Intervalos donde la función es positiva e intervalos donde es negativa.
- Puntos en que la función no está definida, en particular, si tiene divergencias.

- Si su dominio es  $\mathbb{R}$ , a qué valores tiende para  $x \rightarrow \pm\infty$ , o cuánto vale en los extremos del intervalo si su dominio es finito.
- Posible existencia de asíntotas.

Ya conocemos gráficos de algunas funciones, por ejemplo

1. La función lineal  $f(x) = a_1x + a_0$ ;  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ ;  $a_1 \neq 0$ , sabemos que no tiene máximos ni mínimos, y tiene un y solo un cero,  $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = -a_0/a_1$ , además  $f(x=0) = a_0$ , por lo que denominamos  $a_0$  como *ordenada al origen*.
2. La función cuadrática o parábola  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $a \neq 0$ . Sabemos que es una parábola con ramas hacia arriba (abajo) si  $a > 0$  ( $a < 0$ ), que tiene un mínimo (máximo) en  $x_m = -b/(2a)$  y sus ceros son dados por la famosa expresión  $x_{\pm} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$ , por lo que tendrá dos ceros distintos si  $b^2 - 4ac > 0$ , un cero (de multiplicidad 2) si  $b^2 - 4ac = 0$ , y no tendrá ceros si  $b^2 - 4ac < 0$ .

El análisis del gráfico de estas dos funciones lo hicimos utilizando conocimientos previos, sin necesidad de recurrir a las derivadas, pero, como veremos, resultan una poderosa herramienta para el análisis de gráficos de funciones en general.

Recordemos que el valor de la derivada de una función en un punto dado es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto. Así, como se puede observar en la figura 2.11, cuando una función con derivada definida en todo su dominio es creciente en un intervalo, vemos que en todo punto del mismo la recta tangente tiene pendiente positiva, por lo que el valor de la derivada de la función en dicho intervalo es positivo. De igual manera, cuando la función es decreciente en un dado intervalo, la derivada es negativa en ese intervalo. Entonces un intervalo con derivada positiva **debe** estar separado de uno con derivada negativa por un punto donde la derivada es nula, esto es, la pendiente de la recta tangente se anula, y estos puntos serán máximos o mínimos de nuestra función.

Pero existen puntos con derivada nula que no son máximos ni mínimos, donde la derivada conserva el signo en un entorno del punto de derivada nula. Estos puntos se denominan *puntos de inflexión*. También puede suceder que una función no tenga derivada en todo punto. Definiremos **puntos críticos de una función** como los *puntos donde su derivada es cero o no existe*.

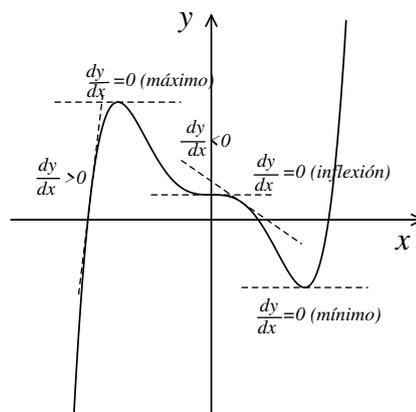


Figura 2.11: Gráfico de una función  $y(x)$  donde se muestra el comportamiento de su derivada.

Comenzaremos analizando funciones cuyo dominio es  $\mathbb{R}$  y con derivada y derivada segunda definidas en todo punto, en este caso los únicos puntos críticos, candidatos a ser máximos o mínimos, son los

puntos donde la derivada se anula. Sea  $x_c$  un punto crítico de  $y(x)$ , para determinar si corresponde a un máximo, mínimo o punto de inflexión debemos analizar el comportamiento de la función derivada  $y'(x)$  en un entorno del punto crítico  $x_c$ . Notamos que como hacemos un estudio *local* de la función (esto es, en un entorno del punto crítico) llamaremos a estos máximos y mínimos, máximos y mínimos locales, lo cual significa que nada decimos sobre valores mayores o menores de la función en otros puntos de su dominio. Si la función posee un valor máximo (mínimo) global, esto es, en todo su dominio, denominaremos a su abscisa, máximo (mínimo) absoluto.

### Determinación de máximos

Si  $x_c$  corresponde a un *máximo local* de  $y(x)$ , como se muestra en la figura 2.12, entonces la función es creciente para valores de  $x < x_c$  e  $y'(x)$  debe ser positiva. Para valores de  $x > x_c$ ,  $y(x)$  debe ser decreciente por lo que  $y'(x)$  será negativa. Esto es, cualitativamente  $y'(x)$  tendrá el aspecto mostrado en el gráfico derecho de la figura 2.12. Así, si  $x_c$  es un máximo,  $y'(x)$  es **decreciente** en un entorno de  $x_c$ , por lo que su derivada, que es la derivada segunda de  $y(x)$  será negativa o nula,  $y''(x_c) \leq 0$ .

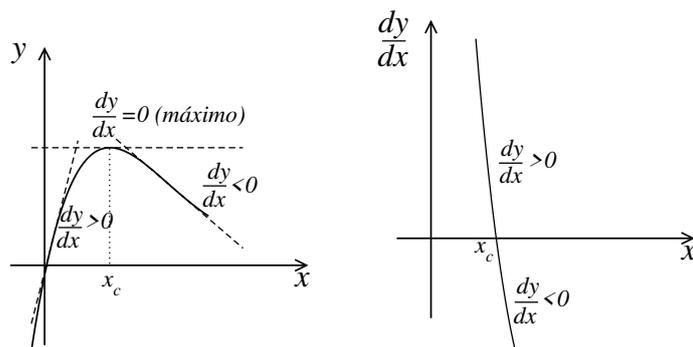


Figura 2.12:  $y(x)$  tiene un máximo en  $x = x_c$ , donde su derivada se anula.

### Determinación de mínimos

Si  $x_c$  corresponde a un *mínimo local* de  $y(x)$ , como se muestra en la figura 2.13, entonces la función es decreciente para valores de  $x < x_c$  e  $y'(x)$  será negativa. Para valores de  $x > x_c$ ,  $y(x)$  debe ser creciente por lo que  $y'(x)$  será positiva. Esto es, cualitativamente  $y'(x)$  tendrá el aspecto mostrado en el gráfico de la derecha de la figura 2.13. Así, si  $x_c$  es un mínimo,  $y'(x)$  es **creciente** en un entorno de  $x_c$ , por lo que su derivada, que es la derivada segunda de  $y(x)$  será positiva o nula,  $y''(x_c) \geq 0$ .

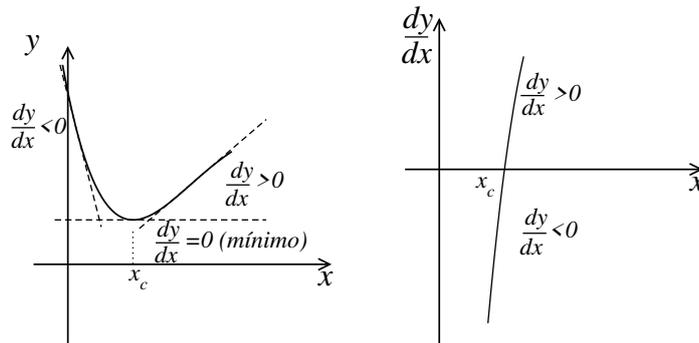


Figura 2.13:  $y(x)$  tiene un mínimo en  $x = x_c$ , donde su derivada se anula.

### Puntos de inflexión

Finalmente, podemos tener una función cuya derivada se anule en  $x = x_c$  y que sea creciente para  $x < x_c$  y para  $x > x_c$ , como se muestra en el gráfico de la izquierda de la figura 2.14. La función  $y'(x)$  será cualitativamente como la mostrada en el gráfico de la derecha de la figura 2.14, por lo que tendremos en este caso que  $y''(x_c) = 0$ .

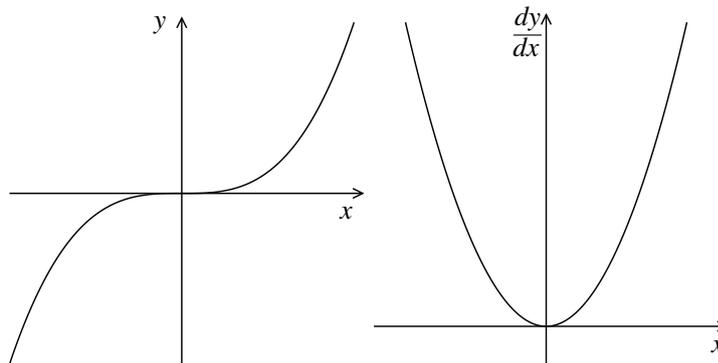


Figura 2.14:  $y(x) = x^3$  tiene un punto de inflexión en  $x_c = 0$ , donde su derivada se anula, pero sin cambiar de signo.

Resumiendo: si en un punto crítico  $x_c$  la derivada segunda es

- negativa, entonces  $x_c$  es un máximo.
- positiva, entonces  $x_c$  es un mínimo.
- nula, todavía no podemos asegurar nada, podría ser un máximo (ejemplo:  $y(x) = -x^4$ ), un mínimo (ejemplo:  $y(x) = x^4$ ), o un punto de inflexión (ejemplo:  $y(x) = x^3$ ). En los tres ejemplos dados tenemos que  $x_c = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 0$ . ¿Qué debemos hacer en este caso?: derivar hasta obtener la primera derivada no nula en  $x = x_c$ , digamos  $y'''(x_c) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_c) = 0$ ;  $y^{(n)}(x_c) \neq 0$ , entonces
  - i) Si  $n$  es par,  $x_c$  es un máximo si  $y^{(n)}(x_c) < 0$  y un mínimo si  $y^{(n)}(x_c) > 0$ .
  - ii) Si  $n$  es impar,  $x_c$  es un punto de inflexión.

En el caso de funciones con derivada segunda continua, muchas veces podemos deducir algunos comportamientos sin necesidad de calcular dicha derivada.

Con esto concluimos el análisis de puntos críticos de funciones “bien comportadas”, esto es, que estén bien definidas todas las derivadas necesarias en  $x = x_c$ .

A modo de ejemplo, busquemos los máximos o mínimos de las funciones lineal y cuadrática ya analizadas, utilizando ahora derivadas:

a) La función lineal  $y(x) = a_1 x + a_0$ ;  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ ;  $a_1 \neq 0$ , cuya derivada es  $y'(x) = a_1 \forall x$ , así, la función y su derivada son continuas en todo punto y la derivada no tiene ceros, por lo que la función lineal, como ya vimos, no tiene ni máximos ni mínimos.

b) La función cuadrática o parábola  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$ , cuya derivada es  $y'(x) = 2ax + b$ , o sea una función lineal, la cual, como sabemos, tiene un único cero en  $x_c = -b/(2a)$ . Además  $y''(x) = 2a$ , por lo que  $x_c$  será un máximo si  $a < 0$  y un mínimo si  $a > 0$ . Notar que podríamos haber obtenido la misma conclusión sin calcular la derivada segunda, simplemente diciendo: si las ramas de la parábola son hacia arriba y tiene un punto crítico, este **debe** ser un mínimo (se puede seguir un razonamiento análogo para  $a < 0$ ).

Analicemos ahora una función un poco más complicada:  $y(x) = 3 + 2x - x^2/2 - 2x^3/3 + x^4/4$ , que es un polinomio de cuarto grado. Como el término de mayor orden es  $x^4/4$ , tenemos que  $y(x) \rightarrow \infty$  para  $x \rightarrow \pm\infty$ , esto es, la función tiene ramas hacia arriba para valores grandes de  $x$ . Como es bien comportada, los puntos críticos solo pueden estar en puntos donde se anula la derivada,

$$\frac{dy}{dx}(x) = 2 - x - 2x^2 + x^3 = 2(1 - x^2) + x(-1 + x^2) = (x^2 - 1)(x - 2), \quad (2.56)$$

cuyos ceros son los tres puntos críticos:  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = 2$ . Calculamos la derivada segunda:  $y''(x) = -1 - 4x + 3x^2 \Rightarrow y''(x_1) = 6 > 0$ , y por lo tanto  $x_1$  es un mínimo,  $y''(x_2) = -2 < 0$ , correspondiendo a un máximo, por último  $y''(x_3) = 3 > 0$ , que es un mínimo. Además  $y(-1) = 17/12$ ;  $y(1) = 49/12$ ;  $y(2) = 11/3$ ; así, el mínimo global es  $x_1$ , por lo que la función no tiene ceros.  $x_2$  es un máximo local y  $x_3$  un mínimo local. Finalmente, la ordenada al origen es  $y(0) = 3$ . Con esto tenemos todos los datos necesarios para hacer el gráfico mostrado en la figura 2.15.

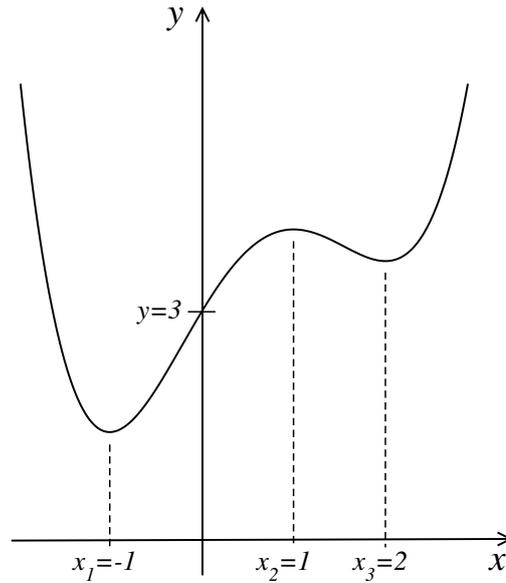


Figura 2.15:  $y(x) = 3 + 2x - x^2/2 - 2x^3/3 + x^4/4$ .

Ya sabemos cómo graficar funciones bien comportadas, además sabemos que los puntos donde la función no es derivable también son críticos. Veamos un ejemplo.

Sea la función  $y(x) = |x|$ , cuya derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \\ \text{no está definida en } x = 0 \end{cases} . \quad (2.57)$$

Ambas funciones son mostradas en la figura 2.16. El único punto crítico de  $y(x)$  es el punto donde la derivada no está definida,  $x_c = 0$ , y como  $|x| \geq 0$ , donde la igualdad vale solo para  $x = 0$ , tenemos que  $x_c = 0$  corresponde a un mínimo.

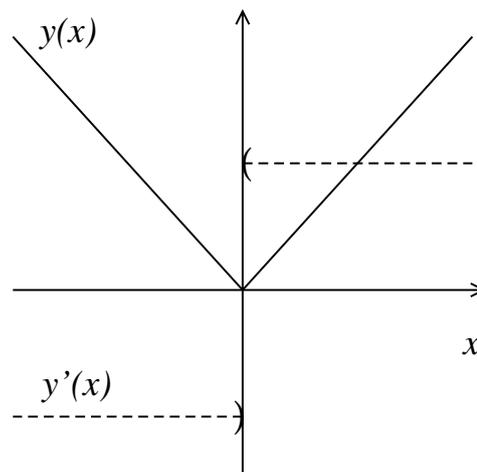


Figura 2.16:  $y(x) = |x|$  (línea continua) y su derivada (línea cortada). Los paréntesis simbolizan los intervalos abiertos donde  $y'$  está definida.

### Funciones con asíntotas

Debemos comenzar por decir qué es una *asíntota*. Más que una definición rigurosa, daremos una idea de su significado: una *línea recta* es asíntota de una función  $f(x)$  si para un dado valor  $x = x_a$  (que puede ser  $\pm\infty$ ) la función se aproxima tanto como querramos a la recta, pero sin llegar nunca a tocarla. Las rectas asíntotas puede ser verticales, horizontales u oblicuas. Veamos ejemplos de los tres casos.

#### 1) Función con asíntotas verticales y horizontal

Los gráficos de funciones que divergen para algún valor finito de  $x$  muestran asíntotas verticales en dicho valor. Ejemplos de este comportamiento son las funciones racionales, esto es, funciones que son un cociente de polinomios, que tendrán asíntotas verticales en los casos en que el denominador tenga al menos un cero que no es cero del numerador. Analicemos el gráfico de la función

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 1}. \quad (2.58)$$

$y(x)$  no está definida en  $x = \pm 1$ , cuyos límites son

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} y(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = +\infty. \quad (2.59)$$

Estas divergencias en  $x = \pm 1$  definen dos **asíntotas verticales**, como se muestra en la figura 2.17. Además, resulta claro que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y(x) = 0^+, \quad (2.60)$$

que nos dice que el eje  $x$  es una asíntota horizontal. Busquemos máximos y/o mínimos locales,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x_c = 0. \quad (2.61)$$

evaluamos la derivada segunda en  $x_c$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_c} = \frac{2 + 6x^2}{(x^2 - 1)^3} \Big|_{x=x_c} = -2, \quad (2.62)$$

$y''(0) < 0 \Rightarrow x_c = 0$  es un máximo local con  $y(0) = -1$ . Con todos estos datos estamos en condiciones de obtener el gráfico mostrado en la figura 2.17.

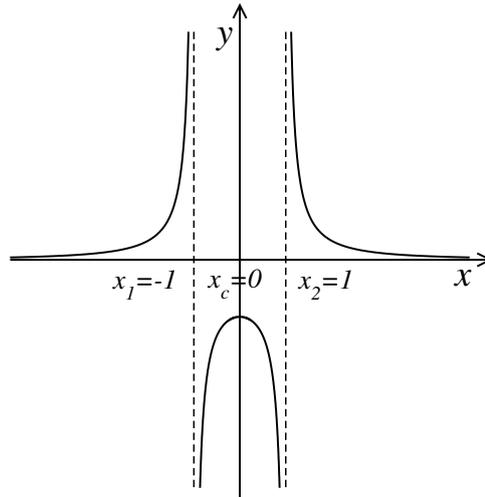


Figura 2.17: Gráfico de  $y(x) = 1/(x^2 - 1)$ . Las líneas cortadas son asíntotas verticales, mientras que el eje  $x$  es una asíntota horizontal.

Notemos finalmente que podríamos haber realizado el gráfico de la figura 2.17 sin calcular la derivada segunda. Habría bastado el siguiente razonamiento:  $f(x)$  es continua en el intervalo abierto  $(-1, 1)$ . Además sabemos de la ecuación (2.59) que la función va a  $-\infty$  cuando  $|x| \rightarrow 1^-$ , por lo tanto el punto crítico  $x_c = 0$  **solo** puede ser un máximo, y no necesitamos el cálculo de la derivada segunda para poder asegurarlo.

Otra función que ya conocemos con (infinitas) asíntotas verticales, es la función  $y(x) = \tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ , dejamos como ejercicio obtener el gráfico de la misma utilizando las herramientas desarrolladas en esta sección.

## II) Función con asíntotas vertical y oblicua

Estudiemos ahora el comportamiento de la función

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}. \quad (2.63)$$

Primeramente observamos que la función **no** está definida en  $x = 0$ , y como el denominador del término divergente es  $x^2$ , que es siempre positivo, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad (2.64)$$

por lo que el eje  $y$  es una asíntota vertical. Además, vemos que para valores grandes de  $x$  el primer término,  $x$ , se hace, en módulo, grande, mientras el segundo,  $4/x^2$ , se hace pequeño, por lo que tenemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \quad (2.65)$$

Más aún, como  $4/x^2$  se hace cada vez más pequeño cuando  $|x|$  es grande, tendremos que  $f(x)$  se acerca cada vez más a la recta  $y(x) = x$ , por lo que decimos que la recta  $y = x$  es **asíntota oblicua** a la función  $f(x)$ . Falta determinar la posible existencia de máximos y mínimos. Para esto buscamos ceros de la derivada,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_c} = 1 - \frac{8}{x^3} \Big|_{x_c} = 0 \Rightarrow x_c = 2, \quad (2.66)$$

finalmente evaluamos la derivada segunda en  $x = x_c$ ,

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_c} = \frac{24}{x_c^4} = \frac{3}{2} > 0, \quad (2.67)$$

$x_c = 2$  es entonces un mínimo. Notar que podríamos deducir esto **sin** calcular  $f''$ , dado que  $f \rightarrow +\infty$  tanto para  $x \rightarrow 0$ , como para  $x \rightarrow +\infty$ , el punto crítico **solo** puede ser un mínimo. Finalmente damos los valores de la función en su mínimo,  $f(x_c = 2) = 3$  y de  $x^*$  definido por  $f(x^*) = 0$ :  $x^* = -4^{1/3} \simeq -1.5874$ . Juntando todos los datos, obtenemos el gráfico mostrado en la figura 2.18.

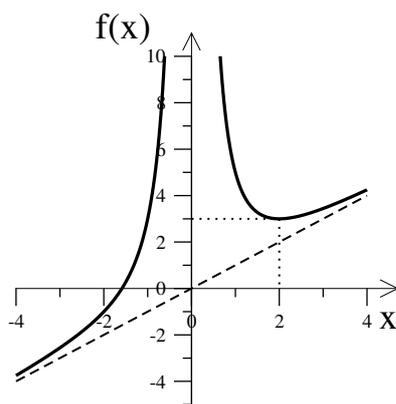


Figura 2.18: Gráfico de la función (2.63), mostrando la asíntota oblicua  $y(x) = x$  con una línea cortada y la posición de su mínimo con líneas punteadas.

## SECCIÓN 2.6

# Velocidad instantánea - parte II

Cerramos por ahora nuestro paréntesis matemático y regresamos al estudio de la cinemática de un cuerpo puntual sobre una recta. Podemos entonces completar la definición de velocidad instantánea (2.7):

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}, \quad (2.68)$$

o sea, *la velocidad instantánea es la derivada de la función de movimiento respecto al tiempo*. Notemos nuevamente que, dada  $x(t)$ , nunca calcularemos la velocidad instantánea usando la definición como un límite, sino usando las reglas aprendidas en las secciones anteriores, resumidas en la tabla 2.1.

Como ejemplos sencillos, calculemos la velocidad instantánea para dos tipos de movimiento ya estudiados,

- Función de movimiento lineal,  $x(t) = a_1 t + a_0$ ,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(a_1 t + a_0)}{dt} = \frac{da_1 t}{dt} + \frac{da_0}{dt} = a_1, \quad (2.69)$$

que es el resultado mostrado en la ecuación 2.4 obtenido para  $\bar{v}$  para todo par de instantes  $t_1, t_2$ , por lo que no debe sorprendernos que en este caso ambas magnitudes coincidan.

- Función de movimiento parabólica,  $x(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$ ,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(a_2t^2 + a_1t + a_0)}{dt} = \frac{da_2t^2}{dt} + \frac{da_1t}{dt} + \frac{da_0}{dt} = 2a_2t + a_1. \quad (2.70)$$

En este caso la velocidad instantánea depende del tiempo y resulta distinta a la velocidad media encontrada en la ecuación (2.6), que depende de  $t$  y  $\Delta t$ .

# 3

## Aceleración e Integración

### SECCIÓN 3.1

### Aceleración

Ya vimos que el movimiento de un cuerpo puntual sobre una línea recta en la cual definimos un sistema de coordenadas, puede ser descrito por la función de movimiento  $x(t)$ , es decir, la coordenada  $x$  del cuerpo en el tiempo  $t$ . Dijimos que  $x(t)$  tiene toda la información sobre el movimiento del cuerpo. En particular, en el capítulo anterior definimos la velocidad instantánea en la ecuación (2.68),

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}, \quad (3.1)$$

que cuantifica cómo cambia la posición del cuerpo con el tiempo.

En este capítulo definiremos la función aceleración, que caracteriza cómo un cuerpo varía su velocidad con el tiempo, con lo que se completa la caracterización del movimiento de un cuerpo puntual. Haciendo un análisis similar al realizado cuando definimos la velocidad de un cuerpo, podemos definir la aceleración media de un móvil como el cambio en la velocidad instantánea en un intervalo de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,

$$\bar{a}(t_1, \Delta t) \equiv \frac{v(t_2) - v(t_1)}{\Delta t} = \frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (3.2)$$

para luego definir la aceleración instantánea, o simplemente la aceleración de un cuerpo, como la derivada de la función velocidad con respecto al tiempo (notar que, dado que el instante  $t_1$  es arbitrario, podemos obviar el subíndice),

$$a(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}, \quad (3.3)$$

entonces, usando la definición de velocidad (3.1), podemos expresar la aceleración como la derivada con respecto al tiempo de la derivada con respecto al tiempo de la función de movimiento, es decir que la aceleración es la derivada segunda de la función de movimiento con respecto al tiempo dos veces,

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}. \quad (3.4)$$

Tenemos aquí otra magnitud cuyas unidades son derivadas a partir de otras, al igual de lo que ocurría con la velocidad,

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{[\ell]}{[t]^2} = \frac{m}{s^2} \text{ ó } \frac{km}{s^2} \text{ ó } \frac{km}{h^2} \text{ ó } \dots \quad (3.5)$$

La función aceleración es una función del tiempo y podríamos estudiar qué información nos da su derivada con respecto al tiempo y así seguir analizando otras derivadas de orden superior. Desde el punto de vista matemático podemos calcular derivadas de estas funciones mientras existan y estas derivadas nos darán información sobre el comportamiento de las funciones. Sin embargo desde el punto de vista físico sólo nos interesa hasta la derivada segunda de la función de movimiento, es decir que sólo llegaremos hasta la aceleración. Cuando analicemos la dinámica del movimiento de los cuerpos veremos que las causas que determinan el movimiento de un cuerpo (fuerzas) están relacionadas con la aceleración que adquiere dicho cuerpo.

## SECCIÓN 3.2

# Condiciones sobre las funciones de movimiento, velocidad y aceleración

Debemos tener siempre presente que la física es una ciencia experimental, y como ya discutimos, toda la evidencia que poseemos nos dice que la función de movimiento **debe ser** una función continua del tiempo. En base a esta misma información experimental sabemos que la función velocidad también **debe** ser continua.

¿Qué nos dice la evidencia experimental sobre la aceleración? Para analizar esto, pensemos en un ejemplo de la experiencia diaria. Sabemos que todos los cuerpos en la superficie de la Tierra sufren una aceleración dirigida hacia abajo (en realidad, hacia el centro de la Tierra), que es constante, independientemente del cuerpo en cuestión. Este hecho fue enunciado en el siglo XVI por Galileo, luego de su famoso experimento realizado en la torre de Pisa<sup>1</sup>. Dada la universalidad de esta aceleración, y su importancia en nuestra vida, designamos su módulo con una letra particular,

$$|a_g| = g \simeq 9,796 \text{ m/s}^2, \quad (3.6)$$

donde ese valor numérico fue medido en Córdoba en 2014 (aunque muchas veces se usan aproximaciones mas gruesas,  $g \simeq 9,8 \text{ m/s}^2$ , o incluso  $g \simeq 10,0 \text{ m/s}^2$ ). Notar que  $g$  representa el módulo de la aceleración gravitatoria en la superficie de la Tierra, ya que su signo dependerá de la definición del sistema de coordenadas.

Pensemos ahora en la siguiente situación, típica de la vida diaria: sostenemos un objeto con nuestra mano, esto es, está en reposo, por lo que tanto su velocidad como su aceleración son nulas. Definiendo

<sup>1</sup>Se dice que Galileo arrojó desde la torre de Pisa, de 57 m de altura, dos esferas de distinta masa y comprobó que caían juntas al suelo, pero no hay ninguna documentación que corrobore que haya realizado este experimento, por lo que algunos historiadores piensan que se trata en realidad de una leyenda forjada después de su muerte.

### 3.2. CONDICIONES SOBRE LAS FUNCIONES DE MOVIMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN 63

un sistema de coordenadas con origen en nuestra mano y sentido positivo hacia arriba, la aceleración del cuerpo debido a la gravedad será  $a = -g$ . En un instante que denominaremos  $t_1$  soltamos dicho cuerpo y en un instante posterior  $t_2 = t_1 + \Delta t$  medimos su velocidad, que será no nula, puesto que el cuerpo comienza a caer debido a la gravedad. Entonces

$$\bar{a}(t_1, \Delta t) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{\Delta t} = \frac{v(t_2)}{\Delta t} = -g \neq 0 \quad (3.7)$$

Este experimento puede realizarse con mucha precisión, para intervalos de tiempo  $\Delta t$  cada vez más chicos, obteniendo siempre el resultado (3.7); asumimos entonces que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \bar{a}(t_1, \Delta t) = -g; \quad (3.8)$$

esto es, la aceleración como función del tiempo resulta

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ -g & \text{si } t \geq t_1 \end{cases}, \quad (3.9)$$

así, en este caso,  $a(t)$  es discontinua en  $t = t_1$ .

Tenemos entonces que  $v(t)$  es una función continua, aunque su derivada  $a(t)$  puede no serlo. Por otro lado,  $x(t)$  es una función continua y su derivada  $v(t)$  también lo es. Esta condición es más fuerte que la condición de continuidad, y decimos que  $x(t)$  es una función *continuamente diferenciable*.

Por lo tanto, podemos concluir que las funciones que caracterizan el movimiento de un cuerpo deben satisfacer las siguientes condiciones:

- *Función de movimiento*: debe estar definida en todo el intervalo de interés y ser continuamente diferenciable. Esto implica que, además de ser  $x(t)$  continua, su gráfico no debe presentar ningún punto anguloso, pues de existir dicho punto su derivada sería discontinua y por lo tanto lo sería la velocidad del cuerpo. En el gráfico 3.1 podemos ver un ejemplo de una función  $f(t)$  cuya derivada no es continua en un punto, por lo que **no** representa una función de movimiento.

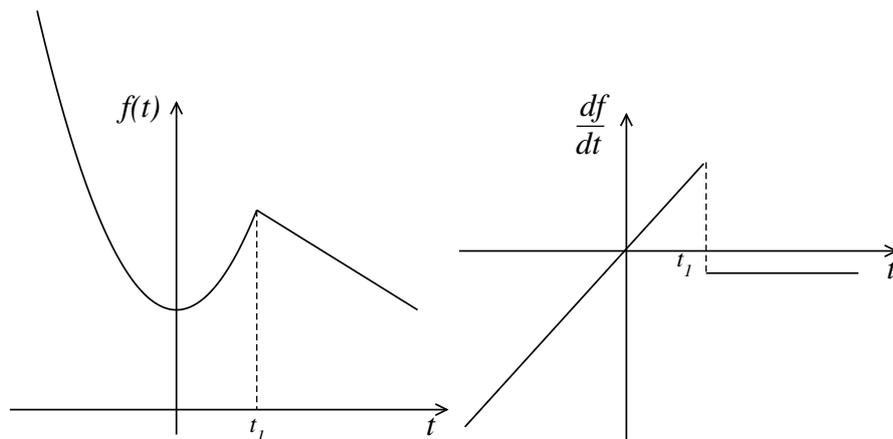


Figura 3.1: La función  $f(t)$  (izquierda) **no** puede representar una función de movimiento, ya que su derivada (derecha) es discontinua en  $t = t_1$ , pero sí puede representar funciones velocidad o aceleración. El gráfico de la derecha solo podría corresponder a una aceleración, ya que la función es discontinua.

- *Función velocidad*: debe ser una función continua definida en todo el intervalo de interés, entonces la función de la figura 3.1 (izquierda) sí puede representar una función velocidad.
- *Función aceleración*: debe estar definida en todo el intervalo de interés y puede (o no) ser discontinua, por lo que las funciones graficadas en la figura 3.1 (izquierda y derecha) pueden ambas representar el gráfico de una función aceleración.

## SECCIÓN 3.3

## Ejemplos simples de funciones de movimiento

Veremos ahora algunos ejemplos ya conocidos de funciones de movimiento y calcularemos también su velocidad y aceleración.

1. *Función de movimiento constante*:

$$x(t) = c \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

A esta función de movimiento, que describe un cuerpo en reposo, le corresponde una velocidad nula y una aceleración nula.

2. *Función de movimiento lineal*:

$$x(t) = a_1 t + a_0 \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = a_1 \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = 0 \quad (3.11)$$

Una función lineal describe el movimiento de un cuerpo que se mueve con velocidad constante y aceleración nula. Este movimiento se denomina *movimiento rectilíneo uniforme* (MRU).

3. *Función de movimiento parabólica (polinomio de segundo grado)*:

$$x(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = 2a_2 t + a_1 \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = 2a_2 \quad (3.12)$$

Un polinomio de segundo grado describe el movimiento de un cuerpo cuya aceleración es constante y diferente de cero. Este tipo de movimiento recibe el nombre de *movimiento rectilíneo uniformemente variado* (MRUV).

## SECCIÓN 3.4

## Relación entre aceleración, velocidad y función de movimiento

Si conocemos la función de movimiento de un cuerpo tenemos toda la información posible sobre el movimiento del mismo, ya que a partir de la función de movimiento podemos calcular la velocidad y la aceleración del cuerpo,

$$x = x(t) \xrightarrow{\frac{dx}{dt}} v = v(t) \xrightarrow{\frac{dv}{dt}} a = a(t). \quad (3.13)$$

Sin embargo, pocas veces la información que poseemos del sistema es su función de movimiento. Ya vimos en el ejemplo de la sección 3.2 que conocíamos la aceleración del cuerpo (en ese caso dada por la ecuación (3.9)), pero no su velocidad ni su posición en función del tiempo. Este es el caso más común; en general podemos conocer la función aceleración o en algunos casos la función velocidad (medida, por ejemplo, por el velocímetro de un auto), y a partir de esta información debemos obtener la función de movimiento.

Así, una importante pregunta que debemos responder es: dada la función aceleración  $a(t)$ , ¿cómo podemos obtener la velocidad  $v(t)$ ?, y continuando, dada la velocidad  $v(t)$ , ¿cómo podemos obtener la función de movimiento  $x(t)$ ? Si, por ejemplo, nos dan como dato la función velocidad de un cuerpo,  $v = v(t)$ , sabemos que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{dx}{dt} = v(t). \quad (3.14)$$

Por lo tanto, para determinar la función de movimiento del cuerpo a partir de la velocidad no debemos mirar esta ecuación como una fórmula que nos permite calcular  $v(t)$  como hicimos en el capítulo anterior, sino como una ecuación donde la incógnita es  $x(t)$ . Esto implica encontrar una función  $x(t)$ , que cuando se derive con respecto al tiempo nos dé como resultado la función velocidad que es dato, o sea, debemos calcular “la antiderivada” de  $v(t)$ .

Para resolver esta ecuación debemos realizar la operación inversa a la derivación, la cual se denomina integración. Nuevamente abriremos un paréntesis matemático, ahora para desarrollar las nociones de integración necesarias para completar el estudio de cinemática de los cuerpos en una dimensión.

### SECCIÓN 3.5

## Integración de funciones

Por un momento dejemos de lado la Física y analicemos desde un punto de vista matemático muy elemental qué significa realizar la integral de una función. Dada una función  $f$  de una variable independiente  $x$ , se denomina realizar la integral de dicha función con respecto a la variable independiente, a encontrar una función  $y = y(x)$  que satisfaga la siguiente relación:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x), \quad (3.15)$$

la función  $y(x)$  se denomina *primitiva* de la función  $f(x)$ . Debemos notar que la primitiva de una función no es única, ya que dos funciones que difieren en una constante aditiva poseen igual derivada: si  $y(x)$  cumple (3.15), y definimos  $z(x) = y(x) + C$ , donde  $C$  es una constante, entonces

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dz(x)}{dx} = f(x), \quad (3.16)$$

ya que la derivada de una constante es cero, esto es,  $y(x)$  y  $z(x)$  son ambas primitivas de  $f(x)$ . Como  $C$

es una constante real arbitraria, tenemos que si existe una primitiva, entonces existen infinitas. La figura 3.2 muestra tres funciones con igual derivada, por lo que son todas primitivas de la misma función.

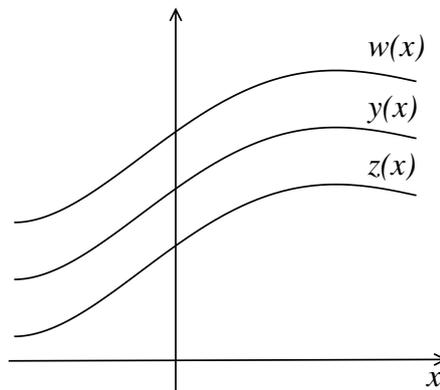


Figura 3.2: Tres funciones que difieren en una constante aditiva, por lo que son todas primitivas de una misma función.

El conjunto de **todas** las primitivas de una función  $f(x)$  se denomina *integral indefinida* y se representa como

$$\int f(x) dx, \quad (3.17)$$

que leemos como *integral de  $f(x)$  diferencial  $x$*  y la función  $f(x)$  la denominamos *integrando*.

Si  $y(x)$  es **una** primitiva de  $f(x)$  se cumple que,

$$\int f(x) dx = y(x) + C, \quad (3.18)$$

y la elección de una primitiva en particular requiere fijar el valor de esta constante aditiva.

Aunque ahora pueda no entenderse el motivo, es necesario incluir  $dx$  en la integral, escribir solo  $\int f$  es incorrecto y como notación no resulta clara, ya que no explicitamos la variable respecto a la cual se está integrando.

Dos propiedades importantes de la integración que se obtienen de las propiedades de la derivación son:

- La integral de una función multiplicada por una constante es igual a la constante multiplicada por la integral de la función,

$$\int Cf(x) dx = C \int f(x) dx. \quad (3.19)$$

- La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de cada una de las funciones,

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx. \quad (3.20)$$

Podemos escribir ambas reglas en forma compacta: dadas dos funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  y dos constantes  $A$ ,  $B$ , entonces

$$\int [A f(x) + B g(x)] dx = A \int f(x) dx + B \int g(x) dx. \quad (3.21)$$

Dejamos como ejercicio demostrar la ecuación (3.21) utilizando las propiedades conocidas de derivación de funciones. Notamos que, lamentablemente, no existe una regla para la integración de un producto de funciones (tampoco para un cociente) como en el caso de derivadas, podemos decir (sin temor a equivocarnos, pero entre comillas, ya que la frase no está bien definida) que integrar es “más difícil” que derivar.

Existen varios métodos para calcular integrales, por ahora veremos el más directo, esto es, tomar una tabla de derivadas de funciones, y mirando primero la columna de la derecha, interpretarla como una tabla de integrales. Veamos cómo hacemos esto con las funciones elementales a las cuales ya le calculamos su derivada:

1. *Integral de una potencia de  $x$* . Comencemos recordando la derivada de una potencia, ecuación (2.38),

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}; \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Buscamos una función  $y(x)$  que satisfaga la ecuación

$$\frac{dy(x)}{dx} = x^\alpha; \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.23)$$

como la derivada de una potencia de  $x$  es también una potencia, proponemos  $y(x) = Ax^\beta$ , con  $A$ ,  $\beta$  constantes. Como conocemos las reglas de derivación, obtenemos

$$\frac{dy(x)}{dx} = A\beta x^{\beta-1}, \quad (3.24)$$

igualando el lado derecho de las ecuaciones (3.23) y (3.24) tenemos

$$x^\alpha = A\beta x^{\beta-1} \Rightarrow A\beta = 1; \beta - 1 = \alpha, \quad (3.25)$$

estas ecuaciones tienen como solución  $\beta = \alpha + 1$ ;  $A = 1/\beta = 1/(\alpha + 1)$ , obteniendo así

$$y(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}; \alpha \neq -1, \quad (3.26)$$

la cual es una primitiva de  $x^\alpha$ . Así, para obtener la integral indefinida de esta función, debemos sumar a  $y(x)$  una constante arbitraria,

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \alpha \neq -1. \quad (3.27)$$

Notamos que si bien la derivada de una potencia real de  $x$  es siempre una potencia real de  $x$ , la ecuación (3.27) no incluye el caso  $\alpha = -1$  (ya que se anularía un denominador), es decir, el resultado que hemos obtenido no es válido para  $x^{-1} = 1/x$ ; más adelante volveremos a este punto.

2. *Integral de las funciones trigonométricas  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$* . A partir de lo visto en el capítulo 2, en particular, usando las ecuaciones (2.41) y (2.42), junto a una aplicación simple de la regla de derivada de la función compuesta, podemos escribir

$$\frac{d \operatorname{sen}(Ax)}{dx} = A \cos(Ax) \quad ; \quad \frac{d \cos(Ax)}{dx} = -A \operatorname{sen}(Ax), \quad (3.28)$$

de estas ecuaciones obtenemos, leyendo de derecha a izquierda,

$$\int \cos(Ax) dx = \frac{1}{A} \operatorname{sen}(Ax) + C \quad ; \quad \int \operatorname{sen}(Ax) dx = -\frac{1}{A} \cos(Ax) + C. \quad (3.29)$$

3. *Integral de la función  $1/x$  y de la función exponencial.* A partir de las ecuaciones (2.43) obtenemos

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C \quad ; \quad \int e^{Ax} dx = \frac{1}{A} e^{Ax} + C, \quad (3.30)$$

lo que nos permite ahora completar la integral de una potencia de  $x$ ,

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \alpha \neq -1 \\ \ln(x) + C & \alpha = -1 \end{cases}. \quad (3.31)$$

Dejamos como ejercicio corroborar las integrales dadas utilizando las reglas de derivación conocidas.

Cerramos este paréntesis matemático y en la próxima sección aplicaremos integrales al estudio de la cinemática de un cuerpo puntual.

## SECCIÓN 3.6

# Integración de las funciones de movimiento

Para tener una completa descripción del movimiento de un cuerpo es necesario conocer su función de movimiento. Si deseamos obtener esta información completa a partir de la aceleración o de la velocidad, debemos considerar la ecuación (3.13) en sentido inverso,

$$a(t) \xrightarrow{\int a(t) dt} v = v(t) \xrightarrow{\int v(t) dt} x = x(t). \quad (3.32)$$

Si tenemos como dato la función velocidad del cuerpo,  $v(t)$ , y deseamos conocer la función de movimiento,  $x(t)$ , sabemos que debemos integrar  $v(t)$ ,

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \Rightarrow x(t) = \int v(t) dt. \quad (3.33)$$

Notar que la ecuación (3.33) representa cualquier función de movimiento que tenga esa velocidad, por lo que necesitamos conocer la posición del móvil en un instante dado para determinar unívocamente la función de movimiento a partir de la velocidad, ya que esta condición fijará el valor de la constante de integración. Así, la constante  $C$  que incluimos al calcular una integral indefinida tiene un significado físico importante, que quedará más claro en los próximos ejemplos.

Como de costumbre, empezaremos con los casos más sencillos, los cuales ya hemos estudiado anteriormente: reposo, MRU y MRUV.

- **Cuerpo en reposo:** Por definición, este cuerpo tiene velocidad igual a cero, y la integral de la función nula es simplemente una constante  $C$ . ¿Qué significa esta constante?, significa que el dato de que el cuerpo está en reposo **no** es suficiente para determinar la función de movimiento; debemos saber también **dónde** está en reposo, y ese dato es la constante  $C$ , así  $v(t) = 0 \Rightarrow x(t) = C = \text{constante}$ . Notemos que cuando integramos velocidades, la constante aditiva **debe** tener unidades de longitud.
- **MRU:** Un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme tiene aceleración nula y velocidad  $v(t) = v_0 = \text{constante}$ , por lo que obtenemos

$$x(t) = \int v(t) dt = v_0 \int dt = v_0 t + C, \quad (3.34)$$

donde para obtener la primitiva de la función constante  $v_0$ , usamos la ecuación (3.31) con  $\alpha = 0$ . ¿Qué significa en este caso la constante aditiva  $C$ ? Nuevamente el dato de que el cuerpo está en MRU con velocidad constante  $v_0$  **no** es suficiente para determinar la función de movimiento, ya que hay infinitos MRU con velocidad constante  $v_0$ . Debemos dar también la posición del cuerpo en algún instante; así, si sabemos que el móvil estaba en  $x_0$  en el instante  $t_0$  obtenemos el valor de  $C$ ,

$$x(t_0) = x_0 = v_0 t_0 + C \Rightarrow C = x_0 - v_0 t_0 \Rightarrow x(t) = v_0 t + x_0 - v_0 t_0, \quad (3.35)$$

es decir,

$$x(t) = v_0 (t - t_0) + x_0. \quad (3.36)$$

Notemos que si  $t_0 = 0 \Rightarrow C = x_0$ .

- **MRUV:** Un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente variado tiene aceleración constante  $a(t) = a = \text{constante}$ . Si solo conocemos el valor de  $a$ , en este caso necesitamos primero calcular  $v(t)$  para luego obtener  $x(t)$ . Como  $a$  es una constante, tenemos

$$v(t) = \int a(t) dt = a \int dt = at + C, \quad (3.37)$$

de manera similar al caso anterior, necesitamos conocer la velocidad en algún instante  $t_0$  para obtener  $v(t)$ . Sea  $v(t_0) = v_0$  un dato conocido, entonces

$$v(t_0) = v_0 = at_0 + C \Rightarrow C = v_0 - at_0 \Rightarrow v(t) = a(t - t_0) + v_0. \quad (3.38)$$

Podemos ahora obtener la función de movimiento integrando la velocidad respecto al tiempo,

$$x(t) = \int v(t) dt = \int [a(t - t_0) + v_0] dt = \frac{1}{2}at^2 + (v_0 - at_0)t + D, \quad (3.39)$$

donde nuevamente hemos usado la ecuación (3.31), ahora con  $\alpha = 0$  y 1, y  $D$  es la constante de integración. Nuevamente, para fijar la constante  $D$  necesitamos como dato la posición del móvil en algún instante, que puede o no coincidir con  $t_0$ . Supongamos que  $x(t_1) = x_1$  es dato, entonces

$$x(t_1) = x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + (v_0 - at_0)t_1 + D \Rightarrow D = x_1 - \left[ \frac{1}{2}at_1^2 + (v_0 - at_0)t_1 \right], \quad (3.40)$$

obteniendo finalmente

$$x(t) = \frac{1}{2}a(t^2 - t_1^2) + (v_0 - at_0)(t - t_1) + x_1. \quad (3.41)$$

Notar que si  $t_0 = t_1 = 0$ , entonces  $x(t)$  toma la simple forma

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0. \quad (3.42)$$

A partir de este ejemplo particular puede extraerse una conclusión general: ya que dada la aceleración  $a(t)$  debemos integrar dos veces para obtener  $x(t)$ , tendremos **siempre** dos constantes de integración que deben obtenerse a partir de dos **condiciones conocidas** sobre el movimiento del cuerpo. ¿Cuáles deben ser estas condiciones? Hay dos conjuntos distintos de datos que nos permitirán conocer la función de movimiento a partir de la aceleración:

- Como en el ejemplo que acabamos de ver, conocer la velocidad del móvil en un instante dado, digamos  $t_1$ , y la posición en otro, digamos  $t_2$ , que pueden o no ser el mismo instante.
- Conocer la posición del cuerpo en dos instantes **distintos**,  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$ , con  $t_1 \neq t_2$ .

Para ilustrar esto, veamos cómo podemos obtener la misma función de movimiento a partir de datos tipo a) o b) de un móvil sujeto a una aceleración

$$a(t) = 6\frac{m}{s^3}t - 2\frac{m}{s^2}. \quad (3.43)$$

Asumiendo que una persona midió la velocidad del móvil en  $t = 0$  y su posición en  $t = 1$  s; mientras que una segunda persona midió la posición del móvil en los mismos instantes, veremos que ambas llegan a la misma función de movimiento.

**Condiciones tipo a):** es dato que  $v(t = 0) = -2$  m/s y  $x(t = 1$  s) = 3 m. Tenemos que

$$\begin{aligned} v(t) &= \int \left( 6\frac{m}{s^3}t - 2\frac{m}{s^2} \right) dt = 6\frac{m}{s^3} \int t dt - 2\frac{m}{s^2} \int dt \\ &= 6\frac{m}{s^3} \frac{1}{2}t^2 - 2\frac{m}{s^2}t + C = 3\frac{m}{s^3}t^2 - 2\frac{m}{s^2}t + C. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Notemos que usamos la propiedad de suma de integrales, sin embargo **no** incluimos una constante aditiva por cada integral. El motivo es simple, de haber incluido una constante por cada integral, digamos  $C_1$  y  $C_2$ , basta definir  $C = C_1 + C_2$ , quedando siempre una sola constante aditiva a determinar. El valor de esta constante,  $C$ , debe fijarse utilizando el dato conocido sobre la velocidad,

$$v(t = 0) = -2\frac{m}{s} = C \Rightarrow v(t) = 3\frac{m}{s^3}t^2 - 2\frac{m}{s^2}t - 2\frac{m}{s}. \quad (3.45)$$

Conocida la función velocidad podemos determinar la función de movimiento del cuerpo,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left( 3\frac{m}{s^3}t^2 - 2\frac{m}{s^2}t - 2\frac{m}{s} \right) dt = 3\frac{m}{s^3} \int t^2 dt - 2\frac{m}{s^2} \int t dt - 2\frac{m}{s} \int dt \\ &= 3\frac{m}{s^3} \frac{1}{3}t^3 - 2\frac{m}{s^2} \frac{1}{2}t^2 - 2\frac{m}{s}t + D = 1\frac{m}{s^3}t^3 - 1\frac{m}{s^2}t^2 - 2\frac{m}{s}t + D, \end{aligned}$$

donde la segunda constante de integración del problema,  $D$ , se determina usando el dato  $x(t = 1 \text{ s}) = 3 \text{ m}$ ,

$$x(1 \text{ s}) = 3 \text{ m} = 1 \frac{m}{s^3} (1 \text{ s})^3 - 1 \frac{m}{s^2} (1 \text{ s})^2 - 2 \frac{m}{s} (1 \text{ s}) + D \Rightarrow D = 5 \text{ m} \Rightarrow$$

$$x(t) = 1 \frac{m}{s^3} t^3 - 1 \frac{m}{s^2} t^2 - 2 \frac{m}{s} t + 5 \text{ m}. \quad (3.46)$$

**Condiciones tipo b):** Como estamos describiendo el movimiento de un móvil dado, sabemos que este tiene la aceleración (3.43), pero en este caso tenemos como datos que  $x(t = 0) = 5 \text{ m}$  y  $x(t = 1 \text{ s}) = 3 \text{ m}$ , esto es, no tenemos ningún dato sobre la velocidad, pero conocemos la posición del móvil en dos instantes. Comenzamos calculando la velocidad, que nuevamente será dada por la ecuación (3.44), solo que esta vez no conocemos ningún valor de la velocidad que nos permita determinar la constante de integración, por lo que, por ahora, la dejaremos expresada como  $C$ . Para obtener la función de movimiento integramos la velocidad con respecto al tiempo,

$$x(t) = \int \left( 3 \frac{m}{s^3} t^2 - 2 \frac{m}{s^2} t + C \right) dt = 3 \frac{m}{s^3} \int t^2 dt - 2 \frac{m}{s^2} \int t dt + C \int dt$$

$$= 1 \frac{m}{s^3} t^3 - 1 \frac{m}{s^2} t^2 + Ct + D,$$

como sabemos que  $x(t = 0) = 5 \text{ m}$ , y  $x(t = 1 \text{ s}) = 3 \text{ m}$ , podemos escribir dos ecuaciones, una para cada tiempo  $t_0 = 0$  y  $t_1 = 1 \text{ s}$ ,

$$x(t = 0) = D = 5 \text{ m}$$

$$x(t = 1 \text{ s}) = 1 \frac{m}{s^3} (1 \text{ s})^3 - 1 \frac{m}{s^2} (1 \text{ s})^2 + C 1 \text{ s} + D = 3 \text{ m}. \quad (3.47)$$

Esto es, tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya solución nos permite determinar conjuntamente los valores de las constantes  $C$  y  $D$ ,

$$C = -2 \frac{m}{s} ; \quad D = 5 \text{ m}. \quad (3.48)$$

Obtenidas  $C$  y  $D$ , la función de movimiento resulta

$$x(t) = 1 \frac{m}{s^3} t^3 - 1 \frac{m}{s^2} t^2 - 2 \frac{m}{s} t + 5 \text{ m}, \quad (3.49)$$

que es idéntica a la función de movimiento (3.46).

Completaremos esta sección con un ejemplo donde la aceleración es una función sinusoidal,

$$a(t) = -\omega^2 A \text{ sen}(\omega t) ; \quad A = 1 \text{ m} ; \quad \omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (3.50)$$

Consideremos que el movimiento está sujeto a las condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = 2 \text{ m/s}$ . Integrando la aceleración con respecto al tiempo obtenemos,

$$v(t) = \int a(t) dt = -\omega^2 A \int \sin(\omega t) dt = \omega A \cos(\omega t) + C, \quad (3.51)$$

donde la integración fue realizada utilizando una de las ecuaciones (3.29). De la condición  $v(0) = 2 \text{ m/s}$  calculamos la constante de integración,

$$v(t=0) = \omega A + C = 2 \frac{m}{s} + C = 2 \frac{m}{s} \Rightarrow C = 0. \quad (3.52)$$

Seguidamente, integramos la velocidad con respecto al tiempo para obtener la función de movimiento,

$$x(t) = \int v(t) dt = \omega A \int \cos(\omega t) dt = A \sin(\omega t) + D, \quad (3.53)$$

donde utilizamos la otra ecuación de (3.29). Sabiendo que el móvil está en el origen para  $t = 0$ , obtenemos  $D$ :

$$x(0) = D = 0 \Rightarrow D = 0. \quad (3.54)$$

Los gráficos de

$$x(t) = 1 \text{ m} \sin(2t/s), \quad v(t) = 2 \frac{m}{s} \cos(2t/s) \quad \text{y} \quad a(t) = -4 \frac{m}{s^2} \sin(2t/s) \quad (3.55)$$

se muestran en la figura 3.3.

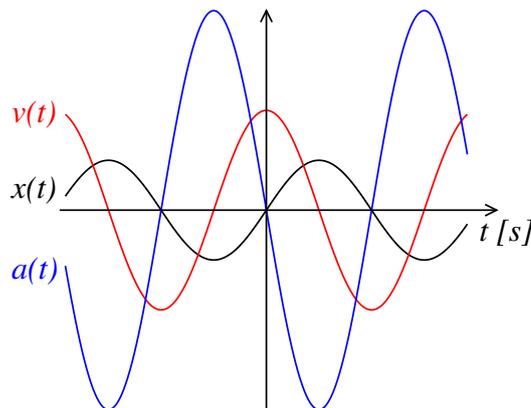


Figura 3.3: Funciones posición (en  $\text{m}$ ), velocidad (en  $\text{m/s}$ ) y aceleración (en  $\text{m/s}^2$ ) en función del tiempo cuando la aceleración es sinusoidal (ecuaciones (3.55)).

Veremos más adelante que estas funciones describen adecuadamente el movimiento de un cuerpo puntual atado a un resorte. Este movimiento se denomina *oscilador armónico* de amplitud  $A$  y frecuencia  $\omega$ .

### 3.6.1. Aceleración definida a trozos

El hecho de que la aceleración pueda ser una función discontinua del tiempo, o aun siendo continua pueda tener cambios en su expresión como función, hace que en muchos casos debamos definirla a trozos, como en el ejemplo visto al inicio de este capítulo, donde la aceleración, dada por la ecuación (3.9), es discontinua y está definida por funciones distintas para  $t < t_1$  y  $t \geq t_1$ :

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ -g & \text{si } t \geq t_1 \end{cases} . \quad (3.56)$$

Un segundo ejemplo es

$$a(t) = \begin{cases} 1 \frac{m}{s^2} & \text{si } t < 0 \\ -1 \frac{m}{s^3} t + 1 \frac{m}{s^2} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} , \quad (3.57)$$

que es continua para todo tiempo, pero está definida por funciones distintas para  $t < 0$  y  $t \geq 0$ .

Para entender cómo se procede en estos casos, resolvamos el siguiente ejemplo:

$$a(t) = \begin{cases} 1 \frac{m}{s^2} & \text{si } t < 1s \\ 2 \frac{m}{s^2} & \text{si } t \geq 1s \end{cases} , \quad (3.58)$$

donde conocemos también los siguientes datos:  $v(t=0) = 1 \frac{m}{s}$  y  $x(t=2s) = 2m$ . Integrando la función aceleración con respecto al tiempo podemos obtener la función velocidad,

$$v(t) = \int a(t) dt = \begin{cases} \int 1 \frac{m}{s^2} dt & \text{si } t < 1s \\ \int 2 \frac{m}{s^2} dt & \text{si } t \geq 1s \end{cases} = \begin{cases} 1 \frac{m}{s^2} t + C_1 & \text{si } t < 1s \\ 2 \frac{m}{s^2} t + C_2 & \text{si } t \geq 1s \end{cases} , \quad (3.59)$$

ya que debemos incluir una constante de integración por cada una de las funciones integradas en los distintos trozos. Conocemos la velocidad en  $t=0$ , así, utilizando la expresión correspondiente tenemos

$$v(t=0) = 1 \frac{m}{s} = C_1 , \quad (3.60)$$

pero tenemos otra constante indeterminada más,  $C_2$ , y no conocemos *a priori* la velocidad en ningún otro instante, ¿cómo determinamos  $C_2$ ? La respuesta es que **sí** tenemos otra condición sobre la velocidad, y ya la hemos discutido: la función velocidad es **continua** para todo tiempo, en particular para  $t=1s$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1} v(t) , \quad (3.61)$$

y esta condición, llamada *condición de continuidad*, es la que permite calcular la segunda constante  $C_2$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) = 1 \frac{m}{s^2} 1s + 1 \frac{m}{s} = 2 \frac{m}{s} = \lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) = 2 \frac{m}{s^2} 1s + C_2 = 2 \frac{m}{s} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 . \quad (3.62)$$

Finalmente, la función velocidad resulta

$$v(t) = \begin{cases} 1 \frac{m}{s^2} t + 1 \frac{m}{s} & \text{si } t < 1 \text{ s} \\ 2 \frac{m}{s^2} t & \text{si } t \geq 1 \text{ s} \end{cases} . \quad (3.63)$$

Resta calcular la función de movimiento, para lo que debemos integrar la velocidad con respecto al tiempo,

$$x(t) = \int v(t) dt = \begin{cases} \int (1 \frac{m}{s^2} t + 1 \frac{m}{s}) dt & \text{si } t < 1 \text{ s} \\ \int 2 \frac{m}{s^2} t dt & \text{si } t \geq 1 \text{ s} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{m}{s^2} t^2 + 1 \frac{m}{s} t + D_1 & \text{si } t < 1 \text{ s} \\ 1 \frac{m}{s^2} t^2 + D_2 & \text{si } t \geq 1 \text{ s} \end{cases} . \quad (3.64)$$

Dejamos como ejercicio calcular  $x(t)$  dado que  $x(t = 2 \text{ s}) = 2 \text{ m}$ .

### SECCIÓN 3.7

## Integrales definidas

Completaremos ahora nuestro paréntesis matemático referido a integración. Dada  $f(x)$ , vimos que se puede definir la función derivada  $f'(x)$ . Asimismo, vimos que la derivada valuada en un punto dado,  $f'(x_0)$  tiene una interpretación geométrica clara: es la pendiente de la recta tangente al gráfico de  $f(x)$  en el punto  $x_0$ . Podemos entonces preguntarnos ¿tiene la integral una interpretación geométrica? La respuesta es *sí*, y la justificaremos a continuación.

Primeramente necesitamos el concepto de *integral definida*. Sea  $y(x)$  una primitiva de  $f(x)$ , y  $x_a < x_b$  dos números reales en el dominio de  $f$ . Definimos

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx \equiv y(x_b) - y(x_a), \quad (3.65)$$

Notar que la ecuación (3.65) no depende de la elección de la primitiva, si tomamos otra primitiva de  $f(x)$  cualquiera,  $z(x) = y(x) + C$ , entonces

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = y(x_b) - y(x_a) = y(x_b) - y(x_a) + C - C = (y(x_b) + C) - (y(x_a) + C) = z(x_b) - z(x_a). \quad (3.66)$$

La definición (3.65) es conocida como *Regla de Barrow*<sup>2</sup>.

Trataremos ahora uno de los más antiguos problemas de la matemática, que no presenta *a priori* una relación evidente con el tema que nos ocupa: el cálculo de áreas. En particular, dada una función **continua y no negativa**  $f(x) \geq 0 \forall x$  en el intervalo cerrado  $[x_a, x_b]$ ;  $x_a < x_b$ , nos preguntamos cuál es el área comprendida entre la curva  $f(x)$  y el eje  $x$  en dicho intervalo, o sea, en el ejemplo mostrado en la

<sup>2</sup>En reconocimiento al matemático Isaac Barrow (1630-1667), tutor académico de Isaac Newton.

figura 3.4, ¿cuánto vale el área sombreada? Solo sabemos calcular áreas de polígonos (también el área bajo una parábola, ya conocida en la antigua Grecia). En particular, el área de un rectángulo es base por altura, así, en primera aproximación podemos decir que el área buscada, que denotaremos  $A(f; x_a, x_b)$  es mayor que el área del rectángulo de la figura 3.5(a) y menor que el área del rectángulo de la figura 3.5(b).

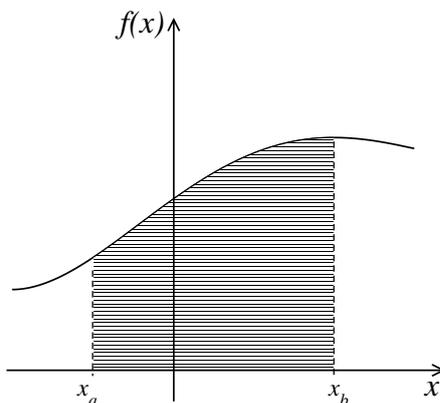


Figura 3.4: La región sombreada es el área bajo la curva de  $f(x)$  en el intervalo  $[x_a, x_b]$ .

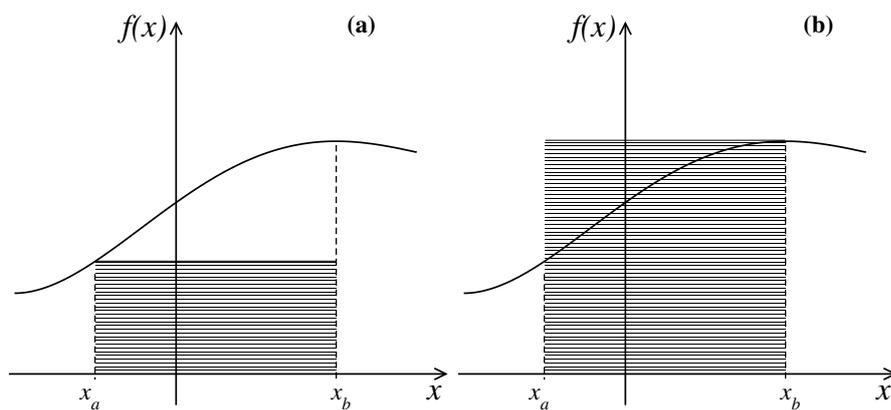


Figura 3.5: Cotas inferior y superior al área sombreada en la figura 3.4.

Es posible obtener mejores cotas para el área bajo la curva aumentando la cantidad de rectángulos utilizados como se muestra en la figura 3.6.

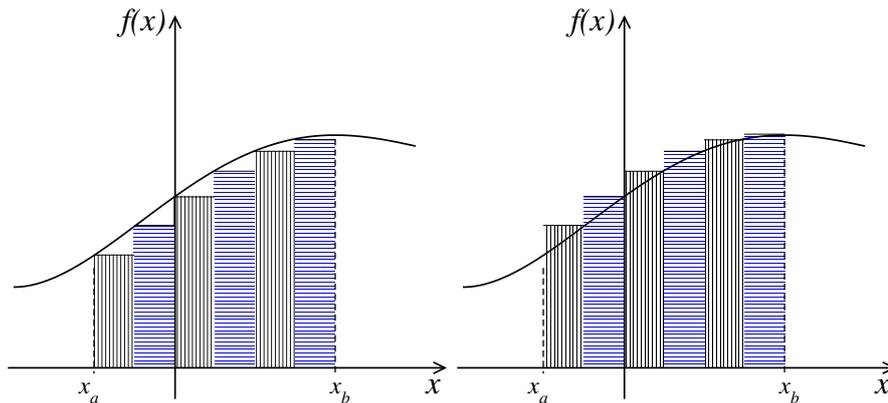


Figura 3.6: Cotas inferior y superior al área sombreada en la figura 3.4.

Para esto dividimos el intervalo  $[x_a, x_b]$  en  $N$  intervalos iguales de ancho  $\Delta x = (x_b - x_a)/N$  y denotamos los puntos límites de cada subintervalo como  $x_i = x_a + i\Delta x$ ;  $i = 0, \dots, N$ . Denotamos también los puntos donde  $f(x)$  toma su valor mínimo y máximo en el  $i$ -ésimo intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  como

$$fm_i = \inf \{f(x) / x \in [x_i, x_{i+1}]\} ; fM_i = \max \{f(x) / x \in [x_i, x_{i+1}]\} ; i = 0, \dots, N-1. \quad (3.67)$$

Podemos entonces definir una cota inferior  $L_N$  como la suma de todos los rectángulos de base  $\Delta x$  y altura  $fm_i$  y una cota superior  $U_N$  como la suma de todos los rectángulos de base  $\Delta x$  y altura  $fM_i$ <sup>3</sup>,

$$L_N = \sum_{i=0}^{N-1} fm_i \Delta x \quad ; \quad U_N = \sum_{i=0}^{N-1} fM_i \Delta x, \quad (3.68)$$

que para todo  $N > 0$  cumplen

$$L_N \leq A(f; x_a, x_b) \leq U_N. \quad (3.69)$$

Con las condiciones pedidas para  $f(x)$ , continua y no negativa, los límites de  $L_N$  y  $U_N$  para  $N \rightarrow \infty$  siempre existen y ambos coinciden, ese límite es entonces el área buscada,

$$A(f; x_a, x_b) = \lim_{N \rightarrow \infty} L_N = \lim_{N \rightarrow \infty} U_N. \quad (3.70)$$

Más adelante estudiaremos cuánto podemos relajar las condiciones sobre  $f$  para que los límites de  $L_N$  y  $U_N$  existan y sean iguales. Como ejemplo de función que los límites no son coincidentes podemos usar nuevamente la función de Dirichlet (2.10), la cual es discontinua en todo punto, y se tiene que  $L_N = 0$  y  $U_N = x_b - x_a \forall x_a < x_b \in \mathbb{R}$  y  $\forall N \in \mathbb{N}$ , por lo que no podemos definir un área bajo la curva de esta función.

Notamos que si en vez de tomar los valores mínimo y máximo de  $f(x)$  en cada intervalo tomamos un punto elegido con cualquier criterio (punto medio, al azar, etc.), que denotaremos  $\xi_i$ , definimos

<sup>3</sup>Las letras  $L$  y  $U$  utilizadas en la literatura para estas sumas provienen del inglés *lower*: inferior y *upper*: superior.

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(\xi_i) \Delta x, \quad ; \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad (3.71)$$

que cumple

$$L_N \leq S_N \leq U_N, \quad (3.72)$$

y utilizando la propiedad del límite (2.16), tenemos que

$$A(f; x_a, x_b) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N. \quad (3.73)$$

La suma (3.71) se denomina *suma de Riemann*.

Ya “sabemos” calcular el área bajo la curva de cualquier función continua no negativa, aunque queda claro que la definición no es operativa, y son pocas las áreas que podemos calcular utilizando la ecuación (3.73). Veremos ahora cómo relacionar este cálculo de áreas con derivadas e integrales. Para esto tomamos un punto arbitrario  $x_0 \in [x_a, x_b]$ . El área bajo la curva en el intervalo  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ , correspondiente al área sombreada en la figura 3.7 cumple, según la ecuación (3.73),

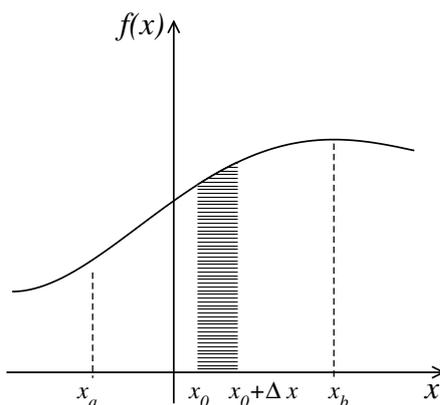


Figura 3.7: La región sombreada es el área bajo la curva de  $f(x)$  en el intervalo  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ .

$$f(x_0) \Delta x \simeq A(f; x_a, x_0 + \Delta x) - A(f; x_a, x_0), \quad (3.74)$$

o, dividiendo por  $\Delta x$ ,

$$f(x_0) \simeq \frac{A(f; x_a, x_0 + \Delta x) - A(f; x_a, x_0)}{\Delta x}, \quad (3.75)$$

que en el límite  $\Delta x \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ) se vuelve exacta,

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(f; x_a, x_0 + \Delta x) - A(f; x_a, x_0)}{\Delta x} = \frac{dA(f; x_a, x_0)}{dx_0}. \quad (3.76)$$

Como esta ecuación es válida  $\forall x_0 \in [x_a, x_b]$ , esto implica que  $A(f; x_a, x)$  es **una** primitiva de  $f(x)$  en  $[x_a, x_b]$ , es decir,

$$A(f; x_a, x_0) = y(x_0) + C, \quad (3.77)$$

donde  $y(x)$  es una primitiva arbitraria de  $f(x)$  y  $C$  es una constante a determinar. Pero además sabemos que el área bajo un punto es nula y por lo tanto, debe cumplirse  $A(f; x_a, x_a) = 0$ , entonces,

$$0 = A(f; x_a, x_a) = y(x_a) + C \Rightarrow C = -y(x_a), \quad (3.78)$$

reemplazando el valor de  $C$  en la ecuación (3.77) obtenemos

$$A(f; x_a, x_0) = y(x_0) - y(x_a) = \int_{x_a}^{x_0} f(x) dx, \quad (3.79)$$

donde en la última igualdad usamos la regla de Barrow, ecuación (3.65). En palabras, la integral definida (3.65) nos da el área bajo la gráfica de cualquier función continua no negativa  $f(x)$  en el intervalo  $[x_a, x_b]$ , siendo esta la interpretación geométrica buscada de la integración de funciones.

¿Qué sucede si  $f(x)$  es continua, pero no positiva,  $f(x) \leq 0 \forall x \in [x_a, x_b]$ ? En este caso la función  $g(x) = -f(x)$  es continua y no negativa, además, si  $y(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ ,  $-y(x)$  será una primitiva de  $g(x)$ . Así tenemos que

$$A(g; x_a, x_b) = \int_{x_a}^{x_b} g(x) dx = -y(x_b) - (-y(x_a)) = -(y(x_b) - y(x_a)) = -\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx, \quad (3.80)$$

esto es, si una función continua es no positiva, entonces su integral definida nos da el área entre la gráfica y el eje  $x$  **anteponiendo un signo negativo**. Si, como se muestra en la figura 3.8, la función  $f(x)$  es continua, pero positiva en algunas regiones y negativas en otras, el resultado de la integral definida será la suma de todas las áreas donde  $f(x)$  es positiva **menos** la suma de todas las áreas donde  $f(x)$  es negativa. En el ejemplo de la figura 3.8 será

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = \text{suma de las áreas rayadas verticalmente} - \text{suma de las áreas rayadas horizontalmente}. \quad (3.81)$$

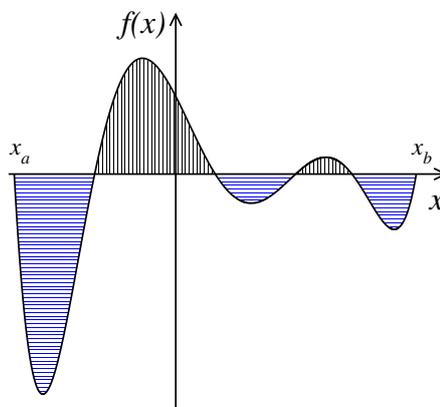


Figura 3.8: Las áreas sobre el eje  $x$  (rayas verticales negras) se toman como positivas, las áreas bajo el eje  $x$  (rayas horizontales azules) se toman como negativas.

Analicemos un ejemplo sencillo: supongamos que nos interesa calcular el área bajo la gráfica de la función  $f(x) = 2x + 2$  en el intervalo  $[-1, 3]$ . Como esta área corresponde a un triángulo, vale  $\text{base} \times \text{altura}/2 = 16$ . Corroboremos que por la regla de Barrow obtenemos el mismo resultado,

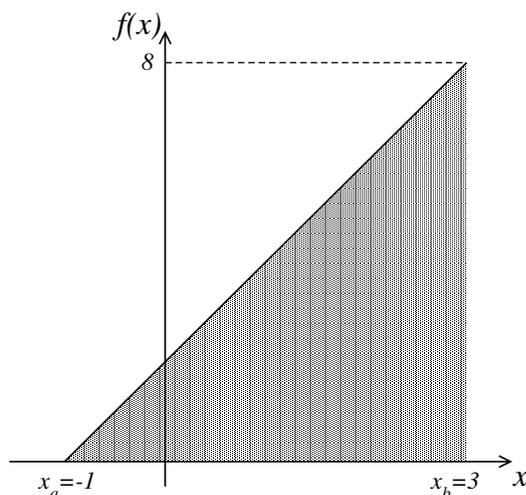


Figura 3.9: La región sombreada es el área de un triángulo rectángulo de base 4 y altura 8.

Calculemos primeramente la integral de  $f(x)$

$$\int f(x) dx = \int (2x + 2) dx = x^2 + 2x + C. \quad (3.82)$$

Como necesitamos **una** primitiva de  $f(x)$ , podemos elegir el valor de la constante aditiva. La elección más simple resulta  $C = 0$ . Si calculamos el valor de la integral definida obtenemos:

$$\begin{aligned} A(f; -1, 3) &= \int_{-1}^3 (2x + 2) dx = (3^2 + 2 \cdot 3) - [(-1)^2 + 2(-1)] \\ &= (9 + 6) - (1 - 2) = 15 - (-1) = 16, \end{aligned} \quad (3.83)$$

que coincide con el valor del área del triángulo calculada anteriormente.

Pero, ¿qué obtendremos si en vez de  $f(x) = 2x + 2$  integramos  $g(x) = 2x$  en el mismo intervalo? En este caso, el área a calcular es la mostrada en la figura 3.10. Integrando  $g(x)$  obtenemos

$$\begin{aligned} A(g; -1, 3) &= \int_{-1}^3 2x dx = (3^2 + C) - [(-1)^2 + C] \\ &= 9 - 1 = 8. \end{aligned} \quad (3.84)$$

¿Cómo entendemos este resultado? El triángulo sombreado con rayas verticales tiene base 3 y altura 6, por lo que su área es 9, mientras que el triángulo de rayas horizontales tiene base 1 y altura 2, por lo que su área es 1, pero esta está bajo el eje  $x$ , por lo que debe restarse al área sobre el eje, obteniendo así el mismo resultado calculando áreas de triángulos que el arrojado por la integral (3.84).

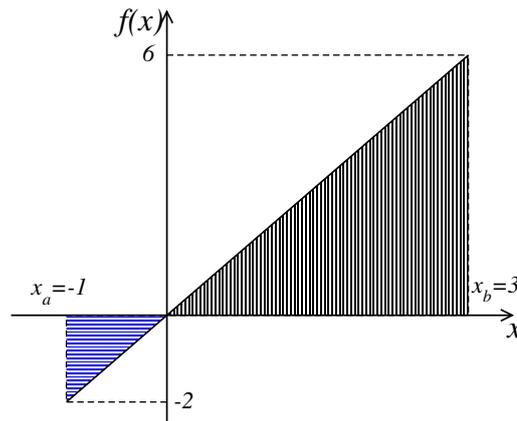


Figura 3.10: El área de la región de rayas horizontales azules debe restarse al área de rayas verticales negras.

Es importante notar que si el límite superior de una integral definida es la variable  $x$ , esto define una función que es **una primitiva particular** de  $f(x)$ , ya que determina la constante aditiva. Dada cualquier primitiva  $y(x)$  de  $f(x)$ , entonces la función

$$F(x) = \int_{x_a}^x f(x') dx' = y(x) - y(x_a), \quad (3.85)$$

es la primitiva que cumple  $F(x_a) = 0$ . Aquí vemos la relevancia de la notación, que claramente nos dice que la variable de integración,  $x'$ , es distinta a la variable  $x$ , argumento de  $F$  y límite superior de la integral.

Finalmente daremos una notación muy usada, utilizando la barra vertical de manera similar a la definida por la ecuación (2.53), que permite escribir de manera compacta la diferencia de una función valuada en puntos,

$$y(x)|_{x=x_a}^{x=x_b} = y(x)|_{x_a}^{x_b} = y(x_b) - y(x_a), \quad (3.86)$$

entonces, si  $y(x)$  es una primitiva de  $f(x)$  podemos escribir

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = y(x)|_{x_a}^{x_b} = y(x_b) - y(x_a). \quad (3.87)$$

## SECCIÓN 3.8

# Aplicación de las integrales definidas en cinemática

Ya vimos en la sección 3.6 que conociendo la aceleración de un cuerpo en función del tiempo,  $a(t)$ , y su velocidad en un instante dado,  $v(t_0) = v_0$ , entonces  $v(t)$  es la primitiva de  $a(t)$  que cumple esta condi-

ción. En la sección 3.6 escribíamos una primitiva de  $a(t)$  con una constante arbitraria y calculábamos esta constante por la condición para la velocidad en  $t = t_0$ . En vez de esto, podemos hacer uso de la ecuación (3.85) que define la primitiva particular que necesitamos, esto es,

$$\int_{t_0}^t a(t') dt' = v(t) - v(t_0) = v(t) - v_0, \quad (3.88)$$

es decir,

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t') dt' + v_0, \quad (3.89)$$

que nos dará la función velocidad sin importar qué primitiva de  $a(t)$  usemos. Lo mismo vale para la función de movimiento; si  $x(t_0) = x_0$  podemos escribir

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t') dt' + x_0, \quad (3.90)$$

que es la función de movimiento **que cumple** la condición  $x(t = t_0) = x_0$ .

Podemos obtener este mismo resultado interpretando la ecuación

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \quad (3.91)$$

como un cociente de diferenciales. Así, multiplicando a ambos lados por  $dt$  (que llamamos *diferencial t*) obtenemos

$$dv = a(t) dt. \quad (3.92)$$

Si conocemos que el cuerpo en el instante  $t = t_0$  tiene una velocidad  $v(t_0) = v_0$  podemos realizar la integral definida en ambos miembros de la expresión anterior. Notemos que para que la igualdad continúe siendo válida al integrar sobre diferentes variables, los límites de integración deben estar relacionados,  $t_0 \rightarrow v_0$  y  $t \rightarrow v(t)$ , obteniendo

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^t a(t') dt'. \quad (3.93)$$

Primero calculemos la integral definida de la izquierda,

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = (v(t) + C) - (v_0 + C) = v(t) - v_0. \quad (3.94)$$

Reemplazando (3.94) en (3.93) obtenemos

$$v(t) - v_0 = \int_{t_0}^t a(t') dt', \quad (3.95)$$

y sumando  $v_0$  a ambos lados de la igualdad reobtenemos la expresión (3.89).

Veamos un ejemplo: queremos conocer la función de movimiento de un cuerpo para  $t > 0$ , sabiendo que en  $t = 0$ , cuando estaba a  $2 \text{ m}$  del origen en la dirección positiva, con una velocidad de  $1 \text{ m/s}$ , comenzó a actuar una aceleración constante  $a = 3 \text{ m/s}^2$ . Aplicamos (3.89) para obtener  $v(t)$ :

$$v(t) = \int_0^t a(t') dt' + v(t=0) = \int_0^t 3 \frac{m}{s^2} dt' + v_0 = 3 \frac{m}{s^2} t + 1 \frac{m}{s}, \quad (3.96)$$

una vez obtenida  $v(t)$ , con un procedimiento similar obtenemos  $x(t)$ ,

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' + x(t=0) = \int_0^t \left( 3 \frac{m}{s^2} t' + 1 \frac{m}{s} \right) dt' + x_0 = 3 \frac{m}{s^2} \frac{t^2}{2} + 1 \frac{m}{s} t + 2m, \quad (3.97)$$

que es la función de movimiento buscada, válida para  $t \geq 0$ .

La ecuación (3.89) también nos dice que si tomamos un intervalo  $[t_0, t_1]$ , la variación de la velocidad del cuerpo en el intervalo,  $\Delta v = v(t_1) - v(t_0)$  está dada por el área bajo la curva  $a(t)$  en dicho intervalo, tomada como **positiva** en los subintervalos en que  $a(t) > 0$  y como **negativa** en los subintervalos en que  $a(t) < 0$ . El mismo argumento puede utilizarse para relacionar el desplazamiento  $\Delta x = x(t_1) - x(t_0)$  con el área bajo la curva  $v(t)$  en el intervalo  $[t_0, t_1]$ . Veamos como ejemplo el caso de un cuerpo que se desplaza con aceleración constante, como se observa en la figura 3.11.

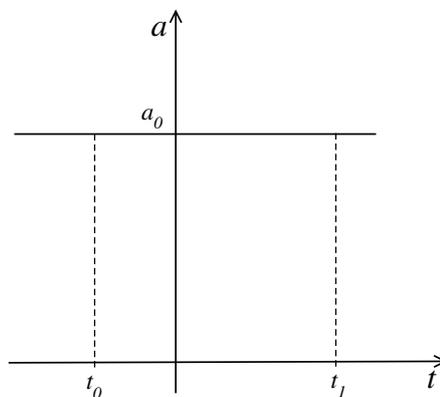


Figura 3.11: Aceleración constante en el intervalo  $[t_0, t_1]$ .

Entonces la variación de la velocidad en el intervalo  $[t_0, t_1]$  será igual al área bajo la gráfica de la función aceleración. En este caso particular en que la aceleración es constante, el área corresponde a la de un rectángulo, resultando  $\Delta v = a_0(t_1 - t_0)$ , que coincide con lo obtenido en el caso de un movimiento rectilíneo uniformemente variado.

Veamos otro ejemplo: supongamos que un cuerpo está sometido a una aceleración cuya gráfica se muestra en la figura 3.12, y se nos pide calcular  $\Delta v$  en el intervalo  $[-2 \text{ s}, 3 \text{ s}]$ .

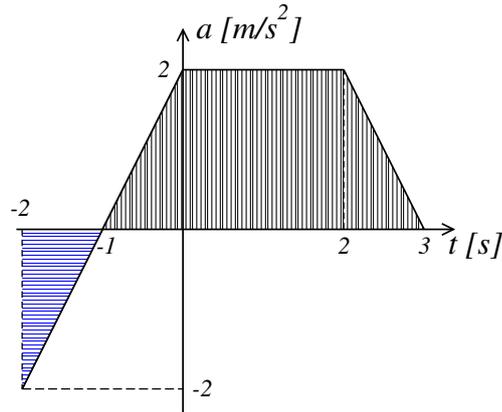


Figura 3.12:  $a(t)$  en el intervalo  $[-2 s, 3 s]$ . El área rayada horizontal azul debe restarse al área rayada vertical negra para obtener  $\Delta v$ .

Por lo que acabamos de ver,  $\Delta v$  será igual al área entre la gráfica de  $a(t)$  y el eje  $t$ , considerada como positiva en la región  $a(t) > 0$  (rayada vertical negra en la figura) y como negativa en la región  $a(t) < 0$  (rayada horizontal azul en la figura). El área rayada vertical,  $A_v$ , es un rectángulo de base  $2 s$  y altura  $2 m/s^2$  más dos triángulos de base  $1 s$  y altura  $2 m/s^2$ , por lo que se obtiene  $A_v = 6 m/s$ . El área rayada horizontal,  $A_h$ , es un triángulo de base  $1 s$  y altura  $2 m/s^2$ , tenemos entonces  $A_h = 1 m/s$ . Entonces la variación de la velocidad en el intervalo  $[-2 s, 3 s]$  será

$$\Delta v = A_v - A_h = 6 \frac{m}{s} - 1 \frac{m}{s} = 5 \frac{m}{s}. \quad (3.98)$$

Obtengamos este resultado integrando; para esto debemos usar el gráfico 3.12 para calcular la expresión analítica de  $a(t)$ , dejamos como ejercicio comprobar que esta es

$$a(t) = \begin{cases} 2 \frac{m}{s^3} t + 2 \frac{m}{s^2} & \text{si } -2 s < t < 0 s \\ 2 \frac{m}{s^2} & \text{si } 0 \leq t \leq 2 s \\ -2 \frac{m}{s^3} t + 6 \frac{m}{s^2} & \text{si } 2 s < t \leq 3 s \end{cases}. \quad (3.99)$$

Calculamos entonces la diferencia de velocidades en el intervalo utilizando la ecuación (3.95) con  $t_0 = -2 s$  y  $t = 3 s$ ,

$$\begin{aligned} \Delta v(t) \Big|_{-2s}^{3s} &= \int_{-2s}^{3s} a(t) dt = \int_{-2s}^{0s} \left( 2 \frac{m}{s^3} t + 2 \frac{m}{s^2} \right) dt + \int_{0s}^{2s} 2 \frac{m}{s^2} dt + \int_{2s}^{3s} \left( -2 \frac{m}{s^3} t + 6 \frac{m}{s^2} \right) dt \\ &= \left( 2 \frac{m}{s^3} \frac{t^2}{2} + 2 \frac{m}{s^2} t \right) \Big|_{-2s}^{0s} + 2 \frac{m}{s^2} t \Big|_{0s}^{2s} + \left( -2 \frac{m}{s^3} \frac{t^2}{2} + 6 \frac{m}{s^2} t \right) \Big|_{2s}^{3s} \\ &= 0 \frac{m}{s} + 4 \frac{m}{s} + 1 \frac{m}{s} = 5 \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

que coincide con el resultado del cálculo de áreas (3.98).



# 4

## Movimiento en el Plano

### SECCIÓN 4.1

## Localización de un punto en el plano

Hasta ahora hemos descrito el movimiento unidimensional (1-D) de cuerpos puntuales, es decir que se mueven sobre rectas. Sin embargo, nos interesa poder describir movimientos algo más complejos que los rectilíneos. Para incrementar de manera gradual la dificultad en la descripción de distintos tipos de movimiento ahora estudiaremos el movimiento de cuerpos en dos dimensiones (2-D), es decir cuerpos que se mueven sobre un plano.

Lo primero que debemos hacer, al igual que en la descripción de movimientos unidimensionales, es dar una receta para determinar de manera unívoca la posición de un cuerpo en este universo plano.

### 4.1.1. Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales

Si bien existen varios sistemas de coordenadas que nos permiten determinar de manera unívoca la posición de un punto en un plano, el más simple y utilizado es el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. Este sistema está conformado por dos ejes cartesianos, como los utilizados en la descripción de movimientos unidimensionales, perpendiculares entre sí, con un origen común a ambos, que al igual que en una dimensión denotaremos como  $O$ . Por **convención** dibujaremos un eje horizontal y otro vertical, que llamaremos *eje x* y *eje y*, considerando direcciones positivas de los mismos hacia la derecha y hacia arriba de la hoja respectivamente, como se muestra en la figura 4.1.

Todo punto del plano queda unívocamente definido por un par de números referidos al sistema de coordenadas elegido. Por ejemplo, como se observa en la figura 4.1, el punto  $A$  tiene una posición en el plano que queda determinada por medio de las coordenadas espaciales  $(x_A, y_A)$ . También es una convención universal dividir el plano en 4 cuadrantes, según las 4 posibilidades de los signos de las coordenadas de un punto en el cuadrante:  $(+, +)$ ;  $(-, +)$ ;  $(-, -)$ ;  $(+, -)$  denotándolos con los números romanos  $I$ ;  $II$ ;  $III$ ;  $IV$  respectivamente.

La distancia que existe entre un punto  $A$  del plano con coordenadas  $(x_A, y_A)$  y el origen del sistema de coordenadas,  $d_{AO}$ , se obtiene utilizando el teorema de Pitágoras,

$$d_{AO} = \overline{OA} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}. \quad (4.1)$$

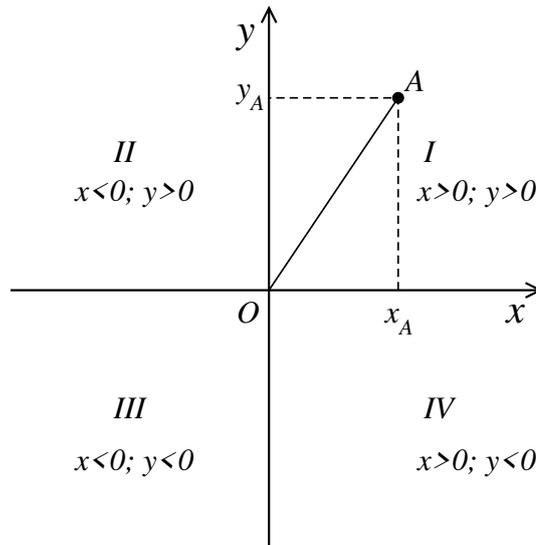


Figura 4.1: Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas de un punto  $A$ .

Dados dos puntos del plano  $A$  y  $B$ , de coordenadas  $(x_A, y_A)$  y  $(x_B, y_B)$  respectivamente, la distancia entre ellos es la longitud del segmento  $\overline{AB}$ . Esta distancia también puede calcularse utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d_{AB} = \overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}, \quad (4.2)$$

siendo esta fórmula independiente del cuadrante donde se hallen los puntos, como se ve en la figura 4.2.

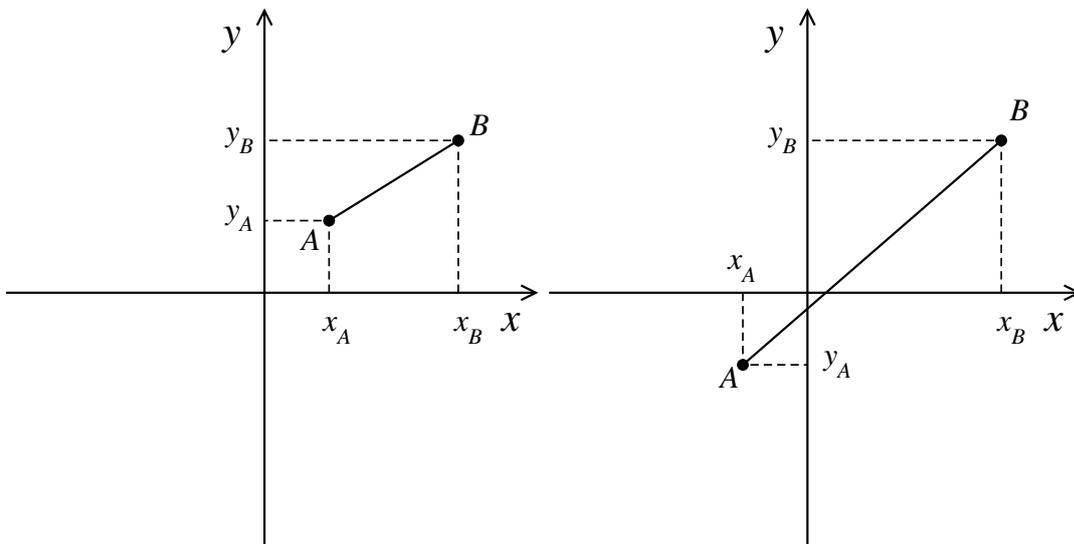


Figura 4.2: Dos ejemplos de distancia entre dos puntos en el plano.

Cuando analizamos el movimiento unidimensional de un cuerpo existía un único sistema de coordenadas para su descripción (solo podíamos decidir la localización del origen y la escala de longitudes). Sin embargo, para el estudio del movimiento de cuerpos en el plano existen muchos otros posibles sis-

temas de coordenadas aparte del cartesiano. Siempre se utilizará aquel sistema de coordenadas en el cual la descripción matemática del movimiento sea lo más simple posible. Más adelante introduciremos el sistema de coordenadas polares como ejemplo de otro sistema de coordenadas factible de ser utilizado para describir el plano cuando el problema a tratar así lo amerite.

## SECCIÓN 4.2

## Trayectoria y Funciones de Movimiento

Para definir funciones de movimiento en el plano, generalizaremos lo expuesto en la sección 1.4. Si de manera similar a lo realizado cuando estudiamos movimientos unidimensionales en el capítulo 1, para cada tiempo  $t_i$  determinamos cuáles son las coordenadas  $(x_i, y_i)$ , del punto del plano donde está ubicado el cuerpo, podemos construir una tabla similar a la tabla 1.1, solo que agregando otra columna con los valores correspondientes de la coordenada  $y$ , obteniendo

$t$	$x$	$y$
$t_1$	$x_1$	$y_1$
$t_2$	$x_2$	$y_2$
$t_3$	$x_3$	$y_3$
$t_4$	$x_4$	$y_4$
$t_5$	$x_5$	$y_5$
$t_6$	$x_6$	$y_6$
.	.	.
.	.	.

Tabla 4.1: Tiempos y posiciones registradas para un móvil en el plano  $x - y$ .

También asumiremos, como en una dimensión, que el movimiento es continuo. Entonces si marcamos todos los puntos del plano que un cuerpo ocupa sucesivamente en su movimiento tendremos una gráfica, como la que se muestra en la figura 4.3. Este conjunto de puntos del plano que el cuerpo ocupó en algún instante se denomina *trayectoria*. Es importante notar que la trayectoria **no** necesariamente corresponde a la gráfica de una función.

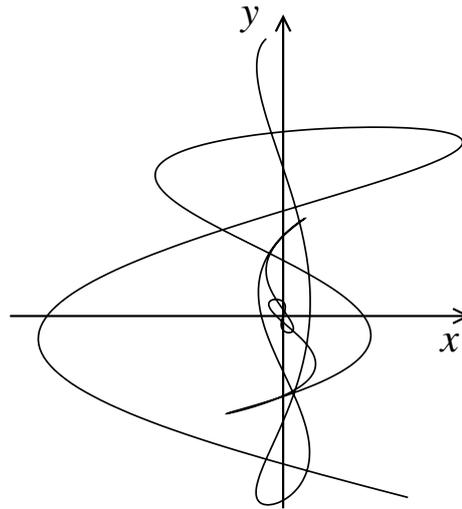


Figura 4.3: Trayectoria de un cuerpo que se mueve sobre un plano.

Por lo tanto se denomina *trayectoria* a la gráfica del camino que recorre el cuerpo a medida que realiza su movimiento (esta definición es válida independientemente de la dimensión del espacio, es decir, vale también en tres dimensiones, y si no la definimos en una dimensión fue porque al ser en este caso todas las trayectorias segmentos de recta, este concepto no presenta utilidad).

Toda la información de la tabla 4.1 la podemos desdoblar analizando, por separado, el comportamiento de la coordenada  $x$ , y por otro lado el de la coordenada  $y$ . Para esto hacemos una tabla con los valores de cada una de estas coordenadas para los distintos instantes de tiempo

$t$	$x$
$t_1$	$x_1$
$t_2$	$x_2$
$t_3$	$x_3$
$t_4$	$x_4$
$t_5$	$x_5$
$t_6$	$x_6$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$

$t$	$y$
$t_1$	$y_1$
$t_2$	$y_2$
$t_3$	$y_3$
$t_4$	$y_4$
$t_5$	$y_5$
$t_6$	$y_6$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$

Podemos encontrar dos funciones del tiempo  $x(t)$  e  $y(t)$  tales que, cuando sean evaluadas en los tiempos  $t_i$ , sus resultados reproduzcan los valores medidos  $x_i$  e  $y_i$  de las coordenadas del cuerpo. Estas funciones  $x(t)$  e  $y(t)$  se denominan *funciones de movimiento* del cuerpo, y nos permiten determinar cuál es la posición del cuerpo en el plano dando sus coordenadas para cada instante. Como ejemplo mostramos en la figura 4.4 un par de funciones de movimiento,  $x(t)$  e  $y(t)$ , que dibujan la trayectoria de la figura 4.3.

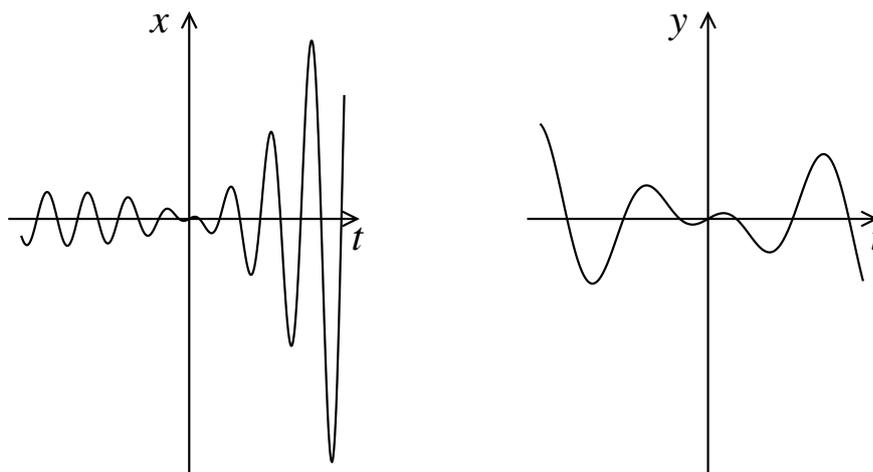


Figura 4.4: Funciones de movimiento correspondientes a la trayectoria mostrada en la figura 4.3.

Debemos tener en cuenta que no existe una relación uno a uno entre funciones de movimiento y trayectorias, muchas (¡infinitas!) funciones de movimiento distintas pueden describir el mismo camino, es decir, la misma trayectoria en el plano  $x-y$ . Como ejemplo simple, podemos recorrer la misma trayectoria en sentido opuesto, como las funciones de movimiento de la figura 4.5 que también describen la trayectoria mostrada en la figura 4.3. Como en la trayectoria no hay referencia al tiempo, funciones de movimiento que recorran el mismo camino, pero más rápido, frenando, invirtiendo a veces el movimiento, etc., corresponderán todas a la misma trayectoria.

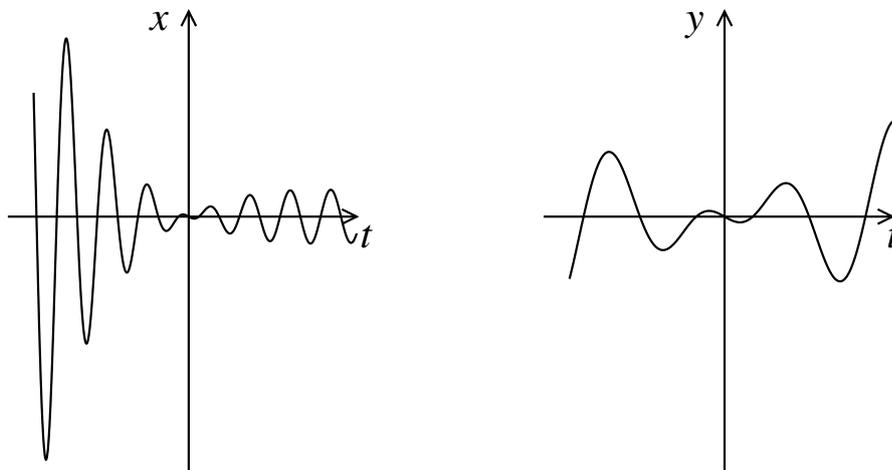


Figura 4.5: Otro par de funciones de movimiento que también describen la trayectoria mostrada en la figura 4.3, donde el móvil la recorre en sentido inverso al correspondiente a la figura 4.4.

Hemos definido a la trayectoria del cuerpo como el conjunto de puntos del plano que, en algún instante, fueron ocupados por el cuerpo. Este conjunto de puntos no necesariamente es una función; sin embargo, para algunos movimientos particulares lo es. En estos casos la expresión matemática de la trayectoria estará dada por una relación  $y = f(x)$  la cual puede deducirse a partir de las funciones de movimiento del cuerpo al igual que el dominio de la misma.

La forma de obtener la expresión  $y = f(x)$  en el caso particular que esta sea una función es eliminando la variable  $t$  de las funciones de movimiento  $x(t)$  e  $y(t)$ . Las dos formas más simples de realizar esto son:

1. Se despeja la variable  $t$  de una de las funciones de movimiento, por ejemplo  $x(t)$ , y luego se reemplaza esta expresión en la otra función de movimiento, por ejemplo  $y(t)$ , obteniendo  $y(x) = y(t(x))$ .
2. Se despeja la variable  $t$  de ambas funciones de movimiento, obteniendo  $t = g(x)$  y  $t = h(y)$ . Se igualan ambas expresiones eliminando el parámetro  $t$ ,  $g(x) = h(y)$ , y de esta igualdad se puede obtener  $x = g^{-1}(h(y))$  ó  $y = h^{-1}(g(x))$ .

Siempre es posible dar una expresión matemática a la trayectoria, aún cuando la relación entre  $x$  e  $y$  no sea una función, como es el caso mostrado en la figura 4.3. Una manera de hacer esto es partir la trayectoria en trozos en los cuales  $y(x)$ , o bien  $x(y)$ , sí sea una función, obteniendo una expresión distinta para cada trozo aplicando alguna de las técnicas 1 ó 2. Pero es importante notar que, dado que  $x(t)$  e  $y(t)$  nos permiten determinar cuál es la posición del cuerpo para cada instante, si conocemos estas funciones ya nos están definiendo cuál es la trayectoria del cuerpo. Por este motivo decimos que  $x(t)$  e  $y(t)$  describen la trayectoria en *forma paramétrica*, donde el parámetro es  $t$ . De hecho, fue de esta manera que se graficó la trayectoria de la figura 4.3 a partir de las funciones de movimiento de la figura 4.4 (podríamos haber utilizado igualmente las funciones de movimiento de la figura 4.5).

Analicemos a continuación algunos ejemplos simples de cómo obtener la expresión para la trayectoria a partir de las funciones de movimiento del cuerpo.

a) Cuerpo en reposo: en este caso las funciones de movimiento no dependen del tiempo,

$$x(t) = x_0 \quad ; \quad y(t) = y_0, \quad (4.3)$$

donde  $x_0$  e  $y_0$  representan constantes reales. La trayectoria es simplemente el punto del plano donde se encuentra el cuerpo, como se muestra en la figura 4.6.

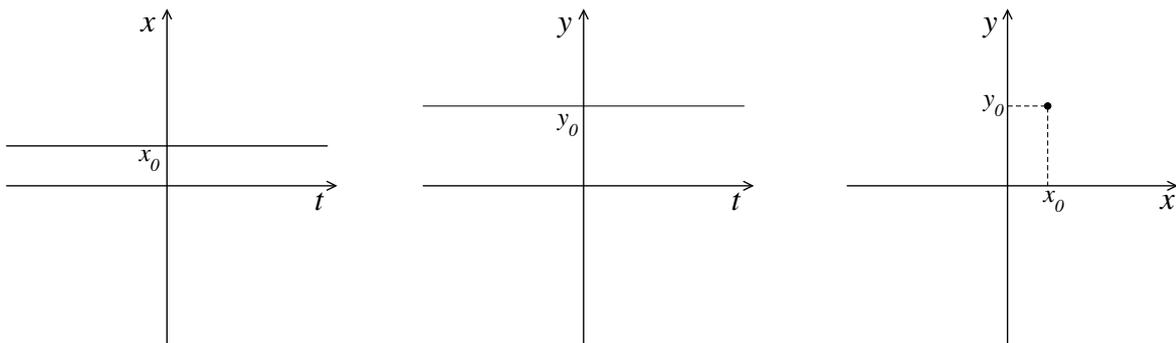


Figura 4.6: Funciones de movimiento y trayectoria de un cuerpo que se encuentra en reposo.

b) Movimiento rectilíneo paralelo al eje  $y$ :

$$x(t) = x_0 \quad ; \quad y(t) = \beta t + y_0. \quad (4.4)$$

En la figura 4.7 se muestra el gráfico de las funciones de movimiento y la trayectoria del cuerpo.

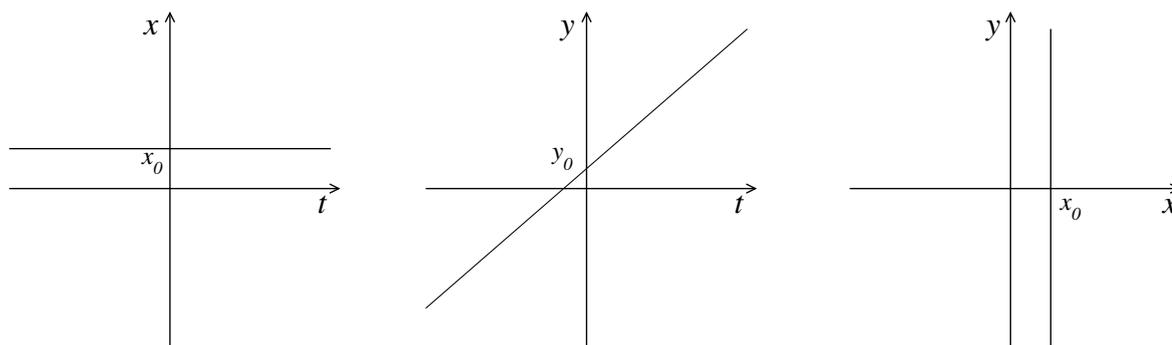


Figura 4.7: Funciones de movimiento y trayectoria de un cuerpo que se mueve sobre una línea paralela al eje  $y$ .

Como vemos en este ejemplo la trayectoria es un conjunto de puntos del plano que no puede ser descrito por una función  $y(x)$ . Por lo tanto podemos expresar a la trayectoria como un conjunto de puntos denominado  $A$ ,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = x_0\} \quad (4.5)$$

Aunque debemos notar que  $x(y) = x_0$  sí es una función.

c) Movimiento lineal más general:

$$x(t) = \alpha t + x_0; \alpha \neq 0 \quad ; \quad y(t) = \beta t + y_0, \quad (4.6)$$

En este caso ambas funciones de movimiento son funciones lineales (el caso  $\alpha = 0$  fue considerado en el ejemplo anterior), así podemos obtener de la primera ecuación  $t(x)$  y reemplazar esta función en  $y(t)$ ,

$$t(x) = \frac{x - x_0}{\alpha} \Rightarrow y(x) = \frac{\beta}{\alpha}x + \left(y_0 - \frac{\beta x_0}{\alpha}\right), \quad (4.7)$$

resultando la trayectoria  $y(x)$  también una función lineal. La figura 4.8 muestra las funciones de movimiento y trayectoria para el caso  $\alpha < 0$ ;  $\beta > 0$ .

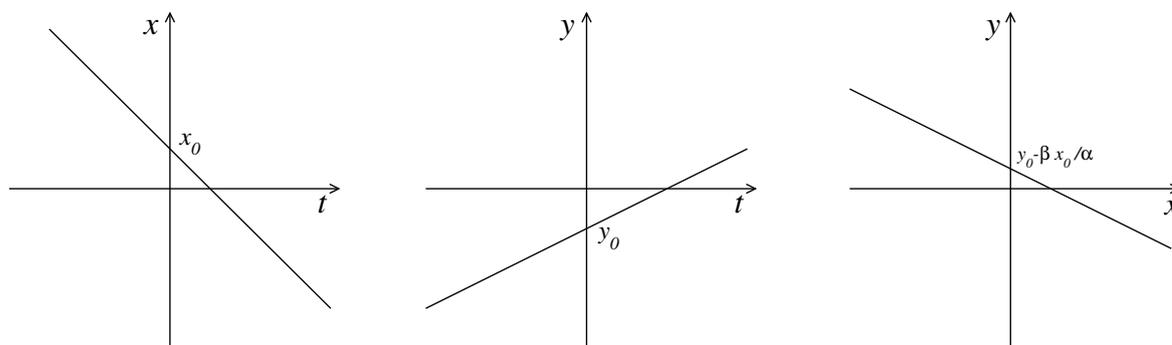


Figura 4.8: Funciones de movimiento y trayectoria de un cuerpo que se mueve sobre el plano con movimiento rectilíneo uniforme.

Notemos que como  $y(x)$  es una recta, podríamos elegir un sistema de coordenadas cuyo eje  $x$  coincida con dicha recta. En este sistema el problema es unidimensional, como los ya tratados en el

capítulo 1. Esto es una primera muestra de la **importancia** de elegir de manera adecuada el sistema de coordenadas para lograr una descripción matemática lo más **simple** posible de un dado problema físico.

d) Combinación de una función lineal y una función cuadrática:

$$x(t) = \alpha t \quad ; \quad y(t) = \beta t^2 + y_0 \quad ; \quad \alpha, \beta \neq 0. \quad (4.8)$$

Despejando  $t$  de la primera ecuación y reemplazando esta expresión en la ecuación de  $y(t)$  obtenemos la expresión de la trayectoria,

$$y(x) = \frac{\beta}{\alpha^2} x^2 + y_0, \quad (4.9)$$

que describe una trayectoria parabólica. Suponiendo que todos los coeficientes son positivos el gráfico cualitativo de las funciones de movimiento y trayectoria se muestran en la figura 4.9.

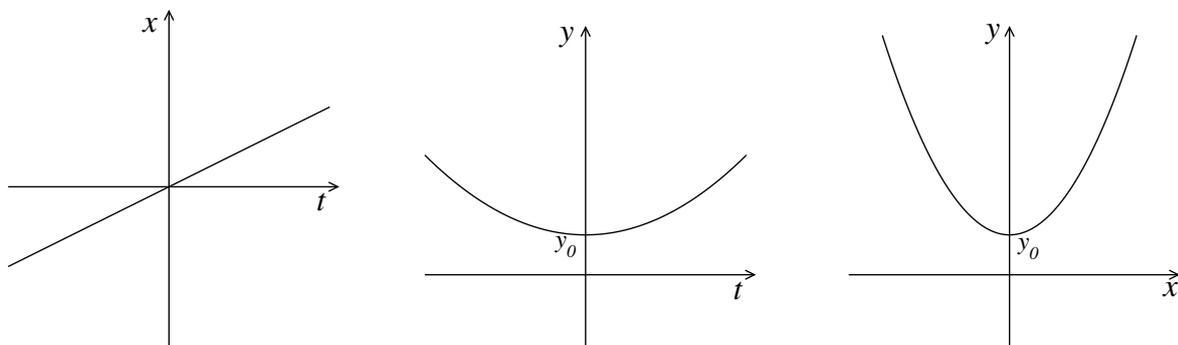


Figura 4.9: Funciones de movimiento y trayectoria de un cuerpo que se mueve sobre el plano con una trayectoria parabólica.

e) Combinación de una función cuadrática y una cuártica:

$$x(t) = \alpha t^2 \quad ; \quad y(t) = \beta t^4 + y_0. \quad (4.10)$$

Para poder analizar este ejemplo supondremos que todos los coeficientes,  $\alpha$ ;  $\beta$ ; e  $y_0$ , son positivos. En este caso lo primero a notar es que  $x$  e  $y$  son **siempre** positivos, independientemente del valor de  $t$ , así, cuando despejamos  $t$  en función de  $x$ ,

$$t(x) = \pm \sqrt{\frac{x}{\alpha}} \quad ; \quad x \geq 0, \quad (4.11)$$

y debemos tomar la raíz positiva para  $t > 0$  y la negativa para  $t < 0$ . Reemplazando esta última ecuación en  $y(t)$  obtenemos la trayectoria

$$y(x) = \frac{\beta}{\alpha^2} x^2 + y_0 \quad ; \quad x \geq 0, \quad (4.12)$$

Como vemos, la trayectoria es formalmente igual a la función obtenida en el ejemplo anterior, ecuación (4.9) (aunque los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  tienen distintas dimensiones en ambos ejemplos); sin embargo su dominio es diferente pues sólo pertenecen a él los valores de  $x \geq 0$ . Por lo tanto el gráfico cualitativo de la trayectoria es el que se muestra en la figura 4.10.

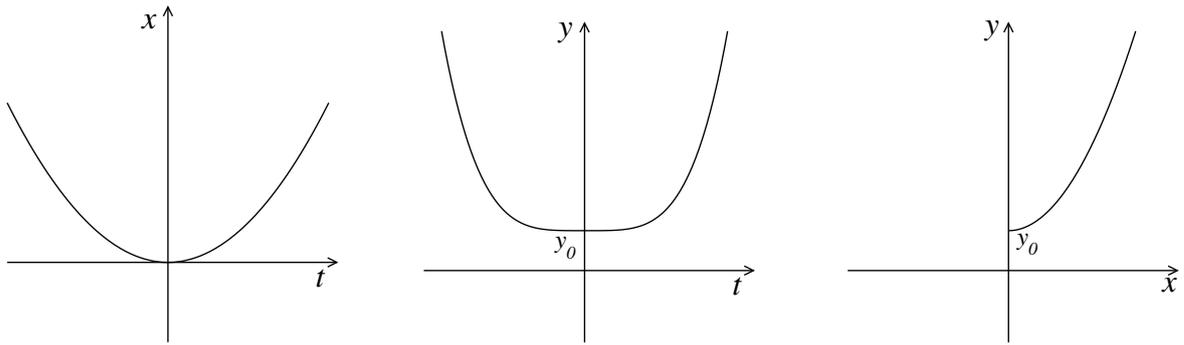


Figura 4.10: Funciones de movimiento dadas por las ecuaciones (4.10) y la trayectoria correspondiente.

- f) Un caso muy interesante, que analizaremos en detalle en el capítulo 5, es el correspondiente a funciones de movimiento trigonométricas de la forma

$$x(t) = R \cos(\omega t) ; y(t) = R \sin(\omega t). \tag{4.13}$$

En la figura 4.11 se muestra el gráfico de estas funciones de movimiento asumiendo que ambos parámetros,  $R$  y  $\omega$ , son positivos.

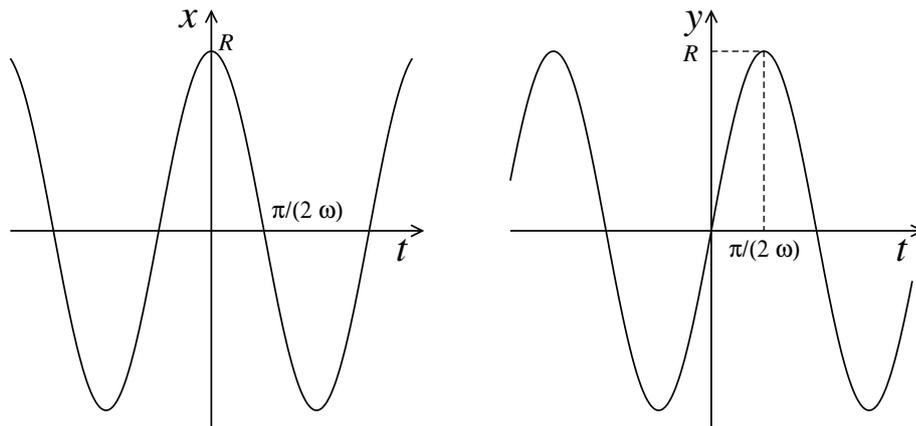


Figura 4.11: Funciones de movimiento dadas por las ecuaciones (4.13).

Si para obtener la expresión de la trayectoria queremos seguir el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores, debemos notar que las funciones trigonométricas  $\cos(\omega t)$  y  $\sin(\omega t)$  son invertibles en intervalos de longitud  $\pi/\omega$  y debemos invertir de a trozos en intervalos de dicha longitud. Teniendo esto en cuenta obtenemos:

$$t = \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{x}{R}\right) \Rightarrow y(x) = R \sin\left(\arccos\left(\frac{x}{R}\right)\right). \tag{4.14}$$

No es simple determinar cuáles son los puntos del plano que pertenecen a la trayectoria a partir de la expresión de  $y(x)$  dada en la ecuación (4.14). En este caso resulta más conveniente utilizar algunas relaciones conocidas de las funciones trigonométricas para determinar la expresión de la trayectoria. Primero elevamos ambas funciones de movimiento al cuadrado,

$$x^2(t) = R^2 \cos^2(\omega t) ; y^2(t) = R^2 \sin^2(\omega t), \tag{4.15}$$

y sumando ambas expresiones de la ecuación (4.15) tenemos

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2(\omega t) + R^2 \sin^2(\omega t) = R^2 [\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)]. \quad (4.16)$$

Finalmente, utilizando la famosa relación  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ , obtenemos la trayectoria del móvil

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (4.17)$$

que corresponde a la ecuación de una circunferencia de radio  $R$  centrada en el origen mostrada en la figura 4.12. Estas funciones de movimiento corresponden al denominado *movimiento circular uniforme (MCU)*, que, como dijimos, estudiaremos en el capítulo 5.

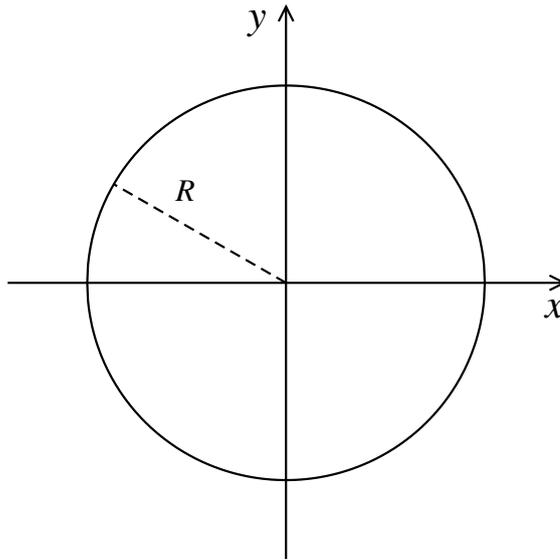


Figura 4.12: Trayectoria de un movimiento circular uniforme de radio  $R$  dado por la ecuación (4.17).

Notar que la ecuación (4.17) **no** corresponde a una función  $y(x)$ , pero si a dos,  $y_{\pm}(x) = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ . Expresiones más generales para estos tipos de funciones de movimiento son

$$x(t) = a \cos(\omega t) + x_0 \quad ; \quad y(t) = b \sin(\omega t) + y_0. \quad (4.18)$$

Despejando las funciones  $\cos(\omega t)$  y  $\sin(\omega t)$  de estas expresiones obtenemos

$$\frac{x - x_0}{a} = \cos(\omega t) \quad ; \quad \frac{y - y_0}{b} = \sin(\omega t), \quad (4.19)$$

elevando al cuadrado ambas expresiones tenemos

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 = \cos^2(\omega t) \quad ; \quad \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = \sin^2(\omega t), \quad (4.20)$$

y sumando ambas igualdades de la ecuación (4.20) obtenemos

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t), \quad (4.21)$$

llegando finalmente a la expresión para la trayectoria

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1. \quad (4.22)$$

Esta trayectoria que recorre el móvil, cuyas funciones de movimiento son las expresadas en la ecuación (4.18), es una elipse centrada en  $x = x_0$  e  $y = y_0$  y con semiejes  $a$  y  $b$ . En la figura 4.13 se muestra un ejemplo con  $a > b$ ,  $x_0 > 0$  e  $y_0 < 0$ . El ejemplo de movimiento circular que desarrollamos es un caso particular donde  $a = b = R$  y  $x_0 = y_0 = 0$ .

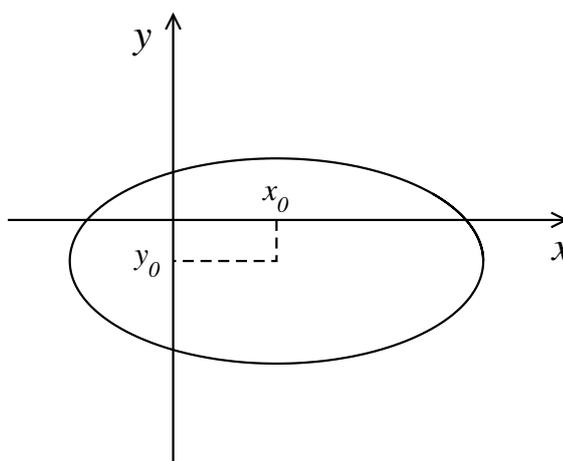


Figura 4.13: Trayectoria sobre una elipse dada por la ecuación (4.22).

- g) Como veremos en este ejemplo, la forma funcional de las funciones de movimiento en general no tiene relación con la forma funcional de la trayectoria. Tomemos ahora también funciones de movimiento trigonométricas, pero de la forma

$$x(t) = R \operatorname{sen}(\omega t) ; y(t) = R \operatorname{sen}(\omega t), \quad (4.23)$$

que se ven similares a las funciones de movimiento (4.13), sin embargo, la trayectoria es simplemente

$$y(x) = x ; \quad -R \leq x \leq R, \quad (4.24)$$

que es un segmento de recta. Compare las funciones de movimiento y trayectoria mostradas en la figura 4.14 con las mostradas en las figuras 4.11 y 4.12 para el movimiento circular.

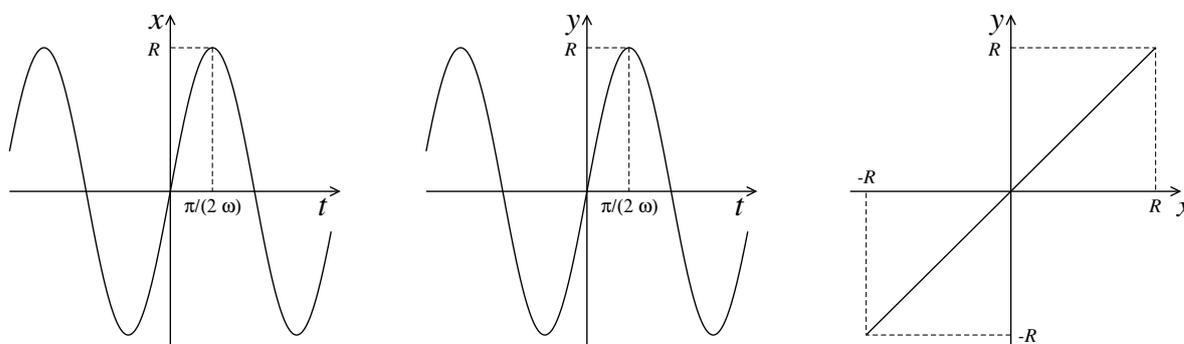


Figura 4.14: Funciones de movimiento dadas por las ecuaciones (4.23) y la correspondiente trayectoria, ecuación (4.24).

Sabemos que podemos expresar una posición en el plano dando sus coordenadas como un par ordenado  $(x,y)$ . Sin embargo, desde un punto de vista operativo esta forma no es la más adecuada de hacerlo. Por lo tanto ahora haremos un pequeño impasse en la descripción física del movimiento en dos dimensiones para introducir la forma matemática que utilizaremos para determinar la posición de un punto en el plano.

## SECCIÓN 4.3

## Vectores

Las magnitudes físicas que hemos definido hasta ahora son magnitudes escalares, es decir que están completamente definidas dando un número real y la correspondiente unidad. Sin embargo, hay muchas magnitudes físicas para las cuales es necesario dar más información; este es el caso de magnitudes en las cuales la orientación juega un papel importante. Para definir este tipo de magnitudes se utiliza un ente matemático denominado vector y las magnitudes correspondientes reciben el nombre de magnitudes vectoriales. El nombre “vector” proviene del latín “vectoris”, derivado del verbo “veho”, que significa el que transporta o conduce. El concepto de vector puede utilizarse en diversos ámbitos; en particular en física un vector es representado como un segmento de recta orientado, tal como se muestra en la figura 4.15.

Los elementos necesarios para definir un vector son:

- Una dirección: la cual es definida por una recta en el espacio.
- Un módulo: que es la longitud de un segmento sobre la recta que define la dirección.
- Un sentido: que define la orientación del segmento de recta; ya que dada una dirección existen dos sentidos posibles.
- Un punto de aplicación: gráficamente coincide con el origen del segmento utilizado para representar el vector.

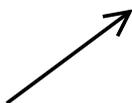


Figura 4.15: Representación gráfica de un vector.

Para denotar que una magnitud es vectorial lo haremos mediante una letra que lo identifica, que puede ser mayúscula o minúscula, con una flecha encima, por ejemplo  $\vec{r}$ , que leemos como *el vector r*. Para denotar el módulo de un vector se encierra el símbolo utilizado para el vector entre dos barras verticales  $|\vec{r}|$  ó simplemente la misma letra utilizada para denotar el vector, pero sin flecha arriba,  $r$ . El módulo de un vector es una magnitud escalar no negativa, es decir que queda totalmente definido por un número real positivo (o cero solo en el caso del vector nulo) y eventualmente por una unidad.

### 4.3.1. Operaciones con vectores

#### Multiplicación de un vector y un escalar

Si multiplicamos un vector  $\vec{a}$  por un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , su resultado es un vector  $\vec{A} = \lambda \vec{a}$ , que tiene las siguientes características.

i) Módulo:  $|\vec{A}| = |\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$ .

ii) Dirección:  $\vec{A}$  y  $\vec{a}$  tienen la misma dirección, multiplicar por un escalar **no** cambia la dirección.

iii) Sentido: 
$$\begin{cases} \lambda > 0 & \vec{A} \text{ y } \vec{a} \text{ tienen igual sentido} \\ \lambda < 0 & \vec{A} \text{ y } \vec{a} \text{ tienen sentidos opuestos} \\ \lambda = 0 & \vec{A} \text{ es el vector nulo} \end{cases}$$

Veamos los vectores que se obtienen al multiplicar un vector dado por distintos escalares:

Si  $\lambda = -1$  entonces  $\vec{A} = \lambda \vec{a} = -\vec{a}$ , que es el vector opuesto a  $\vec{a}$ ; lo que implica que tiene la misma dirección y módulo, pero sentido contrario (ver figura 4.16).



Figura 4.16: Producto de un vector por el número -1.

Como  $|\vec{A}| = |\lambda| |\vec{a}|$ , si  $|\lambda| > 1$  entonces  $|\vec{A}| > |\vec{a}|$ , mientras que si  $|\lambda| < 1$  entonces  $|\vec{A}| < |\vec{a}|$ . Además, si  $\lambda > 0$  el vector  $\vec{A}$  tendrá el mismo sentido que  $\vec{a}$ , y si, en cambio,  $\lambda < 0$ ,  $\vec{A}$  tendrá el sentido contrario al de  $\vec{a}$ , como puede verse en la figura 4.17.

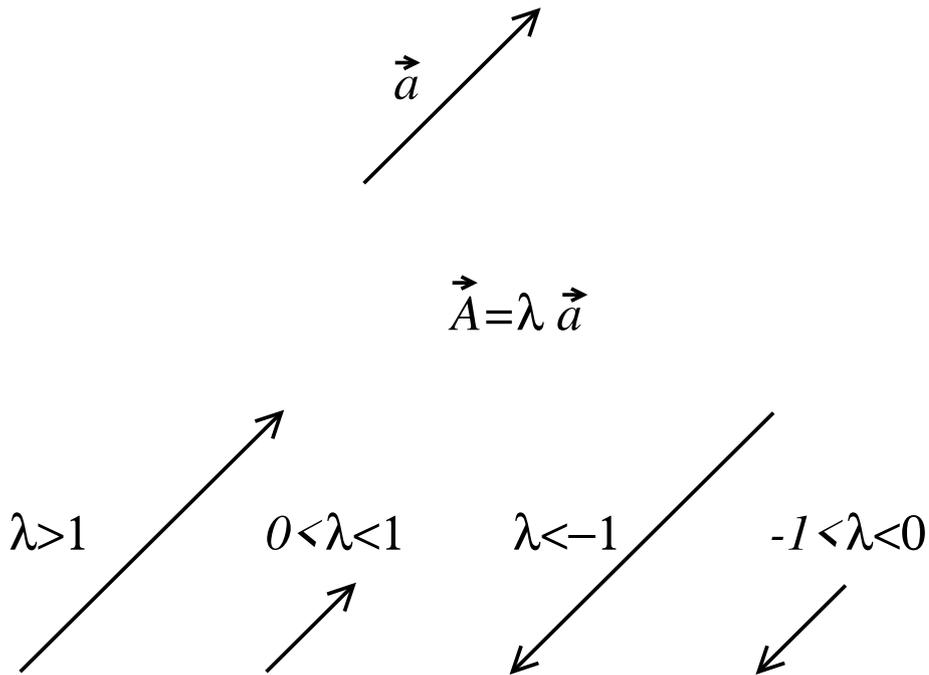


Figura 4.17: Distintos casos de multiplicación de un escalar por un vector. Notar que en todos los casos  $\vec{A}$  tiene la misma dirección que  $\vec{a}$ .

### Suma de vectores

La suma de dos vectores da como resultado otro vector. El vector suma se puede obtener gráficamente por la denominada regla del paralelogramo. Para ello hay que trasladar los dos vectores al mismo punto de aplicación, luego se forma un paralelogramo trazando por el extremo de cada vector una recta paralela al otro, como se muestra en la figura 4.18, y el vector suma queda definido por la diagonal del paralelogramo que contiene al punto común de aplicación de los vectores.

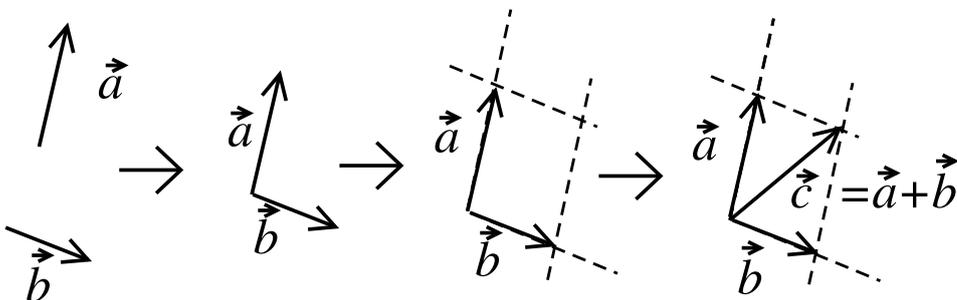


Figura 4.18: Suma de vectores utilizando el método del paralelogramo.

Otra forma de sumar gráficamente dos vectores es trasladar el segundo vector al extremo del primero y el vector suma será el que une el origen del primero con el extremo del segundo (ver figura 4.19).

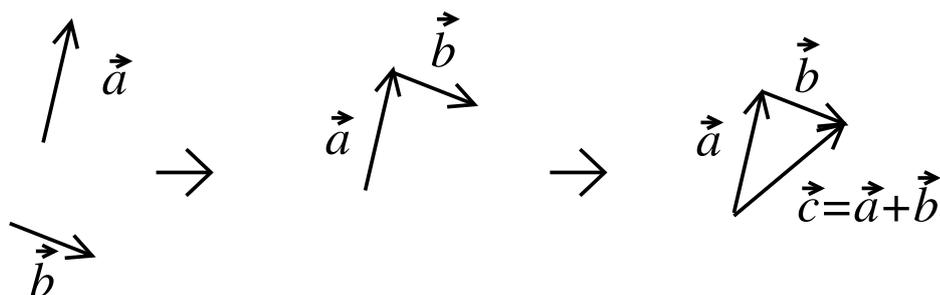


Figura 4.19: Suma de vectores trasladando uno de ellos al extremo del otro.

Ambas reglas de suma son equivalentes, salvo en el caso de suma de vectores de igual dirección, en cuyo caso la regla del paralelogramo no está definida, mientras esta última receta si lo está. En este caso decimos que los vectores son colineales. Si bien para vectores colineales no podemos definir un paralelogramo, la segunda regla gráfica nos dice que el vector suma tendrá la misma dirección que los dos vectores, el sentido del de mayor módulo (el “más largo” de los vectores) y su módulo será la suma de ambos módulos si ambos vectores tienen el mismo sentido o la diferencia si ambos tienen sentidos opuestos, como se muestra en la figura 4.20.

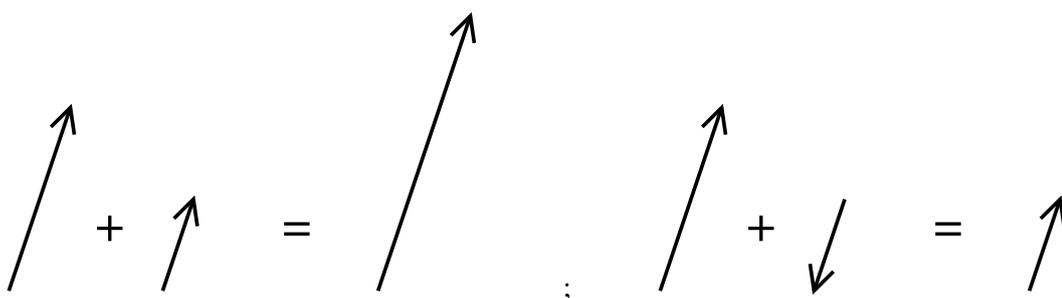


Figura 4.20: Dos casos de suma de dos vectores colineales. Izq.: ambos vectores tienen igual sentido. Der. los vectores tienen sentidos opuestos.

Para sumar más de dos vectores aplicamos reiteradamente el método del paralelogramo (ver figura 4.21), o el último método descrito, como se esquematiza en la figura 4.22.

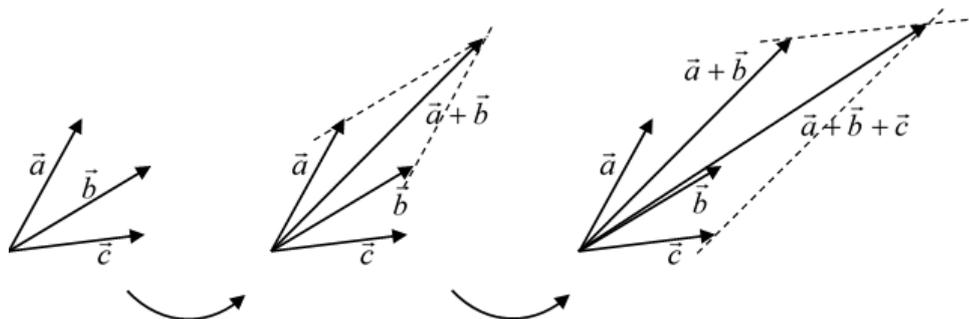


Figura 4.21: Suma de más de dos vectores aplicando el método del paralelogramo.

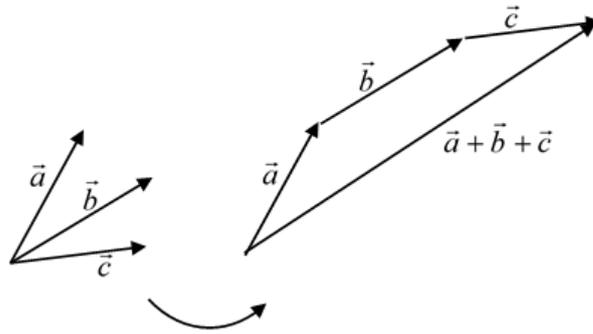


Figura 4.22: Suma de más de dos vectores trasladándolos.

A partir de la regla del paralelogramo vemos que, entre otras, la suma de vectores posee las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva respecto a la multiplicación por un escalar.

- I) Propiedad conmutativa:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .
- II) Propiedad asociativa:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .
- III) Propiedad distributiva respecto a la multiplicación por un escalar:  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ .

### Resta de vectores

Podemos pensar al vector resta de dos vectores,  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$  como el vector suma de dos vectores  $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ , donde entendemos al vector  $(-\vec{b})$  como uno con la misma dirección y módulo pero sentido contrario al del vector  $\vec{b}$  (ver multiplicación de un vector por un escalar).

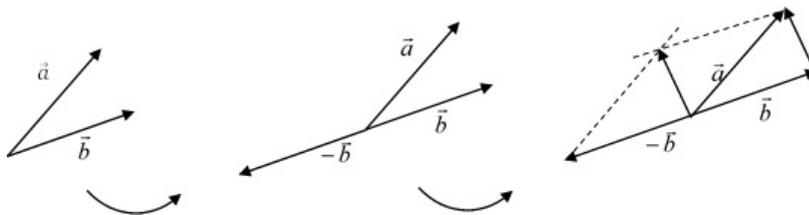


Figura 4.23: Resta de dos vectores aplicando el método del paralelogramo.

Podemos ver que en el caso de la diferencia de vectores es más simple su representación gráfica pues, como se ve en la figura 4.23, el vector diferencia es igual al vector con inicio en el extremo del vector sustraendo y final en el extremo del vector minuendo.

### Descomposición de vectores

Un vector  $\vec{a}$  puede ser expresado como la suma de dos vectores que estén en dos direcciones determinadas no colineales. Encontrar cuáles son esos vectores se denomina hacer la descomposición del vector  $\vec{a}$  en dichas direcciones. En la figura 4.24 se esquematiza el procedimiento correspondiente; se trazan, por el extremo del vector  $\vec{a}$ , dos rectas paralelas a cada una de las direcciones determinadas;

los puntos donde estas rectas cortan a las direcciones dadas determinan los extremos de los vectores en los cuales hemos descompuesto el vector  $\vec{a}$ . Notar que  $\vec{a}$  resulta la suma de los dos vectores así definidos,  $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ .

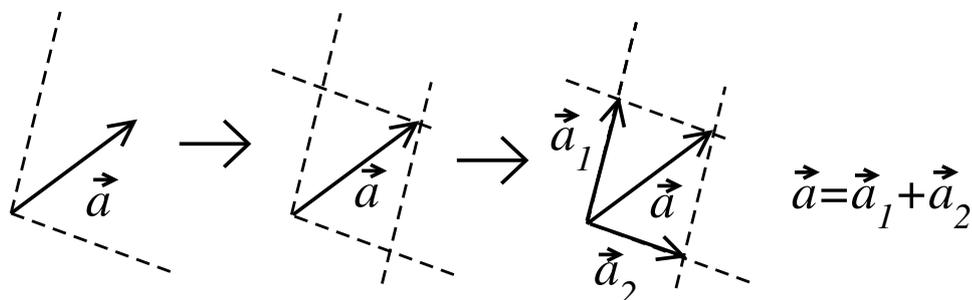


Figura 4.24: Descomposición de un vector en dos direcciones arbitrarias.

### Versores

Un versor es simplemente un vector con la única particularidad de que su módulo es igual a 1. Sin embargo, veremos que definir versores es de gran importancia para simplificar nuestro trabajo con vectores. Para distinguirlos de los otros vectores, a los versores los designaremos con una letra y en su parte superior, en lugar de una flecha, el símbolo correspondiente al acento circunflejo; por ejemplo  $\hat{a}$ .

La característica que tienen los versores es que definen una dirección en el espacio y, a partir de ellos, podemos generar todos los vectores sobre dicha dirección. Para generar un vector en la dirección del versor debemos multiplicar el versor por un número real que cumpla las siguientes condiciones: su valor absoluto debe ser igual al módulo del vector que deseamos generar y su signo debe ser positivo si el vector debe tener el mismo sentido del versor o negativo si debe tener sentido opuesto.

Dado un vector  $\vec{a} \neq 0$  podemos generar, a partir de él, un versor con su misma dirección y sentido. Para esto debemos multiplicar el vector por un escalar cuyo valor es igual a la inversa de su módulo

$$\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|} > 0, \quad (4.25)$$

entonces

$$\hat{a} = \lambda \vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \quad (4.26)$$

Podemos ver que el módulo de este vector es

$$|\hat{a}| = |\lambda \vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1. \quad (4.27)$$

### 4.3.2. Base vectorial

Hemos visto que podemos expresar un vector  $\vec{A}$  como la suma de dos vectores que estén en dos direcciones determinadas. Por otro lado, dos versores cualesquiera (no colineales) pueden definir las direcciones a lo largo de las cuales queremos descomponer un vector. Al conjunto de versores que definen estas direcciones se lo llama *base vectorial* (ver figura 4.25).

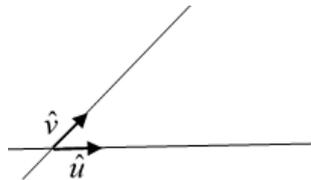


Figura 4.25: Versores de la base vectorial.

Por ejemplo, consideremos los versores  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  que definen la base mostrada en la figura 4.25, en cuyas direcciones queremos descomponer un vector  $\vec{A}$ . Llamamos a estos vectores  $\vec{A}_1$  y  $\vec{A}_2$ , que cumplen

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \quad (4.28)$$

como se muestra en la figura 4.26.

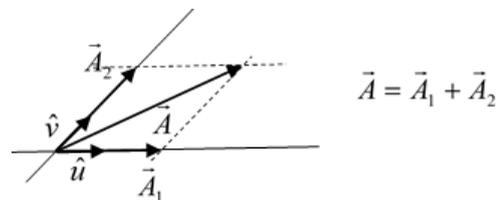


Figura 4.26: Descomposición del vector  $\vec{A}$ .

$\vec{A}_1$  y  $\vec{A}_2$  son los vectores en los cuales se descompone el vector  $\vec{A}$  según las direcciones de  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  respectivamente. Como  $\vec{A}_1$  y  $\hat{u}$  son vectores paralelos, al igual que  $\vec{A}_2$  y  $\hat{v}$ , podemos escribir:

$$\vec{A}_1 = A_u \hat{u} \quad ; \quad \vec{A}_2 = A_v \hat{v}. \quad (4.29)$$

Por lo tanto

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = A_u \hat{u} + A_v \hat{v}, \quad (4.30)$$

donde  $A_u$  y  $A_v$  son dos cantidades escalares que se denominan *componentes* del vector  $\vec{A}$  en las direcciones de  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  respectivamente.

### 4.3.3. Vectores en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales

Así como con un versor podíamos generar todos los posibles vectores sobre la dirección definida por el versor, con un par de versores no paralelos podemos generar todos los posibles vectores en el plano. Una base vectorial muy usada, y que utilizaremos habitualmente, es la base ortonormal ilustrada en la figura 4.27 en la cual los versores que la definen son perpendiculares entre sí. En el caso del sistema cartesiano ortogonal, que utilizamos para describir el movimiento de los cuerpos que se mueven sobre un plano, los versores se ubicarán sobre cada uno de los ejes. El versor que determina la dirección del eje  $x$  se denomina  $\hat{i}$  y el que determina la dirección del eje  $y$  se denomina  $\hat{j}$ .

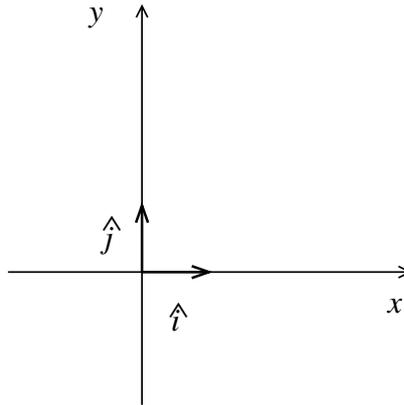


Figura 4.27: Base ortonormal cartesiana.

Las componentes de un vector según estas direcciones perpendiculares se llaman componentes ortogonales o componentes cartesianas (ver figura 4.28).

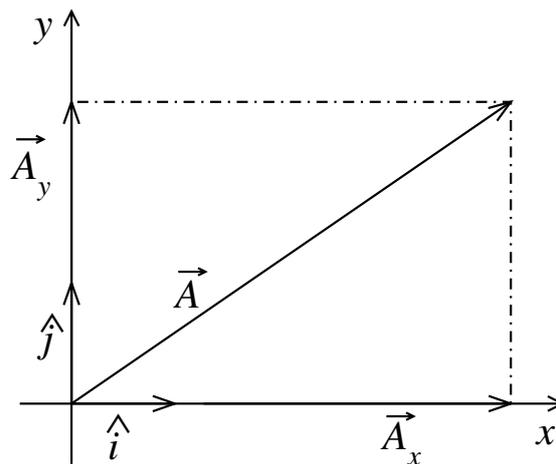


Figura 4.28: Descomposición de un vector  $\vec{A}$  en una base cartesiana.

$\vec{A}_x$  y  $\vec{A}_y$  son las componentes *vectoriales* en las que se descompone el vector  $\vec{A}$  según las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente. Por lo tanto, podemos escribir

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}. \quad (4.31)$$

donde  $A_x$  y  $A_y$  son las componentes del vector  $\vec{A}$  a lo largo de las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente, y son magnitudes escalares que pueden ser positivas, negativas o nulas.

Calculamos el módulo del vector utilizando el teorema de Pitágoras expresándolo en función de estas componentes;

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \quad (4.32)$$

### Dirección de un vector en un sistema cartesiano ortogonal

Podemos obtener la dirección y sentido de un vector  $\vec{A}$  si conocemos las componentes cartesianas del mismo. La *convención usual* es dar el ángulo  $\theta$  que forma el vector con el eje  $x$  en el sentido antihorario. De la figura 4.28 deducimos que

$$\theta_A = \arctan(A_y/A_x). \quad (4.33)$$

Si permitimos que  $\theta$  tome valores en el intervalo  $[0, 2\pi)$ , entonces el ángulo define ambos, dirección y sentido del vector, ya que un vector  $\vec{A}$  que forma un ángulo  $\theta_A$  con el eje  $x$  tendrá la misma dirección, pero sentido opuesto a un vector  $\vec{B}$  que forma un ángulo  $\theta_B = \theta_A + \pi$  con el eje  $x$ , como muestra el ejemplo de la figura 4.29.

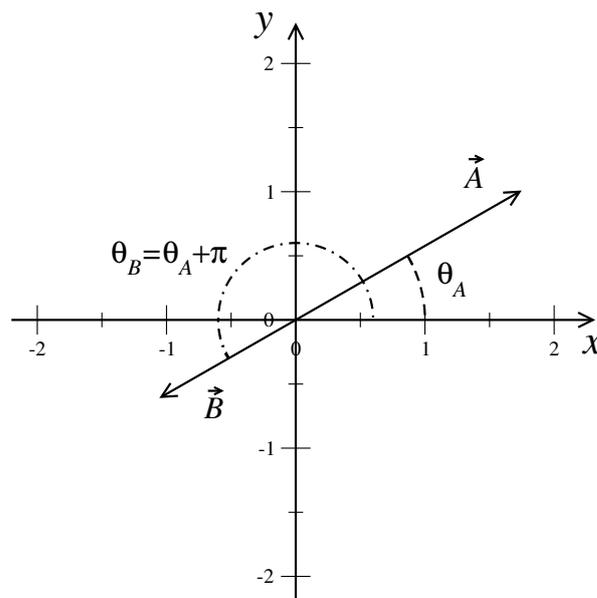


Figura 4.29: Dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  con igual dirección y sentido opuesto.

Pero debemos tener en cuenta que la función tangente tiene período  $\pi$ , esto es,  $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$ . Entonces para dos vectores que tienen igual dirección pero sentido opuesto se cumple que  $A_y/A_x = B_y/B_x$ , por lo que una calculadora nos dará un único valor al evaluar la función arcotangente usando las componentes de  $\vec{A}$  o de  $\vec{B}$ . Además, para vectores en el segundo o cuarto cuadrante, la calculadora arroja un valor negativo para la arcotangente, en el intervalo  $(-\pi/2, 0)$ . Entonces, para obtener adecuadamente la dirección y sentido de un vector como el ángulo que forma con el eje  $x$ , debemos tener en cuenta también el signo de sus componentes para determinar unívocamente dicho ángulo. Así, para obtener el ángulo  $\theta_A \in [0, 2\pi)$  que forma  $\vec{A}$  con el eje  $x$ , al resultado arrojado por la calculadora para  $\arctan(A_y/A_x) = \alpha$  le debemos aplicar la prescripción siguiente:

$$\text{Si } \begin{cases} A_x > 0; A_y \geq 0 & \text{el vector está en el 1}^{er} \text{ cuadrante} & \Rightarrow \theta_A = \alpha \\ A_x < 0; A_y \geq 0 & \text{el vector está en el 2}^{o} \text{ cuadrante} & \Rightarrow \theta_A = \alpha + \pi. \\ A_x < 0; A_y < 0 & \text{el vector está en el 3}^{o} \text{ cuadrante} & \Rightarrow \theta_A = \alpha + \pi. \\ A_x > 0; A_y < 0 & \text{el vector está en el 4}^{o} \text{ cuadrante} & \Rightarrow \theta_A = \alpha + 2\pi. \\ A_x = 0; A_y > 0 & \text{el vector está en el eje y positivo} & \Rightarrow \theta_A = \pi/2 \\ A_x = 0; A_y < 0 & \text{el vector está en el eje y negativo} & \Rightarrow \theta_A = 3\pi/2 \end{cases} \quad (4.34)$$

### Suma de dos vectores en un sistema cartesiano ortogonal

Supongamos que deseamos determinar el vector suma de dos vectores  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ . Podemos calcular esta suma mediante la regla del paralelogramo, como se muestra en la figura 4.30, o expresar estos vectores utilizando los versores y sus componentes cartesianas,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}; \quad \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}; \quad \vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j}. \quad (4.35)$$

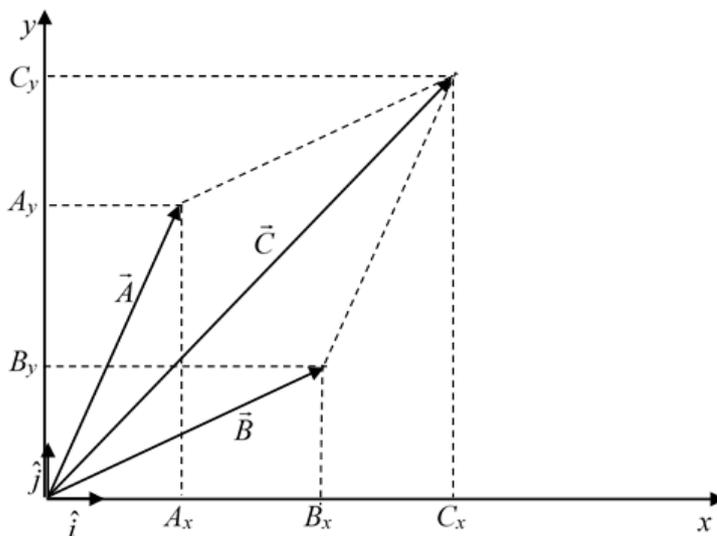


Figura 4.30: Suma de vectores por regla del paralelogramo y por suma de componentes en una base cartesiana.

Calculamos entonces la suma utilizando las expresiones (4.35),

$$\begin{aligned}
\vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} \\
&= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + B_x \hat{i} + B_y \hat{j} \\
&= (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j},
\end{aligned} \tag{4.36}$$

y podemos identificar las componentes del vector  $\vec{C}$

$$C_x = A_x + B_x \quad ; \quad C_y = A_y + B_y. \tag{4.37}$$

Entonces vemos que la suma de dos vectores es igual a otro vector cuya componente en una determinada dirección es la suma de las componentes de cada uno de los vectores en dicha dirección.

### Resta de dos vectores en una base ortogonal

Para realizar la resta de dos vectores,  $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ , procedemos de manera similar a la suma, pues podemos pensar esta resta como la suma de dos vectores  $\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B})$ . Expresando los vectores en términos de sus componentes cartesianas, ecuaciones (4.35), tenemos que

$$-\vec{B} = -B_x \hat{i} - B_y \hat{j}, \tag{4.38}$$

por lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
\vec{C} &= \vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{A} - \vec{B} \\
&= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} - B_x \hat{i} - B_y \hat{j} \\
&= (A_x - B_x) \hat{i} + (A_y - B_y) \hat{j},
\end{aligned} \tag{4.39}$$

donde

$$C_x = A_x - B_x \quad ; \quad C_y = A_y - B_y. \tag{4.40}$$

Por lo tanto, el vector resta de dos vectores es igual a un vector cuya componente en una determinada dirección es la resta de las componentes de cada uno de los vectores en dicha dirección.

### Multiplicación de un vector por un escalar en una base ortogonal

Si  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , cuya expresión en componentes es dada por las ecuaciones (4.35) cumplen  $\vec{B} = \lambda \vec{A}$  esto quiere decir que

$$\vec{B} = \lambda (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) = \lambda A_x \hat{i} + \lambda A_y \hat{j}, \tag{4.41}$$

entonces

$$B_x = \lambda A_x \quad ; \quad B_y = \lambda A_y, \quad (4.42)$$

además

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(\lambda A_x)^2 + (\lambda A_y)^2} = |\lambda| \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = |\lambda| |\vec{A}|. \quad (4.43)$$

### Otras notaciones

En muchos libros se identifica los vectores utilizando una letra en negrita,  $\mathbf{A} = \vec{A}$ , pero dada la dificultad de escribir letras en negrita en un pizarrón o un cuaderno, no utilizaremos esta notación.

Otra notación muy utilizada es escribir las componentes cartesianas del vector como un par ordenado de números reales. En particular, si escribimos los versores base como

$$\hat{i} = (1, 0) \quad ; \quad \hat{j} = (0, 1), \quad (4.44)$$

obtenemos para un vector  $\vec{A}$  dado,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = (A_x, A_y). \quad (4.45)$$

A esta notación la usaremos en algunas ocasiones, siempre que trabajemos en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal.

#### 4.3.4. Producto escalar

El producto escalar (también denominado producto interno o producto punto) es una operación entre dos vectores cuyo resultado es un escalar. Dados dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , como los mostrados en la figura 4.31, que subtienden entre sí un ángulo  $\alpha$ , el producto escalar entre ambos está definido como el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo comprendido,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\alpha), \quad (4.46)$$

donde el ángulo subtendido cumple  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

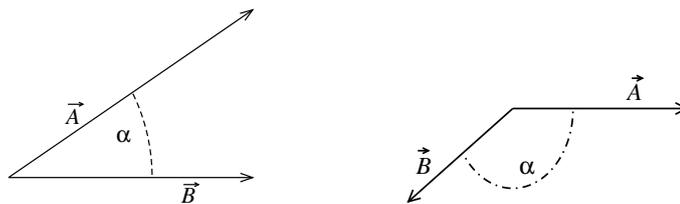


Figura 4.31: Dos ejemplos de vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  y el ángulo  $\alpha$  entre ellos.

Como dijimos, el producto escalar entre dos vectores no nulos,  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ , da como resultado un escalar. Este será positivo si  $0 \leq \alpha < \pi/2$ , negativo si  $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ , o cero si  $\alpha = \pi/2$ .

A partir de la definición del producto escalar se desprende que:

I) El producto escalar es conmutativo

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (4.47)$$

II) El producto escalar es distributivo respecto a la suma de vectores

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}. \quad (4.48)$$

III) El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al módulo del vector elevado al cuadrado.

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| |\vec{A}| \cos(0) = |\vec{A}|^2. \quad (4.49)$$

Como consecuencia de esto se verifica que el producto interno de un versor por sí mismo es igual a uno (en particular  $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$  y  $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ ).

IV) Multiplicación por un escalar

$$(\lambda \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\lambda \vec{B}) = \lambda \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (4.50)$$

V) El producto escalar de dos vectores no nulos ( $\vec{A} \neq 0$  y  $\vec{B} \neq 0$ ) perpendiculares entre sí ( $\vec{A} \perp \vec{B}$ ) es igual a cero.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\pi/2) = 0. \quad (4.51)$$

Por lo tanto el producto interno entre los versores que definen la base cartesiana es igual a cero,  $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ . Entonces, cuando deseamos demostrar que dos vectores no nulos son perpendiculares sólo debemos calcular el producto escalar entre ellos y verificar que es igual a cero.

VI) Es posible determinar el ángulo que subtenden dos vectores entre sí. De la definición de producto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\alpha), \quad (4.52)$$

despejamos el coseno del ángulo subtendido,

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}, \quad (4.53)$$

obteniendo finalmente

$$\cos(\alpha) = \hat{A} \cdot \hat{B}. \quad (4.54)$$

VII) Se puede determinar la proyección de un vector  $\vec{C}$  en una determinada dirección.

Para esto realizamos el producto escalar entre el vector dado y un versor  $\hat{u}$  que define dicha dirección (ver figura 4.32).

$$\vec{C} \cdot \hat{u} = |\vec{C}| |\hat{u}| \cos(\beta) = |\vec{C}| \cos(\beta) \quad (4.55)$$

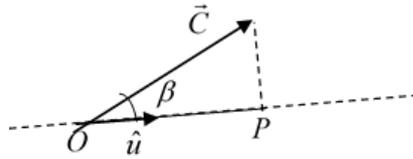


Figura 4.32: Producto escalar de un vector por un versor.

Como se puede ver en la figura 4.32,  $\vec{C} \cdot \hat{u}$  es la proyección del vector  $\vec{C}$  sobre la dirección definida por  $\hat{u}$ .

Si se tienen dos vectores,  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , y deseamos calcular la componente o proyección de uno de ellos, supongamos el vector  $\vec{A}$ , a lo largo de la dirección de  $\vec{B}$  (ver figura 4.33), debemos calcular el producto escalar del vector  $\vec{A}$  con un versor con la misma dirección y sentido del vector  $\vec{B}$ . Sabemos que podemos definir un versor en la dirección del vector  $\vec{B}$  como:

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}, \quad (4.56)$$

de esta manera

$$\vec{A} \cdot \hat{B} = \vec{A} \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = |\vec{A}| \cos(\alpha). \quad (4.57)$$

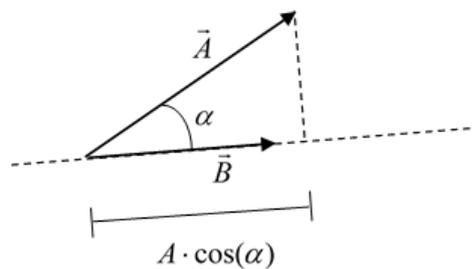


Figura 4.33: Proyección de un vector en una dirección.

Podemos encontrar las componentes de un vector (por ejemplo el vector  $\vec{C}$  mostrado en la figura 4.34) en una base ortogonal, haciendo el producto escalar del vector por los versores que definen la base.

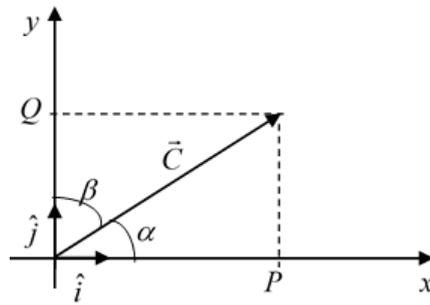


Figura 4.34: Proyección de un vector en una base cartesiana.

$$\vec{C} \cdot \hat{i} = C \cos(\alpha) = \overline{OP} = C_x, \quad (4.58)$$

$$\vec{C} \cdot \hat{j} = C \cos(\beta) = \overline{OQ} = C_y. \quad (4.59)$$

Si tuviéramos un vector  $\vec{D}$  en el segundo cuadrante (ver figura 4.35) tendríamos que

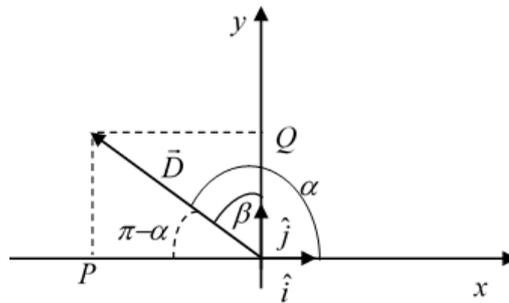


Figura 4.35: Proyección de un vector en el segundo cuadrante en una base cartesiana.

$$\vec{D} \cdot \hat{i} = D \cos(\alpha) = -D \cos(\pi - \alpha) = -\overline{OP} = D_x, \quad (4.60)$$

$$\vec{D} \cdot \hat{j} = D \cos(\beta) = \overline{OQ} = D_y. \quad (4.61)$$

Si repetimos el cálculo con vectores en cualquiera de los cuadrantes veríamos que el resultado sería el mismo, es decir que para todo vector  $\vec{A}$  en el plano podemos encontrar sus componentes en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal haciendo el producto escalar de este vector por cada uno de los versores que definen la base.

$$\vec{A} \cdot \hat{i} = A_x \quad ; \quad \vec{A} \cdot \hat{j} = A_y. \quad (4.62)$$

### Producto escalar en coordenadas cartesianas

Dados dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , expresados en sus componentes cartesianas, el producto escalar entre ambos resulta

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j}), \quad (4.63)$$

aplicando la propiedad distributiva (4.48) y de multiplicación por escalares, (4.50), tenemos

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_y B_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \cdot \hat{j}), \quad (4.64)$$

teniendo en cuenta que  $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = 1$  e  $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0$ , resulta

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y. \quad (4.65)$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la primera definición que dimos para el producto escalar. Sean los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  de la figura 4.36, su producto escalar es

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\alpha) = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta_B - \theta_A), \quad (4.66)$$

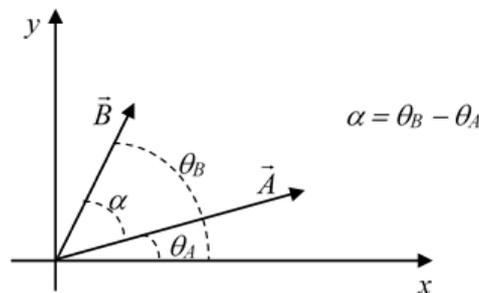


Figura 4.36: Producto escalar de dos vectores.

desarrollando el coseno de la diferencia de los ángulos

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta_A) \cos(\theta_B) + |\vec{A}| |\vec{B}| \operatorname{sen}(\theta_A) \operatorname{sen}(\theta_B) \\ &= |\vec{A}| \cos(\theta_A) |\vec{B}| \cos(\theta_B) + |\vec{A}| \operatorname{sen}(\theta_A) |\vec{B}| \operatorname{sen}(\theta_B), \end{aligned} \quad (4.67)$$

podemos identificar en esta expresión a las componentes de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ ,

$$A_x = |\vec{A}| \cos(\theta_A) ; A_y = |\vec{A}| \operatorname{sen}(\theta_A) ; B_x = |\vec{B}| \cos(\theta_B) ; B_y = |\vec{B}| \operatorname{sen}(\theta_B). \quad (4.68)$$

Reemplazando estas expresiones en (4.67) obtenemos el producto escalar de dos vectores en términos de sus coordenadas cartesianas,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y. \quad (4.69)$$

Con esta forma de calcular el producto escalar resulta fácil verificar que el producto escalar de un vector por sí mismo es igual a su módulo al cuadrado

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) = A_x^2 + A_y^2 = |\vec{A}|^2. \quad (4.70)$$

También es posible calcular el ángulo entre dos vectores en términos de sus componentes cartesianas a partir de la ecuación (4.53),

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \hat{A} \cdot \hat{B}, \quad (4.71)$$

obtenemos

$$\cos(\alpha) = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{\sqrt{(A_x^2 + A_y^2)(B_x^2 + B_y^2)}}. \quad (4.72)$$

### Ejemplos:

Apliquemos los conceptos arriba vertidos en algunos ejemplos particulares. Supongamos que tenemos los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , que expresados en el sistema de coordenadas cartesiano de la figura 4.37 son  $\vec{A} = 8\hat{i} + 6\hat{j}$  y  $\vec{B} = -6\hat{i} + 4\hat{j}$ .

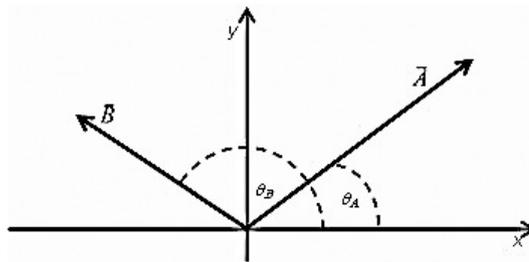


Figura 4.37

- Calculemos el módulo de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . De acuerdo a la ecuación (4.70) tenemos

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10; \\ |\vec{B}| &= \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7,211. \end{aligned} \quad (4.73)$$

- Calculemos dirección y sentido de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . La dirección y el sentido de estos vectores pueden determinarse dando el valor del ángulo  $\theta$  que forman con el eje  $x$  según la ecuación (4.34). Como  $\vec{A}$  está en el primer cuadrante, tenemos que  $\theta_A = \arctan(A_y/A_x)$ , mientras que, como  $\vec{B}$  está en el segundo cuadrante será  $\theta_B = \arctan(B_y/B_x) + \pi$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}\theta_A &= \arctan\left(\frac{6}{8}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 0,643\text{rad} \simeq 36,87^\circ \\ \theta_B &= \arctan\left(\frac{4}{-6}\right) + \pi = -\arctan\left(\frac{2}{3}\right) + \pi \simeq (-0,588 + \pi)\text{rad} = 2,55\text{rad} \simeq 146,31^\circ.\end{aligned}\tag{4.74}$$

- Determinemos los versores en las direcciones de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Aplicando la ecuación (4.26) obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{1}{|\vec{A}|} \vec{A} = \frac{1}{10} (8\hat{i} + 6\hat{j}) = 0,8\hat{i} + 0,6\hat{j}; \\ \hat{B} &= \frac{1}{|\vec{B}|} \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{52}} (-6\hat{i} + 4\hat{j}) \simeq -0,832\hat{i} + 0,555\hat{j}.\end{aligned}\tag{4.75}$$

- Generemos un vector  $\vec{C}$  que tenga la misma dirección y sentido que el vector  $\vec{A}$  pero de módulo 12 y otro vector  $\vec{D}$  que tenga la misma dirección y sentido opuesto al vector  $\vec{B}$  y que sea de módulo 2. Sabemos que si conocemos un versor en una determinada dirección, a partir de él podemos generar todos los vectores en dicha dirección. Para ello debemos multiplicar el versor por un número cuyo valor absoluto sea igual al módulo del vector que queremos generar y cuyo signo sea positivo si queremos que el vector tenga el mismo sentido que el versor o negativo si queremos que tenga el sentido opuesto. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\vec{C} &= 12\hat{A} = 9,6\hat{i} + 7,2\hat{j}; \\ \vec{D} &= -2\hat{B} = 1,664\hat{i} + -1,110\hat{j}.\end{aligned}\tag{4.76}$$

- Calculemos el ángulo que forman los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  entre sí. De acuerdo a la ecuación (4.71)

$$\begin{aligned}\cos(\theta_{AB}) &= \hat{A} \cdot \hat{B} = (0,8\hat{i} + 0,6\hat{j}) \cdot (-6\hat{i} + 4\hat{j})/\sqrt{52} = -\frac{6}{5\sqrt{13}} \simeq -0,333 \Rightarrow \\ \theta_{AB} &\simeq 1,91\text{rad} \simeq 109,44^\circ,\end{aligned}\tag{4.77}$$

que coincide con el valor que obtenemos si calculamos  $\theta_{AB} = \theta_B - \theta_A$ .

## SECCIÓN 4.4

# Descripción vectorial del movimiento en el plano

### 4.4.1. Vector posición

Vamos a identificar con un vector el punto del plano donde se encuentra ubicado el cuerpo cuyo movimiento estamos describiendo, y a este vector lo denominaremos *vector posición* y lo denotaremos generalmente con la letra  $\vec{r}$  (ver figura 4.38),

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} ; r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.78)$$

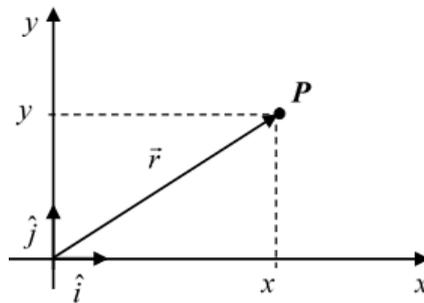


Figura 4.38: El vector posición que señala la posición del cuerpo.

#### 4.4.2. Función vectorial de movimiento

Hemos visto que la posición de un punto en el plano puede ser dada por un vector denominado *vector posición del punto*, determinado por sus coordenadas cartesianas. También vimos en la sección 4.2 que para describir el movimiento de un cuerpo sobre el plano necesitamos dos funciones de movimiento,  $x(t)$  e  $y(t)$ . Ya que su vector posición variará con el tiempo y en cada instante tendremos un vector posición determinado por las coordenadas  $x$  e  $y$  del cuerpo en ese instante, tenemos entonces un vector que es función del tiempo,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Si describimos el movimiento en una base ortonormal correspondiente a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales tendremos,

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}. \quad (4.79)$$

Por lo tanto tenemos una forma de referir el movimiento de un cuerpo en el plano por medio de una *función vectorial de movimiento*  $\vec{r}(t)$ , como se muestra en la figura 4.39.

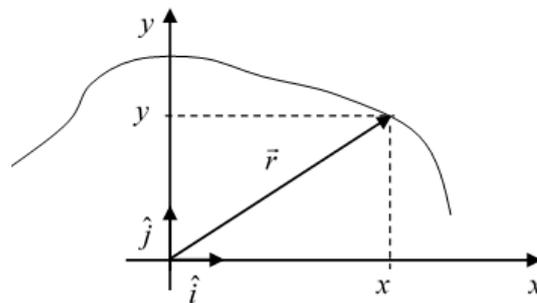


Figura 4.39: Trayectoria de un móvil y el vector posición en un instante dado.

#### 4.4.3. Vector desplazamiento

Dados los vectores posición  $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$  y  $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ , para los instantes  $t_1 < t_2$  respectivamente, definimos el *vector desplazamiento* como el vector  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Como vemos en la figura 4.40, este vector

comienza en la posición sobre la trayectoria que ocupaba el cuerpo en el tiempo  $t_1$  y finaliza en la posición sobre la trayectoria donde estaba el cuerpo para el instante  $t_2$ ; en resumen comienza en el extremo del vector posición  $\vec{r}_1$  y termina en el extremo del vector posición  $\vec{r}_2$ . El módulo del vector desplazamiento es igual a la longitud del segmento que une ambos puntos sobre la trayectoria.

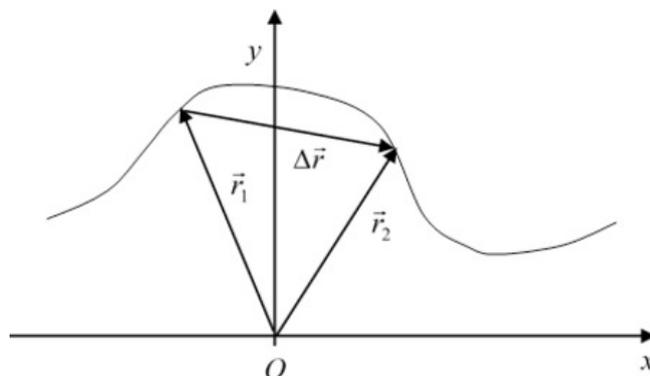


Figura 4.40: Vectores posición en dos instantes y su correspondiente vector desplazamiento en  $[t_1, t_2]$ .

#### 4.4.4. Vector velocidad media

La función vectorial de movimiento define la posición del cuerpo en todo instante, pero podemos complementar esta información dando, además, la dirección, sentido y rapidez del movimiento. Si bien, cuando analizamos el movimiento de cuerpos en una dimensión concluimos que la velocidad media no era un parámetro que permitiera caracterizar adecuadamente el movimiento de cuerpos, igualmente exploraremos qué información puede brindarnos en el movimiento bidimensional. Definimos el *vector velocidad media* como:

$$\bar{\vec{v}}(t_1, t_2) \equiv \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (4.80)$$

donde  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$  y  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Como  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , podemos escribir

$$\bar{\vec{v}}(t_1, \Delta t) \equiv \frac{\vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1)}{\Delta t}. \quad (4.81)$$

Como  $t_1$  es un instante arbitrario, podemos omitir el subíndice y llamar al instante en cuestión simplemente  $t$ ,

$$\bar{\vec{v}}(t, \Delta t) \equiv \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (4.82)$$

Notemos que el vector  $\bar{\vec{v}}$  es el resultado de multiplicar el vector  $\Delta \vec{r}$  por el escalar  $1/\Delta t$ ; entonces el vector velocidad media tendrá la misma dirección y sentido que el vector  $\Delta \vec{r}$  pues  $\Delta t > 0$ . Además su módulo será  $|\bar{\vec{v}}| = |\Delta \vec{r}|/\Delta t$ .

A continuación analizaremos el comportamiento del vector velocidad media para algunas funciones de movimiento particulares:

$$1. x(t) = a_1 t + a_0 \quad ; \quad y(t) = b_1 t + b_0.$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= [a_1(t + \Delta t) + a_0] \hat{i} + [b_1(t + \Delta t) + b_0] \hat{j} - (a_1 t + a_0) \hat{i} - (b_1 t + b_0) \hat{j} \\ &= (a_1 t + a_1 \Delta t + a_0 - a_1 t - a_0) \hat{i} + (b_1 t + b_1 \Delta t + b_0 - b_1 t - b_0) \hat{j} \\ &= a_1 \Delta t \hat{i} + b_1 \Delta t \hat{j}, \end{aligned} \quad (4.83)$$

por lo tanto la velocidad media será

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = a_1 \hat{i} + b_1 \hat{j}, \quad (4.84)$$

siendo en este caso  $\vec{v}$  un vector constante. Analicemos cómo es la trayectoria del cuerpo cuando sus funciones de movimiento son las dadas en este ejemplo,  $x(t) = a_1 t + a_0$ ;  $y(t) = b_1 t + b_0$ :

$$t(x) = \frac{x - a_0}{a_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{b_1}{a_1} x + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_1}. \quad (4.85)$$

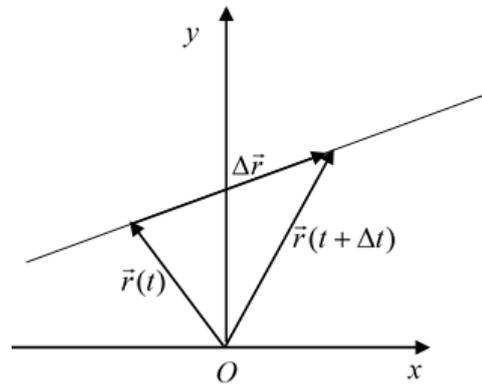


Figura 4.41: Movimiento rectilíneo uniforme, MRU, en el plano.

Como vemos en la figura 4.41 la trayectoria es una línea recta y en este caso, sin importar cuál sea el valor de  $t$  y  $\Delta t$ , el cálculo del vector velocidad media nos dará el mismo resultado. Este movimiento es el que se denomina *Movimiento Rectilíneo Uniforme* (MRU).

$$2. x(t) = a_2 t^2 \quad ; \quad y(t) = b_2 t^2 + b_0.$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= a_2(t + \Delta t)^2 \hat{i} + [b_2(t + \Delta t)^2 + b_0] \hat{j} - a_2 t^2 \hat{i} - (b_2 t^2 + b_0) \hat{j} \\ &= a_2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) \hat{i} + [b_2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) + b_0] \hat{j} - a_2 t^2 \hat{i} - (b_2 t^2 + b_0) \hat{j} \\ &= (a_2 2t\Delta t + a_2 \Delta t^2) \hat{i} + (b_2 2t\Delta t + b_2 \Delta t^2) \hat{j} \\ &= \Delta t(2t + \Delta t)(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j}). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Entonces la velocidad media en este caso resulta

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = (2t + \Delta t) (a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j}). \quad (4.87)$$

Vemos que en este ejemplo el vector  $\bar{\vec{v}}$  es el vector constante  $(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j})$  multiplicado por el escalar  $(2t + \Delta t)$ , es decir que es un vector que siempre está sobre la misma dirección y que sólo modifica su módulo y sentido dependiendo de los valores de  $t$  y  $\Delta t$ . Analicemos cuál es la trayectoria del cuerpo para estas funciones de movimiento suponiendo que  $a_2, b_0 > 0$  y  $b_2 < 0$ ; entonces

$$t(x) = \pm \sqrt{\frac{x}{a_2}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{b_2}{a_2} x + b_0 \quad ; \quad x \geq 0. \quad (4.88)$$

El gráfico de la trayectoria (figura 4.42) muestra que en este ejemplo el movimiento del cuerpo también es rectilíneo, sin embargo el vector  $\bar{\vec{v}}$  tiene una dirección constante pero su módulo y sentido dependen de  $t$  y  $\Delta t$ .

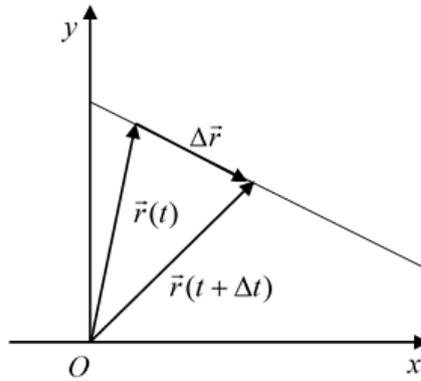


Figura 4.42: Vectores posición y vector desplazamiento para el ejemplo 2.

$$3. \quad x(t) = a_1 t \quad ; \quad y(t) = b_2 t^2 \quad ; \quad a_1, b_2 > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= a_1 (t + \Delta t) \hat{i} + b_2 (t + \Delta t)^2 \hat{j} - a_1 t \hat{i} - b_2 t^2 \hat{j} \\ &= a_1 \Delta t \hat{i} + b_2 (2t \Delta t + \Delta t^2) \hat{j} \\ &= \Delta t [a_1 \hat{i} + b_2 (2t + \Delta t) \hat{j}]. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Entonces, para este ejemplo, el vector velocidad media resulta

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = a_1 \hat{i} + b_2 (2t + \Delta t) \hat{j}. \quad (4.90)$$

Para realizar un mejor análisis del vector velocidad media para este ejemplo veremos cuál es la trayectoria de un cuerpo con estas funciones de movimiento.

$$t(x) = \frac{x}{a_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{b_2}{a_1^2} x^2 \quad (4.91)$$

Como se observa en la figura 4.43, para este ejemplo el vector  $\Delta \vec{r}$ , y por lo tanto el vector velocidad media, pueden modificar su dirección y módulo en un  $t$  fijo dependiendo del valor elegido para  $\Delta t$ .

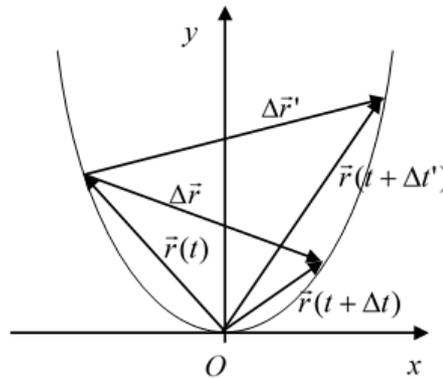


Figura 4.43: Vectores posición y desplazamiento para varios intervalos de tiempo para el ejemplo 3.

En los ejemplos anteriores hemos visto que el vector velocidad media, salvo en algunos casos particulares, modifica su módulo, dirección y sentido dependiendo del valor elegido para  $\Delta t$ . Esto indica que el vector  $\bar{\mathbf{v}}$  no es un buen parámetro para la descripción del movimiento del cuerpo. Por tanto necesitamos, de manera similar a lo realizado cuando analizamos movimientos unidimensionales, definir una magnitud que sólo dependa del punto sobre la trayectoria donde se encuentra el cuerpo o del instante de que se trate. Para ello definiremos lo que llamamos *vector velocidad instantánea* o simplemente, *vector velocidad*.

#### 4.4.5. Vector velocidad

Definimos el *vector velocidad* como el límite del vector velocidad media cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (4.92)$$

En general, si tenemos un vector  $\vec{A}$  que depende de una variable  $z$ , es decir  $\vec{A} = \vec{A}(z)$ , se define la derivada del vector  $\vec{A}(z)$  con respecto a  $z$  como

$$\frac{d\vec{A}(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(z + \Delta z) - \vec{A}(z)}{\Delta z}, \quad (4.93)$$

entonces la ecuación (4.92) nos dice que el vector velocidad es la derivada del vector posición respecto al tiempo,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}. \quad (4.94)$$

Analicemos cómo podemos hacer esta derivada de un vector, pues hasta ahora sólo sabemos derivar funciones escalares. Si el vector posición está dado en términos de sus componentes cartesianas como

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}, \quad (4.95)$$

derivando respecto al tiempo la ecuación (4.95), y utilizando las reglas de derivada de una suma y derivada de un producto, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d[x(t)\hat{i}]}{dt} + \frac{d[y(t)\hat{j}]}{dt} \\ &= \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + x(t)\frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + y(t)\frac{d\hat{j}}{dt},\end{aligned}\quad (4.96)$$

pero como los versores  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  son constantes, su derivada es nula, por lo que la ecuación (4.96) se reduce a

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}.\quad (4.97)$$

Notar que esta expresión es válida porque los versores base son constantes, si este no fuese el caso habría que incluir en el cálculo términos provenientes de las derivadas de los versores respecto al tiempo. También observemos que, al igual que el vector posición, el vector velocidad es una función vectorial del tiempo.

Calculemos el vector velocidad para los ejemplos simples para los cuales calculamos el vector velocidad media.

1.  $x(t) = a_1t + a_0$  ;  $y(t) = b_1t + b_0$ .

Para este ejemplo el vector posición es

$$\vec{r}(t) = (a_1t + a_0)\hat{i} + (b_1t + b_0)\hat{j},\quad (4.98)$$

obtenemos ahora el vector velocidad derivando el vector posición

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}.\quad (4.99)$$

Para estas funciones de movimiento el vector velocidad es un vector constante y resulta igual al vector velocidad media. Este es el único caso en que ocurre y es debido a que como la velocidad es un vector constante corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme.

2.  $x(t) = a_2t^2$  ;  $y(t) = b_2t^2 + b_0$ .

En este caso, los vectores posición y velocidad son

$$\vec{r}(t) = a_2t^2\hat{i} + (b_2t^2 + b_0)\hat{j} ; \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2t(a_2\hat{i} + b_2\hat{j}).\quad (4.100)$$

El vector velocidad es un vector constante multiplicado por un escalar ( $2t$ ) que depende del tiempo. Por lo tanto este vector, dependiendo del valor de  $t$ , puede modificar su módulo y sentido pero no su dirección. Si recordamos que la trayectoria que corresponde a estas funciones de movimiento es  $y(x) = (b_2/a_2)x + b_0$  ( $x \geq 0$ ), entonces sabemos que corresponde a un movimiento rectilíneo.

3.  $x(t) = a_1t$  ;  $y(t) = b_2t^2$  ;  $a_1, b_2 > 0$ .

Para un cuerpo con estas funciones de movimiento, los vectores posición y velocidad son:

$$\vec{r}(t) = a_1 t \hat{i} + b_2 t^2 \hat{j}; \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = a_1 \hat{i} + 2b_2 t \hat{j}, \quad (4.101)$$

cambiando en este ejemplo tanto el módulo como la dirección de  $\vec{v}$ .

#### 4.4.6. Trayectoria y vector velocidad

Al vector velocidad lo hemos definido como

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}, \quad (4.102)$$

analicemos, desde un punto de vista geométrico, qué ocurre con el vector  $\vec{v}$  cuando hacemos tender  $\Delta t$  a cero.

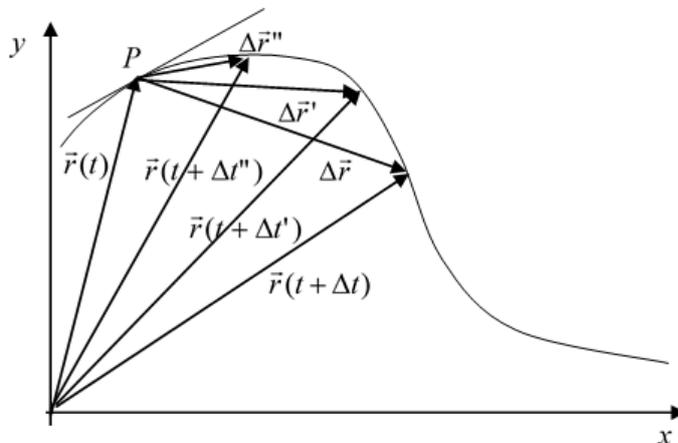


Figura 4.44: Vectores posición y desplazamiento para un instante dado y tres valores del intervalo de tiempo.

El vector  $\vec{v}$  tiene la misma dirección del vector  $\Delta \vec{r}$  y por lo tanto ambos están sobre la secante que une los dos puntos de la trayectoria elegidos para el cálculo. A medida que  $\Delta t \rightarrow 0$  se ve que  $\vec{r}(t + \Delta t) \rightarrow \vec{r}(t)$  y la dirección de  $\Delta \vec{r}$  tiende a alinearse con la de la recta tangente a la trayectoria en el punto  $P$ . Como  $\vec{v}$  tiene la misma dirección que  $\Delta \vec{r}$  y  $\vec{v} \rightarrow \vec{v}$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  entonces se puede visualizar en la figura 4.44 que **la dirección del vector velocidad en un punto de la trayectoria es la de la recta tangente a la trayectoria en dicho punto**, obteniéndose para el vector velocidad en ese instante el vector mostrado en la figura 4.45.

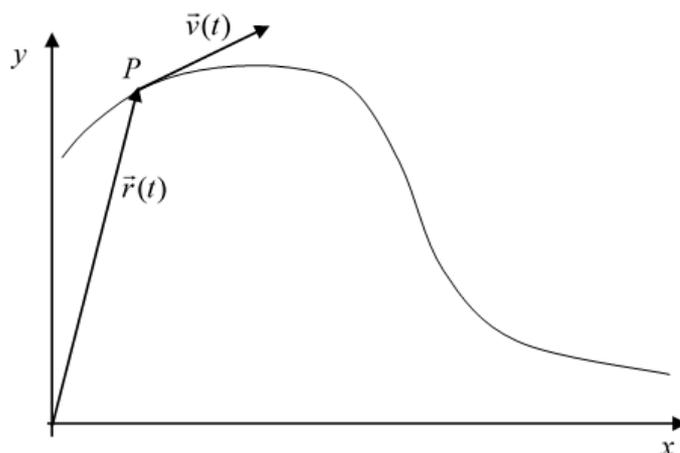


Figura 4.45: Dirección del vector velocidad respecto a la trayectoria.

Veamos esta última afirmación en el ejemplo 3 recientemente analizado. Si las funciones de movimiento son  $x(t) = a_1 t$  e  $y(t) = b_2 t^2$ , la trayectoria que describe el cuerpo es :

$$t(x) = \frac{x}{a_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{b_2}{a_1^2} x^2, \quad (4.103)$$

o sea una parábola, como se muestra en la figura 4.46. El vector posición es  $\vec{r}(t) = a_1 t \hat{i} + b_2 t^2 \hat{j}$  y el vector velocidad es  $\vec{v}(t) = a_1 \hat{i} + 2b_2 t \hat{j}$ .

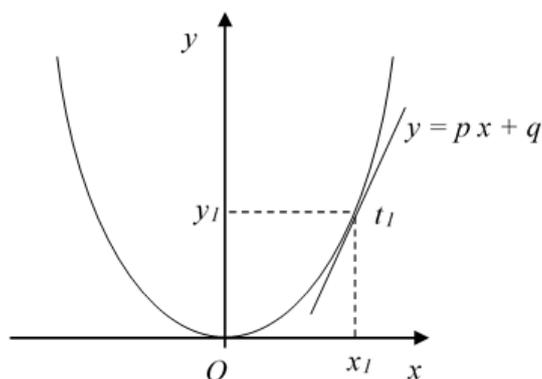


Figura 4.46: Trayectoria y recta tangente en un punto para el ejemplo 3.

Si el móvil se encontraba en la posición  $(x_1, y_1)$  en  $t = t_1$ , entonces  $t_1 = x_1/a_1$  y el vector velocidad evaluado en  $t_1$  es

$$\vec{v}(t_1) = a_1 \hat{i} + 2 \frac{b_2}{a_1} x_1 \hat{j}, \quad (4.104)$$

y la pendiente  $m$  de la recta tangente que contiene al vector velocidad es

$$m = \frac{v_y}{v_x} = 2 \frac{b_2}{a_1^2} x_1. \quad (4.105)$$

Por otro lado, podemos calcular la pendiente  $p$  de la recta tangente a la trayectoria en el punto  $(x_1, y_1)$  mediante la derivada de la función que define la trayectoria

$$p = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1} = 2 \frac{b_2}{a_1^2} x_1 \quad \therefore \quad p = m. \quad (4.106)$$

Como vemos, la pendiente de la recta que contiene al vector velocidad y la pendiente de la recta tangente a la trayectoria en dicho punto son iguales, por lo tanto se verifica que el vector velocidad es tangente a la trayectoria.

#### 4.4.7. Vector aceleración

Cuando analizamos el caso del movimiento unidimensional habíamos definido la aceleración como la magnitud que da información de cómo cambia la velocidad con el tiempo. En el caso unidimensional teníamos que:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (4.107)$$

Ahora, en el movimiento bidimensional la velocidad es un vector y por lo tanto el cambio de la velocidad en el tiempo deberá dar cuenta del cambio de un vector en el tiempo. Un vector, y de manera particular el vector velocidad, puede cambiar de diversas maneras:

a) cambiando solamente el módulo y/o sentido sin modificar su dirección, como se muestra en la figura 4.47.



Figura 4.47: Vectores velocidad en dos instantes y  $\Delta\vec{v}$  en el caso en que estos no cambian su dirección con el tiempo.

b) cambiando solamente de dirección sin modificar su módulo, como se muestra en la figura 4.48.

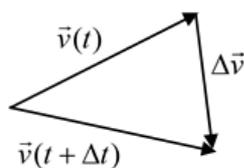


Figura 4.48: Vectores velocidad en dos instantes y  $\Delta\vec{v}$  en el caso en que estos no cambian su módulo con el tiempo.

c) modificando módulo y dirección simultáneamente, como se muestra en la figura 4.49.

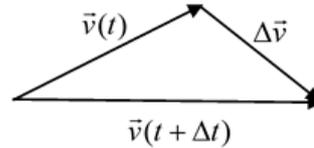


Figura 4.49: Caso más general, donde  $\vec{v}(t)$  cambia módulo, dirección y sentido.

Notar que este análisis es también válido para el vector posición  $\vec{r}(t)$ , pero por razones que quedarán claras más adelante, resulta particularmente importante tenerlo en cuenta al estudiar la aceleración.

Definimos al vector aceleración como

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (4.108)$$

Lo que nos dice que el vector aceleración tiene la dirección y sentido del vector  $\Delta \vec{v}$  en el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ . Si  $\vec{v}(t)$  es dado en coordenadas cartesianas, tenemos

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x \hat{i} + v_y \hat{j}) = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} \quad (4.109)$$

que nos permite identificar las componentes cartesianas del vector aceleración

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad (4.110)$$

como  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  podemos escribir

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{j}. \quad (4.111)$$

Sabemos que el vector velocidad es tangente a cualquier punto sobre una trayectoria, y nos preguntamos qué podemos decir respecto al vector aceleración. En particular, si elegimos dos puntos en los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$  sobre una trayectoria, por ejemplo la mostrada en la figura 4.50, debemos analizar la evolución de  $\Delta \vec{v} / \Delta t$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  para comprender el comportamiento del vector aceleración.

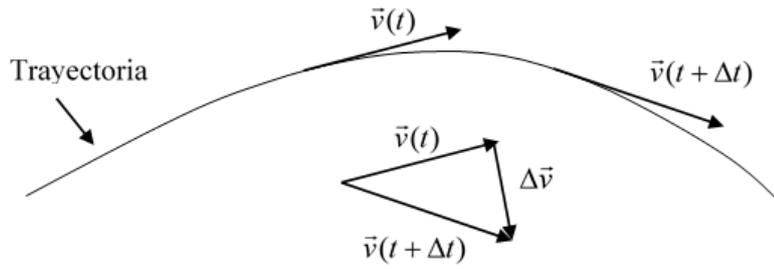


Figura 4.50: Evolución de  $v(t)$  sobre la trayectoria.

Para una mejor comprensión de este tema analicemos primero algunos casos simples:

a) Sea un móvil que se desplaza en una trayectoria lineal, por lo tanto el vector velocidad sólo puede cambiar de módulo y/o sentido pero no su dirección. El vector velocidad en los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$  es como se muestra en la figura 4.51.

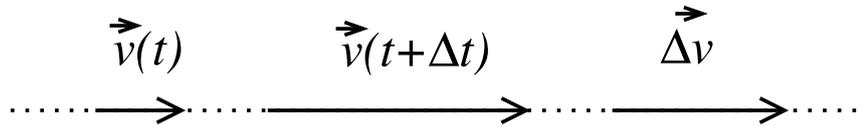


Figura 4.51:  $\vec{v}$  para un móvil en una trayectoria rectilínea en dos instantes y el correspondiente  $\Delta\vec{v}$ .

Definimos el versor  $\hat{v} = \vec{v}(t)/|\vec{v}(t)|$ , el cual es un versor constante que no depende del tiempo. Entonces podemos escribir

$$\vec{v}(t) = v(t) \hat{v} \quad ; \quad \vec{v}(t + \Delta t) = v(t + \Delta t) \hat{v}, \quad (4.112)$$

donde  $v(t + \Delta t)$  es la componente de  $\vec{v}(t + \Delta t)$  en la dirección de  $\hat{v}$ ,  $v(t + \Delta t) = \vec{v}(t + \Delta t) \cdot \hat{v}$ , la cual será positiva si  $\vec{v}(t)$  y  $\vec{v}(t + \Delta t)$  tienen igual sentido y negativa si tienen sentido opuesto. Así obtenemos en el caso que estamos analizando,

$$\Delta\vec{v} = v(t + \Delta t) \hat{v} - v(t) \hat{v} = [v(t + \Delta t) - v(t)] \hat{v} = \Delta v \hat{v}, \quad (4.113)$$

entonces

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \hat{v}, \quad (4.114)$$

como  $\hat{v}$  no depende del tiempo resulta

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{v}. \quad (4.115)$$

Vemos que el vector aceleración en un movimiento rectilíneo tiene la misma dirección que la velocidad, es decir que  $\vec{a} \parallel \vec{v}$ . Escribiendo  $\vec{a}(t) = a(t) \hat{v}$ , la componente  $a(t)$  coincide con la aceleración

de un movimiento unidimensional. A este vector aceleración, paralelo al vector velocidad, lo llamaremos *vector aceleración tangencial* y lo denotaremos como  $\vec{a}_{\parallel}$  ó  $\vec{a}_t$ , pues su dirección es tangente a la trayectoria,

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \hat{v}. \quad (4.116)$$

Por lo tanto la aceleración tangencial es la responsable de modificar el módulo del vector velocidad sin afectar la dirección del mismo. Dicho módulo aumentará (el cuerpo se acelera) si  $\frac{dv}{dt} > 0$  y  $\vec{a}$  y  $\vec{v}$  tienen el mismo sentido; y disminuirá (el cuerpo se frena) si  $\frac{dv}{dt} < 0$ , en cuyo caso  $\vec{a}$  y  $\vec{v}$  tienen sentidos opuestos.

Veamos un ejemplo:

Analicemos nuevamente el movimiento rectilíneo estudiado en el ejemplo 2 de la sección 4.4.5, en el cual las funciones de movimiento son  $x(t) = a_2 t^2$  e  $y(t) = b_2 t^2 + b_0$ . Asumiendo que  $a_2, b_0 > 0$  y  $b_2 < 0$ , en la ecuación 4.88 se muestra la expresión de la trayectoria y la figura 4.42 su gráfica cualitativa. Entonces, si estas son las funciones de movimiento del móvil, los vectores posición  $\vec{r}(t)$ , velocidad  $\vec{v}(t)$  y aceleración  $\vec{a}(t)$  son:

$$\vec{r} = a_2 t^2 \hat{i} + (b_2 t^2 + b_0) \hat{j}, \quad (4.117)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2a_2 t \hat{i} + 2b_2 t \hat{j} = 2t(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j}), \quad (4.118)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j}). \quad (4.119)$$

Vemos que en este caso particular, en que la trayectoria es rectilínea, las expresiones obtenidas para  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  son ambas proporcionales al mismo vector  $(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j})$ ; por lo tanto  $\vec{a} \parallel \vec{v}$ .

b) Pensemos ahora que tenemos un móvil en una trayectoria no rectilínea, pero que es recorrida de manera tal que el módulo del vector velocidad permanece constante. Nuevamente podemos escribir  $\vec{v}(t) = v(t) \hat{v}(t)$  y  $\vec{v}(t + \Delta t) = v(t + \Delta t) \hat{v}(t + \Delta t)$ . En este caso particular, como el módulo es constante,  $v(t) = v(t + \Delta t) = v$ . Entonces:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d[v\hat{v}(t)]}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v}(t) + v \frac{d\hat{v}(t)}{dt}, \quad (4.120)$$

como  $v$  no depende del tiempo, su derivada es nula, obteniendo

$$\vec{a} = v \frac{d\hat{v}}{dt}. \quad (4.121)$$

Es importante notar que  $d\hat{v}/dt$  **no** es un versor, esto es, su módulo puede en principio tomar cualquier valor no negativo.

En el caso particular descrito por la ecuación (4.121) no resulta evidente cuál es la dirección del vector aceleración. Intentemos realizar un análisis más minucioso. Sabemos que  $\vec{v} \parallel \hat{v}$  y, en este caso particular,  $\vec{a} \parallel d\hat{v}/dt$ . Además, como  $\hat{v}$  es un versor, se verifica que  $\hat{v} \cdot \hat{v} = 1$ . Si derivamos respecto al

tiempo en ambos lados de esta última igualdad tenemos

$$\frac{d}{dt}(\hat{v} \cdot \hat{v}) = \frac{d}{dt} 1, \quad (4.122)$$

el lado izquierdo de esta ecuación es la derivada de un producto, el derecho la derivada de una constante, por lo que se tiene

$$\frac{d\hat{v}}{dt} \cdot \hat{v} + \hat{v} \cdot \frac{d\hat{v}}{dt} = 0, \quad (4.123)$$

usando la propiedad conmutativa del producto escalar obtenemos

$$\hat{v} \cdot \frac{d\hat{v}}{dt} = 0. \quad (4.124)$$

De la ecuación (4.124) se deduce que  $\hat{v} \perp d\hat{v}/dt$ . Por lo tanto, siempre que un cuerpo se mueva sobre una trayectoria no rectilínea con un vector velocidad de módulo constante, el vector aceleración será perpendicular al vector velocidad,  $\vec{a} \perp \vec{v}$ , como se muestra en la figura 4.52.

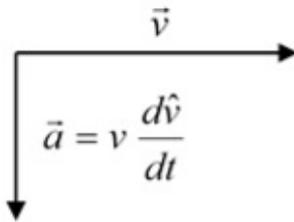


Figura 4.52: Vectores velocidad y aceleración para un cuerpo que se mueve en una trayectoria no rectilínea con  $|\vec{v}|$  constante.

Este vector aceleración que resulta perpendicular al vector velocidad lo llamaremos *vector aceleración normal*, y lo denotaremos como  $\vec{a}_\perp$  ó  $\vec{a}_n$ . El vector aceleración normal es el responsable de modificar la dirección del vector velocidad sin afectar su módulo,

$$\vec{a}_n = v \frac{d\hat{v}}{dt}, \quad (4.125)$$

lo que nos permite asegurar que **todo movimiento no rectilíneo es acelerado**.

Como vemos en la figura 4.53, el vector aceleración normal apunta siempre hacia la parte cóncava de la trayectoria.

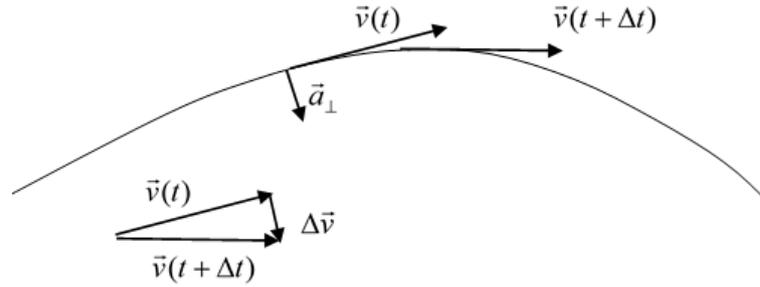


Figura 4.53: Aceleración normal a la trayectoria para un móvil con  $|\vec{v}| = \text{constante}$ .

Analicemos nuevamente la trayectoria circular descrita en el ejemplo f de la sección 4.2. Supongamos que las funciones de movimiento del cuerpo son  $x(t) = R \cos(\omega t)$  e  $y(t) = R \sin(\omega t)$ , donde  $\omega$  es un número positivo. La trayectoria que sigue este cuerpo es una circunferencia de radio  $R$  descrita por la ecuación 4.17. Los vectores posición y velocidad del cuerpo son:

$$\vec{r}(t) = R[\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}], \quad (4.126)$$

y

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\omega[-\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j}]. \quad (4.127)$$

El módulo del vector velocidad es

$$|\vec{v}| = R\omega\sqrt{[-\sin(\omega t)]^2 + [\cos(\omega t)]^2} = R\omega. \quad (4.128)$$

Estas funciones de movimiento describen un cuerpo que realiza un movimiento circular (ver ecuación (4.17)) con un vector velocidad de módulo constante, por lo que debe tener solo aceleración normal. Este movimiento particular se denomina *movimiento circular uniforme* y será analizado en detalle en el capítulo 5, pero corroboremos ahora el carácter de su aceleración.

Para obtener el vector aceleración derivamos con respecto al tiempo la ecuación (4.127),

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2[\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}], \quad (4.129)$$

y verificaremos que el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad calculando el producto escalar entre ambos vectores,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{v} &= -R^2\omega^3[\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}] \cdot [-\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j}] \\ &= -R^2\omega^3[-\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \sin(\omega t)\cos(\omega t)] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.130)$$

tal como esperábamos al tratarse de un movimiento con  $v$  constante, comprobamos que  $\vec{a} \perp \vec{v}$ .

Analicemos ahora qué característica tiene el vector aceleración en el caso más general, en que el vector velocidad modifica tanto su módulo,  $v = |\vec{v}|$ , como su dirección,  $\hat{v}$ .

Por ejemplo, en la trayectoria de la figura 4.54 en el instante  $t$  el vector velocidad es  $\vec{v}(t)$  y en el instante  $t + \Delta t$  es  $\vec{v}(t + \Delta t)$ . Como para calcular el vector aceleración necesitamos  $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$  podemos graficar  $\vec{v}(t)$  y  $\vec{v}(t + \Delta t)$  como se muestra en la figura 4.55

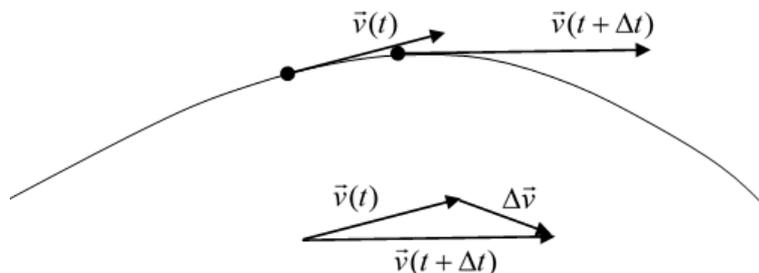


Figura 4.54: Trayectoria y vectores velocidad en el caso más general en el que tanto módulo como dirección y sentido de  $\vec{v}$  cambian en el tiempo.

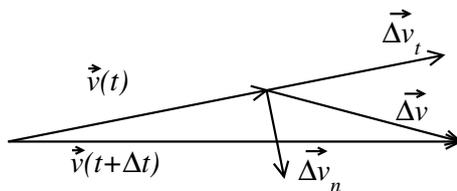


Figura 4.55: Descomposición de  $\Delta\vec{v}(t)$  en direcciones tangencial y normal a  $\vec{v}(t)$ .

Podemos descomponer al vector  $\Delta\vec{v}$  en dos vectores; uno en la misma dirección del vector  $\vec{v}$ , que denominaremos  $\Delta\vec{v}_t$  (componente tangencial, o sea está en la dirección tangente a la trayectoria), y otro que denominaremos componente normal ( $\Delta\vec{v}_n$ ) cuya dirección es perpendicular a  $\vec{v}$ .

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_t + \Delta\vec{v}_n. \quad (4.131)$$

Por lo tanto, si calculamos la aceleración tenemos

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta\vec{v}_t + \Delta\vec{v}_n)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} \\ &= \vec{a}_t + \vec{a}_n, \end{aligned} \quad (4.132)$$

donde

$$\vec{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t} \quad ; \quad \vec{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}. \quad (4.133)$$

La ecuación (4.132) nos dice que al vector aceleración lo podemos escribir como la suma de dos vectores

perpendiculares entre sí definidos en la ecuación (4.133). Uno de ellos denominado  $\vec{a}_t$  (*aceleración tangencial*) que tiene la misma dirección que  $\vec{v}$ , y por lo tanto es el responsable de modificar el módulo y sentido del vector velocidad, y la otra componente, denominada  $\vec{a}_n$  (*aceleración normal*), perpendicular a  $\vec{v}$  y responsable de modificar la dirección del vector velocidad.

Para determinar las componentes tangenciales y normales a la trayectoria del vector aceleración debemos escribir al vector velocidad como el producto de su módulo por un versor que define su dirección,  $\vec{v} = v(t)\hat{v}(t)$ . Para calcular la aceleración derivamos el vector velocidad expresado de esta manera,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v(t)\hat{v}(t)] = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt}. \quad (4.134)$$

Como vemos en la ecuación (4.134) el vector aceleración está expresado como la suma de dos vectores, uno en la dirección de  $\vec{v}$ , que por lo tanto es la componente denominada aceleración tangencial. El segundo término de la suma es un vector en la dirección de  $d\hat{v}/dt$ , que hemos visto tiene la dirección perpendicular a  $\vec{v}$ , y que corresponde a la componente normal a la trayectoria del vector aceleración,

$$\vec{a}_t = \vec{a}_{\parallel} = \frac{dv}{dt}\hat{v} \quad ; \quad \vec{a}_n = \vec{a}_{\perp} = v\frac{d\hat{v}}{dt}. \quad (4.135)$$

Resumiendo; el vector aceleración **siempre** puede descomponerse como la suma de dos vectores perpendiculares entre sí y cuyos efectos sobre el vector velocidad son bien diferenciados. Uno de ellos en la dirección del vector velocidad, denominado *vector aceleración tangencial*,  $\vec{a}_t$ , que es responsable de modificar el módulo y sentido del vector velocidad. El otro, en la dirección perpendicular al vector velocidad, denominado *vector aceleración normal*,  $\vec{a}_n$ , es el responsable de modificar la dirección del vector velocidad.

Analicemos ahora cómo calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración cuando al vector aceleración lo tenemos expresado en términos de sus componentes cartesianas. Como vemos en la figura 4.56 lo que deseamos es encontrar las componentes del vector aceleración en las direcciones tangente a la trayectoria y perpendicular a la misma.

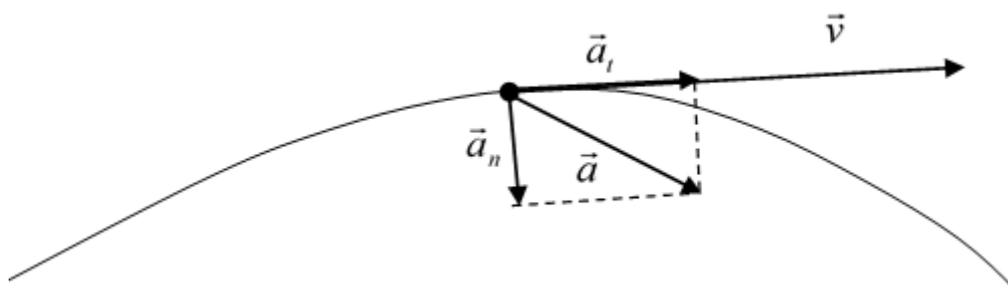


Figura 4.56: Descomposición de  $\vec{a}$  como  $\vec{a}_n + \vec{a}_t$ .

Para calcular la componente tangencial a la trayectoria del vector aceleración, utilizamos el versor velocidad,  $\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$  y de acuerdo a la ecuación (4.57), tenemos que

$$a_t(t) = \vec{a}(t) \cdot \hat{v}(t), \quad (4.136)$$

y escribimos el vector aceleración tangencial como

$$\vec{a}_t = a_t \hat{v} = (\vec{a} \cdot \hat{v}) \hat{v} = \left( \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v}, \quad (4.137)$$

que en coordenadas cartesianas se reduce a

$$\vec{a}_t = \left( \frac{a_x v_x + a_y v_y}{v_x^2 + v_y^2} \right) (v_x \hat{i} + v_y \hat{j}). \quad (4.138)$$

Una vez conocidos los vectores aceleración total y tangencial, podemos escribir el vector aceleración normal como

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t. \quad (4.139)$$

Apliquemos lo visto anteriormente a un ejemplo particular. Supongamos que deseamos calcular el vector aceleración tangencial y normal, en  $t = 1$  s, de un móvil cuyo vector posición es

$$\vec{r}(t) = \left( 2\frac{m}{s^2}t^2 - 2m \right) \hat{i} + \left( -1\frac{m}{s^3}t^3 + 2\frac{m}{s}t \right) \hat{j}, \quad (4.140)$$

entonces, los vectores velocidad y aceleración serán

$$\vec{v}(t) = 4\frac{m}{s^2}t\hat{i} + \left( -3\frac{m}{s^3}t^2 + 2\frac{m}{s} \right) \hat{j} \quad ; \quad \vec{a}(t) = 4\frac{m}{s^2}\hat{i} - 6\frac{m}{s^3}t\hat{j}. \quad (4.141)$$

Evaluando los vectores velocidad y aceleración en  $t = 1$  s obtenemos

$$\vec{v}(1s) = (4\hat{i} - 1\hat{j}) \frac{m}{s} \quad ; \quad \vec{a}(1s) = (4\hat{i} - 6\hat{j}) \frac{m}{s^2}. \quad (4.142)$$

Utilizando la expresión de la ecuación (4.138) obtenemos que el vector aceleración tangencial es

$$\vec{a}_t(1s) = \frac{22}{17} (4\hat{i} - \hat{j}) \frac{m}{s^2}, \quad (4.143)$$

y, de acuerdo a la ecuación (4.139), el vector aceleración normal es

$$\vec{a}_n(1s) = \vec{a}(1s) - \vec{a}_t(1s) = -\frac{20}{17} (\hat{i} + 4\hat{j}) \frac{m}{s^2}. \quad (4.144)$$

La trayectoria de este móvil y los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_t$  y  $\vec{a}_n$  calculados en  $t = 1$  s pueden verse en la figura 4.57.

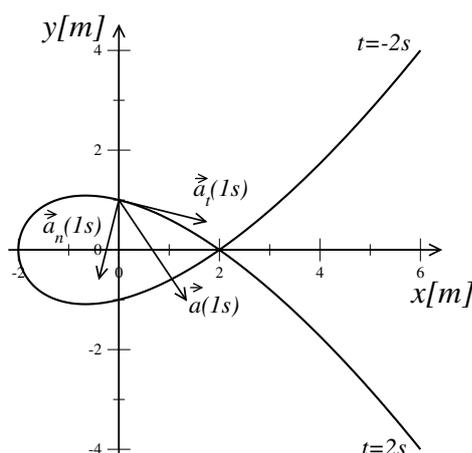


Figura 4.57: Trayectoria del móvil con  $\vec{r}(t)$  dado por la ecuación (4.140) para  $t \in [-2s, 2s]$ , mostrando  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_t$  y  $\vec{a}_n$  en  $t = 1s$ .

#### 4.4.8. Determinación del vector posición a partir del vector aceleración

Como vimos en el capítulo 3 al analizar el movimiento unidimensional, en general no conocemos la función de movimiento del cuerpo, sino que tenemos que determinarla a partir de la aceleración del mismo, que es una magnitud usualmente accesible experimentalmente. En el caso de la descripción del movimiento de cuerpos que se mueven en el plano la situación es totalmente similar, simplemente debemos reemplazar la relación (3.4) por su equivalente utilizando vectores,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (4.145)$$

Por lo tanto, lo primero que podemos determinar es el vector velocidad integrando el vector aceleración con respecto al tiempo.

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a} dt. \quad (4.146)$$

Notar que al integrar deberemos incorporar ahora un vector constante  $\vec{C}$  que juega el mismo rol que la constante de integración  $C$  discutida en la sección (3.6), esto es, define cuál es la primitiva particular de  $\vec{a}(t)$  que corresponde al vector velocidad.

Pero, ¿cómo se realiza la integración de un vector? También resulta una simple generalización de integración de funciones **si trabajamos en coordenadas cartesianas**, donde los versores base son constantes. En este caso la ecuación (4.146) se escribe como

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \int \vec{a}(t) dt = \int [a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j}] dt \\ &= \left( \int a_x(t) dt \right) \hat{i} + \left( \int a_y(t) dt \right) \hat{j}, \end{aligned} \quad (4.147)$$

donde cada una de las integrales corresponde a una función y se realizan como aprendimos en el capítulo

3. Los casos en que los versores base dependen de la variable de integración escapan al nivel de este libro, por lo que no serán tratados aquí.

Nuevamente continuamos de manera similar a lo realizado en movimientos unidimensionales para calcular el vector posición a partir del vector velocidad,

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \int \vec{v}(t) dt = \int [v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}] dt \\ &= \left( \int v_x(t) dt \right) \hat{i} + \left( \int v_y(t) dt \right) \hat{j}.\end{aligned}\quad (4.148)$$

También aquí al integrar debemos incluir un vector constante de integración que nos determina la primitiva particular que corresponde al vector posición sujeto a las condiciones dadas para el móvil en cuestión. Las ecuaciones (4.147) y (4.148) nos dicen entonces que para obtener el vector posición partiendo del vector aceleración, debemos conocer dos vectores constantes de integración. La interpretación física de estos vectores es la misma que en una dimensión, pero como ahora tenemos una dimensión extra, debemos duplicar el número de constantes. Así las condiciones (a) ó (b) que dimos en la sección 3.6 para determinar unívocamente el movimiento se generalizan ahora a alguna de las siguientes condiciones:

a) Debemos dar como dato el vector velocidad del móvil en un instante dado, digamos  $t_1$ , que nos permitirá calcular el valor del vector constante de integración de la ecuación (4.147), y el vector posición en otro, digamos  $t_2$ , que pueden o no ser el mismo instante, que nos permitirá obtener el segundo vector constante de integración al integrar el vector velocidad en la ecuación (4.148).

ó

b) Debemos dar la posición del cuerpo en dos instantes **distintos**,  $\vec{r}(t_1)$  y  $\vec{r}(t_2)$ , con  $t_1 \neq t_2$ . Así tendremos dos ecuaciones vectoriales, esto es, 4 ecuaciones algebraicas, que nos permitirán obtener ambos vectores constantes de integración que aparecen al integrar la aceleración y la velocidad respectivamente.

Notar que

- I) **Siempre** necesitamos dar cuatro constantes de integración, dos componentes del vector velocidad y dos del vector posición en instantes dados en (a), o dos componentes del vector posición en un instante y dos en otro en el caso (b), o también, aunque es poco frecuente, podemos dar condiciones (a) para una componente y (b) para la otra, por ejemplo tener los datos de  $x(t_1)$ ;  $x(t_2)$ ;  $y(t_3)$  y  $v_y(t_4)$ .
- II) Expresando el vector aceleración en un sistema de coordenadas cartesianas, las ecuaciones vectoriales pueden verse como una forma compacta de escribir el doble de ecuaciones unidimensionales. Así podemos, en lugar de trabajar con vectores, realizar los cálculos para obtener los vectores velocidad y posición trabajando con cada una de las componentes como si fueran dos movimientos unidimensionales independientes uno del otro,

$$v_x(t) = \int a_x(t) dt \quad ; \quad v_y(t) = \int a_y(t) dt, \quad (4.149)$$

y con esto podemos escribir el vector velocidad,

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}, \quad (4.150)$$

y posteriormente calcular cada una de las componentes del vector posición,

$$x(t) = \int v_x(t) dt \quad ; \quad y(t) = \int v_y(t) dt \quad (4.151)$$

escribiendo finalmente el vector posición como

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}. \quad (4.152)$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que queremos averiguar el vector posición de un cuerpo cuya aceleración está dada por

$$\vec{a}(t) = 2\frac{m}{s^2}\hat{i} + \left(-2\frac{m}{s^3}t + 2\frac{m}{s^2}\right)\hat{j}, \quad (4.153)$$

y sabemos que

$$\vec{v}(1s) = 1\frac{m}{s}\hat{j} \quad ; \quad \vec{r}(-2s) = 10m\hat{i} + \frac{4}{3}m\hat{j}. \quad (4.154)$$

Comenzamos calculando el vector velocidad en función del tiempo integrando el vector aceleración

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \int \vec{a}(t) dt \\ &= \int \left[ 2\frac{m}{s^2}\hat{i} + \left(-2\frac{m}{s^3}t + 2\frac{m}{s^2}\right)\hat{j} \right] dt \\ &= 2\frac{m}{s^2}t\hat{i} + \left(-1\frac{m}{s^3}t^2 + 2\frac{m}{s^2}t\right)\hat{j} + \vec{C}. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Utilizando la condición  $\vec{v}(1s) = 1\frac{m}{s}\hat{j}$  despejamos el valor del vector  $\vec{C}$ ,

$$\vec{C} = -2\frac{m}{s}\hat{i}, \quad (4.156)$$

por lo tanto el vector velocidad en función del tiempo es

$$\vec{v}(t) = \left(2\frac{m}{s^2}t - 2\frac{m}{s}\right)\hat{i} + \left(-1\frac{m}{s^3}t^2 + 2\frac{m}{s^2}t\right)\hat{j}. \quad (4.157)$$

Ahora podemos determinar el vector posición realizando la integral del vector velocidad respecto del tiempo,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \int \vec{v}(t) dt = \int \left[ \left(2\frac{m}{s^2}t - 2\frac{m}{s}\right)\hat{i} + \left(-1\frac{m}{s^3}t^2 + 2\frac{m}{s^2}t\right)\hat{j} \right] dt \\ &= \left(1\frac{m}{s^2}t^2 - 2\frac{m}{s}t\right)\hat{i} + \left(-\frac{1}{3}\frac{m}{s^3}t^3 + 1\frac{m}{s^2}t^2\right)\hat{j} + \vec{D}. \end{aligned} \quad (4.158)$$

Exigiendo que este vector posición evaluado en  $t = -2s$  sea igual a  $10m\hat{i} + \frac{4}{3}m\hat{j}$  calculamos el valor del vector  $\vec{D}$ ,

$$\vec{D} = 2m\hat{i} - \frac{16}{3}m\hat{j}, \quad (4.159)$$

entonces, el vector posición en función del tiempo es

$$\vec{r}(t) = \left(1 \frac{m}{s^2} t^2 - 2 \frac{m}{s} t + 2m\right) \hat{i} + \left(-\frac{1}{3} \frac{m}{s^3} t^3 + 1 \frac{m}{s^2} t^2 - \frac{16}{3} m\right) \hat{j}. \quad (4.160)$$

#### 4.4.9. Tiro parabólico

Analizaremos un caso particular de movimiento en el plano que es de gran interés. Estudiaremos la cinemática de un cuerpo bajo la acción de la atracción gravitatoria de la Tierra. Todos los cuerpos ubicados en las proximidades de la superficie de la Tierra experimentan la misma aceleración, que denominaremos con la letra  $g$ . Esta aceleración apunta en la dirección vertical hacia la Tierra. En realidad, por causas que se explicarán más adelante, la aceleración gravitatoria terrestre es solo aproximadamente una constante, asumiendo que estamos a nivel del mar, varía con la latitud del lugar donde estemos ubicados, siendo su valor aproximadamente  $9,78m/s^2$  en el ecuador y  $9,83m/s^2$  en los polos. En los pocos casos en que sea necesario reemplazar  $g$  por su valor numérico en esta sección, usaremos una aproximación mas grosera,  $g \simeq 10m/s^2$ .

El problema denominado *parábola de tiro* o *tiro parabólico* es un interesante ejemplo de movimiento de un cuerpo bajo la acción de una aceleración constante. Es uno de los primeros problemas resueltos de la física, ya que su solución se debe a Galileo en 1638. Se trata de resolver el movimiento de un cuerpo puntual lanzado desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial dada y que solo está sometido a la aceleración de la gravedad terrestre considerada constante.

Esto es, el problema en su forma más simple (que trataremos aquí) incluye varias aproximaciones:

- I) Despreciamos completamente la acción del aire.
- II) Consideramos la Tierra como localmente plana.
- III) Consideramos el campo gravitatorio terrestre como constante.

La primera aproximación se hace porque la trayectoria de cuerpo “puntual” se ve poco afectada por la presencia del aire, como puede comprobarse al realizar la experiencia de arrojar una pequeña bolita metálica. En cambio, si soltamos una hoja de papel desplegada esta aproximación es mala y no logrará describir razonablemente su trayectoria. En cualquier caso, considerar la acción del aire es un problema sumamente complicado, aún para su tratamiento numérico utilizando las computadoras actuales más poderosas. Las dos últimas consideraciones serán válidas si la velocidad inicial es “pequeñaz toda la trayectoria del cuerpo se encuentra próxima a la superficie terrestre. El problema que resolveremos es el de un cuerpo que se lanza desde una altura  $h$  con un vector velocidad de módulo  $v_0$  que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal como se muestra en la figura 4.58, hasta que el móvil cae a tierra.

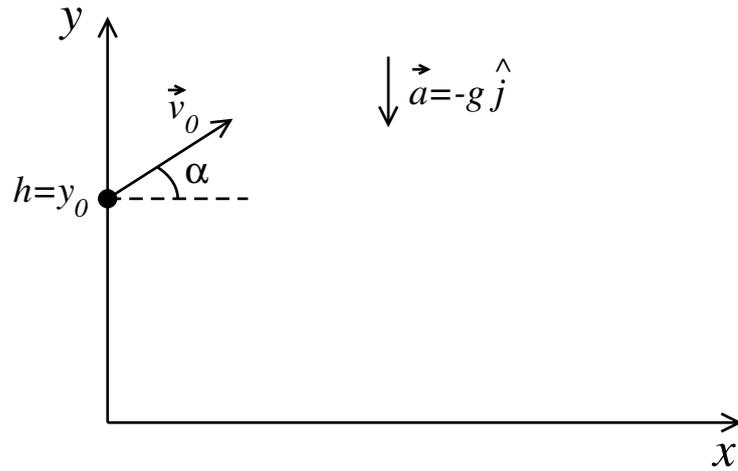


Figura 4.58: Diagrama de tiro parabólico al tiempo de disparo (instante inicial  $t_0 = 0$ ).

Si para la descripción del movimiento utilizamos el sistema de coordenadas cartesianas graficado en la figura 4.58, la expresión del vector aceleración será:

$$\vec{a}(t) = -g \hat{j}. \quad (4.161)$$

Considerando el instante inicial de la descripción cuando el cuerpo es lanzado con velocidad  $\vec{v}_0$  como  $t = 0$  s, entonces podemos escribir los vectores posición y velocidad para ese instante,

$$\vec{r}(0) = h \hat{j}, \quad (4.162)$$

$$\vec{v}(0) = v_0 \cos(\alpha) \hat{i} + v_0 \sin(\alpha) \hat{j}. \quad (4.163)$$

Integrando el vector aceleración respecto del tiempo obtenemos el vector velocidad

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \int \vec{a} dt = - \int g \hat{j} dt \\ &= -gt \hat{j} + \vec{C}. \end{aligned} \quad (4.164)$$

Para determinar  $\vec{C}$  evaluamos el vector velocidad (ecuación (4.164)) en el instante en que conocemos su valor,  $t = 0$  s,

$$\vec{v}(0s) = \vec{C} = v_0 \cos(\alpha) \hat{i} + v_0 \sin(\alpha) \hat{j}. \quad (4.165)$$

Entonces el vector velocidad del cuerpo es

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos(\alpha) \hat{i} + (-gt + v_0 \sin(\alpha)) \hat{j}. \quad (4.166)$$

Para obtener el vector posición del cuerpo debemos integrar el vector velocidad

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \int \vec{v} dt = \int \{v_0 \cos(\alpha) \hat{i} + [-gt + v_0 \sin(\alpha)] \hat{j}\} dt \\ &= v_0 \cos(\alpha) t \hat{i} + \left[-\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t\right] \hat{j} + \vec{D}.\end{aligned}\quad (4.167)$$

Al valor del vector  $\vec{D}$  lo determinamos evaluando el vector posición, ecuación (4.167), en el instante para el cual lo conocemos, que en nuestro caso es  $t = 0$  s,

$$\vec{r}(0s) = \vec{D} = h \hat{j}, \quad (4.168)$$

con lo cual el vector posición del cuerpo en función del tiempo es

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos(\alpha) t \hat{i} + \left[-\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t + h\right] \hat{j}. \quad (4.169)$$

Vamos a responder varias preguntas respecto al movimiento del cuerpo:

a) ¿Cuál es la trayectoria que sigue un cuerpo sometido a la aceleración de la gravedad?

La función de movimiento de cada una de las coordenadas es:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t, \quad (4.170)$$

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t + h. \quad (4.171)$$

Despejando la variable  $t$  en la ecuación (4.170) y reemplazando en la ecuación (4.171) obtenemos

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x + h, \quad (4.172)$$

que corresponde a una trayectoria parabólica con las ramas hacia abajo (ver figura 4.59).

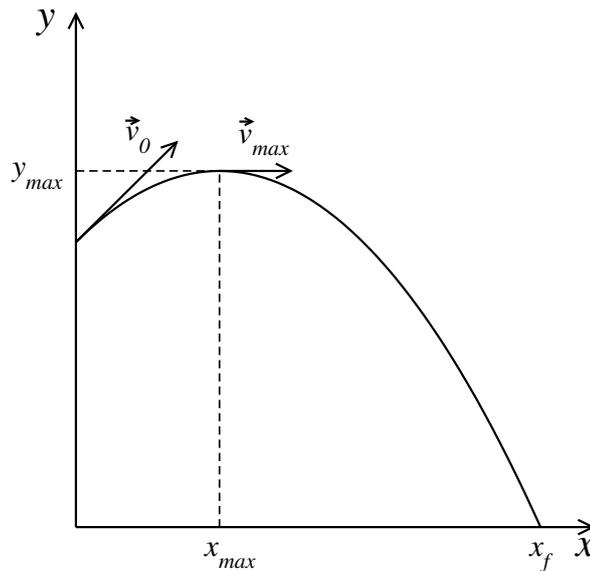


Figura 4.59: Esquema de la trayectoria del tiro parabólico.

b) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza el cuerpo?

La máxima altura ( $y_{max}$ ) que alcanza el cuerpo se corresponde con el máximo de la parábola de la trayectoria (ver figura 4.59). Para esto derivamos la ecuación (4.172) respecto a  $x$  e igualamos la derivada a cero para encontrar la coordenada  $x_{max}$  del máximo,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_{max}} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_{max} + \tan(\alpha) = 0, \quad (4.173)$$

de donde obtenemos

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}. \quad (4.174)$$

Evaluando la expresión de la trayectoria, ecuación (4.172), en el valor obtenido para  $x_{max}$ , ecuación (4.174), obtenemos la máxima altura que alcanza el cuerpo,

$$y_{max} = y(x_{max}) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} + h. \quad (4.175)$$

Hemos encontrado la altura máxima que alcanza el cuerpo haciendo un análisis geométrico de la trayectoria. Sin embargo, también lo podemos hacer mediante consideraciones físicas. El cuerpo alcanza su máxima altura cuando deja de ascender verticalmente, por lo tanto en el instante  $t_{max}$  que alcanza su máxima altura la componente vertical de la velocidad se hace igual a cero. De esta manera podemos determinar el instante en que el cuerpo alcanza la altura  $y_{max}$ ,

$$v_y(t_{max}) = -gt_{max} + v_0 \sin(\alpha) = 0, \quad (4.176)$$

obteniendo

$$t_{max} = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g}. \quad (4.177)$$

Como la altura máxima es la coordenada vertical del cuerpo para este instante, entonces reemplazando este valor de tiempo (ecuación (4.177)) en la ecuación (4.171) obtenemos

$$y_{max} = y(t_{max}) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{2g} + h. \quad (4.178)$$

Como vemos resulta más simple el cálculo de la altura máxima que alcanza el cuerpo utilizando consideraciones físicas.

c) ¿Cuál es el alcance que tiene el cuerpo?

Entendemos por alcance a la distancia horizontal que recorre el cuerpo desde que es lanzado hasta que toca el piso, la cual, debido a la elección del sistema de coordenadas, coincide con la coordenada  $x$ , que denominaremos  $x_f$  (ver figura 4.59). El vector posición del punto en el cual impacta el cuerpo es

$$\vec{r}(t_f) = x(t_f)\hat{i} + y(t_f)\hat{j} = x_f\hat{i}. \quad (4.179)$$

Como al caer al piso el valor de la coordenada  $y(t_f)$  es cero, podemos calcular el instante de impacto con la tierra resolviendo la ecuación (4.171),

$$y(t_f) = -\frac{g}{2}t_f^2 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha)t_f + h = 0, \quad (4.180)$$

que tiene dos soluciones posibles,

$$t_{\pm} = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha) \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + 2gh}}{g}, \quad (4.181)$$

Analizando estas dos soluciones vemos que si  $h > 0$  resulta  $t_+ > 0$  y  $t_- < 0$ . Si bien  $t_-$  satisface la ecuación (4.180), esta solución no tiene sentido físico, pues toda la descripción que estamos haciendo es válida para  $t \geq 0$ . Concluimos entonces que  $t_f = t_+$ , obteniendo para el alcance  $x_f = x(t_f)$ ,

$$\begin{aligned} x_f &= v_0 \cos(\alpha) \left( \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + 2gh}}{g} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \cos(\alpha) \left( \operatorname{sen}(\alpha) + \sqrt{\operatorname{sen}^2(\alpha) + \frac{2gh}{v_0^2}} \right). \end{aligned} \quad (4.182)$$

### Caso particular $h = 0$

Analicemos qué sucede cuando tanto el punto de lanzamiento como el de impacto están a la misma altura (usualmente, aunque no necesariamente, ambos coinciden con la superficie terrestre), esto es,

tomamos  $h = 0$  m. En este caso las soluciones (4.181) son

$$t_+ = \frac{2v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g} \quad ; \quad t_- = 0s. \quad (4.183)$$

Como en el caso  $h > 0$  tenemos que  $t_f = t_+$ , pero, para  $h = 0$ ,  $t_-$  sí tiene una interpretación física: es el instante de lanzamiento, en que la coordenada  $y$  del móvil también cumple  $y(t_-) = 0$ . Entonces el alcance del cuerpo  $x_f$  (ecuación (4.182)) es

$$x_f = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha)}{g}, \quad (4.184)$$

y usando que  $2 \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha)$  obtenemos

$$x_f = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g}. \quad (4.185)$$

Notemos que, en este caso particular,  $t_f = 2t_{max}$  (ecuaciones (4.177) y (4.183)) y  $x_f = 2x_{max}$  (ecuaciones (4.174) y (4.185)), pues la trayectoria es simétrica respecto al eje que pasa por su máximo.

La expresión del alcance, ecuación (4.185), es un factor positivo multiplicado por  $\operatorname{sen}(2\alpha)$ , con  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , cuyo gráfico se muestra en la figura 4.60.

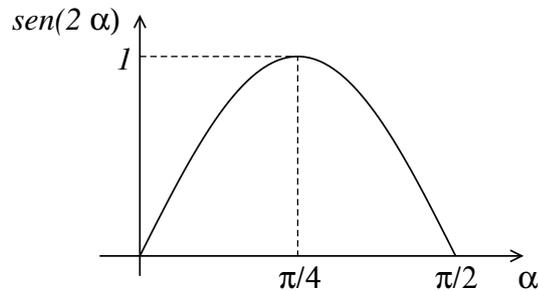


Figura 4.60:  $\operatorname{sen}(2\alpha)$  versus  $\alpha$  para  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ .

Tenemos entonces que, para cada valor de  $\operatorname{sen}(2\alpha)$  hay dos posibles valores del ángulo  $\alpha$ :  $\alpha_< < \pi/4$  y  $\alpha_> > \pi/4$ , que arrojan el mismo valor de  $x_f$ , excepto para  $\operatorname{sen}(2\alpha) = 1$  donde vale  $\alpha = \pi/4$ . Estos dos ángulos son equidistantes de  $\pi/4$ ,  $|\alpha_< - \pi/4| = |\alpha_> - \pi/4|$ .

Como el alcance depende del módulo de la velocidad inicial,  $v_0$ , y del ángulo  $\alpha$ , nos podemos preguntar ¿cuál es el ángulo de lanzamiento óptimo ( $\alpha_{op}$ ) para lograr el máximo alcance posible para un dado valor de  $v_0$ ? A partir de la ecuación (4.185) es simple notar que el valor máximo de  $x_f$  se logra cuando  $\operatorname{sen}(2\alpha_{op}) = 1$ ; es decir  $\alpha_{op} = \pi/4$ . En la figura 4.61 se muestran 3 tiros parabólicos con igual módulo de velocidad inicial  $v_0$  pero con tres ángulos diferentes,  $\alpha_< = \pi/6$ ,  $\alpha_> = \pi/3$  y  $\alpha_{op} = \pi/4$ .

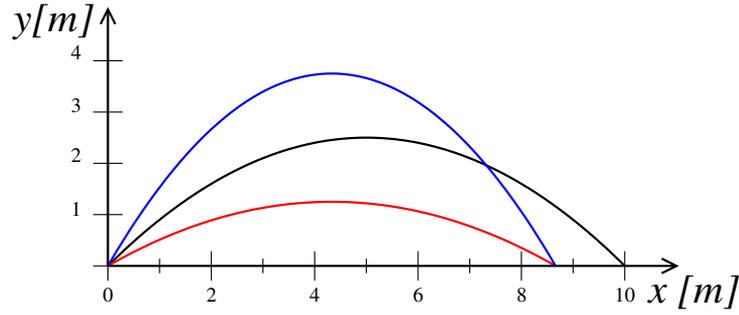


Figura 4.61: Parábola de tiro para  $v_0 = 10\text{m/s}$  y  $\alpha_{op} = \pi/4 = 45^\circ$  (línea negra),  $\alpha_{<} = \pi/6 = 30^\circ$  (línea roja) y  $\alpha_{>} = \pi/3 = 60^\circ$  (línea azul).

Evaluando la expresión (4.166) en el instante  $t_f$ , dado por la ecuación (4.183), determinamos la velocidad del cuerpo en el instante del impacto con el piso,

$$\vec{v}(t_f) = v_0 \cos(\alpha) \hat{i} - v_0 \sin(\alpha) \hat{j}. \quad (4.186)$$

Haciendo el producto escalar entre el vector velocidad inicial (ecuación (4.163)) y el vector velocidad final (ecuación (4.186)) obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{v}(0s) \cdot \vec{v}(t_f) &= [v_0 \cos(\alpha) \hat{i} + v_0 \sin(\alpha) \hat{j}] \cdot [v_0 \cos(\alpha) \hat{i} - v_0 \sin(\alpha) \hat{j}] \\ &= v_0^2 [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] \\ &= v_0^2 \cos(2\alpha). \end{aligned} \quad (4.187)$$

Cuando el ángulo de lanzamiento  $\alpha = \alpha_{op} = \pi/4$  el producto escalar  $\vec{v}(0s) \cdot \vec{v}(t_f) = 0$  y por lo tanto, para este ángulo particular, el vector velocidad en el momento del impacto será perpendicular al vector velocidad inicial.

### Aceleraciones tangencial y normal

En el tiro parabólico, la aceleración tiene una expresión muy simple, es un vector constante,  $\vec{a}(t) = -g \hat{j}$ , pero, ¿que sucede con  $\vec{a}_t(t)$  y  $\vec{a}_n(t)$ ? Conocemos  $\vec{v}(t)$ , y por lo tanto, también conocemos  $\hat{v}(t) = \vec{v}(t)/|\vec{v}(t)| = \beta_x \hat{i} + \beta_y \hat{j}$ , donde  $\beta_x$  y  $\beta_y$  son las componentes cartesianas de  $\hat{v}(t)$ . Sabemos que hay dos versores ortonormales a  $\hat{v}$ :  $\pm\beta_y \hat{i} \mp \beta_x \hat{j}$ , también sabemos que  $\beta_x > 0$  y  $\vec{a}_n(t) \cdot \hat{j} < 0 \forall t$ , entonces, el versor con la dirección y sentido de  $\vec{a}_n(t)$  será

$$\hat{a}_n(t) = \beta_y \hat{i} - \beta_x \hat{j} \Rightarrow \vec{a}_n = (\vec{a} \cdot \hat{a}_n) \hat{a}_n = g \beta_x(t) (\beta_y(t) \hat{i} - \beta_x(t) \hat{j}) = \frac{g v_x}{|\vec{v}|^2} (v_y \hat{i} - v_x \hat{j}). \quad (4.188)$$

En el punto de máxima altura:  $\vec{a}(t_{max}) = \vec{a}_n(t_{max})$  ;  $\vec{a}_t(t_{max}) = 0$ . En cualquier otro punto de la trayectoria  $\vec{a}_n$  y  $\vec{a}_t$  son no nulos. En la figura 4.62 vemos los versores  $\hat{v}$  y  $\hat{a}_n$  en cinco puntos particulares de la trayectoria de un tiro parabólico. El análisis realizado es independiente del valor de  $h$ .

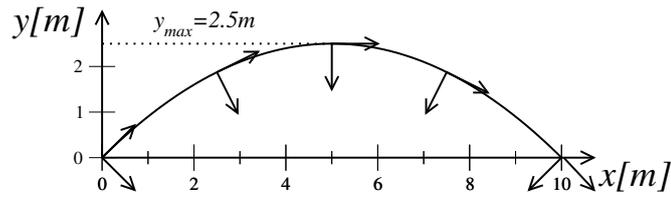


Figura 4.62: Parábola de tiro con  $v_0 = 10\text{m/s}$ ,  $h = 0$  y  $\alpha_{op}(0) = \pi/4 = 45^\circ$  mostrando  $\hat{v}$  y  $\hat{a}_n$  para  $x = 0$ ;  $x_f/4$ ;  $x_f/2 = x_{max}$ ;  $3x_f/4$  y  $x_f$ .

**Caso general  $h \geq 0$**

Si el lanzamiento es hecho desde una altura  $h$ , y queremos conocer el ángulo óptimo en función de la altura de la base,  $\alpha_{op}(h)$  para el cual el proyectil tiene su máximo alcance,  $x_f(\alpha_{op})$ , el cálculo es ahora algo más complejo. Antes de hacer ninguna cuenta, vemos en la figura 4.63 que si  $\alpha > \pi/4$  la trayectoria cruzará la correspondiente a  $\alpha = \pi/4$  a una altura mayor que  $h$ , y como dos parábolas se cortan a lo máximo en dos puntos sabemos entonces que  $\alpha_{op}(h) \leq \pi/4$ . Por el mismo argumento, para un ángulo levemente menor que  $\pi/4$  cortará la trayectoria de  $\alpha = \pi/4$  en un altura levemente menor que  $h$ , por lo que la igualdad vale solo para  $h = 0$ , obteniendo  $\alpha_{op}(h > 0) < \pi/4$ .

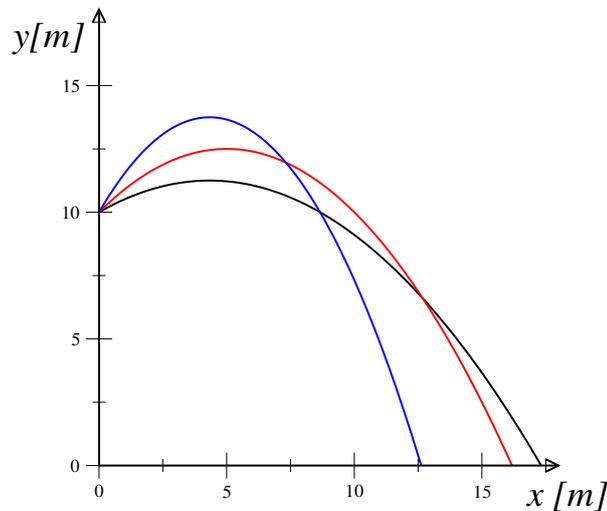


Figura 4.63: Parábola de tiro para  $v_0 = 10\text{m/s}$ ,  $h = 10\text{m}$  y  $\alpha = \alpha_{op}(10\text{m}) = \pi/6 = 30^\circ$  (línea negra),  $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$  (línea azul) y  $\alpha = \pi/3 = 60^\circ$  (línea roja). Las parábolas correspondientes a  $\alpha = 30^\circ$  y  $60^\circ$  se cortan en  $y = h = 10\text{m}$ .

El ángulo óptimo es el que maximiza la expresión de  $x_f$ , ecuación (4.182), por lo que debemos buscar el punto crítico de  $x_f$ ,

$$\frac{dx_f}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} \left[ -\text{sen}^2(\alpha) - \text{sen}(\alpha) \sqrt{\text{sen}^2(\alpha) + \frac{2gh}{v_0^2}} + \cos^2(\alpha) + \frac{\text{sen}(\alpha) \cos^2(\alpha)}{\sqrt{\text{sen}^2(\alpha) + \frac{2gh}{v_0^2}}} \right] = 0. \quad (4.189)$$

Esta ecuación es complicada, pero usaremos el siguiente “truco”: llamando  $D = \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2gh}{v_0^2}}$ , y multiplicando la ecuación (4.189) por  $D$  obtenemos

$$-\sin^2(\alpha)D - \sin(\alpha)D^2 + \cos^2(\alpha)D + \sin(\alpha)\cos^2(\alpha) = 0, \quad (4.190)$$

que es una cuadrática para  $D$ , cuya raíz positiva es

$$D = \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}. \quad (4.191)$$

Claro, debido al truco que usamos, todavía no obtenemos  $\alpha_{op}$ , ya que  $D$  es función del ángulo, pero usando que  $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$ , elevando al cuadrado la ecuación (4.191) obtenemos,

$$\sin(\alpha_{op}) = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{2gh}{v_0^2}}} \Rightarrow \cos(\alpha_{op}) = \sqrt{\frac{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}{2 + \frac{2gh}{v_0^2}}} \Rightarrow \tan(\alpha_{op}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}, \quad (4.192)$$

reemplazando estas expresiones en la ecuación (4.182) obtenemos

$$x_f(\alpha_{op}) = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}} = \frac{v_0^2}{g \tan(\alpha_{op})}. \quad (4.193)$$

Notamos que para  $h = 0$  reobtenemos los resultados de la sección anterior,  $\alpha_{op} = \pi/4$ ,  $x_f = \frac{v_0^2}{g}$ . De la ecuación (4.192) vemos que  $\tan(\alpha_{op})$  decrece cuando  $h$  crece, entonces la ecuación (4.193) nos dice que el proyectil llegará más lejos mientras más alta sea la base de lanzamiento.

Finalmente calculamos el ángulo de caída para  $\alpha_{op}$ , esto es, el ángulo que forma  $v_f$  con el eje  $x$ , el cual viene dado por

$$\tan(\theta_f) = \frac{v_{f,y}}{v_{f,x}} = \frac{-gt_f + v_0 \sin(\alpha_{op})}{v_0 \cos(\alpha_{op})} = \frac{-gx_f + v_0^2 \sin(\alpha_{op}) \cos(\alpha_{op})}{v_0^2 \cos^2(\alpha_{op})}, \quad (4.194)$$

donde hemos usado que  $x_f = v_0 \cos(\alpha_{op}) t_f$ . Reemplazando en (4.194) los valores de  $\sin(\alpha_{op})$  y  $\cos(\alpha_{op})$  dados en (4.192), obtenemos

$$\tan(\theta_f) = -\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}} = -\frac{1}{\tan(\alpha_{op})}; \quad (4.195)$$

tenemos entonces que  $\tan(\theta_f) \tan(\alpha_{op}) = -1$ , esto es, la velocidad inicial para el ángulo óptimo es perpendicular a la velocidad de llegada a tierra,

$$\vec{v}_0(\alpha_{op}) \cdot \vec{v}_f(\theta_f) = 0, \quad (4.196)$$

obteniendo que esta condición es válida para todo valor de  $h \geq 0$ .

#### 4.4.10. Encuentro de dos móviles en el plano

Igual que en el caso de movimientos sobre una recta, definimos encuentro de dos móviles cuando ambos se encuentran en el **mismo** lugar en el **mismo** instante. Esto es, dado dos cuerpos  $A$  y  $B$  con vectores posición  $\vec{r}_A(t)$  y  $\vec{r}_B(t)$ , diremos que habrá encuentro si existe al menos un tiempo  $t_e$  tal que

$$\vec{r}_A(t_e) = \vec{r}_B(t_e), \quad (4.197)$$

o sea, el conjunto de ecuaciones

$$x_A(t_e) = x_B(t_e) \quad ; \quad y_A(t_e) = y_B(t_e) \quad (4.198)$$

tiene al menos una solución. En caso contrario, los móviles no se encuentran.

En el caso de movimiento en el plano es importante no confundir encuentro con cruce de trayectoria. En una dimensión, cuando vemos el gráfico  $x-t$ , si las curvas se cruzan, entonces hay encuentro, en dos dimensiones la trayectoria está en el plano  $x-y$ , por lo que, aun existiendo un punto de cruce de trayectorias, los cuerpos pueden haber pasado por dicho punto en distintos instantes.

Veamos esto con un ejemplo: sean los vectores posición de dos cuerpos  $A$  y  $B$

$$\vec{r}_A(t) = 1\frac{m}{s}t\hat{i} + 1\frac{m}{s}t\hat{j} \quad ; \quad \vec{r}_B(t) = \left(2\frac{m}{s}t + b\right)\hat{i} - \left(2\frac{m}{s}t - d\right)\hat{j}, \quad (4.199)$$

y asumiremos en particular que las constantes  $b$  y  $d$  cumplen  $b + d = 1m$ , lo que nos lleva a las siguientes trayectorias,

$$y_A(x_A) = x_A \quad ; \quad y_B(x_B) = -x_B + 1m. \quad (4.200)$$

Ambas trayectorias son líneas rectas, que como se muestra en la figura 4.64 se cruzan en un punto  $(x_c, y_c)$ , dado por

$$y_A(x_c) = y_B(x_c) \Rightarrow x_c = \frac{1}{2}m \quad ; \quad y_c = \frac{1}{2}m. \quad (4.201)$$

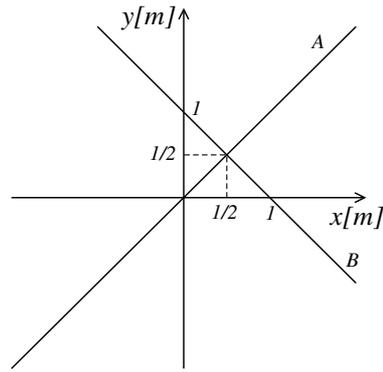


Figura 4.64: Trayectorias de los cuerpos A y B dados por las ecuaciones (4.200).

Entonces las trayectorias se cortan en este punto, pero ¿los móviles se encuentran? Para contestar esta pregunta debemos resolver la ecuación (4.197) (¡que es distinta a la ecuación (4.201)!), o equivalentemente las ecuaciones (4.198), que arrojan como resultado

$$b = -\frac{1}{2}m \quad ; \quad d = \frac{3}{2}m \quad ; \quad t_e = \frac{1}{2}s, \quad (4.202)$$

esto es, **solo** en el caso en que  $b = -1/2m$  y  $d = 3/2m$  se produce un encuentro en  $t_e = 1/2s$ . Para cualquier otro valor de los parámetros  $b$  y  $d$  que elijamos (sujetos a la condición  $b + d = 1m$ ) hay cruce de trayectorias pero **no** habrá encuentro. Dejamos como ejercicio verificar que, por ejemplo, con la elección  $b = -1m$ ;  $d = 2m$  el móvil A pasa por el punto de cruce en  $t = 1/2s$ , mientras el móvil B lo hace en  $t = 3/4s$ . Como los móviles pasan por el mismo punto a distintos tiempos no hay encuentro. Esto es lo que sucede en cualquier esquina, que las trayectorias de los automóviles que vienen por las distintas calles se cruzan sin haber encuentro (¡salvo cuando ocurre un choque entre automóviles!).

# 5

## Movimiento Circular y Movimiento Periódico

### SECCIÓN 5.1

### Movimiento circular - parte I

El movimiento circular es un caso particular de un movimiento en el plano en el cual la trayectoria es una circunferencia, o parte de ella, esto es, para todo instante en el intervalo de interés, las coordenadas del móvil cumplen

$$[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 = R^2, \quad (5.1)$$

donde  $(x_0, y_0)$  son las coordenadas del centro del círculo y  $R$  su radio. En la figura 5.1 se muestran tres ejemplos de trayectorias correspondientes a movimientos circulares.

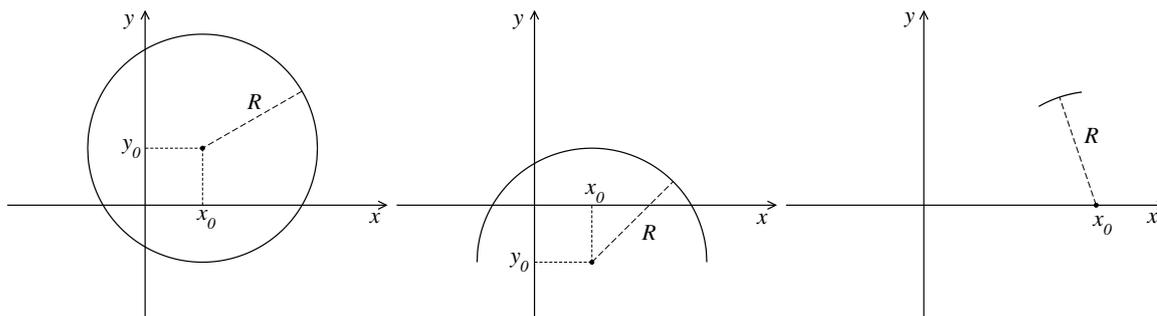


Figura 5.1: Tres trayectorias correspondientes a movimientos circulares, esto es, que sus funciones de movimiento cumplen la ecuación (5.1).

Si para describir el movimiento se elige un sistema de coordenadas cuyo origen coincida con el centro de la circunferencia, entonces  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  y la trayectoria es descrita en coordenadas cartesianas por la ecuación

$$x^2(t) + y^2(t) = R^2. \quad (5.2)$$

Como siempre, elegiremos el sistema de coordenadas que más simplifique la descripción del movimiento del móvil en cuestión, esto es estudiaremos en adelante movimientos circulares centrados en el origen, cuya trayectoria obedece la ecuación (5.2). El vector posición  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$  de una partícula que realiza un movimiento circular puede expresarse en función del radio del círculo, que es una constante, y el ángulo  $\theta(t)$ , que forma dicho vector con el eje  $x$  (ver figura 5.2),

$$\vec{r}(t) = R (\cos [\theta(t)] \hat{i} + \text{sen} [\theta(t)] \hat{j}) \Rightarrow |\vec{r}(t)| = R, \quad (5.3)$$

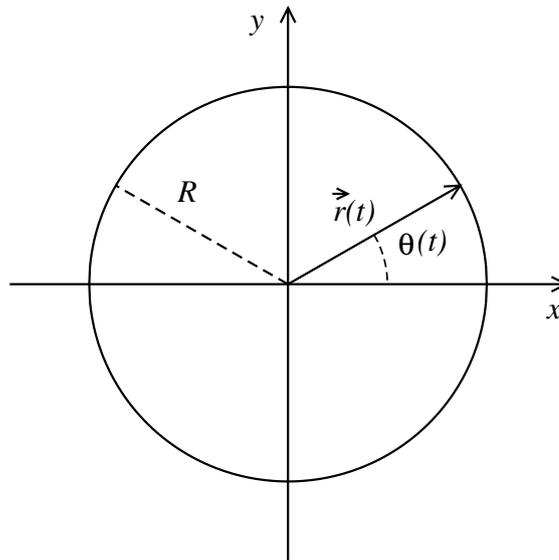


Figura 5.2: Vector posición  $\vec{r}(t)$  y ángulo  $\theta(t)$  en un movimiento circular.

Derivando  $\vec{r}(t)$  obtenemos la velocidad del cuerpo,

$$\vec{v}(t) = R \left( -\text{sen} [\theta(t)] \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + \cos [\theta(t)] \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \right) = R \frac{d\theta}{dt} (-\text{sen} [\theta(t)] \hat{i} + \cos [\theta(t)] \hat{j}). \quad (5.4)$$

La derivada con respecto al tiempo de la función de movimiento angular,  $\theta(t)$ , se denomina velocidad angular y se denota por

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad (5.5)$$

entonces

$$\vec{v}(t) = R\omega(t) (-\text{sen} [\theta(t)] \hat{i} + \cos [\theta(t)] \hat{j}) \Rightarrow |\vec{v}(t)| = R|\omega(t)|. \quad (5.6)$$

Derivando el vector velocidad obtenemos el vector aceleración

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= R \frac{d\omega}{dt} (-\operatorname{sen}[\theta(t)] \hat{i} + \operatorname{cos}[\theta(t)] \hat{j}) + R\omega \left( -\operatorname{cos}[\theta(t)] \frac{d\theta}{dt} \hat{i} - \operatorname{sen}[\theta(t)] \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \right) \\
&= R \frac{d\omega}{dt} (-\operatorname{sen}[\theta(t)] \hat{i} + \operatorname{cos}[\theta(t)] \hat{j}) + R\omega^2 (-\operatorname{cos}[\theta(t)] \hat{i} - \operatorname{sen}[\theta(t)] \hat{j}), \quad (5.7)
\end{aligned}$$

definiendo la aceleración angular  $\gamma(t)$  como la derivada respecto al tiempo de la velocidad angular,

$$\gamma(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}, \quad (5.8)$$

podemos escribir el vector aceleración como

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2(t) (\operatorname{cos}[\theta(t)] \hat{i} + \operatorname{sen}[\theta(t)] \hat{j}) + R\gamma(t) (-\operatorname{sen}[\theta(t)] \hat{i} + \operatorname{cos}[\theta(t)] \hat{j}). \quad (5.9)$$

Si realizamos el producto escalar entre el vector posición, ecuación (5.3), y el vector velocidad, ecuación (5.6), vemos que

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) &= [R(\operatorname{cos}[\theta(t)] \hat{i} + \operatorname{sen}[\theta(t)] \hat{j})] \cdot [R\omega(-\operatorname{sen}[\theta(t)] \hat{i} + \operatorname{cos}[\theta(t)] \hat{j})] \\
&= R^2\omega(-\operatorname{cos}[\theta(t)] \operatorname{sen}[\theta(t)] \hat{i} \cdot \hat{i} + \operatorname{cos}^2[\theta(t)] \hat{i} \cdot \hat{j} - \operatorname{sen}^2[\theta(t)] \hat{j} \cdot \hat{i} + \operatorname{sen}[\theta(t)] \operatorname{cos}[\theta(t)] \hat{j} \cdot \hat{j}) \\
&= R^2\omega\{-\operatorname{cos}[\theta(t)] \operatorname{sen}[\theta(t)] + \operatorname{sen}[\theta(t)] \operatorname{cos}[\theta(t)]\} = 0. \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Como el producto escalar de dos vectores no nulos solo puede ser cero si estos son ortogonales, entonces en un movimiento circular el vector posición es perpendicular al vector velocidad en todo instante,  $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$ .

Analicemos ahora el vector aceleración de un movimiento circular. De la ecuación (5.10) tenemos para el versor posición y el versor en la dirección de la velocidad

$$\begin{aligned}
\hat{r}(t) &= \operatorname{cos}[\theta(t)] \hat{i} + \operatorname{sen}[\theta(t)] \hat{j} \\
\hat{u}_v(t) &= -\operatorname{sen}[\theta(t)] \hat{i} + \operatorname{cos}[\theta(t)] \hat{j} \\
\hat{r}(t) \cdot \hat{u}_v(t) &= 0. \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Estos versores se denominan *ortonormales* por ser de módulo uno y perpendiculares entre sí. Es importante notar que  $\hat{u}_v$  define la dirección del vector velocidad, mientras que su sentido es dado por el signo de  $\omega(t)$ ,  $\vec{v}(t) = R\omega(t)\hat{u}_v(t)$ .

Notemos entonces que el vector aceleración, escrito en la forma de la ecuación (5.9), resulta ya descompuesto en aceleración tangencial y aceleración normal utilizando los dos versores ortonormales de la ecuación (5.11),

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2(t) \hat{r}(t) + R\gamma(t) \hat{u}_v(t) = \vec{a}_n(t) + \vec{a}_t(t). \quad (5.12)$$

Entonces cuando descomponemos el vector aceleración en aceleración tangencial y aceleración normal, **para un movimiento circular**, tenemos que la aceleración normal **siempre** tiene la misma dirección y sentido contrario al vector posición,

$$\vec{a}_n(t) = -R\omega^2(t)\hat{r}(t), \quad (5.13)$$

mientras que la aceleración tangencial, en la dirección de la velocidad, es

$$\vec{a}_t(t) = R\gamma(t)\hat{u}_v(t), \quad (5.14)$$

como se muestra en el ejemplo de la figura 5.3.

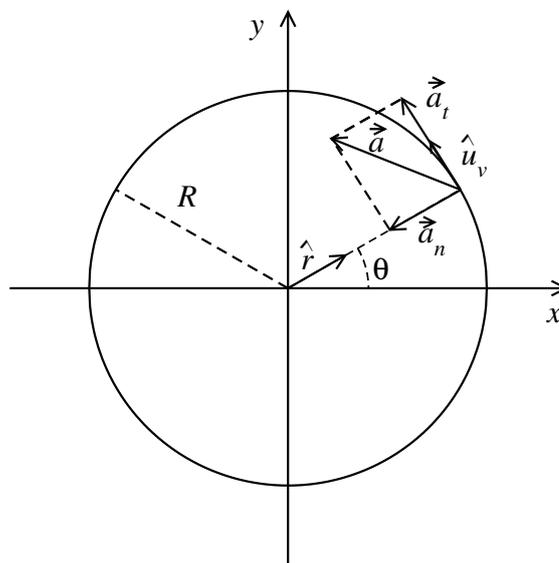


Figura 5.3: Descomposición del vector aceleración en las direcciones normal y tangencial en un movimiento circular.

Como siempre comenzaremos estudiando el caso más sencillo; veamos nuevamente el problema de una partícula en movimiento circular uniforme (MCU), tratado en el ejemplo (f) de la sección 4.2, en el que la velocidad angular es una constante,

$$\omega(t) = \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma(t) &= \frac{d\omega}{dt} = 0 \\ \theta(t) &= \int \omega dt = \omega_0 t + \theta_0 \end{cases}, \quad (5.15)$$

donde  $\theta_0$  es el ángulo determinado por el vector posición a  $t = 0$ .

Como es un movimiento uniforme, no perdemos generalidad si elegimos el sistema de coordenadas tal que  $\vec{r}(t = 0) = R\hat{i}$ , lo que implica  $\theta_0 = 0$ . Tenemos entonces que el vector posición en este caso será, según las ecuaciones (5.3) y (5.15),

$$\vec{r}(t) = R [\cos(\omega_0 t)\hat{i} + \text{sen}(\omega_0 t)\hat{j}], \quad (5.16)$$

por lo que el vector velocidad es

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\omega_0 [-\text{sen}(\omega_0 t)\hat{i} + \text{cos}(\omega_0 t)\hat{j}], \quad (5.17)$$

que nos dice que el módulo del vector velocidad es constante,

$$|\vec{v}(t)| = R|\omega_0|. \quad (5.18)$$

Finalmente calculamos la aceleración,

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega_0^2 [\text{cos}(\omega_0 t)\hat{i} + \text{sen}(\omega_0 t)\hat{j}] = -R\omega_0^2 \hat{r}(t). \quad (5.19)$$

Como el vector aceleración es normal a la trayectoria y la aceleración angular  $\gamma$  es nula, el vector aceleración coincide con el vector aceleración normal,

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_n(t) = -R\omega_0^2 \hat{r}(t), \quad (5.20)$$

que es un vector cuyo módulo también es constante,  $|\vec{a}(t)| = R\omega_0^2$ . Esto es, en un MCU los módulos de los vectores posición, velocidad y aceleración son constantes. Las ecuaciones (5.11) y (5.20) nos dicen que

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0, \quad (5.21)$$

como ambos vectores son no nulos, concluimos que en un MCU los vectores velocidad y aceleración son ortogonales en todo instante, como puede observarse en la figura 5.4.

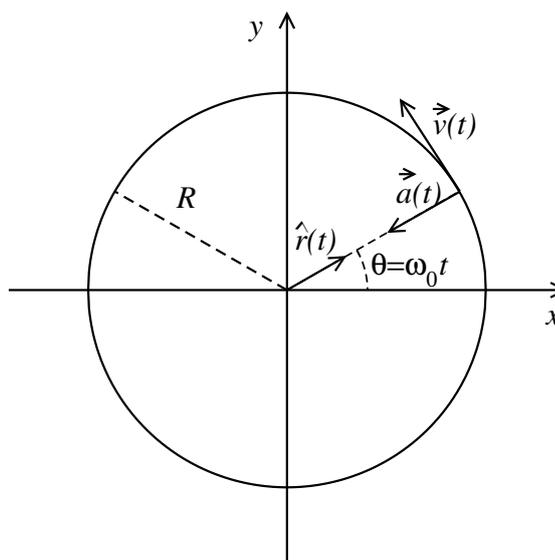


Figura 5.4: Versor posición, vectores velocidad y aceleración y ángulo  $\theta$  en un movimiento circular uniforme.

Entonces, al no haber aceleración tangencial, esto es, en el sentido de la velocidad, el módulo de la velocidad permanece constante, pero cambia su dirección y sentido debido a la presencia de una aceleración normal no nula. Vemos otro ejemplo que muestra que la aceleración normal es responsable del cambio en dirección del vector velocidad, cumpliendo el enunciado general establecido en la sección 4.4.7: **todo movimiento no rectilíneo es acelerado.**

## SECCIÓN 5.2

## Coordenadas polares

Ya vimos en el capítulo 4 que dado un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, a cada punto  $P$  del plano le corresponde unívocamente un par de números reales, las coordenadas  $x_p$  e  $y_p$  del punto. Pero queda claro que cualquier regla que identifique unívocamente puntos en el plano con pares de números reales también merecen ser llamada sistema de coordenadas. Podríamos pensar entonces que es posible definir muchos (¡infinitos!) sistemas de coordenadas, y efectivamente es así, claro que solo algunos pocos nos serán de utilidad para describir el movimiento de los cuerpos. En la sección precedente, sin mencionarlo, estuvimos muy cerca de usar el sistema que, junto con el cartesiano ortogonal, resultan los más usados en el plano: *el sistema de coordenadas polares.*

También en el capítulo 4 mostramos que la distancia de un punto  $p$  al origen de coordenadas, que denotaremos por la letra griega  $\rho$ , está dada por

$$\rho_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}. \quad (5.22)$$

Si además damos el ángulo  $\theta$  que forma el segmento  $\overline{OP}$  con el eje  $x$ , tomado en sentido antihorario (estos dos requerimientos son convenciones universalmente aceptadas), entonces tenemos un par de números reales  $(\rho_p, \theta_p)$  que determinan unívocamente cualquier punto del plano, como se muestra en la figura 5.5. Denominaremos este par de números reales como *coordenadas polares del punto P.*

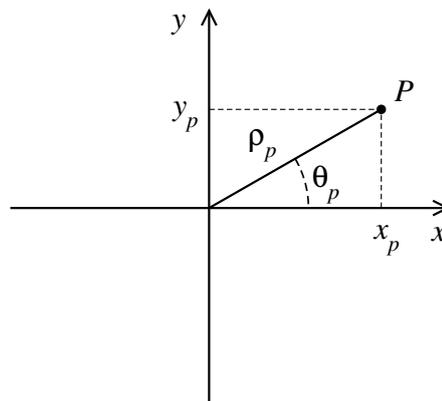


Figura 5.5: Coordenadas cartesianas y polares del punto  $P$

De la figura 5.5 podemos ver que la relación de las coordenadas cartesianas con las coordenadas polares de un punto son

$$x_p = \rho_p \cos(\theta_p) ; y_p = \rho_p \operatorname{sen}(\theta_p), \quad (5.23)$$

y de estas ecuaciones obtenemos la expresión de  $\theta$  en coordenadas cartesianas,

$$\tan(\theta_p) = \frac{y_p}{x_p} \Rightarrow \theta_p = \arctan\left(\frac{y_p}{x_p}\right). \quad (5.24)$$

La figura 5.5 y la ecuación (5.24) nos muestran que estrictamente las coordenadas polares **no** establecen una biyección entre puntos del plano y pares de números reales, ya que el origen de coordenadas  $x = 0$ ,  $y = 0$  le corresponde  $\rho = 0$ , pero la coordenada  $\theta$  no puede definirse, aunque este hecho no introduce ninguna ambigüedad, pues este punto queda unívocamente definido por la condición  $\rho = 0$ . Volveremos a ocuparnos de esta cuestión en la próxima sección, cuando estudiemos las propiedades de las funciones de movimiento al escribirlas en coordenadas polares. Notamos también que la ecuación (5.22) establece que  $\rho \geq 0$ , mientras que  $\theta$  puede ser cualquier número real. No restringimos  $\theta$  al intervalo  $[0, 2\pi]$ , ya que las coordenadas polares se relacionan con las coordenadas cartesianas a través de funciones trigonométricas definidas para todo número real. Veremos su significado físico cuando estudiemos funciones de movimiento en coordenadas polares.

Veamos ahora cómo calcular la distancia entre dos puntos en coordenadas polares. Sabemos calcular la distancia  $d_{AB}$  entre dos puntos cualesquiera  $A$  y  $B$  dadas sus coordenadas cartesianas (ecuación (4.2)), entonces usando las ecuaciones (5.23) podemos calcular  $d_{AB}$  en coordenadas polares (ver figura 5.6),

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A^2 + y_A^2) + (x_B^2 + y_B^2) - 2(x_A x_B + y_A y_B)} \\ &= \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2 - 2\rho_A \rho_B [\cos(\theta_A) \cos(\theta_B) + \sin(\theta_A) \sin(\theta_B)]} \\ &= \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2 - 2\rho_A \rho_B \cos(\theta_A - \theta_B)}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde en la última igualdad se usó la identidad trigonométrica para el coseno de una suma,  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$ .

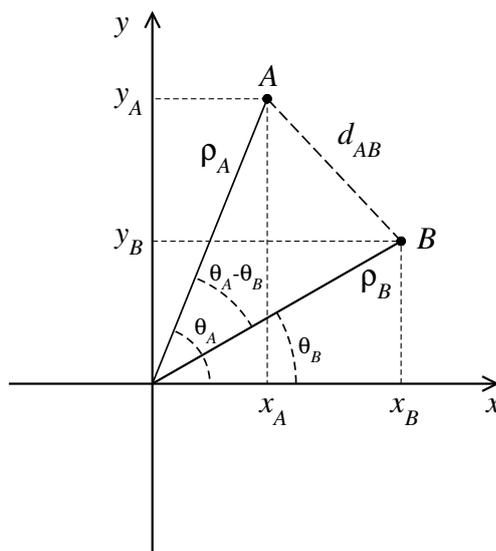


Figura 5.6: Coordenadas cartesianas y polares de dos puntos y la distancia entre ellos.

**5.2.1. Coordenadas polares y funciones de movimiento**

Si queremos describir el movimiento de un cuerpo dado, ya vimos en la sección 4.2 que podemos hacer una serie de mediciones de la posición del cuerpo en  $n$  instantes distintos  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , y estas mediciones las podemos expresar en cualquier sistema de coordenadas, en particular podemos usar cartesianas o polares,

$t$	$x$	$y$	$\rho$	$\theta$
$t_1$	$x_1$	$y_1$	$\rho_1$	$\theta_1$
$t_2$	$x_2$	$y_2$	$\rho_2$	$\theta_2$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$t_n$	$x_n$	$y_n$	$\rho_n$	$\theta_n$

Podemos entonces expresar funciones de movimiento en cualquier sistema de coordenadas, o sea, obtener tanto  $(x(t), y(t))$ , como  $(\rho(t), \theta(t))$ . Claramente, aunque sean funciones distintas, ambos pares describen el movimiento del cuerpo, que **no** depende del sistema de coordenadas elegido.

En las figuras 5.7 a 5.10 se muestran las funciones de movimiento en coordenadas polares, su gráfico en el plano  $\rho - \theta$  y su trayectoria para algunos ejemplos:

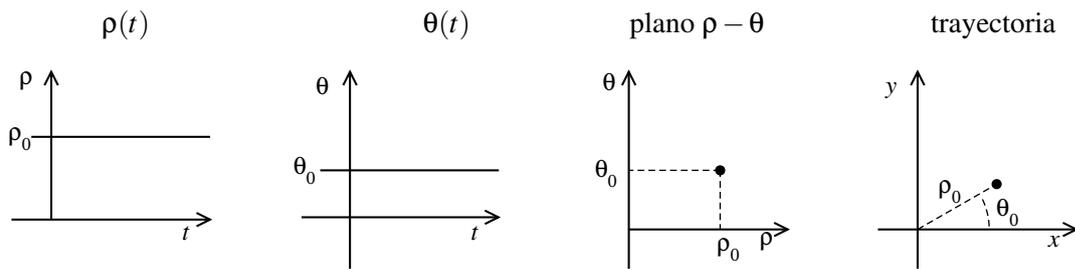


Figura 5.7: Cuerpo en reposo.

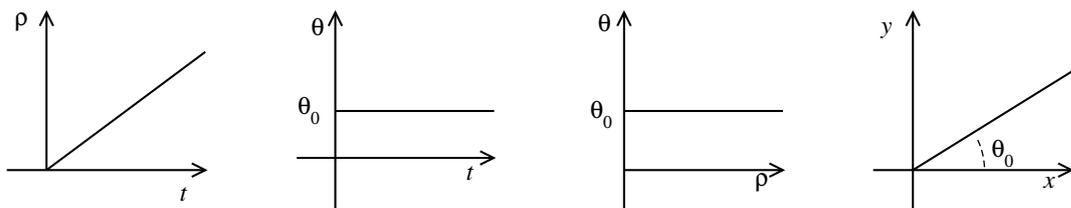


Figura 5.8: MRU:  $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t$ ;  $\vec{v}_0 = v_0 (\cos(\theta_0)\hat{i} + \text{sen}(\theta_0)\hat{j})$ ;  $t \geq 0$ .

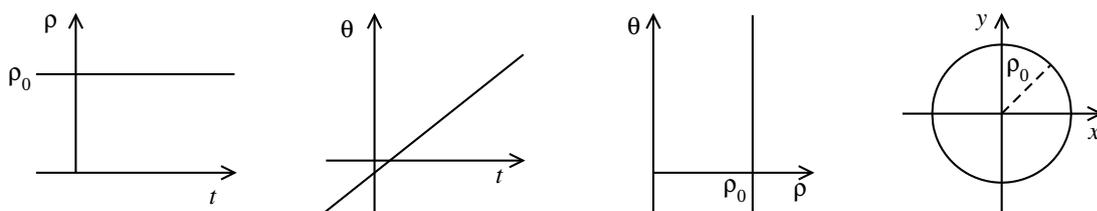


Figura 5.9: Movimiento circular uniforme (MCU).

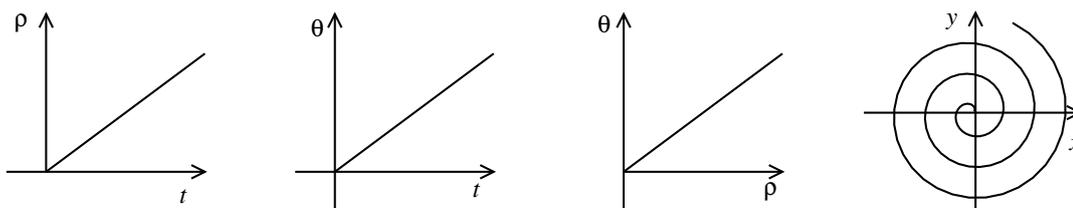


Figura 5.10: Espiral de Arquímedes:  $\vec{r}(t) = v_0 t (\cos(\omega_0 t) \hat{i} + \sin(\omega_0 t) \hat{j})$ ;  $\rho(t) = v_0 t$ ;  $\theta(t) = \omega_0 t$ .

Veamos en detalle un ejemplo bien conocido en coordenadas cartesianas: el movimiento rectilíneo uniforme, que nos permitirá discutir las propiedades de las funciones  $\rho(t)$  y  $\theta(t)$ . Sabemos que el hecho experimental de la continuidad del movimiento y velocidad de los cuerpos nos llevó a postular que las funciones de movimiento  $x(t)$  e  $y(t)$  deben ser continuamente diferenciables. También podemos concluir que la coordenada  $\rho(t)$ , que representa la distancia del móvil al origen, debe ser continua. Pero como veremos, el hecho de que la coordenada  $\theta$  no está definida en el origen trae ciertos problemas matemáticos. Para ello estudiemos el siguiente MRU **que pasa por el origen de coordenadas**:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t = v_{0x} t \hat{i} + v_{0y} t \hat{j} \Rightarrow y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x; v_{0x} = \frac{\sqrt{3} m}{2 s}; v_{0y} = \frac{1 m}{2 s}. \quad (5.26)$$

Estas funciones de movimiento y la correspondiente trayectoria se muestran en la figura 5.11.

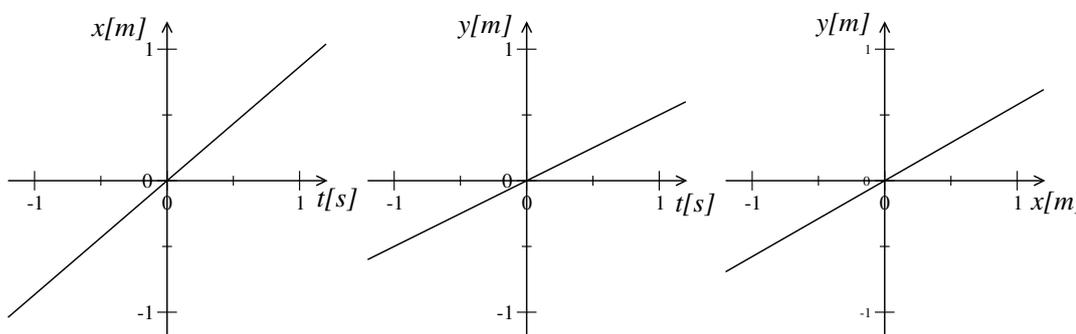


Figura 5.11: Funciones de movimiento y trayectoria de un móvil descrito por las ecuaciones (5.26).

Tratemos ahora este problema en coordenadas polares. Usando la ecuación (5.22) obtenemos

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = |\vec{v}_0 t| = 1 \frac{m}{s} |t|, \quad (5.27)$$

mientras que la ecuación (5.24) nos da para la coordenada angular

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = \arctan\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right). \quad (5.28)$$

Analicemos primero la coordenada  $\rho$ ;  $\rho(t) = |\vec{v}_0 t| = 1 \frac{m}{s} |t| \Rightarrow$  es continua pero **no diferenciable** en  $t = 0$

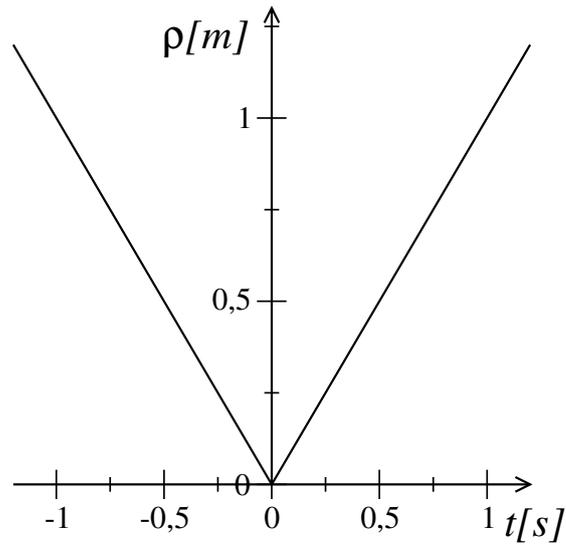


Figura 5.12: Función  $\rho(t)$  dada por la ecuación (5.27), cuya derivada es discontinua en  $t = 0$ .

Volvamos ahora a la ecuación (5.28) para  $\theta(t)$ , donde  $\vec{v}_0$  es dado por (5.26), obteniendo

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad (5.29)$$

pero esta fórmula no debe confundirnos, dijimos que al calcular la función arcotangente debemos además indicar el cuadrante según la ecuación (4.34), así

■  $t > 0 \Rightarrow x, y > 0 \Rightarrow$  primer cuadrante

■  $t < 0 \Rightarrow x, y < 0 \Rightarrow$  tercer cuadrante

como se observa en la figura 5.13, obteniendo entonces

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} & \text{si } t > 0 \\ \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

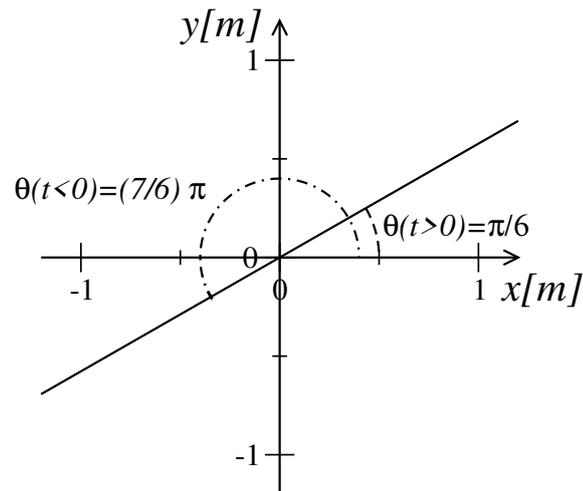


Figura 5.13: Trayectoria de la figura 5.11, mostrando los ángulos que forma con el eje  $x$ .

Vemos de la figura 5.13 que  $\theta(t)$  es **discontinua** en  $t = 0$ , esto es, en el origen, donde  $\theta$  **no** está definida, como se muestra en la figura 5.14.

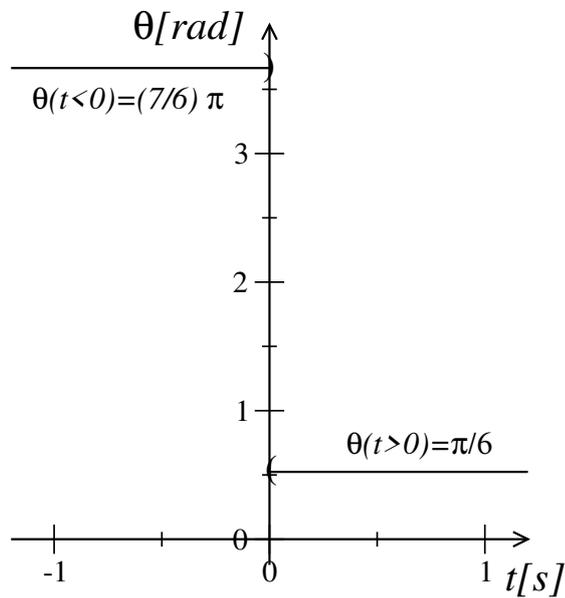


Figura 5.14:  $\theta$  vs.  $t$  para la trayectoria dada por la ecuación (5.26), mostrando una discontinuidad en  $t = 0$ .

Finalmente el gráfico de  $\theta(\rho)$  (que no es una función) también resulta discontinuo en  $\rho = 0$ , como se muestra en la figura 5.15

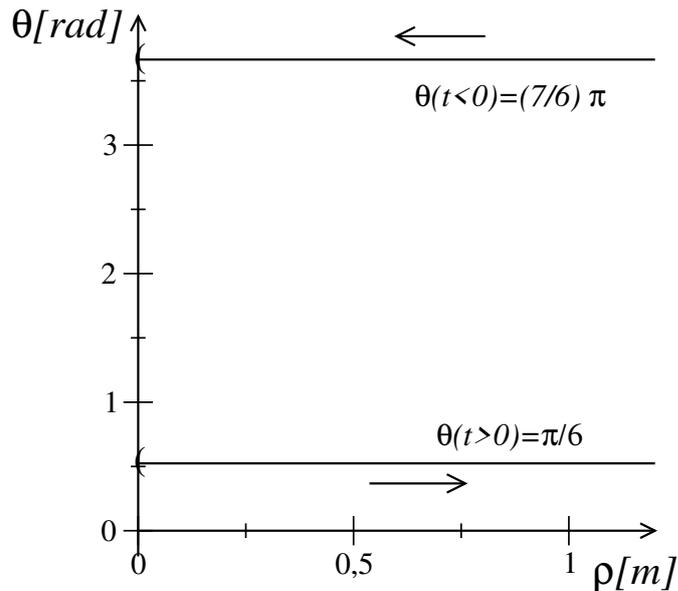


Figura 5.15:  $\theta$  vs.  $\rho$  para la trayectoria dada por la ecuación (5.26), mostrando una discontinuidad en  $\rho = 0$  (las flechas indican el sentido de movimiento).

Debe quedar claro que la trayectoria del cuerpo es rectilínea (figura 5.11), independientemente del sistema de coordenadas empleado para describir su movimiento, mientras que las discontinuidades encontradas en coordenadas polares provienen del *problema matemático* resultante de la indefinición de  $\theta$  en el origen de coordenadas, y las encontraremos siempre que la trayectoria pase por dicho punto.

### Unidades de magnitudes angulares

Estamos acostumbrados a medir ángulos en el llamado *sistema sexagesimal*, que divide la circunferencia en 360 partes llamadas grados, y se denotan con un supraíndice *o*. Así un ángulo recto mide  $90^\circ$ . En este sistema, cada grado se divide en 60 minutos,  $1^\circ = 60'$ , y cada minuto en 60 segundos,  $1' = 60''$ . El principal motivo del uso de este sistema es que, al ser 360 divisible por muchos enteros, resulta cómodo de utilizar en variadas ocasiones. Por el mismo motivo, también es popular (aunque menos usado) el sistema centesimal, el cual parte el ángulo recto en 100 unidades llamadas *gradianes*.

Sin embargo una manera natural de definir la medida de un ángulo es dividir la longitud de un arco de circunferencia por la longitud del radio de la misma. Así la unidad de medida será la longitud de un arco de circunferencia que mide igual que su radio dividida por este último. Notemos que esta es una cantidad **adimensional**, pero para evitar confusiones y dejar en claro que hablamos de ángulos, la llamaremos *radián*. En estas unidades, el ángulo de una circunferencia completa es  $2\pi$ , donde  $\pi$ , uno de los más célebres números de la matemática, es irracional, y sus primeras 50 cifras son

$$\pi \simeq 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751. \quad (5.31)$$

Dado que la circunferencia mide  $360^\circ$  o  $2\pi \text{ rad}$  (y el ángulo recto  $90^\circ$  o  $\pi/2 \text{ rad}$ ), podemos obtener el factor de conversión de una unidad a la otra,

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \simeq 0.01745329252 \text{ rad} \quad ; \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57.29577951^\circ. \quad (5.32)$$

Como el radián es una magnitud *ficticia*, no la tendremos en cuenta cuando la multiplicamos por una magnitud "verdadera", por ejemplo  $rad \times m = m$ . En el caso de división de magnitudes, por ejemplo  $rad/s = s^{-1}$ , pueden utilizarse indistintamente ambas notaciones.

Debemos tener en cuenta que  $\pi$  es un número irracional, entonces, como sucede con todos los números irracionales, **no** debemos reemplazar el símbolo  $\pi$  por una aproximación numérica (por ejemplo la ecuación (5.31)) a menos que sea imprescindible.

### Los versores $\hat{u}_\rho$ y $\hat{u}_\theta$ en coordenadas polares

Así como  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  son los versores en las direcciones de crecimiento de las coordenadas  $x$  e  $y$ , respectivamente, podemos también definir versores en las direcciones de crecimiento de las coordenadas  $\rho$  y  $\theta$ , o sea, los versores que en el plano  $\rho - \theta$  se muestran en la figura 5.16.

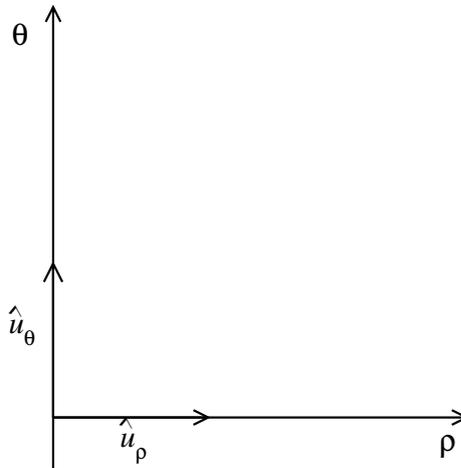


Figura 5.16: Versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$  en el plano  $\rho - \theta$ .

Pero este no es el plano físico donde se mueve un móvil, es entonces necesario conocer la expresión de los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$  en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal en el plano  $x - y$ .

Para obtener  $\hat{u}_\rho$  usamos que  $\rho = |\vec{r}|$ , por lo tanto

$$\hat{u}_\rho = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{|\vec{r}|} = \frac{\rho \cos(\theta)\hat{i} + \rho \sin(\theta)\hat{j}}{\rho} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}. \quad (5.33)$$

La forma más sencilla de calcular la expresión del versor  $\hat{u}_\theta$ , es usar el hecho que, como se ve en la figura 5.16, este versor es ortogonal a  $\hat{u}_\rho$ ; como además  $\hat{u}_\theta$  es un versor, tenemos dos condiciones:

$$\hat{u}_\rho \cdot \hat{u}_\theta = \cos(\theta)u_{\theta,x} + \sin(\theta)u_{\theta,y} = 0 \quad ; \quad u_{\theta,x}^2 + u_{\theta,y}^2 = 1, \quad (5.34)$$

donde  $u_{\theta,x}$  y  $u_{\theta,y}$  son las componentes cartesianas del versor  $\hat{u}_\theta$  y  $\cos(\theta)$  y  $\sin(\theta)$ , las componentes cartesianas del versor  $\hat{u}_\rho$  dadas en la ecuación (5.33). Estas ecuaciones tienen dos soluciones  $u_{\theta,x} = \pm \sin(\theta)$ ;  $u_{\theta,y} = \mp \cos(\theta)$ , lo que era de esperar, ya que una dirección (ortogonal a  $\hat{u}_\rho$ ) define dos sentidos, y por lo tanto dos versores posibles. Dada la convención usual de definir el ángulo  $\theta$  a partir del eje  $x$  en sentido antihorario, pedimos que para  $\theta = 0$  se cumpla  $\hat{u}_\theta = \hat{j}$ , así, de las dos soluciones nos quedamos

con

$$\hat{u}_\theta = -\text{sen}(\theta)\hat{i} + \text{cos}(\theta)\hat{j}. \quad (5.35)$$

Notemos que este versor coincide con el versor  $\hat{u}_v$ , definido en la ecuación (5.11).

Para un cuerpo en movimiento, si  $\theta$  depende del tiempo, entonces los vectores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$  también dependerán del tiempo. Con esta definición de los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$ , el vector posición toma una expresión muy simple en coordenadas polares,

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\hat{u}_\rho(t). \quad (5.36)$$

En la figura 5.17 mostramos los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$  en el plano  $x-y$  para dos puntos distintos  $A$  y  $B$ .

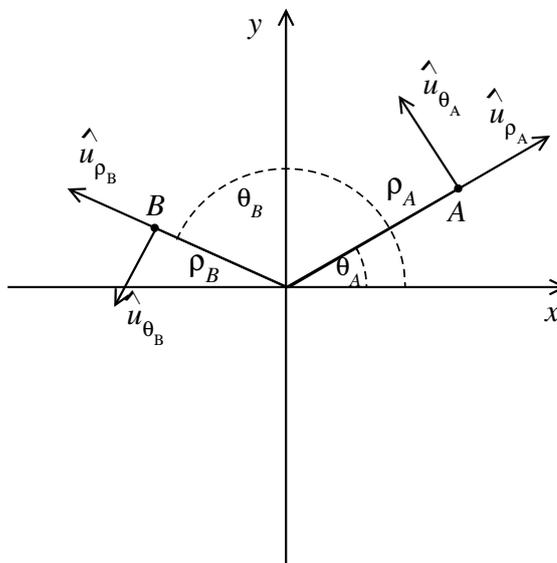


Figura 5.17: Versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$  en los puntos  $A$  y  $B$  en el plano  $x-y$ .

### SECCIÓN 5.3

## Movimiento circular - parte II

Vimos que no resulta muy conveniente describir un MRU en coordenadas polares; ya hemos discutido que siempre hay que usar las herramientas que mas convengan para describir un fenómeno físico, que ocurre independientemente de nuestra observación y descripción, y claramente para describir movimientos rectilíneos resulta conveniente utilizar un sistema cartesiano.

Distinto es el caso de un cuerpo en movimiento circular, en este caso trae simplicidad en la descripción usar un sistema de coordenadas polares, centrado en el círculo, ya que la ecuación (5.3), que define un movimiento circular, en coordenadas polares toma la simple forma

$$\rho = R, \quad (5.37)$$

es decir,  $\rho$  es una constante, el radio del círculo, y solo necesitamos la función  $\theta(t)$  para describir completamente el movimiento. Conocida esta función, el vector posición en función del tiempo será

$$\vec{r}(t) = R \hat{u}_\rho(t). \quad (5.38)$$

Para calcular la velocidad debemos derivar el vector posición respecto del tiempo. Hasta ahora habíamos derivado vectores cuyas componentes están escritas en coordenadas cartesianas, donde los versores son constantes y por lo tanto su derivada respecto al tiempo es cero. Sin embargo, como se observa en la figura 5.17, en un sistema de coordenadas polares los versores modifican su dirección cuando cambia la posición del cuerpo cuyo movimiento describimos. Resulta entonces conveniente calcular las derivadas temporales de los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$ ,

$$\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = -\text{sen}(\theta) \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + \text{cos}(\theta) \frac{d\theta}{dt} \hat{j} = \frac{d\theta}{dt} (-\text{sen}(\theta) \hat{i} + \text{cos}(\theta) \hat{j}) = \omega(t) \hat{u}_\theta(t); \quad (5.39)$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\text{cos}(\theta) \frac{d\theta}{dt} \hat{i} - \text{sen}(\theta) \frac{d\theta}{dt} \hat{j} = -\frac{d\theta}{dt} (\text{cos}(\theta) \hat{i} + \text{sen}(\theta) \hat{j}) = -\omega(t) \hat{u}_\rho(t). \quad (5.40)$$

Notemos que las derivadas de los versores **no** resultan versores, sino vectores de módulo  $|\omega(t)|$ . Entonces, en el caso de un movimiento circular el vector velocidad es

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R \frac{d\hat{u}_\rho(t)}{dt} = R\omega(t) \hat{u}_\theta(t). \quad (5.41)$$

Es evidente, a partir de esta expresión del vector velocidad, que  $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$ . Para calcular el vector aceleración debemos derivar la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [R\omega(t) \hat{u}_\theta(t)] = R \frac{d\omega}{dt} \hat{u}_\theta + R\omega \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = R\gamma(t) \hat{u}_\theta(t) - R\omega^2(t) \hat{u}_\rho(t). \quad (5.42)$$

En esta expresión del vector aceleración es claro que la componente en la dirección del versor  $\hat{u}_\theta$  es paralela a la velocidad y la componente en la dirección  $\hat{u}_\rho$  es normal a la velocidad, por lo tanto

$$\vec{a}_t = R\gamma(t) \hat{u}_\theta(t) \quad ; \quad \vec{a}_n = -R\omega^2(t) \hat{u}_\rho(t). \quad (5.43)$$

La componente normal de la aceleración tiene la dirección  $\hat{u}_\rho$  y sentido opuesto, es decir que apunta hacia el centro del círculo (parte cóncava de la trayectoria). Esta componente de la aceleración, que es la responsable de la modificación de la dirección de la velocidad, en el movimiento circular recibe el nombre de *aceleración centrípeta*.

Basta reemplazar las expresiones de los versores polares por sus componentes cartesianas, dadas en las ecuaciones (5.33) y (5.35) para verificar que el tratamiento en coordenadas polares es equivalente al tratamiento en coordenadas cartesianas hecho en la sección 5.1. Dejamos esta verificación como ejercicio.

### 5.3.1. Integración de las ecuaciones de movimiento para un movimiento circular

Ya vimos en el capítulo 3 que para obtener el vector posición de un cuerpo en movimiento conocida su aceleración, es necesario dar como datos la posición en un instante y velocidad en el mismo u otro instante, o alternativamente, también puede darse la posición en dos instantes.

También dijimos que **no** sabemos integrar vectores si los versores no son constantes, así, en general, si  $\vec{a}(t)$  es dada en coordenadas polares,

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt = \int [a_\rho(t) \hat{u}_\rho(t) + a_\theta(t) \hat{u}_\theta(t)] dt, \quad (5.44)$$

como los versores dependen de  $t$  a través de  $\theta$ ,  $\hat{u}_\rho(t) = \hat{u}_\rho[\theta(t)]$ ;  $\hat{u}_\theta(t) = \hat{u}_\theta[\theta(t)]$  y **no** conocemos  $\theta(t)$ , **no** sabemos calcular la integral (5.44).

Sin embargo, en el caso particular del movimiento circular, la condición  $\rho = R$  simplifica los cálculos si trabajamos en coordenadas polares, ya que esta es una de las funciones de movimiento, ¡y es también una constante dato del problema! Como solo necesitamos conocer  $\theta(t)$ , es suficiente dar como datos la aceleración angular  $\gamma(t)$ , la velocidad angular en algún instante  $t_1$ ,  $\omega(t_1) = \omega_1$  y el ángulo en otro instante (que puede o no coincidir con  $t_1$ ),  $\theta(t_2) = \theta_2$ , o alternativamente, dar el ángulo en dos instantes distintos. Luego el procedimiento es similar al caso unidimensional desarrollado en el capítulo 3 (de hecho, como problema matemático podemos considerar el movimiento circular como unidimensional, ya que solo se precisa una coordenada para describirlo).

Veamos cómo se procede: tenemos un cuerpo en movimiento sobre una circunferencia de radio  $R = 1\text{ m}$ , cuya aceleración angular es dada por la función  $\gamma(t) = (1/2)\text{ rad/s}^2$  y sabemos que  $\omega(1\text{ s}) = (1/2)\text{ rad/s}$  y  $\theta(0) = \pi/4$ , entonces

$$\omega(t) = \int \gamma(t) dt = \frac{1\text{ rad}}{2s^2} t + C, \quad (5.45)$$

la condición para la velocidad angular nos dice que  $C = 0$ , así el ángulo viene dado por

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt = \frac{1\text{ rad}}{2s^2} \frac{t^2}{2} + D, \quad (5.46)$$

como  $\theta(0) = \pi/4$  obtenemos  $D = \pi/4$ . Una vez obtenida la función  $\theta(t)$ , el vector posición en ambos sistemas, coordenadas polares y cartesianas es dado por

$$\vec{r}(t) = R \hat{u}_\rho[\theta(t)] = R \left[ \cos\left(\frac{t^2}{4s^2} + \frac{\pi}{4}\right) \hat{i} + \text{sen}\left(\frac{t^2}{4s^2} + \frac{\pi}{4}\right) \hat{j} \right]. \quad (5.47)$$

Nos preguntamos ahora cuáles son los vectores  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_t$ ,  $\vec{a}_n$  en  $t = 0$  y en el instante en que el móvil pasa por primera vez por el eje  $y$ .

Reemplazando las condiciones iniciales  $\theta(0) = \pi/4$ ;  $\omega(0) = 0$  y  $\gamma = (1/2)\text{ rad/s}^2$ , en las ecuaciones (5.47), (5.41) y (5.43), obtenemos

$$\vec{r}(0) = \frac{1\text{ m}}{\sqrt{2}} (\hat{i} + \hat{j}) \quad ; \quad \vec{v}(0) = 0 \quad ; \quad \vec{a}(0) = \vec{a}_t(0) = \frac{1\text{ m}}{2\sqrt{2}s^2} (-\hat{i} + \hat{j}). \quad (5.48)$$

La condición de que el móvil pase por primera vez por el eje y significa  $\theta(t_1) = \pi/2$ , esto es, el tiempo en que pasa por primera vez por eje y es  $t_1 = \sqrt{\pi}s$ , obteniéndose para los vectores buscados

$$\vec{r}(t_1) = 1m\hat{j} ; \vec{v}(t_1) = -\frac{\sqrt{\pi}m}{2s}\hat{i} ; \vec{a}_n(t_1) = -\frac{\pi m}{4s^2}\hat{j} ; \vec{a}_t(t_1) = -\frac{1m}{2s^2}\hat{i}, \quad (5.49)$$

donde  $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_t(t_1) + \vec{a}_n(t_1)$ . Estos vectores, en ambos tiempos,  $t = 0, t_1$ , son mostrados en la figura 5.18.

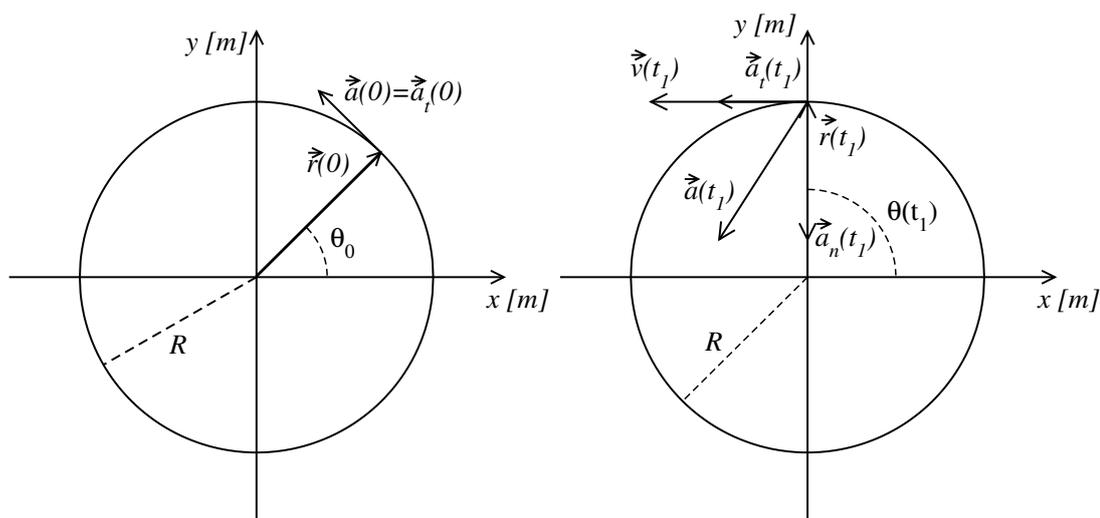


Figura 5.18: Vectores  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_t$ ,  $\vec{a}_n$  en  $t = 0$  (izquierda) y  $t = t_1$  (derecha).

Analicemos un segundo ejemplo. Para la preparación de pilotos y astronautas se los introduce en dispositivos que pueden girar a gran velocidad de manera de exponerlos a grandes aceleraciones en el plano horizontal. En este tipo de experimentos se acostumbra expresar las aceleraciones logradas en términos de la aceleración de la gravedad  $g$  ( $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$ ). Una persona tiene distinta tolerancia para aceleraciones verticales u horizontales. En promedio la máxima aceleración vertical hacia arriba que puede soportar una persona es  $5g$  pero utilizando trajes antigraavedad este límite es de  $10g$  y cuando descende la máxima aceleración soportada es entre  $2g$  y  $3g$ . Cuando la aceleración es en la dirección horizontal la máxima aceleración soportada es de aproximadamente  $20g$ . Este dispositivo de entrenamiento puede lograr aceleraciones de hasta  $30g$ . El radio de la trayectoria que describe el individuo de prueba es de  $6m$  y la aceleración angular  $\gamma = 0,3s^{-2}$ . Con esta información, y sabiendo que el simulador parte del reposo, calculemos:

- a) ¿Cuál es la velocidad angular  $\omega_m$  del simulador cuando la aceleración centrípeta llega a  $20g$ ?  
La aceleración centrípeta es  $\vec{a}_n = -R\omega^2\hat{u}_\rho$ , cuyo módulo resulta  $|\vec{a}_n| = R\omega^2$ , obteniendo

$$\omega_m = \sqrt{\frac{|\vec{a}_n|}{R}} = \sqrt{\frac{20g}{6m}}, \quad (5.50)$$

reemplazando los valores obtenemos  $\omega_m = 5,715 rad/s$ .

- b) ¿Cuánto tiempo demora el simulador en alcanzar esta velocidad angular?  
Sabiendo que la aceleración angular es constante y que el sistema parte del reposo podemos obtener la velocidad angular en función del tiempo,  $\gamma = 0,3 rad/s^2$ , siendo la velocidad angular

$$\omega = \int \gamma dt = \gamma t + C, \quad (5.51)$$

como  $\omega(0) = 0$ , tenemos que  $C = 0$ . Ahora podemos determinar cuánto tiempo demora el simulador en alcanzar la velocidad angular deseada,

$$t_m = \frac{\omega_m}{\gamma} = t_m = 19,052s. \quad (5.52)$$

c) Si luego de alcanzar la velocidad angular máxima  $\omega_m$ , esta se mantiene constante, dé la expresión de la aceleración que experimenta el individuo de prueba en coordenadas polares.

Para tiempos menores a  $t_m$  hay aceleración angular y por lo tanto el vector aceleración tendrá una componente tangencial y otra normal. Para tiempos mayores a  $t_m$  la velocidad angular es constante, por lo que la aceleración tangencial es nula y el vector aceleración sólo tendrá componente normal,

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} R\gamma\hat{u}_\theta - R\omega^2\hat{u}_\rho & \text{si } t \leq t_m \\ -R\omega_m^2\hat{u}_\rho & \text{si } t > t_m, \end{cases} \quad (5.53)$$

reemplazando obtenemos

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} R\gamma\hat{u}_\theta - R\gamma^2 t^2\hat{u}_\rho & \text{si } t \leq t_m \\ -R\gamma^2 t_m^2\hat{u}_\rho & \text{si } t > t_m. \end{cases} \quad (5.54)$$

d) Calcule el valor del módulo de la aceleración en el instante que se alcanza la velocidad angular máxima.

En el instante  $t_m$  las componentes tangencial y normal del vector aceleración son

$$\vec{a}(t) = R\gamma\hat{u}_\theta - R\gamma^2 t_m^2\hat{u}_\rho, \quad (5.55)$$

obteniendo

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(R\gamma)^2 + [R\gamma^2 (t_m^-)^2]^2} = 196,008 \frac{m}{s^2} = 20,001g. \quad (5.56)$$

### 5.3.2. Encuentro en movimiento circular

El problema de encuentro de dos cuerpos toma también una forma simple en coordenadas polares si ambos cuerpos realizan movimientos circulares; en particular si ambos se mueven sobre la misma circunferencia de radio  $R$ , como los móviles  $A$  y  $B$  de la figura 5.19.

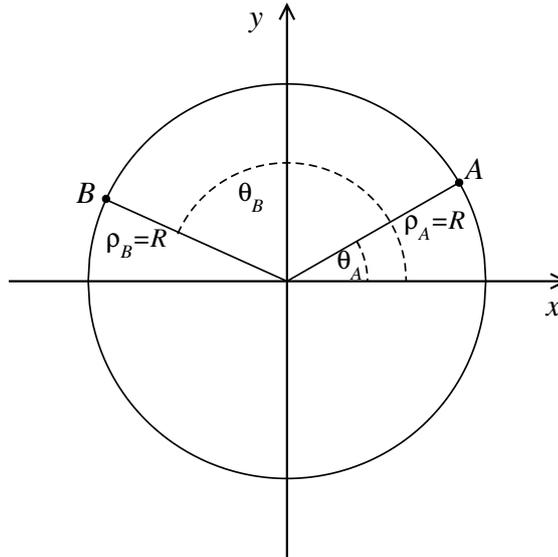


Figura 5.19: Dos móviles,  $A$  y  $B$ , en un movimiento circular sobre la misma circunferencia de radio  $R$ .

Así la ecuación (4.197) para un problema de encuentro en el plano,

$$\vec{r}_A(t_e) = \vec{r}_B(t_e), \quad (5.57)$$

donde  $t_e$  es el, o los tiempos de encuentro soluciones de esta ecuación, se reduce en el caso de un movimiento circular al par de ecuaciones

$$\cos[\theta_A(t_e)] = \cos[\theta_B(t_e)] ; \quad \text{sen}[\theta_A(t_e)] = \text{sen}[\theta_B(t_e)]. \quad (5.58)$$

Hay que tener cuidado al buscar soluciones de este par de ecuaciones, ya que las funciones trigonométricas involucradas tienen período  $2\pi$ , esto es,  $\cos(\alpha + 2n\pi) = \cos(\alpha)$ ;  $\text{sen}(\alpha + 2n\pi) = \text{sen}(\alpha) \forall n \in \mathbb{Z}$ . Esto nos dice que  $\theta_A(t_e) = \theta_B(t_e)$  es solo la solución particular con  $n = 0$ , la solución general de las ecuaciones (5.58) es

$$\theta_A(t_e) + 2n\pi = \theta_B(t_e) \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.59)$$

La interpretación es sencilla, nos dice que dos móviles pueden encontrarse cuando han realizado cada uno distinto número de vueltas. Pensemos en el caso más simple: uno de los cuerpos, digamos el  $A$  está en reposo en el punto  $\vec{r}_A = R\hat{i}$ , el cuerpo  $B$  se mueve con MCU, entonces cada vez que el cuerpo  $B$  complete una vuelta habrá un encuentro con  $A$ . Más generalmente, si ambos cuerpos se muevan con MCU, y al menos una velocidad angular es no nula, es fácil comprobar que si  $\omega_A \neq \omega_B$  **siempre** habrá infinitos encuentros, pero si  $\omega_A = \omega_B$ , entonces no se producen encuentros (salvo el caso trivial que ambos móviles tengan igual posición para todo tiempo). Veamos algunos ejemplos concretos.

### El problema del reloj

Resolvamos un problema clásico de encuentro para MCU: En un reloj común, la aguja de las horas da una vuelta cada doce horas, mientras que la del minutero lo hace en una hora, asumiendo que el reloj

es “perfecto”(esto es, no atrasa ni adelanta) ¿En qué instantes se encuentran superpuestas las agujas de las horas y los minutos?

En este caso definiremos  $t = 0$  a las 12 : 00 h, cuando ambas agujas están en posición vertical. Esta elección, midiendo los ángulos a partir del eje y creciendo en sentido *horario*, es un buen ejemplo donde se muestra que podemos abandonar las convenciones cuando no resultan convenientes. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\theta_h &= \omega_h t ; \omega_h \cdot 12h = 2\pi \Rightarrow \omega_h = \frac{\pi}{6} \text{rad/h} \\ \theta_m &= \omega_m t ; \omega_m \cdot 1h = 2\pi \Rightarrow \omega_m = 2\pi \text{rad/h}.\end{aligned}\quad (5.60)$$

Nos interesan solo las soluciones con  $0 \leq \theta_h < 2\pi$ , esto es

$$\theta_m(t_e^{(n)}) = \theta_h(t_e^{(n)}) + 2n\pi ; n = 0, 1, \dots, 10. \quad (5.61)$$

ya que para  $n = 11$ , que corresponde al doceavo cruce, ambas agujas vuelven a encontrarse a las 12 : 00 h. Usando (5.60), las soluciones de la ecuación (5.61) tienen la forma

$$2\pi \frac{\text{rad}}{h} t_e^{(n)} = \frac{\pi \text{rad}}{6} t_e^{(n)} + 2n\pi \Rightarrow t_e^{(n)} = \frac{12}{11} nh ; n = 0, 1, \dots, 10. \quad (5.62)$$

Entonces el primer cruce se produce a los  $12/11h$  de hora,  $t_e^{(1)} = 1.0909 \dots h = 1h 5 \text{ min } 27.27s$ , el segundo encuentro a dos veces este tiempo,  $t_e^{(2)} = 2h 10 \text{ min } 54.54s$ , y así siguiendo hasta llegar al último cruce anterior a las doce,  $t_e^{(10)} = 10h 54 \text{ min } 32.73s$ .

### Problema de encuentro mezclando movimientos rectilíneo y circular

El siguiente ejemplo de encuentro combina un movimiento circular con un movimiento rectilíneo. Se trata de un móvil  $A$  que se mueve sobre un círculo de radio  $R = 1m$ . Elegimos el sistema de coordenadas con origen en el centro del círculo, tal que en  $t = 0$  el móvil se encuentra en  $\vec{r}_A(t = 0) = R\hat{i}$ , definimos  $\theta$  de la manera usual (positivo en sentido antihorario). El móvil tiene una aceleración angular constante  $\gamma_A < 0$  y velocidad angular inicial  $\omega(t = 0) = \omega_0 > 0$ . Tenemos además un segundo móvil  $B$  que se mueve con velocidad constante  $\vec{v} = v_0(\cos(\pi/4)\hat{i} + \sin(\pi/4)\hat{j})$ , con  $v_0 = 2m/s$ , encontrándose en  $t = 0$  en  $\vec{r}_B(t = 0) = -R(\hat{i} + 2\hat{j})$ .

Nos preguntamos cuáles deben ser los valores de  $\gamma_A$  y  $\omega_0$  si exigimos que los puntos de cruce de trayectorias sean puntos de encuentro sin que el móvil  $A$  haya pasado dos veces por el mismo sitio. Nota: esta última condición es necesaria para que el problema tenga solución única; también exige que  $\omega(t) \geq 0$  hasta que se produzcan los encuentros.

Las funciones de movimiento y trayectorias del movimiento rectilíneo uniforme y del movimiento circular con aceleración constante ya han sido estudiadas en detalle, por lo que dejamos como ejercicio comprobar que para el móvil  $A$  el ángulo en función del tiempo viene dado por

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\gamma_A t^2 + \omega_0 t, \quad (5.63)$$

y la trayectoria cumple

$$x_A^2 + y_A^2 = R^2. \quad (5.64)$$

Mientras que para el móvil  $B$  tenemos que su vector posición es

$$\vec{r}_B(t) = \left( \frac{v_0}{\sqrt{2}}t - R \right) \hat{i} + \left( \frac{v_0}{\sqrt{2}}t - 2R \right) \hat{j}, \quad (5.65)$$

y su trayectoria resulta

$$y_B(x_B) = x_B - R. \quad (5.66)$$

Una vez obtenidas las trayectorias, debemos encontrar sus puntos de cruce, que denotaremos como  $(x_c, y_c)$ , exigiendo que cumplan ambas ecuaciones (5.64) y (5.66),

$$x_c^2 + y_c^2 = R^2 ; y_c = x_c - R \quad (5.67)$$

utilizando la expresión de  $y_c$  de la segunda ecuación en la primera obtenemos

$$x_c^2 + (x_c - R)^2 = R^2 \Rightarrow 2x_c^2 - 2Rx_c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{c1} = 0 & ; y_{c1} = -R \\ x_{c2} = R & ; y_{c2} = 0 \end{cases}, \quad (5.68)$$

encontrando dos cruces de trayectoria, como se muestra en la figura 5.20.

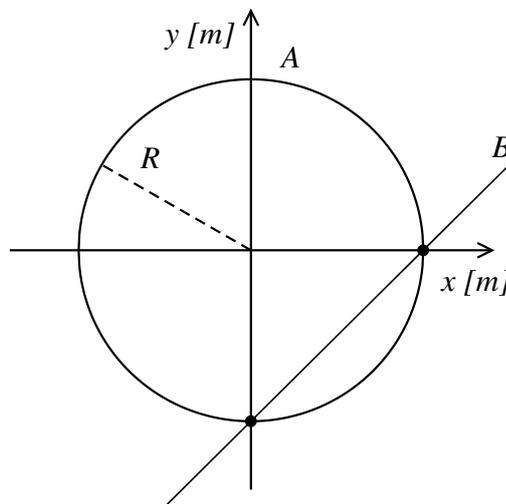


Figura 5.20: Trayectorias de los móviles  $A$  y  $B$  definidas por las ecuaciones (5.64) y (5.66) mostrando con círculos negros sus dos puntos de cruce obtenidos en la ecuación (5.68).

Finalmente debemos obtener los valores de  $\gamma_A$  y  $\omega_0$  tal que los puntos de cruce resulten puntos de encuentro. De la ecuación (5.65) podemos obtener los dos tiempos,  $t_1$  y  $t_2$ , en que el móvil  $B$  pasa por los puntos de cruce, siendo el primero

$$x_B(t_1) = x_{c1} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t_1 - R = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{2}R}{v_0} = \frac{1s}{\sqrt{2}}, \quad (5.69)$$

y para el segundo tiempo obtenemos

$$y_B(t_2) = y_{c2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t_2 - 2R = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2\sqrt{2}R}{v_0} = \sqrt{2}s = 2t_1. \quad (5.70)$$

Las condiciones para que los puntos de cruce de trayectorias sean también puntos de encuentro son  $\vec{r}_A(t_1) = \vec{r}_B(t_1)$  y  $\vec{r}_A(t_2) = \vec{r}_B(t_2)$ . Estas condiciones, junto a la condición de que el móvil A recorra el círculo solo una vez, dan para la función de movimiento angular en estos tiempos los valores  $\theta(t_1) = 3\pi/2$  y  $\theta(t_2) = 2\pi$ , esto es

$$\theta(t_1) = \frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2}\gamma_A t_1^2 + \omega_0 t_1 \quad ; \quad \theta(t_2) = 2\pi = \frac{1}{2}\gamma_A t_2^2 + \omega_0 t_2. \quad (5.71)$$

Las ecuaciones (5.71) forman un conjunto de dos ecuaciones con dos incógnitas:  $\gamma_A$  y  $\omega_0$ , cuya solución es

$$\gamma_A = -2\pi \frac{\text{rad}}{s^2} \quad ; \quad \omega_0 = 2\sqrt{2}\pi \frac{\text{rad}}{s}. \quad (5.72)$$

## SECCIÓN 5.4

# Movimiento periódico

En esta sección trataremos otro tipo de movimiento con características propias: el *movimiento periódico*.

Volvamos al movimiento circular uniforme (MCU), donde el vector posición es

$$\vec{r}(t) = R (\cos(\omega_0 t + \theta_0) \hat{i} + \sin(\omega_0 t + \theta_0) \hat{j}), \quad (5.73)$$

como ya notamos, las funciones trigonométricas  $\cos(\alpha)$  y  $\sin(\alpha)$  tienen período  $2\pi$ , por lo que en un MCU siempre se cumple

$$\vec{r}(t + 2n\pi/\omega_0) = \vec{r}(t), \quad (5.74)$$

lo cual puede comprobarse directamente usando las expresiones  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$  y  $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$ .

La ecuación (5.74) tiene una característica muy particular: el móvil vuelve a pasar por el mismo lugar, con igual velocidad y aceleración a intervalos idénticos de tiempo. Para cumplir esta última condición, el movimiento **no** necesita ser un MCU, pensemos por ejemplo en una pista de scalestrix tan complicada como se nos ocurra, con sus cruces, puentes, curvas, etc. Siempre que mantengamos un autito recorriendo

la pista con  $|\vec{v}(t)| = \text{constante}$ , si tardó un tiempo  $T$  en dar una vuelta estará al tiempo  $t + nT$  en el mismo lugar. Otros ejemplos de movimiento periódico son: el movimiento de un péndulo, los latidos del corazón (asumiendo reposo del individuo, por intervalos de tiempo aunque cortos, largos comparados con su período), el movimiento de la tierra alrededor del Sol (aunque estrictamente es cuasiperiódico), el movimiento de los pistones de un motor en régimen, el movimiento de los electrones en algunos circuitos eléctricos (por ejemplo el denominado *RLC*), etc.

Definiremos un movimiento como *periódico* si existe una constante  $T > 0$ , con unidades de tiempo, tal que  $\forall t$  se cumple

$$\vec{r}(t + T) = \vec{r}(t), \quad (5.75)$$

notemos que esto implica que  $\forall t$  se cumple

$$\vec{r}(t + kT) = \vec{r}(t + nT) \quad \forall k, n \in \mathbb{Z}. \quad (5.76)$$

Derivando una y dos veces la ecuación (5.75) obtenemos

$$\vec{v}(t + T) = \vec{v}(t) ; \quad \vec{a}(t + T) = \vec{a}(t) \quad \forall t. \quad (5.77)$$

Finalmente definimos la frecuencia  $f$  como la cantidad de períodos en una unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (5.78)$$

Si bien las unidades de frecuencia son  $[f] = [1/t]$ , notemos que la frecuencia es la cantidad de vueltas que da el móvil en una unidad de tiempo, por lo que es muy común expresarla como revoluciones (vueltas)  $\times [t]$ . Nos resulta muy familiar esta medida en motores, por ejemplo, el tacómetro de un automóvil mide *revoluciones  $\times$  minuto*.

Volvamos al ejemplo del MCU, la ecuación (5.74) nos dice que en este caso

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow f = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (5.79)$$

Otro ejemplo conocido de movimiento periódico, esta vez unidimensional, es el oscilador armónico que vimos en la sección 3.6, ecuaciones (3.50) a (3.55) y figura 3.3. La función de movimiento para ese ejemplo es

$$x(t) = 1 \text{ m sen}(2t/s), \quad (5.80)$$

que por tratarse de una función seno, corresponde a un movimiento periódico con  $T = \pi \text{ s}$ .



# 6

## Movimiento Relativo

Como repetimos varias veces, los cuerpos están moviéndose en el espacio **independientemente** de nuestro interés por describir dicho movimiento. Y como dicen por ahí, si hay dos personas, habrá al menos dos opiniones. Entonces es muy posible que para describir el movimiento de un dado cuerpo, dos personas que lo observan utilicen dos sistemas de coordenadas diferentes. Como si esto fuera poco, las personas pueden estar en distintos lugares, y además moviéndose a distintas velocidades. Veamos un ejemplo, la descripción del movimiento de una pelota que cae de las manos de un niño que camina por un vagón de un tren en marcha será distinta según la mire el niño, una persona que está sentada en un asiento del vagón, o una vaca que pasta en el campo.

Además, debemos tener en cuenta que un elemento clave de la investigación científica es la **validación de los resultados**: mis resultados **deben** poder ser corroborados por otras personas. Para esto, necesitamos saber describir **un mismo móvil** desde **diferentes sistemas de coordenadas** y relacionar las funciones de movimiento encontradas en cada uno. Es decir, para que la descripción de un movimiento cualquiera sea objetiva, además de dar la función de movimiento, es necesario indicar **unívocamente** el sistema de referencia utilizado. Por otra parte, debe ser posible dar la descripción del movimiento del mismo móvil desde otro sistema de referencia, **siempre y cuando se conozca el movimiento de un sistema de coordenadas respecto a otro**.

### SECCIÓN 6.1

## Cambio de coordenadas

Analicemos qué relación existe entre las coordenadas correspondientes a dos sistemas de referencia diferentes denominados  $A$  y  $B$ . Solo analizaremos el caso en que los sistemas de referencia son ortogonales y tienen sus ejes paralelos entre sí con igual sentido positivo. Las coordenadas de un punto  $P$  del plano en los dos sistemas serán  $(x_{PA}, y_{PA})$  y  $(x_{PB}, y_{PB})$ , respectivamente.

El origen del sistema  $B$ , visto desde el sistema  $A$ , está determinado por el vector posición  $\vec{r}_{BA}$  (léase posición de  $B$  con respecto a  $A$ ) mientras que el origen del sistema  $A$  respecto del sistema  $B$  está dado por  $\vec{r}_{AB}$  (léase posición de  $A$  con respecto a  $B$ ). Queda claro de la figura 6.1 que  $\vec{r}_{BA} = -\vec{r}_{AB}$ ; además se observa que se verifican las siguientes relaciones vectoriales:

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} - \vec{r}_{AB} \quad ; \quad \vec{r}_{PB} = \vec{r}_{PA} - \vec{r}_{BA} . \quad (6.1)$$

Notar que en el lado izquierdo de cada igualdad tenemos un vector referido a un sistema de coordenadas y del derecho dos vectores referidos al otro sistema. Además, resulta arbitrario a qué sistema denominamos  $A$  y a cuál  $B$ , así vemos que, si en la ecuación de la izquierda cambiamos  $A \leftrightarrow B$  obtenemos la ecuación

de la derecha y si lo hacemos en la de la derecha obtenemos la de la izquierda.

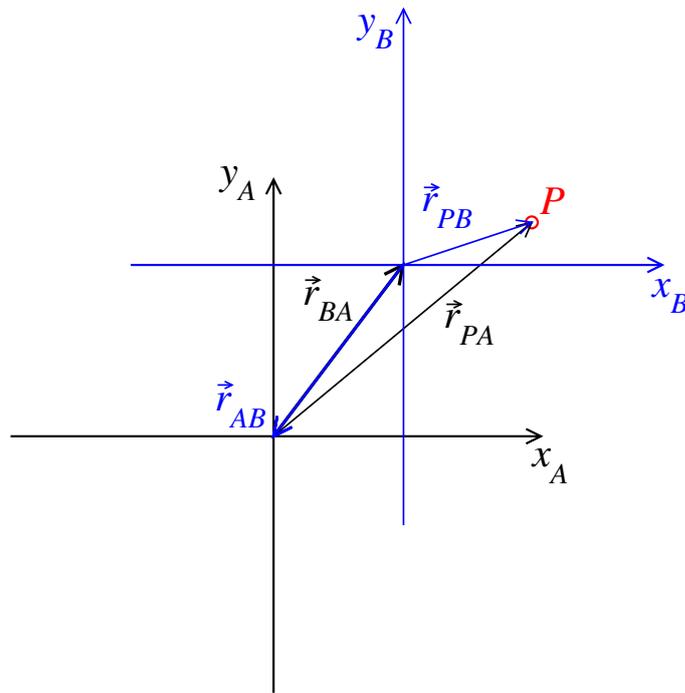


Figura 6.1: Posición del punto  $P$  visto desde dos sistemas de coordenadas  $A$  y  $B$ . Se muestran también los vectores del origen de coordenadas de cada sistema respecto al otro respetando el color negro para  $A$  y azul para  $B$ .

Las ecuaciones (6.1) nos permiten encontrar la posición de un objeto (el punto  $P$ ) con respecto a un sistema de coordenadas siempre que conozcamos su posición con respecto a otro sistema y la posición relativa entre ambos sistemas.

Veamos un ejemplo: un dado punto  $P$ , cuyo vector posición en un sistema de coordenadas  $A$  es  $\vec{r}_{PA} = -1m\hat{i} + 2m\hat{j}$  (como solo consideramos sistemas con ejes paralelos entre sí, no necesitamos subíndices en los versores). Un segundo sistema de coordenadas  $B$  tiene su origen respecto a  $A$  en  $\vec{r}_{BA} = 3m\hat{i} + 4m\hat{j}$ , ¿cuál es el vector posición de  $P$  en el sistema  $B$ ,  $\vec{r}_{PB}$ ? La segunda ecuación (6.1) nos dice que

$$\vec{r}_{PB} = \vec{r}_{PA} - \vec{r}_{BA} = -1m\hat{i} + 2m\hat{j} - (3m\hat{i} + 4m\hat{j}) = -4m\hat{i} - 2m\hat{j}. \quad (6.2)$$

Los sistemas de coordenadas y los vectores involucrados se muestran en la figura 6.2.

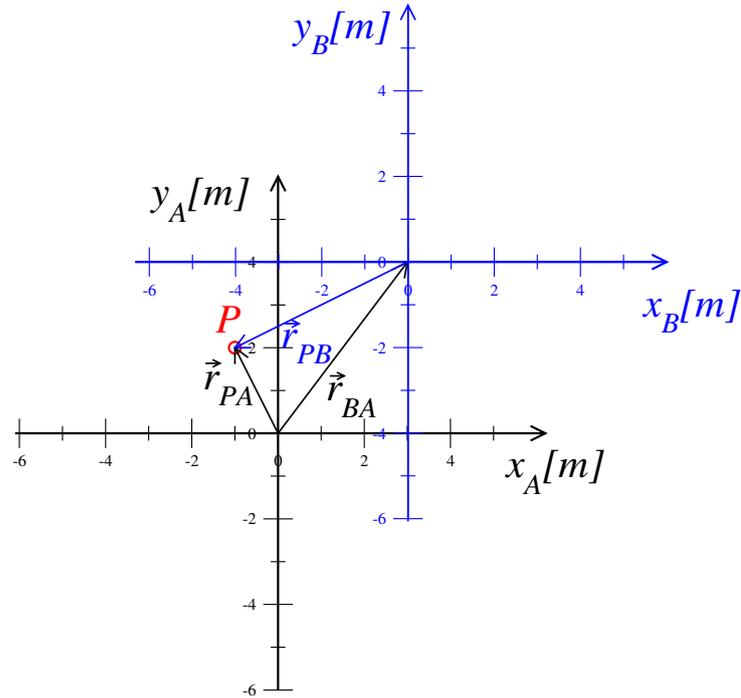


Figura 6.2: Posición del punto  $P$  visto desde dos sistemas de coordenadas  $A$  y  $B$ .

En general, la situación descrita en la figura 6.1 podría evolucionar en el tiempo, es decir, dicha figura podría pensarse como una fotografía en un instante particular. La película completa sería la sucesión de fotografías para distintos valores del tiempo, y debemos incluir la dependencia temporal en las ecuaciones (6.1),

$$\vec{r}_{PA}(t) = \vec{r}_{PB}(t) - \vec{r}_{AB}(t) \quad ; \quad \vec{r}_{PB}(t) = \vec{r}_{PA}(t) - \vec{r}_{BA}(t). \quad (6.3)$$

Estas ecuaciones, que relacionan coordenadas de un punto respecto a dos sistemas de coordenadas se denominan *transformaciones de coordenadas*.

Analicemos los siguientes casos:

- a) Supongamos que los sistemas  $A$  y  $B$  no se mueven uno respecto a otro. Entonces las relaciones son:

$$\vec{r}_{PA}(t) = \vec{r}_{PB}(t) - \vec{r}_{AB} \quad ; \quad \vec{r}_{PB}(t) = \vec{r}_{PA}(t) - \vec{r}_{BA}, \quad (6.4)$$

donde los vectores  $\vec{r}_{AB} = -\vec{r}_{BA}$  son constantes. La velocidad del cuerpo vista desde cada uno de los sistemas puede obtenerse derivando el vector posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v}_{PB} = \frac{d\vec{r}_{PB}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{PA}(t) - \vec{r}_{BA}) = \frac{d\vec{r}_{PA}(t)}{dt} = \vec{v}_{PA} \quad (6.5)$$

esto es, si dos sistemas están en reposo uno respecto del otro, se cumple que la velocidad de cualquier móvil respecto a ambos sistemas es la misma,  $\vec{v}_{PB} = \vec{v}_{PA}$ .

- b) Supongamos ahora que los sistemas están en movimiento uno respecto del otro. En este caso, la derivación de la ecuación (6.3) nos lleva a una versión de las ecuaciones (6.5) donde  $\vec{r}_{AB}$  y  $\vec{r}_{BA}$  son

ahora funciones del tiempo:

$$\vec{v}_{PB} = \frac{d\vec{r}_{PB}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PA}(t)}{dt} - \frac{d\vec{r}_{BA}(t)}{dt} \quad \text{y} \quad \vec{v}_{PA} = \frac{d\vec{r}_{PA}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PB}(t)}{dt} - \frac{d\vec{r}_{AB}(t)}{dt}, \quad (6.6)$$

es decir,

$$\vec{v}_{PB} = \vec{v}_{PA} - \vec{v}_{BA} \quad \text{o bien} \quad \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} - \vec{v}_{AB}, \quad (6.7)$$

donde  $\vec{v}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$  y  $\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$  son las velocidades de  $A$  respecto de  $B$  y de  $B$  respecto de  $A$ , respectivamente.

Estas relaciones (6.7), que vinculan las velocidades de un cuerpo observadas por dos sistemas diferentes que se mueven uno respecto del otro suelen denominarse *Teorema de adición de velocidades*.

Las transformaciones de coordenadas que asumen que la velocidad relativa entre ambos sistemas es constante, es decir  $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA} = \text{constante}$ ; por lo tanto  $\vec{r}_{BA}(t) = \vec{v}_{BA} t + \vec{r}_{BA}(0)$  con lo cual la relación entre las coordenadas del cuerpo descriptas por los dos sistemas puede obtenerse sustituyendo esta expresión en la ecuación (6.3):

$$\vec{r}_{PA}(t) = \vec{r}_{PB}(t) - \vec{v}_{AB} t - \vec{r}_{AB}(0) \quad (6.8)$$

se denominan *transformaciones de Galileo*, y jugarán un rol importante cuando estudiemos las leyes de la dinámica.

### Cambio de coordenadas: Otra Notación

Una notación muy usada para cambio de coordenadas es definir un sistema “no primado”  $S$  con origen  $O \Rightarrow \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ ;  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ ; etc. y un sistema “primado”  $S'$  con origen  $O' \Rightarrow \vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$ ;  $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt$ ; etc. Nuevamente, notar que no ponemos primas a los versores base porque los ejes coordenados de  $S$  y  $S'$  son paralelos, en el caso mas general (que no veremos) los versores de  $S'$  también llevarán primas. Así, si llamamos  $S$  al sistema  $A$ , y  $S'$  al sistema  $B$ , las ecuaciones (6.3) toman la forma,

$$\vec{r}'_P = \vec{r}_P - \vec{r}_{O'} \quad ; \quad \vec{r}_P = \vec{r}'_P + \vec{r}_{O'} \quad (6.9)$$

y el teorema de adición de velocidades, ecuaciones (6.7), toma la forma

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_{O'}(t) \quad ; \quad \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{v}_{O'}(t) \quad (6.10)$$

Esta notación es de hecho la mas usada en la literatura, y la encontrarán en gran cantidad de libros y páginas que puedan consultar.

## SECCIÓN 6.2

### Ejemplos

Analicemos ahora algunos ejemplos particulares. En primer lugar, supongamos que en una ciudad está lloviendo y no hay viento a nivel de superficie. Una persona que está en una parada de ómnibus verá que las gotas caen verticalmente, pero ¿cómo las verá caer otra persona que viaja en un automóvil?

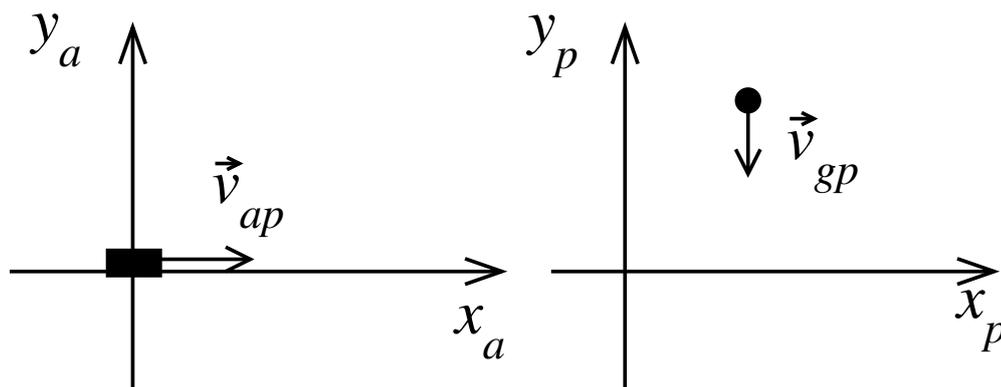


Figura 6.3: Sistema de coordenadas  $p$  fijo en la parada de ómnibus y  $a$  fijo al auto y las velocidades de la gota de lluvia  $g$  (círculo) y el automóvil (rectángulo) respecto al sistema de coordenadas  $p$ .

Los dos sistemas de referencia mostrados en la figura 6.3 son la persona en la parada de ómnibus ( $A \rightarrow p$ ) y la persona que viaja en el automóvil ( $B \rightarrow a$ ), donde se ha reemplazado los nombres de los sistemas de coordenadas  $A$  y  $B$  genéricos por las iniciales propias de los elementos del problema para mayor claridad. La velocidad de la gota vista desde el sistema  $p$  será  $\vec{v}_{gp} = v_{gp}\hat{j}$  (de acuerdo al sistema de coordenadas graficado  $v_{gp} < 0$ ), mientras que la velocidad del auto respecto del sistema  $p$  será  $\vec{v}_{ap} = v_{ap}\hat{i}$  (en nuestro caso será  $v_{ap} > 0$ ). Utilizando la expresión que relaciona la velocidad vista por ambos sistemas dada en la ecuación (6.7) podemos obtener cuál es la velocidad de la gota vista por la persona que viaja en el auto:

$$\vec{v}_{ga} = \vec{v}_{gp} - \vec{v}_{ap} = v_{gp}\hat{j} - v_{ap}\hat{i} \quad (6.11)$$

Si damos valores razonables a las velocidades, por ejemplo  $v_{gp} = -15 \text{ km/h} = \text{constante}$  (que es realista debido a la presencia del aire), mientras que para la velocidad del auto respecto de la parada asumimos  $\vec{v}_{ap} = v_{ap}\hat{i} = 30 \text{ km/h}\hat{i}$ , la ecuación (6.11) nos dice que  $\vec{v}_{ga} = -30 \text{ km/h}\hat{i} - 15 \text{ km/h}\hat{j}$ , mostrando que la velocidad de la gota respecto del automóvil en marcha está orientada de manera oblicua, siguiendo la trayectoria típicamente observada a través de las ventanillas laterales de un auto, como se ve en la figura 6.4. Así, una persona que va en el auto ve caer la gota con un ángulo dado por  $\theta = \arctan(v_{ga,y}/v_{ga,x}) = \arctan(1/2) \Rightarrow \theta = 206,6^\circ$ . La calculadora nos da el valor  $26,6^\circ$ , que es el ángulo que forman  $\vec{v}_{ga}$  con  $\vec{v}_{pa}$ , pero si deseamos obtener el ángulo  $\theta$  que forma  $\vec{v}_{ga}$  con el eje  $x$  debemos sumarle a este resultado  $180^\circ$ , ya que el **vector apunta hacia el tercer cuadrante**.

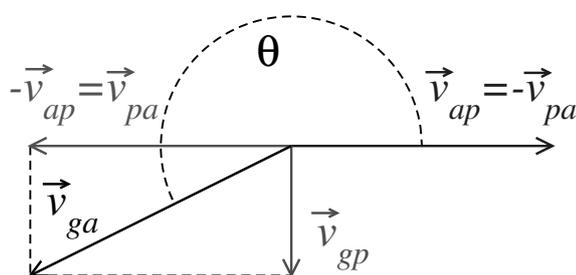


Figura 6.4: Esquema de todos los vectores velocidad involucrados en la caída de la gota de lluvia.

Veamos otro ejemplo. Un vuelo debe pasar por la ciudad de Rosario y dirigirse a la ciudad de Santa Fe (situada justo al norte de Rosario). El piloto fija el rumbo hacia el norte mientras el avión vuela a una velocidad de módulo  $v_{na}$  (léase velocidad de la nave respecto del aire). El informe meteorológico informa que hay viento en dirección oeste-este cuya velocidad es de módulo  $v_{at}$  (velocidad del aire respecto de tierra). ¿Podrá el piloto lograr su objetivo?

Como vemos aquí, los datos están referenciados a dos sistemas diferentes. La posición de las ciudades y la velocidad del viento están dados con respecto a un sistema fijo a tierra; mientras que el módulo y la dirección de la velocidad del avión están referenciados a un sistema fijo al aire. Antes que nada conviene establecer la diferencia entre el *rumbo* y la *dirección de viaje*. El rumbo es la dirección hacia adonde apunta el avión, o el barco, o el móvil que sea, mientras que la dirección de viaje es la dirección que sigue la trayectoria de la nave respecto de tierra. En este problema se verá claramente que ambas direcciones no tienen por qué coincidir. Consideremos el diagrama de la figura 6.5. La situación esquematizada muestra al avión sobrevolando la ciudad de Rosario y apuntando hacia el norte, es decir, con el rumbo fijado por el piloto como se indicó anteriormente.

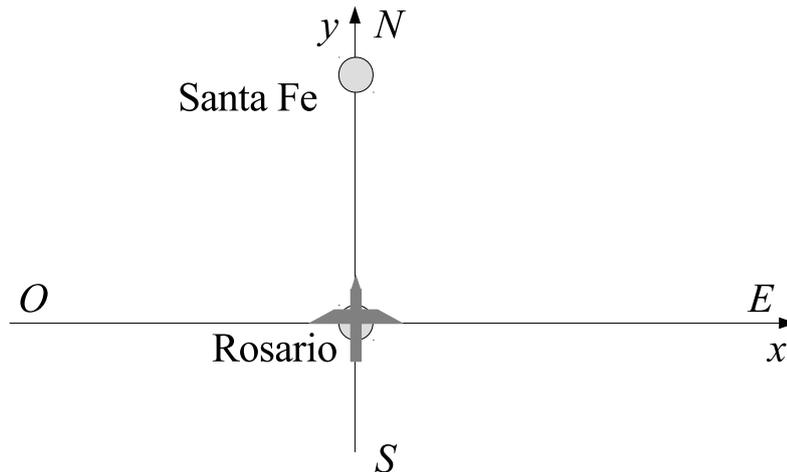


Figura 6.5: Diagrama de un avión sobrevolando Rosario y apuntando a la ciudad de Santa Fe. En el sistema de coordenadas fijo a tierra se indican los puntos cardinales.

Si bien en la figura 6.5 solo se muestra el sistema de coordenadas fijo a tierra, es necesario considerar otro sistema respecto del aire, que es paralelo al anterior, pero “se lo lleva el viento” hacia el este. Utilizando estos sistemas podemos escribir:

- Velocidad de la nave con respecto al aire:  $\vec{v}_{na} = v_{na}\hat{j}$ .
- Velocidad del viento (velocidad del aire respecto a tierra):  $\vec{v}_{at} = v_{at}\hat{i}$ .

Utilizando la expresión que relaciona la velocidad de un cuerpo visto por dos sistemas diferentes de coordenadas, ecuación (6.7), podemos escribir

$$\vec{v}_{nt} = \vec{v}_{na} - \vec{v}_{ta} = \vec{v}_{na} + \vec{v}_{at} \quad (6.12)$$

reemplazando obtenemos

$$\vec{v}_{nt} = v_{na}\hat{j} + v_{at}\hat{i} \quad (6.13)$$

Como vemos, el vector velocidad del avión visto desde un sistema fijo a tierra tiene componentes en las direcciones de  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ . Pero como Rosario y Santa Fe están en la dirección sur-norte, para llegar a Santa Fe el vector velocidad del avión solo debería tener componente en la dirección de  $\hat{j}$ . Lo que ocurre es que si el piloto pone dirección al norte los motores lo mueven en esta dirección pero el aire lo hará moverse también en la dirección del viento. Considerando esto podemos prever que el avión no llegará a Santa Fe, sino más bien, a algún lugar de la provincia de Entre Ríos.

Ahora nos preguntamos qué rumbo tendría que fijar el piloto para poder llegar efectivamente a Santa Fe. Es evidente que para viajar hacia el norte debe compensar el arrastre del viento y por lo tanto la

velocidad del avión con respecto al aire, cuya dirección no es otra cosa que el rumbo, deberá tener una componente horizontal como se muestra en la figura 6.6.

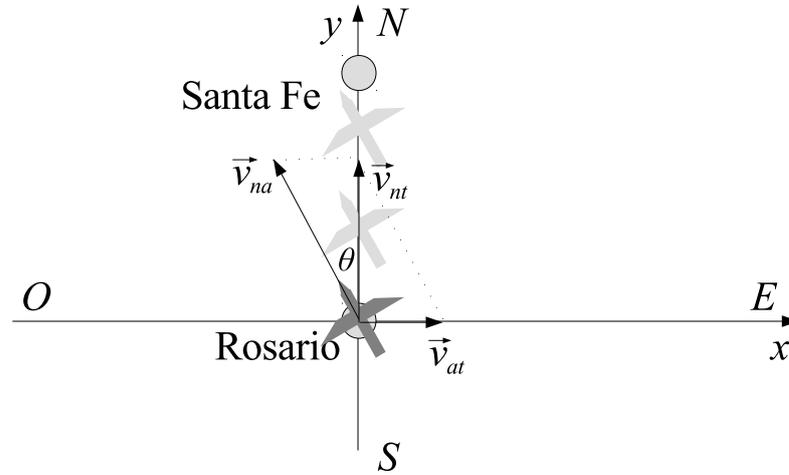


Figura 6.6: Diagrama de un avión sobrevolando Rosario con rumbo noroeste. En el sistema de coordenadas fijo a tierra se indican los puntos cardinales. Se ilustran, en un tono más claro, las posiciones que irá ocupando el avión durante el transcurso del vuelo. Además se muestran los vectores velocidad relevantes en el problema.

Para esta nueva situación podemos escribir los vectores velocidad como:

- Velocidad de la nave con respecto al aire:  $\vec{v}_{na} = -v_{na} \text{sen}(\theta)\hat{i} + v_{na} \text{cos}(\theta)\hat{j}$ .
- Velocidad del aire respecto de tierra:  $\vec{v}_{at} = v_{at}\hat{i}$ .

Sabemos que  $\vec{v}_{nt} = \vec{v}_{na} + \vec{v}_{at}$  y reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{v}_{nt} &= -v_{na} \text{sen}(\theta)\hat{i} + v_{na} \text{cos}(\theta)\hat{j} + v_{at}\hat{i} \\ &= [v_{at} - v_{na} \text{sen}(\theta)]\hat{i} + v_{na} \text{cos}(\theta)\hat{j}.\end{aligned}\quad (6.14)$$

Para que el avión viaje hacia el norte su velocidad vista por una persona parada en tierra solo debe tener componente en la dirección de  $\hat{j}$ , y por lo tanto debería ser  $\vec{v}_{nt} = v_{nt}\hat{j}$ . Igualando ambos vectores obtenemos

$$v_{nt}\hat{j} = [v_{at} - v_{na} \text{sen}(\theta)]\hat{i} + v_{na} \text{cos}(\theta)\hat{j}, \quad (6.15)$$

igualando componente a componente resulta:

$$0 = v_{at} - v_{na} \text{sen}(\theta) \quad \text{y} \quad v_{nt} = v_{na} \text{cos}(\theta). \quad (6.16)$$

En este sistema de ecuaciones las incógnitas son  $v_{nt}$  (módulo de la velocidad de la nave respecto a tierra) y  $\theta$ , el ángulo que debe formar la velocidad del avión respecto al aire (rumbo) con la dirección sur-norte. Resolviendo obtenemos

$$\text{sen}(\theta) = \frac{v_{at}}{v_{na}} \quad \text{y} \quad v_{nt} = v_{na} \text{cos}(\theta). \quad (6.17)$$

Resumiendo, el avión debe volar con rumbo noroeste formando un ángulo  $\theta$  con respecto a la dirección norte-sur, dado por la primera de las ecuaciones (6.17). El avión se mantendrá apuntando según ese

ángulo, desplazándose paralelo a sí mismo a lo largo de la dirección sur-norte con una velocidad respecto de tierra dada por la segunda de las ecuaciones (6.17) (ver figura 6.6).

# 7

## Movimiento en Tres Dimensiones

En los capítulos anteriores hemos descrito el movimiento de cuerpos puntuales que se mueven sobre una recta (una dimensión o  $1-D$ ) y sobre un plano (dos dimensiones o  $2-D$ ). Pero vivimos en un espacio tridimensional, y nuestro estudio de la cinemática de cuerpos puntuales no estaría completo si no sabemos describir movimientos en tres dimensiones (o  $3-D$ ). De manera similar a lo realizado para la descripción de los movimientos  $1-D$  y  $2-D$ , lo primero que debemos hacer es determinar de manera unívoca la posición de un cuerpo en el espacio tridimensional.

### SECCIÓN 7.1

## Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales

Este sistema es la generalización directa del que utilizamos para definir la posición de un cuerpo en el plano. Así como al pasar de  $1-D$  a  $2-D$  agregamos la coordenada  $y$  y al sistema cartesiano, al pasar a  $3-D$  solo tenemos que agregar otra coordenada, esto es, un nuevo eje, perpendicular a los dos que definen el plano, en el cual se especifica la altura a la que se encuentra el cuerpo respecto del plano de referencia. A esta nueva coordenada la llamaremos  $z$ . Por lo tanto, para definir la posición de un punto en el espacio tridimensional deberemos especificar una terna de valores, que llamaremos  $x, y, z$ , que corresponden a las tres coordenadas cartesianas del cuerpo en el espacio tridimensional. Para poder hacer un gráfico  $3-D$  en el plano, nos vemos obligados a usar perspectiva. La convención usual es dibujar el eje  $z$  hacia arriba de nuestra hoja, el eje  $y$  de manera horizontal (como dibujamos los ejes  $x-y$  en el plano), y el eje  $x$  en perspectiva, “saliendo hacia afuera” de nuestra hoja, como se observa en la figura 7.1.

La distancia entre dos puntos, independientemente de la dimensión del espacio en que estemos trabajando, se define como la longitud del segmento que los une. Así, la distancia  $d_{OP}$  de un punto  $P$  al origen es dada por la longitud del segmento  $\overline{OP}$  mostrado en la figura 7.1. Este es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados  $\sqrt{x_P^2 + y_P^2}$  y  $|z_P|$ , por lo que la distancia del punto  $P$  al origen de coordenadas se obtiene, al igual que en  $2-D$ , aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d_{OP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}. \quad (7.1)$$

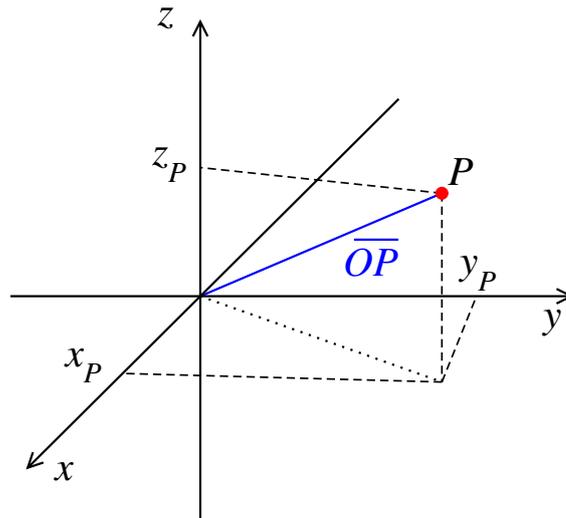


Figura 7.1: Un punto  $P$  (en rojo) y el segmento  $\overline{OP}$  (en azul) en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en tres dimensiones. Todos los ángulos entre ejes son de  $90^\circ$  y el eje  $x$ , que es perpendicular al papel, se grafica utilizando perspectiva. La línea de puntos se halla en el plano  $x - y$ , y su longitud es  $\sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ .

También podemos usar el teorema de Pitágoras para el cálculo de la distancia entre cualquier par de puntos en el espacio,  $P_1$  y  $P_2$ , de coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  respectivamente,

$$d_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (7.2)$$

Esta ecuación para la distancia en tres dimensiones es claramente la extensión de la fórmula para la distancia que habíamos utilizado en dos dimensiones mediante la ecuación (4.2). Por otra parte, puede verse que la fórmula de la distancia de un punto al origen, ecuación (7.1), es un caso particular de la distancia entre dos puntos dada en la ecuación (7.2).

## SECCIÓN 7.2

# Vector posición y función vectorial de movimiento

Podemos identificar un punto  $P$  del espacio tridimensional, de coordenadas  $(x_P, y_P, z_P)$ , mediante un vector  $\vec{r}$  que tenga su punto de aplicación en el origen del sistema de coordenadas y su extremo en  $P$ , como muestra la figura 7.2. Como ahora tenemos tres ejes coordenados, además de los versores  $\hat{i}$  en la dirección  $x$ , y  $\hat{j}$  en la dirección  $y$ , debemos agregar un tercer versor en la dirección  $z$ , que, por supuesto, denominaremos  $\hat{k}$ , y es ortogonal a los otros versores base,  $\hat{i} \cdot \hat{k} = 0$ ;  $\hat{j} \cdot \hat{k} = 0$ .

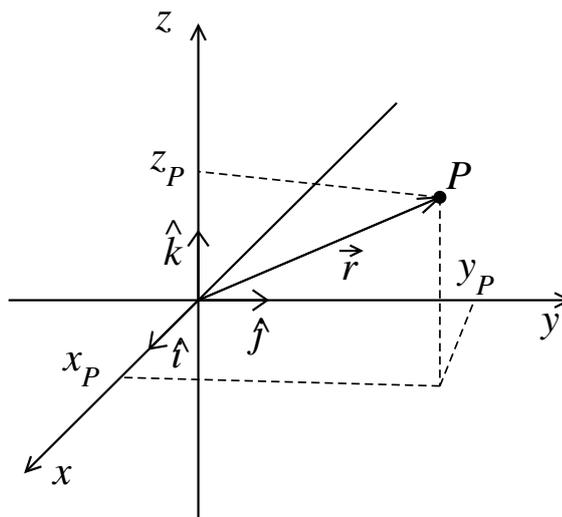


Figura 7.2: Localización de un punto  $P$  del espacio tridimensional mediante su vector posición.

Las componentes de este vector  $\vec{r}$  son las coordenadas cartesianas de  $P$ ; es decir,

$$r_x = x_P, \quad r_y = y_P \quad \text{y} \quad r_z = z_P, \quad (7.3)$$

por lo tanto, el vector  $\vec{r}$  que caracteriza el punto  $P$  se escribe en un sistema cartesiano 3 –  $D$  como

$$\vec{r} = x_P \hat{i} + y_P \hat{j} + z_P \hat{k}. \quad (7.4)$$

Cuando identificamos con este vector  $\vec{r}$  el punto del espacio donde se encuentra ubicado el cuerpo cuyo movimiento estamos describiendo, a este vector lo denominamos *vector posición*.

En 1 –  $D$ , basados en la información de la tabla 1.1, definimos la función de movimiento  $x(t)$ . Luego vimos movimientos en el plano descritos en un sistema cartesiano. En este caso necesitamos una segunda coordenada, y por lo tanto agregar una columna a la tabla 1.1 para obtener la tabla 4.1 que nos lleva a definir la correspondiente función de movimiento  $y(t)$ . Es claro que en 3 –  $D$  debemos agregar a esta última tabla una columna más, correspondiente a la coordenada  $z$ , como se muestra en la tabla 7.1.

$t$	$x$	$y$	$z$
$t_1$	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$t_2$	$x_2$	$y_2$	$z_2$
$t_3$	$x_3$	$y_3$	$z_3$
$t_4$	$x_4$	$y_4$	$z_4$
$t_5$	$x_5$	$y_5$	$z_5$
$t_6$	$x_6$	$y_6$	$z_6$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Tabla 7.1: Tiempos y posiciones registradas para un móvil en el espacio 3 –  $D$ .

Al igual que en 1 –  $D$  y 2 –  $D$ , asumiremos, a partir de postular la continuidad del movimiento y la velocidad de los cuerpos, que las tres funciones obtenidas,  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ , son continuamente diferenciables.

Como hemos visto, la posición de un punto en el espacio puede ser dada por un vector denominado *vector posición del punto*; si el cuerpo se mueve, su vector posición variará con el tiempo y, por lo tanto, en cada instante tendremos un vector posición. Es decir que el vector posición será una función del tiempo

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (7.5)$$

Si referimos el vector posición a una base ortogonal coincidente con el sistema de coordenadas cartesianas ortogonal, podemos escribir

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}. \quad (7.6)$$

Por lo tanto, podemos describir el movimiento de un cuerpo en el espacio por medio de la *función vectorial de movimiento*  $\vec{r}(t)$ , cuyas componentes cartesianas serán las funciones de movimiento  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ .

### SECCIÓN 7.3

## Velocidad y aceleración

Como veremos, esta sección es similar a lo desarrollado en la sección 4.4 para movimientos en el plano. La principal diferencia en las definiciones de velocidad, aceleración, etc. radica en el **número de componentes de los vectores** (3 en lugar de 2).

La definición de velocidad instantánea es formalmente la misma que en dos dimensiones, ecuación (4.92), sólo que ahora los vectores involucrados tienen tres componentes,

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (7.7)$$

El vector de la derecha de la igualdad, expresado en un sistema cartesiano es

$$\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}, \quad (7.8)$$

y expresando el vector velocidad en términos de sus componentes cartesianas,  $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$ , identificamos

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}, \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad v_z(t) = \frac{dz}{dt}. \quad (7.9)$$

Aquí vemos claramente que la ecuación (7.7) es válida en cualquier dimensión, mientras que las ecuaciones (7.8) y (7.9) se refieren a vectores con tres componentes, y son válidas sólo en  $3 - D$ .

Al igual que en el caso bidimensional, la trayectoria de un móvil es el conjunto de puntos que durante el movimiento coincidieron con el vector posición, es decir, una fotografía del camino seguido por el móvil que, sin embargo, no permite conocer en qué forma fue recorrido. Daremos ejemplos más adelante, volvamos ahora al análisis de la velocidad y la aceleración.

En el caso  $2 - D$ , el vector velocidad de un móvil resulta tangente a su trayectoria. Si bien no repetiremos aquí la deducción hecha en el punto 4.4.4 (basada en una construcción gráfica, figuras 4.44 y 4.45, que resultaría mucho más difícil de visualizar en  $3 - D$ ), nos debe quedar claro que, independientemente de la dimensión del espacio en el que el cuerpo se mueva, **el vector velocidad es tangente a la trayectoria**.

También la definición del vector aceleración es formalmente independiente de la dimensión espacial,

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (7.10)$$

Si el vector posición  $\vec{r}$  está expresado en términos de sus coordenadas cartesianas,  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ , resulta

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}. \quad (7.11)$$

Puesto que podemos expresar un vector como un versor multiplicado por un escalar, en el caso particular de la velocidad podemos escribir  $\vec{v}(t) = v(t)\hat{v}(t)$ , donde  $v(t) = |\vec{v}(t)|$  y  $\hat{v}(t) = \vec{v}(t)/|\vec{v}(t)|$  es un versor tangente a la trayectoria. Tanto el módulo como la dirección del vector velocidad pueden variar con el tiempo; entonces tenemos:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [v(t)\hat{v}(t)], \quad (7.12)$$

y aplicando la regla de derivación del producto de funciones obtenemos

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{v}(t) + v(t)\frac{d\hat{v}(t)}{dt}. \quad (7.13)$$

Vemos que esta expresión de la aceleración contiene las dos componentes que ya hemos identificado en el caso de movimiento bidimensional.

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t), \quad (7.14)$$

donde la aceleración tangencial es

$$\vec{a}_t(t) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{v}(t), \quad (7.15)$$

y la aceleración normal

$$\vec{a}_n(t) = v(t)\frac{d\hat{v}(t)}{dt}. \quad (7.16)$$

Entonces, al igual que en dos dimensiones, podemos expresar el vector aceleración como suma de dos componentes cuyos efectos sobre el vector velocidad están bien diferenciados, la *aceleración tangencial*,  $\vec{a}_t$ , responsable de modificar el módulo del vector velocidad y la *aceleración normal*,  $\vec{a}_n$ , responsable de modificar la dirección del vector velocidad. Obviamente, estas dos componentes y el vector aceleración están en un mismo plano, pero además, como  $\vec{a}_t$  es paralela al vector velocidad, podemos ver que las dos componentes se encuentran sobre el plano formado por los vectores velocidad y aceleración.

## SECCIÓN 7.4

# Trayectoria

Mientras que para el caso de movimientos en el plano la trayectoria puede expresarse por una ecuación que relacione las coordenadas  $x$  y  $y$ , por ejemplo,  $y = x + b$  o  $x^2 + y^2 = R^2$ , para movimientos en dimensión tres se debe incluir tres coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , por lo que, en general, necesitaremos dos ecuaciones para expresar la trayectoria, por ejemplo  $y(x)$  y  $z(x)$ . Otra forma algo más indirecta de dar la trayectoria es a través de tres ecuaciones en términos de un parámetro común, por ejemplo el tiempo  $t$ , esto es, construyendo una tabla como la tabla 7.1 con las tres funciones de movimiento  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ .

Así como todo movimiento rectilíneo podemos describirlo utilizando un sistema de coordenadas uni-

dimensional, un móvil que se mueve en un plano se puede describir utilizando un sistema de coordenadas bidimensional. Por ejemplo, el caso de un proyectil disparado desde el suelo (origen de coordenadas) formando un ángulo de elevación de  $\alpha = 60^\circ$  y un ángulo  $\beta = 45^\circ$  respecto del plano  $x - z$  (ver figura 7.3).

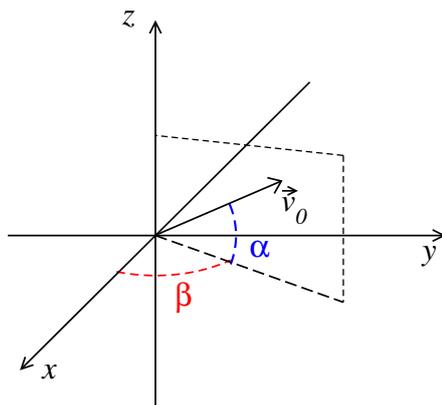


Figura 7.3: Tiro parabólico en el espacio tridimensional, cuya velocidad inicial forma un ángulo  $\alpha$  con el plano  $x - y$  (suelo), y cuya proyección en dicho plano forma un ángulo  $\beta$  con el eje  $x$ . El movimiento ocurre en el plano que forma un ángulo  $\beta$  con el plano  $x - z$ .

El movimiento en realidad se producirá en un plano, indicado en la figura, que contiene al eje  $z$  y que corta perpendicularmente el plano  $x - y$ . En este caso basta cambiar nuestro sistema de coordenadas adecuadamente para que el movimiento pueda describirse usando sólo dos dimensiones. Sin embargo, la situación no siempre es así, de la misma manera que un problema de encuentro de dos movimientos rectilíneos no paralelos no puede tratarse utilizando un sistema unidimensional, el problema de encuentro de dos movimientos planos no coplanares debe tratarse en un sistema tridimensional, como veremos en el ejemplo de la próxima sección. Además, un sinnúmero de movimientos son intrínsecamente tridimensionales y no pueden reducirse al caso bidimensional. Pensemos por ejemplo en el vuelo de una mosca en una habitación, o en el movimiento de un pez en el agua. La trayectoria de estos y otros movimientos resulta más difícil de describir que en el caso bidimensional.

Veamos un ejemplo concreto: el de un movimiento helicoidal (de tirabuzón) dado por las ecuaciones

$$x(t) = R \cos(\omega t) \quad ; \quad y(t) = R \sin(\omega t) \quad ; \quad z(t) = \alpha t, \quad (7.17)$$

donde  $R$  es el radio del círculo que proyecta el móvil en el plano  $x - y$ ,  $\omega$  su velocidad angular y  $\alpha$  es la velocidad de avance en  $z$ . Estas ecuaciones pueden describir el movimiento de un corcho que flota sobre un tanque que se está desagotando o el de una partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme.

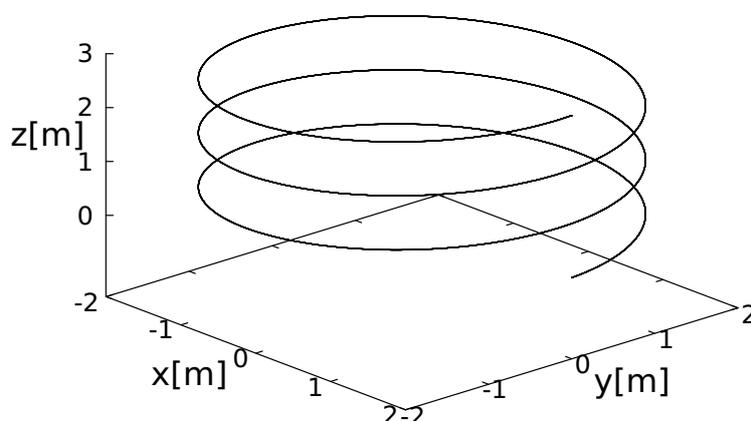


Figura 7.4: Trayectoria helicoidal, ecuaciones (7.19), para  $0 \leq t \leq 3$  s.

Las ecuaciones (7.17) son las funciones de movimiento, o bien las expresiones paramétricas de la trayectoria dadas en términos del parámetro  $t$ . Notemos que en este caso, la relación lineal entre  $z$  y  $t$  nos permite escribir las funciones  $x(z)$  e  $y(z)$  que describen la trayectoria 3-D del móvil, que es mostrada en la figura 7.4. Si bien en la trayectoria no hay información sobre la velocidad de su recorrido, si las funciones de movimiento están dadas por las ecuaciones (7.17), entonces el período del movimiento circular en el plano es  $T = 2\pi/|\omega|$ , y en el tiempo que dio una vuelta completa en el plano, su altura aumentó en  $\Delta z = |\alpha|T$ . Entonces de la trayectoria se obtiene la siguiente relación entre  $\omega$  y  $\alpha$ ,

$$\left| \frac{\alpha}{\omega} \right| = \frac{\Delta z}{2\pi}, \quad (7.18)$$

La trayectoria mostrada en la figura 7.4 puede ser recorrida con distintas velocidades, pero vemos que si damos una vuelta, la coordenada  $z$  cambia en  $1$  m, esto es, según (7.18)  $|\omega| = 2\pi|\alpha|/1$  m. En particular, esta trayectoria fue graficada utilizando las funciones de movimiento

$$x(t) = 2m \cos\left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} t\right) ; \quad y(t) = 2m \sin\left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} t\right) ; \quad z(t) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} t. \quad (7.19)$$

Estudiemos ahora la velocidad y aceleración de este móvil,

$$\vec{v}(t) = R\omega(-\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j}) + \alpha\hat{k} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2}, \quad (7.20)$$

esto es, el módulo de la velocidad no depende del tiempo, por lo que el móvil debe tener solo aceleración normal. Como la derivada segunda de  $z(t)$  es nula, la aceleración es idéntica a la de un MCU,

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2(\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}), \quad (7.21)$$

y efectivamente vemos que  $\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$ , por lo que  $\vec{a}(t) = \vec{a}_n(t)$  para todo tiempo.

## SECCIÓN 7.5

## Encuentro de dos móviles en 3 – D

La definición de encuentro es (¡nuevamente!) independiente de la dimensión; dados dos móviles  $A$  y  $B$  habrá encuentro si se hallan en el mismo lugar al mismo tiempo, esto es:

$$\vec{r}_A(t_e) = \vec{r}_B(t_e), \quad (7.22)$$

que es idéntica a la ecuación (4.197).

Veamos un ejemplo: Un deportista está practicando el deporte olímpico *tiro al platillo*, que consiste en una máquina, situada en el punto que definimos como origen de coordenadas, que dispara un platillo (que llamaremos  $p$ ) en  $t = 0$ , y el deportista debe pegarle al mismo al vuelo, disparando una bala (que llamaremos  $b$ ) en  $t = t_d > 0$  desde una posición  $\vec{r}_b(t = 0) = x_0 \hat{i} + y_c \hat{j}$ , con  $x_0 < 0$  e  $y_b(t) = y_c \forall t$  tal que la bala impacta al platillo en el punto de máxima elevación de este, como se muestra en la figura 7.5 (esta última condición presenta para el deportista la ventaja de apuntar al lugar donde el platillo va más lento).

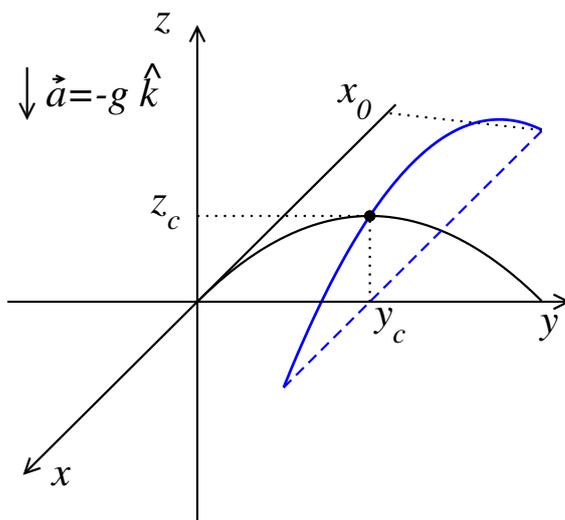


Figura 7.5: Práctica de *tiro al platillo*, en la que dar en el blanco equivale a resolver un problema 3 – D de encuentro. Las trayectorias del platillo y la bala son mostradas en líneas continuas negra y azul respectivamente. La línea azul cortada representa la proyección del movimiento de la bala en el piso (plano  $x - y$ ).

A un tiro parabólico como el estudiado al final del capítulo 4 **siempre** podemos describirlo como un movimiento en el plano, pero si tenemos dos tiros parabólicos en distintos planos **debemos** usar un sistema tridimensional.

Entonces nos preguntamos, si el plano de trayectoria del platillo ( $x = 0$ ) es perpendicular al plano de trayectoria de la bala ( $y = y_c$ ), ¿cuál es el instante  $t_d$  en que el deportista debe efectuar el disparo y cuál debe ser el ángulo de disparo de la bala,  $\alpha_b$ ?

Los datos (bastante realistas) del problema son:  $v_{p0} = 20 \text{ m/s}$ ;  $\alpha_p = \pi/4$ ;  $x_0 = -50 \text{ m}$ ;  $v_{b0} = 300 \text{ m/s}$ , y consideramos que ambos, platillo y bala son lanzados desde el suelo, dado por  $z = 0$ .

Lo primero que vemos es que tenemos todos los datos necesarios para conocer la cinemática del platillo, así que su punto de máxima altura, que es el punto de cruce de trayectorias, está dado por las ecuaciones (4.174), (4.175) y (4.177) con  $\alpha_p = \pi/4$ ,

$$y_c = \frac{v_{p0}^2}{2g} \quad ; \quad z_c = \frac{v_{p0}^2}{4g} \quad ; \quad t_c = \frac{v_{p0}}{\sqrt{2g}} . \quad (7.23)$$

Dejamos como ejercicio corroborar los resultados dados en (7.23). Como un punto de encuentro sólo puede estar en un punto de cruce de trayectorias, exigimos que  $\vec{r}_e = y_c \hat{j} + z_c \hat{k}$  y  $t_e = t_c$ .

Debemos ahora encontrar las funciones de movimiento y trayectoria de la bala, que también es una parábola de tiro, sólo que lanzada al tiempo  $t_d > 0$ , desde  $\vec{r}_{b0} = x_0 \hat{i} + y_c \hat{j}$  con velocidad inicial  $\vec{v}_{b0} = v_{b0} (\cos(\alpha_b) \hat{i} + \sin(\alpha_b) \hat{j})$ . Dejamos también como ejercicio verificar que

$$\vec{r}_b(t) = (v_{b0} \cos(\alpha_b) (t - t_d) + x_0) \hat{i} + y_c \hat{j} + \left[ -\frac{1}{2}g(t - t_d)^2 + v_{b0} \sin(\alpha_b) (t - t_d) \right] \hat{k}, \quad (7.24)$$

válido para  $t \geq t_d$ . Entonces, de la condición de encuentro  $\vec{r}_p(t_e) = \vec{r}_b(t_e)$ , usando que  $\vec{r}_p(t_e) = y_c \hat{j} + z_c \hat{k}$  y la ecuación (7.24) obtenemos

$$y_c \hat{j} + z_c \hat{k} = (v_{b0} \cos(\alpha_b) (t - t_d) + x_0) \hat{i} + y_c \hat{j} + \left[ -\frac{1}{2}g(t - t_d)^2 + v_{b0} \sin(\alpha_b) (t - t_d) \right] \hat{k}. \quad (7.25)$$

La componente  $y$  de esta ecuación es trivial, mientras que de las componentes  $x$  y  $z$  obtenemos

$$v_{b0} \cos(\alpha_b) (t_e - t_d) + x_0 = 0 \quad ; \quad -\frac{1}{2}g(t_e - t_d)^2 + v_{b0} \sin(\alpha_b) (t_e - t_d) = z_c, \quad (7.26)$$

que son dos ecuaciones para las dos incógnitas  $t_d$  y  $\alpha_b$ . De la primera ecuación obtenemos

$$t_e - t_d = -\frac{x_0}{v_{b0} \cos(\alpha_b)}, \quad (7.27)$$

que permite eliminar la incógnita  $t_e$  en la segunda ecuación,

$$-\frac{g x_0^2}{2v_{b0}^2 \cos^2(\alpha_b)} - x_0 \tan(\alpha_b) = z_c. \quad (7.28)$$

Usando la identidad trigonométrica  $1/\cos^2(\alpha_b) = 1 + \tan^2(\alpha_b)$  obtenemos una ecuación cuadrática para  $\tan(\alpha_b)$ :

$$\frac{g x_0^2}{2v_{b0}^2} \tan^2(\alpha_b) + x_0 \tan(\alpha_b) + \frac{g x_0^2}{2v_{b0}^2} + z_c = 0, \quad (7.29)$$

recordando que  $x_0 = -50m$ ;  $v_{b0} = 300m/s$ ;  $z_c = 10m$ ;  $t_e = \sqrt{2}s$  obtenemos

$$\tan(\alpha_b) = \frac{73}{180 + \sqrt{32327}} \Rightarrow \alpha_b \simeq 0.2 \text{ rad} \simeq 11,5^\circ, \quad (7.30)$$

finalmente, reemplazando este valor del ángulo en la ecuación (7.27) obtenemos el tiempo en que debe efectuarse el disparo para dar en el blanco:

$$t_d = \left( \sqrt{2} - \sqrt{2(899 - 5\sqrt{32327})} \right) s \simeq 1.24s. \quad (7.31)$$

## **Parte II**

# **DINÁMICA**



# 8

## Dinámica de una Partícula

Hasta aquí se ha estudiado esencialmente el movimiento de objetos puntuales, describiendo su posición, velocidad y aceleración. A partir de ahora estudiaremos aquello que causa y modifica el movimiento de los objetos, tanto puntuales como extendidos.

Para ello introduciremos primeramente la noción de esfuerzo físico: si se desea desplazar un objeto pesado sobre el suelo; por ejemplo, una heladera, es necesario ejercer sobre ella un esfuerzo físico, que será más o menos intenso y nos dejará más o menos exhaustos según sean las características de la heladera, del suelo y nuestra propia fortaleza.



Figura 8.1: Esfuerzo físico y fuerza

Si el esfuerzo es suficiente, lograremos desplazar el objeto empujado. Queda claro que no solamente puede conseguirse ese efecto aplicando nuestro esfuerzo físico, sino que existen distintos mecanismos capaces de hacerlo, por ejemplo, una máquina mecánica, un poderoso imán, atracción o repulsión eléctrica, etc. Podemos dar el siguiente paso y pensar en el concepto de fuerza, que es similar al de esfuerzo físico, pero que es más general y no depende del mecanismo particular de interacción utilizado. Ahora que hemos aludido, aunque sea de una manera elemental al concepto de fuerza, veamos cuál es la evolución histórica de este concepto en relación al movimiento de los cuerpos.

En la antigua Grecia se pensaba que los cuerpos tendían al reposo como estado natural; en este sentido, Aristóteles de Estagira (384 a. C. – 322 a. C.) afirmaba que la perseverancia del movimiento requería siempre una causa eficiente, es decir, que hace falta ejercer una fuerza para que las cosas permanezcan en movimiento. Esto está de acuerdo con lo que nos dice la experiencia cotidiana; por ejemplo, si observamos la figura 1, como la heladera se moverá sólo si el hombre hace fuerza, sacaríamos como conclusión apresurada que sin fuerza no hay movimiento. Como veremos más adelante, afirmar en general que las fuerzas son las causas del movimiento es un error; un error que estuvo firmemente establecido durante casi dos mil años! En efecto, Galileo Galilei (1564-1642) haciendo una gran cantidad de ex-

perimentos muy cuidadosos <sup>1</sup> fue el primero en afirmar que un cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza permanece en movimiento inalterado, que no es lo mismo que reposo. Isaac Newton (1642–1727) describió este concepto presentado por Galileo, mediante una formulación matemática y estableció la relación entre fuerza y aceleración de manera clara y precisa.

Ha sido tan importante el avance desarrollado por Newton que se denomina ahora mecánica newtoniana y se puede sintetizar en lo que se llaman las tres “leyes de Newton”. Hoy sabemos que la mecánica newtoniana tiene sus limitaciones, ya que no puede describir absolutamente todas las situaciones. En este sentido, puede verse como un caso especial (un caso límite) de teorías más generales. Sin embargo, también sabemos que este caso especial no es para nada restrictivo ya que comprende una variedad enorme de situaciones y de escalas de tamaño (desde los micrones hasta distancias astronómicas). Como toda ley física, las leyes de Newton son un modelo matemático que describe hechos naturales y se llega a ellas a través de la observación experimental. Es importante tener siempre presente que la observación sistemática y más precisamente la medición es el hecho esencial de la física, y es el punto de partida para toda descripción o modelo. La formulación de las leyes de Newton es el resultado de un larguísimo camino de intuiciones, errores y aciertos que llevó, como dijimos, alrededor de dos milenios. Por razones de tiempo, no repetiremos ese proceso en este curso, sino que presentaremos las leyes y luego mostraremos su correspondencia con la observación experimental, aunque el camino real haya sido el inverso.

## SECCIÓN 8.1

# Leyes de Newton

Su formulación matemática fue publicada por Isaac Newton en 1687 en su obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica*.

### 8.1.1. Primera ley

*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él.

Aquí se ve un cambio conceptual que termina con la física aristotélica: el reposo no tiene nada de particular respecto del movimiento rectilíneo uniforme (MRU). Los cuerpos tienden indistintamente a cualquiera de estos dos estados, según cuál sea la situación inicial: si por alguna razón un cuerpo está en MRU y no se aplica ninguna fuerza, seguirá con MRU; mientras que si estaba en reposo, seguirá en reposo (a menos que se aplique alguna fuerza). Entonces, no hace falta ejercer una fuerza “para que las cosas se muevan”, sino más bien, para que cambien su estado de movimiento.

<sup>1</sup>Para medir velocidades es necesario medir distancias y tiempos, pero ¿cómo medía el tiempo Galileo? “En cuanto a la medición del tiempo, teníamos un gran recipiente lleno de agua, colocado en alto; al fondo de este recipiente se había soldado un tubo de diámetro pequeño que daba un delgado chorro de agua, a éste lo recogíamos en un vaso durante el tiempo de cada ... [medición]... El agua así recogida se pesaba después de cada descenso en una balanza muy exacta; las diferencias y relaciones de estos pesos nos daban las diferencias y relaciones de los tiempos, y con tal exactitud, que aunque la operación se repitiera muchas, muchas veces no había diferencias notables entre ellas.” *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, G. Galilei (1638)

Sabemos que reposo y movimiento de un cuerpo son dos conceptos ambiguos, a menos que se establezca un sistema de referencia respecto del cual se describa la posición del mismo. Entiéndase, entonces, que cuando hablamos de reposo o de MRU lo hacemos siempre respecto de un sistema de coordenadas.

¿Qué ocurre entonces con la heladera de la figura 1? Si el señor empuja hace fuerza, y si hace fuerza debería cambiar el estado de movimiento de la heladera, y si cambia el estado de movimiento debería pasar de estar en reposo a moverse, cosa que puede ocurrir o no. Para resolver esta aparente contradicción entre la primera ley y la realidad, pensemos en tres experimentos que incluyan al mismo señor y la misma heladera situada sobre distintas superficies: 1. piso de ladrillo, 2. piso de mármol y 3. piso de hielo. Aclaremos que en los tres casos el señor tiene un apoyo firme para aplicar su fuerza sin resbalarse.

Experimento 1: el señor empuja con todas sus fuerzas (que por cierto son bastante pocas) y no logra deslizar la heladera.

Experimento 2: el señor comienza a empujar sin lograr el objetivo, pero al incrementar la fuerza, finalmente logra deslizar la heladera.

Experimento 3: el señor consigue deslizar la heladera sin mayores esfuerzos.

Si el señor siempre es el mismo y la heladera siempre es la misma, puede concluirse que la superficie, que es lo único que varía, ejerce un papel decisivo en el movimiento de la heladera. En efecto, la superficie ejerce una fuerza, llamada de roce o rozamiento, que se opone a la acción de la persona que empuja. Entonces, no estamos hablando de una fuerza, sino de dos. “Las fuerzas impresas” sobre el cuerpo, o más precisamente, la acción conjunta de estas fuerzas es la que determina si hay cambio o no en su estado de movimiento. No considerar la existencia y acción de las fuerzas de roce fue uno de los errores que se cometían en la antigüedad.

### 8.1.2. Segunda ley

*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

El cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

El cambio de movimiento debe entenderse como el cambio de la velocidad, del vector velocidad. Por lo tanto, este cambio de movimiento no es otra cosa que el vector aceleración. La segunda ley puede formularse entonces como

$$F \propto a. \quad (8.1)$$

Si consideramos el carácter vectorial de la aceleración, surge claramente que la fuerza también tiene un carácter vectorial. No sólo en virtud de la segunda ley, sino a partir de la experiencia, que nos dice que se obtienen efectos distintos si se empuja para una dirección o para otra; experiencia que, repetimos, es la que da origen a la segunda ley. Luego, una formulación más correcta sería:

$$\vec{F} \propto \vec{a}, \quad (8.2)$$

atribuyendo a la fuerza un carácter vectorial, en consonancia con el carácter vectorial de la aceleración que produce.

Para no caer en el mismo error de los antiguos, debemos considerar también las fuerzas de roce que actúan sobre el cuerpo en cuestión, o más generalmente, la acción conjunta de todas las fuerzas actuantes sobre ese cuerpo. Pero ¿cómo se determina la acción conjunta de distintas fuerzas aplicadas sobre un cuerpo? Para responder a esta pregunta, primero debemos establecer algún procedimiento para medir y aplicar fuerzas de manera controlable.

### Resortes: ley de Hooke

Sabemos que si comprimimos un resorte una longitud  $\Delta l$  o lo estiramos una longitud  $\Delta l'$ , sentiremos que éste ejercerá sobre nosotros una fuerza tendiente a recuperar su longitud natural, como se muestra en la figura 2. La fuerza que ejerce el resorte tiene su misma dirección, la cual es horizontal en este ejemplo. Se comprueba experimentalmente que el módulo de esta fuerza es proporcional al módulo de la compresión (o estiramiento) del resorte:

$$F = k\Delta l, \quad (8.3)$$

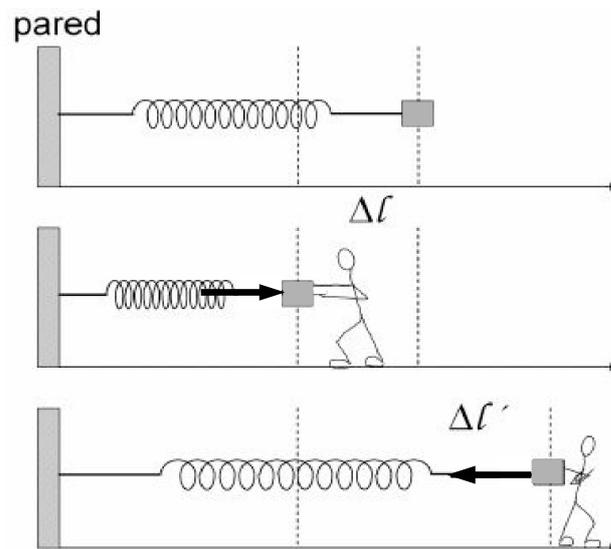


Figura 8.2: Compresión y estiramiento de un resorte con un extremo fijo a una pared.

donde la constante de proporcionalidad  $k$  es propia de cada resorte. La ecuación (8.3) se denomina ley de Hooke. Cabe destacar que un resorte que se comprime una cantidad  $\Delta l$  ejerce la misma fuerza, pero de sentido contrario, que si se lo estira la misma longitud.

Estas cualidades permiten aplicar fuerzas dirigidas y cuantificadas, ya que a través de la ecuación (8.3) es posible medir fuerzas con sólo medir distancias (elongación o contracción). Ahora pongamos a prueba el funcionamiento de este dispositivo “resorte”. Al aplicar la fuerza  $\vec{F}$  sobre un cuerpo, se comprueba experimentalmente que éste adquiere una aceleración  $\vec{a}$ , paralela a la fuerza, como se ve en la figura 8.3(a) y en concordancia con la segunda ley de Newton.

Por otra parte, se verifica experimentalmente que también se puede lograr la misma aceleración utilizando dos resortes que apliquen dos fuerzas de distinta dirección sobre un cuerpo, siempre que la resultante  $\vec{F}_3$  de estas fuerzas (sumadas como vectores) sea igual a la fuerza  $\vec{F}$  original. La situación está representada en las Figs. 8.3(b) y 8.3(c). Vale decir, para resortes es fácil comprobar que las fuerzas se

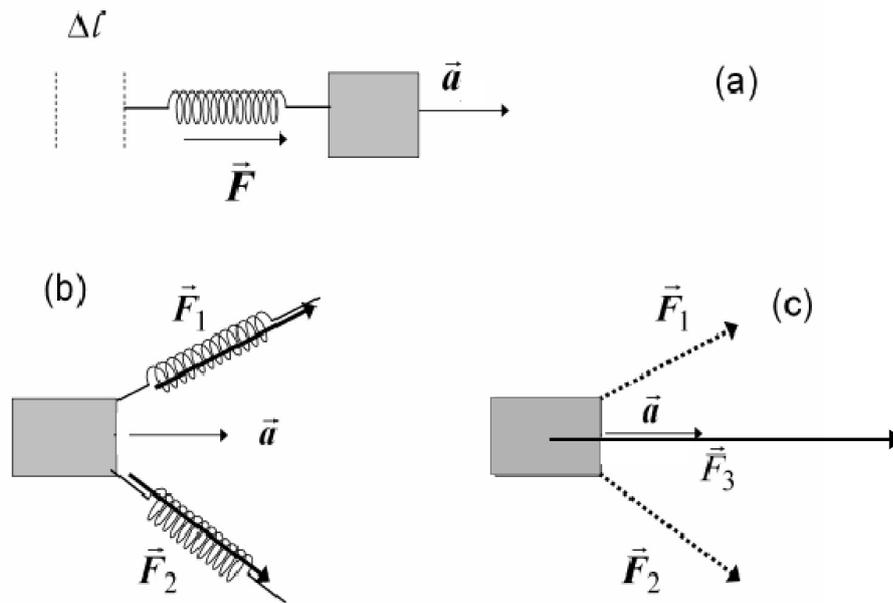


Figura 8.3: Fuerza aplicada por un único resorte (a) y por la combinación de dos resortes (b) y (c).

suman vectorialmente y esta comprobación puede extenderse a otras fuerzas, independientemente del mecanismo que las produzca, de manera que siempre se cumple que la resultante es  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Este resultado puede extenderse a un número arbitrario de fuerzas aplicadas sobre un cuerpo, con lo cual:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (8.4)$$

Ahora que hemos establecido cómo es el efecto conjunto de muchas fuerzas actuantes sobre un cuerpo, podemos volver a formular la relación (8.2) de manera que no nos olvidemos de ninguna fuerza (por ejemplo, las de rozamiento):

$$\sum_i \vec{F}_i \propto \vec{a}. \quad (8.5)$$

Para pasar de esta relación de proporcionalidad a una ecuación, deberíamos caracterizar la constante de proporcionalidad.

### Masa inercial

Hagamos el siguiente experimento: Tomemos el cuerpo A, inicialmente en reposo, y apliquémosle una fuerza  $\vec{F}_1$  constante, luego midamos (a través de la medición de distancias y tiempos) la aceleración  $\vec{a}_1$  que adquiere. Ahora repetimos este experimento aplicando sucesivamente las fuerzas constantes  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ , etc. y midiendo las correspondientes aceleraciones  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$ , etc. Ahora analizamos los cocientes entre estas magnitudes y vemos que se verifica la siguiente (e importantísima) relación:

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{a}_1|} = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{a}_2|} = \frac{|\vec{F}_3|}{|\vec{a}_3|} = \dots = \text{constante} = m_A. \quad (8.6)$$

La constante  $m_A$  recibe el nombre de masa inercial del cuerpo A, o más suscintamente, masa del cuerpo A. La ecuación(8.6) se satisface para cualquier cuerpo B, C, etc. Por lo tanto, se verifica que la masa inercial es una magnitud propia de cada cuerpo.

Recién ahora, que conocemos la constante de proporcionalidad, estamos en condiciones de formular matemáticamente la **segunda ley de Newton**:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}. \tag{8.7}$$

Es decir, si sobre un cuerpo de masa  $m$  se ejercen fuerzas  $\vec{F}_i$ , el cuerpo adquiere una aceleración  $\vec{a}$  y estas magnitudes están relacionadas a través de la ecuación(8.7). Si aplicamos las mismas fuerzas a un cuerpo de gran masa y a un cuerpo de masa pequeña el segundo adquirirá mayor aceleración. Se verifica que las masas son aditivas, vale decir que si armamos una masa  $M$  a partir de un conjunto  $m_1, m_2, m_3, \dots$  y ejercemos una fuerza  $\vec{F}$  sobre ella, observamos que su aceleración es tal que

$$\vec{F} = M\vec{a}, \tag{8.8}$$

donde  $M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$

La segunda ley de Newton también establece cuál es la relación entre las unidades de fuerza, masa y aceleración:

$$[F] = [m][a]. \tag{8.9}$$

Para medir estas magnitudes físicas se han definido los siguientes sistemas de unidades:

cgs			MKS			Técnico		
long.	masa	t	long.	masa	t	fuerza	masa	t
cm	g	s	m	kg	s	$\vec{k}g$	UTM	s
	$[a] = \frac{cm}{s^2}$			$[a] \frac{m}{s^2}$			$1kg = 9,8 kg \frac{m}{s^2} = 9,8N$	
	$[F] = g \frac{cm}{s^2} = \text{dyna (dyn)}$			$[F] = kg \frac{m}{s^2} = \text{Newton (N)}$			$1 \text{ UTM} = \frac{kg}{m/s^2} = 9,8 \frac{N}{m/s^2}$	

donde 1 UTM (unidad técnica de masa) es la masa que adquiere una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  cuando se le aplica una fuerza de  $1 \vec{k}g$ . Según la expresión  $F = k\Delta l$ , la constante  $k$  debe tener las siguientes unidades:

$$[k] = \frac{[F]}{[l]} = \frac{N}{m}, \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}, \frac{\vec{k}g}{m}. \tag{8.10}$$

### Sistemas inerciales y sistemas no inerciales

Consideremos el siguiente experimento: una persona A está sentada en el interior de un vagón de un tren de carga (no puede ver el exterior). Sobre el piso del vagón está apoyado un bloquecito de hielo, y podemos considerar que entre el hielo y el piso no hay rozamiento. En un dado momento, el tren arranca con aceleración de módulo  $a$  hacia la derecha (ver figura 8.4).

Como el vagón está cerrado, la persona en su interior no sabe qué ocurre en el exterior, pero observa cómo el hielo comenza a deslizar, acercándose hacia la pared izquierda de la caja con aceleración de módulo  $a$ . Es decir, sin que ninguna fuerza se haya aplicado sobre el bloquecito de hielo, ve cómo este se acelera hacia la izquierda. La masa del hielo es  $m$ , su aceleración es  $\vec{a}$ , distinta de cero, pero la fuerza es cero! En conclusión, la segunda ley de Newton no vale para A (ni la primera).

Un observador B situado en el exterior del vagón vería que este se acelera hacia la derecha con aceleración de módulo  $a$  y además (si tuviera acceso a lo que pasa adentro, por ejemplo a través de un

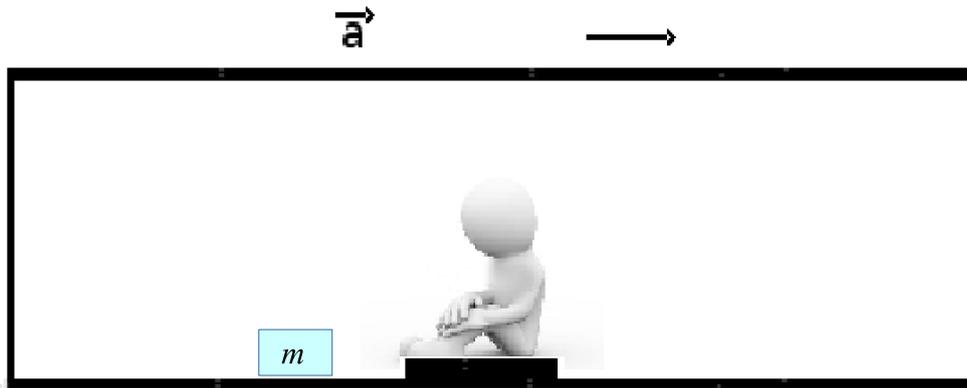


Figura 8.4: Una persona sentada en un sistema no inercial.

circuito de televisión) vería que el hielo permanece en reposo, al menos hasta que choque contra la pared izquierda. Entonces, para B, el bloque de hielo, al que no se le aplica ninguna fuerza, permanece en reposo. Es decir, para B valen las leyes de Newton y para A, no.

Los sistemas de referencia donde valen las leyes de Newton se denominan sistemas inerciales. Todos los sistemas inerciales guardan entre sí una relación de MRU (considerando el reposo como un caso particular de MRU). Es decir, si un sistema de referencia es inercial, cualquier otro sistema que se mueva respecto del primero con velocidad  $\vec{v}$  constante es también un sistema inercial. Por otro lado, un sistema de referencia que está acelerado respecto de un sistema inercial es un sistema no inercial y en él **no valen las leyes de Newton**.

Ahora que hemos definido sistemas inerciales y sistemas no inerciales, vale la pena hacer un comentario sobre las dos primeras leyes de Newton. Si en la expresión matemática de la segunda ley ponemos  $\sum_i \vec{F}_i = 0$ , obtenemos  $\vec{a} = 0$ , o sea, si no se ejerce ninguna fuerza neta, el cuerpo “persevera” en su estado de movimiento, sea éste reposo o MRU, es decir, llegamos a la primera ley. ¿Podemos pensar la primera ley como un caso particular de la segunda? Sí, podemos, pero no lo haremos. En lugar de eso resulta conceptualmente más claro reservar para la primera ley un carácter cualitativo, que involucra la existencia de los sistemas inerciales. En este sentido, podemos reformular la primera ley de la siguiente forma:

*Existen sistemas de referencia (los sistemas inerciales) en los cuales se cumple que todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él.*

La existencia de los sistemas inerciales no es tan trivial y supone una idealización, ya que es difícil encontrar sistemas que no estén acelerados. Por ejemplo, nuestro sistema referencial por excelencia: la Tierra, está acelerado ya que cualquier punto de su superficie describe un movimiento circular con respecto al eje de rotación<sup>2</sup>. Ni siquiera los puntos de su eje están exentos de aceleración, ya que éste describe una órbita elíptica alrededor del sol<sup>3</sup>. De todas maneras, las aceleraciones involucradas son suficientemente pequeñas y pueden despreciarse en la mayoría de las situaciones que estudiaremos.

La segunda ley, en cambio, da por sentado la existencia de los sistemas inerciales y tiene matices más cuantitativos. Podríamos reformularla de esta manera:

*Dado que existen los sistemas inerciales, si nos referimos a uno de ellos, se cumple que  $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$*

<sup>2</sup>La aceleración centrípeta de un punto sobre el ecuador debido a la rotación de la tierra alrededor de su eje es de aproximadamente  $0,034 \text{ m/s}^2$ .

<sup>3</sup>La aceleración del eje de la tierra debido a su rotación alrededor del sol es de aproximadamente  $0,006 \text{ m/s}^2$ .

### 8.1.3. Tercera ley

*Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.*

Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: quiere decir que las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto.

Aquí la palabra “acción” significa “fuerza”. La tercera ley establece que si un cuerpo A ejerce una fuerza  $\vec{F}_{AB}$  sobre un cuerpo B, el cuerpo B ejerce una fuerza  $\vec{F}_{BA}$  sobre el cuerpo A, de manera que  $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ .

Consideremos dos astronautas A y B flotando en el espacio intergaláctico. Supongamos que A empuja a B ejerciéndole la fuerza  $\vec{F}_{AB}$ . En el mismo acto (aunque no se lo proponga), B ejerce la fuerza  $\vec{F}_{BA}$  sobre A. Si sumamos estas dos fuerzas obtenemos cero, ya que  $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ , aunque los dos astronautas adquieran aceleraciones distintas de cero. Esto no contradice en absoluto la segunda ley, ya que en ella se habla de fuerzas ejercidas sobre **un** cuerpo y en la tercera ley se habla de fuerzas mutuas, es decir, ejercidas sobre **dos** cuerpos distintos.

## SECCIÓN 8.2

# Aplicación de las leyes de Newton

Según las leyes de Newton, particularmente la segunda, las fuerzas aplicadas a un cuerpo ejercen una influencia sobre la velocidad que éste experimenta. Con ello, podemos decir que si conocemos las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo seremos capaces de describir cómo es su movimiento. Pero antes, debemos poder establecer claramente la posición del cuerpo objeto de estudio.

### 8.2.1. Masa puntual

Hasta aquí hemos analizado la relación entre el movimiento de los cuerpos y las fuerzas aplicadas sobre ellos, pero nada hemos dicho sobre la forma ni las dimensiones de los cuerpos. Sólo les hemos asignado una única cualidad: la masa. Aun sin haber mencionado el tamaño de los objetos, hemos podido describir su movimiento de traslación, es decir, los hemos considerado como puntos materiales incapaces de tener rotaciones intrínsecas. Esto significa que se trata de un único punto, o bien todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad (el cuerpo se traslada paralelo a sí mismo). Sin embargo, las leyes de Newton son válidas para describir la dinámica de cuerpos extensos, incluyendo rotaciones, que estudiaremos más adelante. Por ahora entenderemos que un cuerpo (de masa  $m$ ) ocupa una posición puntual en el espacio y describiremos su movimiento, es decir, cómo varía esa posición puntual con el tiempo. Masa puntual, punto material o partícula son términos usados indistintamente en este contexto.

### 8.2.2. Ecuaciones de movimiento

La dinámica estudia el problema del movimiento a partir de las causas que lo originan. El gran avance que propone la segunda ley de Newton es el ofrecer una ecuación, una expresión matemática que relaciona las variaciones del estado de movimiento con su causa. Sin embargo, esta ley no nos proporciona un modelo para describir cómo es la interacción sino que, dada una interacción permite describir cómo es el movimiento.

Recordemos que el estudio de la cinemática nos enseñó que

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (8.11)$$

Combinando esta ecuación vectorial con la segunda ley de Newton se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales —es decir, ecuaciones que relacionan una función con sus derivadas— que se conocen como ecuaciones de movimiento.

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (8.12)$$

Para resolver cualquier problema de mecánica (newtoniana) de una masa puntual, se pueden seguir los siguientes pasos:

- Elegir el sistema de coordenadas que se toma como referencia para  $\vec{F}$  y  $\vec{a}$ .
- Escribir las ecuaciones de movimiento en ese sistema de coordenadas. Por ejemplo, si se ha elegido un sistema de coordenadas cartesiano, las ecuaciones son de la forma

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2}; F_y = m \frac{d^2y}{dt^2}; F_z = m \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (8.13)$$

- Sustituir en  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$ , expresiones que contengan a las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  (y eventualmente el tiempo), a partir de información adicional que se tenga sobre la naturaleza de las fuerzas interactuantes. Es decir, ser capaces de escribir:

$$F_x(x, y, z, t) = m \frac{d^2x}{dt^2}; F_y(x, y, z, t) = m \frac{d^2y}{dt^2}; F_z(x, y, z, t) = m \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (8.14)$$

- Resolver estas ecuaciones para encontrar las funciones de movimiento, o sea la expresión del vector posición de la masa puntual en función del tiempo,  $\vec{r}(t)$ . O bien  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  si es que se utilizan coordenadas cartesianas para describir el movimiento.

Es importante hablar con precisión para evitar confusiones: se llaman *ecuaciones de movimiento* a las expresiones dadas en ecuación (8.14) y se llaman *funciones de movimiento* a las expresiones particulares de  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  que resulten de la resolución de las ecuaciones de movimiento.

Si los datos son la masa del cuerpo y las componentes de la fuerza, para encontrar las funciones de movimiento hay que resolver tres ecuaciones diferenciales de segundo orden<sup>4</sup> en donde aparecerán dos constantes de integración. Recordemos que ya se han enfrentado a este tipo de problemas antes. La única diferencia es que ahora tenemos como dato la fuerza que produce la aceleración. Ahora queda claro porqué las funciones aceleración  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$ ,  $a_z(t)$  pueden ser funciones discontinuas. Como para que haya aceleración necesariamente debe haber una fuerza aplicada, al quitar tal fuerza la aceleración se anula de inmediato.

<sup>4</sup>El orden de una ecuación diferencial está dado por el término con derivadas de mayor orden.

## Algunos ejemplos

### 1. Masa puntual en equilibrio

Se denomina equilibrio, para un cuerpo puntual, a la situación en la cual sobre dicho cuerpo no actúa ninguna fuerza, o más precisamente, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es nula. Considerando la segunda ley de Newton, es fácil ver que toda partícula en reposo, o en MRU está en equilibrio.

Para resolver este problema se elige un sistema de coordenadas y se plantean en él las ecuaciones de movimiento y se las resuelve teniendo en cuenta las condiciones iniciales (que son tantas como el orden de la ecuación diferencial, o sea dos para cada coordenada). En este caso,  $\vec{F} = 0$ , con lo cual,  $\vec{a} = 0$ , es decir,

$$\begin{aligned} 0 = a_x &\Rightarrow v_x = \int a_x(t) dt = v_{0x} \Rightarrow x(t) = \int v_x(t) dt = v_{0x}t + x_0 \\ 0 = a_y &\Rightarrow v_y = \int a_y(t) dt = v_{0y} \Rightarrow y(t) = \int v_y(t) dt = v_{0y}t + y_0 \\ 0 = a_z &\Rightarrow v_z = \int a_z(t) dt = v_{0z} \Rightarrow z(t) = \int v_z(t) dt = v_{0z}t + z_0. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Estas son las funciones de movimiento que corresponden a un movimiento rectilíneo y uniforme, un caso particular del cual sería el reposo, para el que se cumple que  $v_{0x} = v_{0y} = v_{0z} = 0$ .

### 2. Fuerza constante

Dentro de este ejemplo consideraremos el caso particular del movimiento de un objeto sujeto a la fuerza de atracción gravitacional, cuya cinemática fue estudiada en el capítulo 4. Se comprueba experimentalmente que en las inmediaciones de la superficie de la Tierra, todo cuerpo experimenta una aceleración de arriba hacia abajo de módulo  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , debida a una fuerza que ejerce la Tierra sobre el cuerpo, denominada peso ( $\vec{P}$ ). La segunda ley de Newton nos dice entonces que  $\vec{P} = m\vec{g}$ . Esta relación es la que da origen al sistema técnico de unidades, ya que en ese sistema un cuerpo de 1 kg de masa tiene un peso de 1  $\vec{kg}$ .

Consideremos entonces una masa puntual  $m$  arrojada con velocidad inicial de módulo  $v_0$  formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Llamaremos  $x$  e  $y$  a las coordenadas del plano horizontal y  $z$  a la dirección vertical, de manera que el movimiento se desarrolla en el plano vertical  $x - z$ . Si despreciamos el rozamiento del aire, el cuerpo se verá afectado solamente por la fuerza peso; es decir, solamente tendrá una aceleración  $a_z = -g$ . Eligiendo adecuadamente el origen del sistema de coordenadas, las condiciones iniciales del movimiento son:

$$\begin{aligned} v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) \neq 0; \quad v_{0y} = 0; \quad v_{0z} = v_0 \sin(\alpha) \neq 0; \\ x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad z_0 = 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Las tres ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \frac{F_x}{m} &= a_x = 0; \\ \frac{F_y}{m} &= a_y = 0; \\ \frac{F_z}{m} &= a_z = -g. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Integrando y utilizando las condiciones iniciales se obtiene:

$$\begin{aligned} v_x &= \int a_x(t)dt = v_0 \cos(\alpha) & \Rightarrow x(t) &= \int v_x(t)dt = v_0 \cos(\alpha)t ; \\ v_y &= \int a_y(t)dt = 0 & \Rightarrow y(t) &= \int v_y(t)dt = 0 ; \\ v_z &= \int a_z(t)dt = -gt + v_0 \operatorname{sen}(\alpha) & \Rightarrow z(t) &= \int v_z(t)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha)t . \end{aligned} \quad (8.18)$$

Como ya se hizo en el estudio de la cinemática, la ecuación de la trayectoria  $z = z(x)$  se obtiene eliminando el tiempo de las funciones de movimiento. Entonces, despejando  $t$  de la ecuación para  $x(t)$  tenemos:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} . \quad (8.19)$$

Sustituyendo este valor de  $t$  en  $z(t)$  resulta finalmente:

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2 + \operatorname{tg}(\alpha)x , \quad (8.20)$$

que es la ecuación de una parábola.

### SECCIÓN 8.3

## Energía

Para explicar el concepto de energía vamos a utilizar una situación particular, que es el movimiento de un cuerpo bajo la acción de la gravedad (en las inmediaciones de la superficie terrestre). Usando la segunda ley de Newton podemos escribir la fuerza  $\vec{F} = \vec{P}$ , que la tierra ejerce sobre los cuerpos, como  $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{k}$ . Si usamos como condiciones iniciales  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y  $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$  y el mismo sistema de coordenadas del ejemplo anterior, se obtienen las velocidades y funciones de movimiento estudiadas en el capítulo 4 para tiro parabólico:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} & \Rightarrow x(t) &= v_{0x}t + x_0 \\ v_y &= v_{0y} & \Rightarrow y(t) &= v_{0y}t + y_0 \\ v_z &= -gt + v_{0z} & \Rightarrow z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 . \end{aligned} \quad (8.21)$$

A partir del resultado previo podemos expresar el módulo de la velocidad en función de las coordenadas a lo largo del movimiento; en particular, de la coordenada  $z$ :

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 \equiv v^2 &= v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + (v_{0z} - gt)^2 \\ &= v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 + (gt)^2 - 2gv_{0z}t \\ &= v_0^2 - 2g(v_{0z}t - \frac{gt^2}{2}) \\ &= v_0^2 - 2g(z - z_0) . \end{aligned} \quad (8.22)$$

Ahora dejemos de un lado de la igualdad las magnitudes referidas al tiempo  $t$  y del otro, las referidas al instante inicial.

$$v^2 + 2gz = v_0^2 + 2gz_0 , \quad (8.23)$$

donde podemos notar que todo el miembro de la izquierda es igual al de la derecha para todo tiempo, es decir, es una constante de movimiento. En general, para cualquier movimiento no se conserva ni la

posición, ni la velocidad, ni la aceleración; por este motivo, encontrar cosas que sí se conserven a lo largo del tiempo, o sea, constantes de movimiento tiene un significado muy especial. Si multiplicamos la ecuación precedente por  $m/2$ , obtenemos una nueva constante de movimiento:

$$E_M \equiv \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0. \quad (8.24)$$

La constante  $E_M$  se denomina energía mecánica del sistema. Cuando decimos *sistema* nos referimos a la masa puntual y al agente externo que ejerce fuerzas sobre ella; en este caso particular, el sistema es una masa  $m$  sometida a la acción de la fuerza constante peso. El hecho de que  $E_M$  sea una constante de movimiento significa que si se conoce la velocidad inicial y la posición inicial (en el eje  $z$ ) de un cuerpo sometido a la fuerza peso, se puede calcular el valor de la energía mecánica con estas condiciones iniciales y no cambiará durante todo el movimiento.

Podemos ahora diferenciar entre los dos términos que conforman  $E_M$ . Le llamaremos *energía cinética*<sup>5</sup> al término que involucra la velocidad y *energía potencial* al que contiene la posición. Debe notarse sin embargo, que cada uno de estos términos por separado **no** es una constante de movimiento: pueden variar a lo largo del tiempo de manera que su suma sea siempre la misma.

Veamos otra forma de obtener esta constante de movimiento:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt} = \frac{dv_z}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dv_z}{dz} v_z = \frac{d}{dz} \left( \frac{v_z^2}{2} \right). \quad (8.25)$$

Entonces,

$$-g = \frac{d}{dz} \left( \frac{v_z^2}{2} \right), \quad (8.26)$$

o bien,

$$\frac{d}{dz} (-gz) = \frac{d}{dz} \left( \frac{v_z^2}{2} \right). \quad (8.27)$$

Multiplicando esta última ecuación por  $m$  y reagrupando convenientemente se obtiene:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2}mv_z^2 + mgz \right) = 0. \quad (8.28)$$

El término entre paréntesis no depende de  $z$ , puesto que su derivada con respecto a esa coordenada es nula; es decir, durante el movimiento, aquel término permanecerá constante. Magnitudes de ese tipo se denominan constantes de movimiento. Para llegar a la expresión de la energía mecánica del sistema presentada en la ecuación(8.24) es necesario considerar también lo que ocurre en las otras coordenadas. Sabemos que las componentes de la velocidad,  $v_x$  y  $v_y$ , son constantes y que, por lo tanto, sus derivadas se anulan. Entonces, basándonos en la ecuación(8.28) podemos escribir:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2}mv_z^2 + mgz + \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 \right) = 0, \quad (8.29)$$

es decir:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2}mv^2 + mgz \right) = 0, \quad (8.30)$$

que nos lleva a la conservación de la energía mecánica  $E_M$  de la ecuación(8.24).

La conservación de la energía mecánica es un concepto clave en la Física. Como se verá, existe

<sup>5</sup>cinético/a: adj. Perteneciente o relativo al movimiento. Del griego κινητικοζ: que mueve.

una variedad de cantidades que se conservan, que son constantes de movimiento. Su valor numérico permanece constante durante todo el movimiento y está, entonces, totalmente determinado por las condiciones iniciales de la partícula en cuestión. La utilidad de las magnitudes conservadas radica en que permiten obtener información acerca del movimiento de un cuerpo o de un sistema de cuerpos interactuantes.

Como ejemplo de aplicación de este concepto veamos el siguiente problema: Calcule la velocidad vertical  $v_0$  que debe dársele, desde el suelo, a un ladrillo para alcanzárselo a un albañil que está en el techo de una casa de una planta. Considere que el ladrillo es lanzado desde una altura inicial  $z_0$  y recibido en un altura final  $z_f$  m con velocidad  $|v_f| = 0$ .

Usando la ecuación(8.24):

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_f = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 . \quad (8.31)$$

En nuestro caso,  $v_f^2 = 0$ , con lo cual es fácil despejar la velocidad inicial:

$$v_0 = \sqrt{2g(z_f - z_0)} , \quad (8.32)$$

que es el mismo resultado que obtendríamos usando solamente la cinemática, sólo que en **un** paso. Sin embargo, resolviendo el problema como sabíamos antes, obtendríamos más información sobre cómo se realiza el movimiento. Como siempre, hay que escoger la herramienta adecuada según lo que se busque.

La ecuación(8.24) nos dice que la energía es una magnitud que tiene unidades de masa por velocidad al cuadrado, o bien, de fuerza por distancia. Luego, en el caso de utilizar el sistema MKS,

$$[E] = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N m} \equiv \text{Joule (J)} . \quad (8.33)$$

Análogamente, en cgs:

$$[E] = \text{g} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = \text{dyn cm} \equiv \text{erg} (\text{erg}) . \quad (8.34)$$

## SECCIÓN 8.4

# Diversas fuerzas aplicadas sobre una masa puntual

Vamos a tratar de aplicar las leyes de Newton a situaciones en las que varias fuerzas se ejercen al mismo tiempo sobre una masa puntual. Debe entenderse que aunque dibujemos objetos extensos, por ejemplo, bloques, esto es un recurso para facilitar la comprensión de los esquemas, pero por ahora vamos a pensar solamente en partículas. Hasta aquí hemos hablado de la fuerza peso y de la fuerza que ejerce un resorte; en esta sección introduciremos algunas fuerzas más.

### 8.4.1. Tensión de una cuerda

Los elementos hilo, cuerda, cable, sogas, etc. con que trataremos tienen la cualidad de transmitir fuerzas pero los consideramos inextensibles, es decir que nunca se comportan como resortes; además pensaremos que no tienen masa. Se suele definir este comportamiento como de *cuerda ideal*. Cuando un hilo se ata a un cuerpo y se tira de él, el hilo atrae el cuerpo con una fuerza  $\vec{T}$  que sale del cuerpo en

la dirección del hilo. Ésta se denomina fuerza de tensión porque la cuerda o hilo están en un estado de tensión. El hilo sirve para conducir la fuerza que un agente externo hace para ponerlo en tensión, desde el agente externo hacia el cuerpo al que está atado el hilo, de manera que la tensión que ejerce el agente sobre la cuerda tiene la misma magnitud que la fuerza ejercida por el hilo sobre el cuerpo.

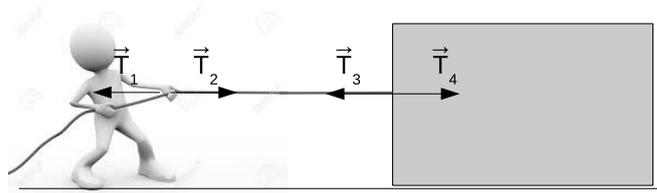


Figura 8.5: Tensión de una cuerda.

Consideremos la fuerza  $\vec{T}_1$  que la persona de la figura 8.5 ejerce sobre la cuerda. Por la tercera ley de Newton, la cuerda ejerce una fuerza igual y opuesta  $\vec{T}_2$  sobre la persona. Ahora bien, como la cuerda sólo *conduce* la fuerza que hace la persona, el otro extremo de la cuerda ejerce una fuerza  $\vec{T}_3$ , también de igual magnitud, sobre el bloque. Finalmente, apelando otra vez a la tercera ley de Newton, el bloque ejerce sobre la cuerda una fuerza  $\vec{T}_4$  igual y opuesta a  $\vec{T}_3$ .

Supongamos que el sistema está en equilibrio; por ejemplo, pensemos que el bloque está atado a una pared. Es fácil corroborar que efectivamente la cuerda sólo conduce la fuerza  $\vec{T}_1$  hacia el bloque, es decir,  $\vec{T}_1 = \vec{T}_3$ . Si no fuera así,  $\vec{T}_4$  que es igual a  $\vec{T}_3$ , debería ser distinto de  $\vec{T}_1$ , es decir, las dos fuerzas aplicadas a la cuerda  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_4$  tendrían módulos diferentes y así, la suma vectorial de ellas sería distinta de cero. Entonces, por la segunda ley de Newton, la cuerda debería estar acelerada hacia alguna de las dos direcciones y esto es imposible, ya que partimos de un sistema (incluida la cuerda) en equilibrio.

### Diagrama de cuerpo aislado

Vamos a mostrar una forma sencilla de visualizar las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo; para ello consideraremos un ejemplo que combina los tres tipos de fuerza que hemos discutido hasta ahora: tensión de una cuerda  $\vec{T}$ , fuerza ejercida por un resorte  $\vec{F}$  y peso  $\vec{P}$ .

Sea un cuerpo de masa  $m$ , en equilibrio, suspendido conjuntamente de un hilo y de un resorte de constante  $k$ , de tal forma que la longitud del hilo es mayor que la longitud natural  $\ell_0$  del resorte.

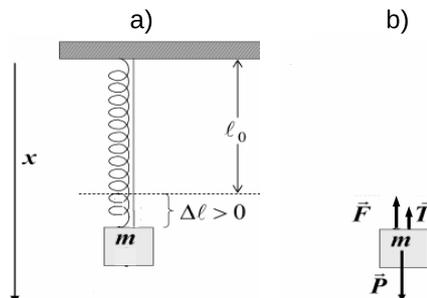


Figura 8.6: Diagrama de cuerpo aislado.

En la figura 8.6a) se muestra un esquema del cuerpo de masa  $m$  y todos los elementos que intervienen, particularmente el sistema de coordenadas elegido. En la figura 8.6b) se muestra solamente el cuerpo y

el resto de los elementos ha sido reemplazado por las fuerzas que ellos producen sobre el cuerpo. A esto se lo conoce como diagrama de cuerpo aislado y es uno de los primeros pasos necesarios para plantear un problema de dinámica de una partícula.

Como el sistema, es decir, el conjunto de elementos que interactúan (cuerpo, resorte, hilo, planeta Tierra) está en equilibrio, la segunda ley de Newton nos dice que:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = 0. \quad (8.35)$$

Para poder dar una expresión matemática a estas fuerzas, se elige un sistema de coordenadas. La simetría del problema sugiere un sistema unidimensional como el que se ha indicado en la figura 8.6a). En este sistema de coordenadas,

$$\vec{F} = -k|\Delta\ell|\hat{i}, \quad \vec{P} = mg\hat{i}, \quad \vec{T} = -|\vec{T}|\hat{i}. \quad (8.36)$$

Nótese que la fuerza del resorte es hacia arriba en este caso (apunta en sentido  $-\hat{i}$  en este sistema de coordenadas), y  $\Delta\ell$  es positivo por tratarse de una elongación. Reemplazando estas expresiones en la ecuación(8.35) y considerando la componente según  $\hat{i}$ , que es la única relevante en el problema, se obtiene

$$-k|\Delta\ell| + mg - |\vec{T}| = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{T}| = mg - k|\Delta\ell|. \quad (8.37)$$

Vemos así que la tensión del hilo es menor que el peso;  $|\vec{T}| < mg$ , porque el resorte estirado “ayuda” a sostener el cuerpo colgado.

Para mayor claridad consideraremos también el caso en el que el cuerpo de masa  $m$  está en equilibrio, suspendido de una cuerda y un resorte, pero en esta situación el resorte está comprimido, ya que la cuerda tiene una longitud menor que la longitud natural del resorte (ver figura 8.7).

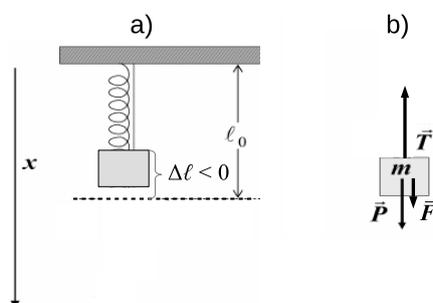


Figura 8.7: Diagrama de cuerpo aislado.

A partir de la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = 0. \quad (8.38)$$

Si elegimos el mismo sistema de coordenadas que en el ejemplo anterior,

$$\vec{F} = k|\Delta\ell|\hat{i}, \quad \vec{P} = mg\hat{i}, \quad \vec{T} = -|\vec{T}|\hat{i}. \quad (8.39)$$

Ahora la fuerza del resorte apunta hacia abajo (en sentido  $\hat{i}$ ), y si bien  $\Delta\ell$  es negativo por tratarse de una compresión, hemos elegido utilizar el módulo de  $\Delta\ell$ , para dejar en evidencia el sentido positivo de la fuerza del resorte. Reemplazando estas expresiones en la ecuación(8.38) y considerando nuevamente la

componente según  $\hat{i}$ , se obtiene

$$k|\Delta\ell| + mg - |\vec{T}| = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{T}| = mg + k|\Delta\ell|. \quad (8.40)$$

Vemos así que la tensión del hilo es mayor que el peso;  $|\vec{T}| > mg$ , porque el resorte comprimido “ayuda” al peso a empujar el cuerpo hacia abajo.

### Cuerpo que no está en equilibrio

Analicemos otro ejemplo donde se requiere averiguar la tensión que ejerce una cuerda. Veamos ahora cómo tratar cuerpos que no están en equilibrio. Calculemos cuál es la tensión que ejerce el cable que sostiene un ascensor cuando éste sube con aceleración  $\vec{a}$ .

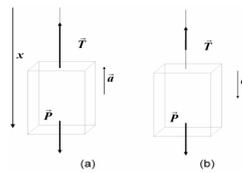


Figura 8.8: Diagrama de cuerpo aislado de un ascensor que (a) sube o (b) baja, con aceleración  $\vec{a}$ .

En la figura 8.8 se ha dibujado el diagrama de cuerpo aislado del problema. Al diagrama de cuerpo aislado se le ha añadido una indicación sobre el vector aceleración en el caso en que el ascensor sube (a) o baja (b). Otra vez se ha elegido la dirección positiva de las coordenadas hacia abajo. La segunda ley de Newton implica que

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T} &= m\vec{a} \\ mg - |\vec{T}| &= ma \\ |\vec{T}| &= m(g - a). \end{aligned} \quad (8.41)$$

Hay que notar que la primera ecuación es vectorial, pero a partir de la segunda se trabaja con las componentes de los vectores en el sistema de coordenadas elegido. Si bien  $g$  es una cantidad positiva cuyo valor estimado de  $9,8 \text{ m/s}^2$  y  $|\vec{T}|$  es siempre positivo, la componente  $a$  de la aceleración será negativa o positiva, según el ascensor esté acelerado hacia arriba o hacia abajo, respectivamente. El mayor valor de  $|\vec{T}|$  se dará cuando  $a$  sea negativo, es decir, cuando el ascensor se acelere hacia arriba, lo cual está de acuerdo con lo que se puede intuir. Por otro lado, puede verse que si el ascensor es acelerado hacia abajo con la aceleración de la gravedad (es decir, cae), la tensión se anula.

### 8.4.2. Fuerzas de contacto

Si apoyamos un cuerpo de masa  $m$  sobre una superficie horizontal como se muestra en la figura 8.9. El cuerpo tiene peso y está en reposo, de manera que tiene que haber una fuerza más que equilibre la acción de  $\vec{P}$ . Esa fuerza está provista por la superficie de apoyo y la denominamos fuerza normal  $\vec{N}$  o reacción del plano, o fuerza de contacto. Una forma de pensar el problema es que un cuerpo o sistema de cuerpos denominado *vínculo* limita el movimiento de la partícula que se desea estudiar; en ese marco, las fuerzas de contacto son también llamadas fuerza de vínculo.

$$\begin{aligned} \vec{N} + \vec{P} = 0 &\Rightarrow \vec{N} = -\vec{P} \\ \vec{P} = mg\hat{i} &\Rightarrow \vec{N} = -mg\hat{i}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

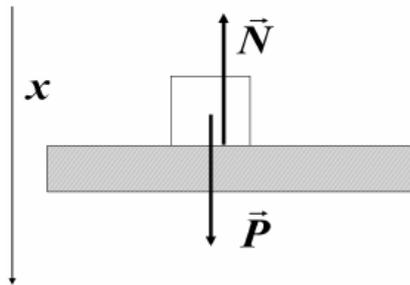


Figura 8.9: Fuerza de contacto.

El vínculo (plano de apoyo) ejerce una fuerza perpendicular a la superficie, que en este caso particular es igual al peso del cuerpo. Notemos que si la fuerza fuera menor, entonces el cuerpo se hundiría en la mesa y si fuera mayor sería expulsado. Por otra parte si el vínculo fuera capaz de ejercer fuerzas paralelas a la superficie, entonces tales fuerzas podrían acelerar (o frenar) el cuerpo. En síntesis, mientras el vínculo existe, provee la fuerza necesaria para que se cumplan las leyes de Newton.

### Ejemplo

Veamos el caso de la figura 8.10a) en que al cuerpo apoyado sobre una superficie lisa se le aplica una fuerza que, expresada en el sistema de coordenadas de la figura es  $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$ . Mientras que  $\vec{P} = -mg \hat{j}$  y  $\vec{N} = N \hat{j}$ .

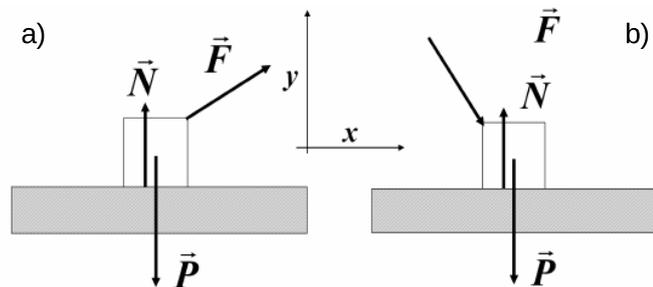


Figura 8.10: Fuerza de contacto. a) La fuerza aplicada  $\vec{F}$  tiene componente hacia arriba. b) La fuerza aplicada  $\vec{F}$  tiene componente hacia abajo.

El cuerpo sometido a la acción de estas fuerzas no está en equilibrio ya que aunque la suma de las componentes verticales de las fuerzas sea nula, una sola de las fuerzas tiene proyección sobre el eje horizontal (no hay otra fuerza que la equilibre). Por lo tanto el cuerpo sólo podrá moverse en la dirección horizontal, es decir que el vector aceleración sólo tendrá una componente no nula en esta dirección. Se cumple la segunda ley de Newton:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}, \quad (8.43)$$

que en componentes queda:

$$\begin{aligned} \text{en } x : \quad F_x &= ma_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m}; \\ \text{en } y : \quad N - mg + F_y &= 0 \Rightarrow N = mg - F_y, \end{aligned} \quad (8.44)$$

donde vemos que sólo la componente horizontal de  $\vec{F}$  es causante de la aceleración. La fuerza normal es

menor o igual que el peso del cuerpo; su módulo sería igual al peso sólo en el caso en que  $F_y = 0$ . Cabe notar que

- si  $F_y = mg$ , entonces el vínculo no ejercería acción alguna, es decir,  $N = 0$ ;
- si  $F_y > mg$  la ecuación previa sugiere que  $N < 0$ , pero esto es un contrasentido porque el vínculo sólo es capaz de evitar que el cuerpo se hunda en su seno, pero no es capaz de “atraer” el cuerpo hacia sí. Físicamente, lo que ocurre es que el cuerpo ya no está en contacto con el piso. Por lo tanto hay que escribir nuevamente las ecs. precedentes teniendo en cuenta que la normal será nula (si no hay contacto, no hay fuerzas de contacto) y la aceleración tendrá componentes en las direcciones  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} \text{en } x : \quad F_x &= ma_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m}; \\ \text{en } y : \quad -mg + F_y &= ma_y \Rightarrow a_y = \frac{F_y}{m} - g. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Un caso similar es el que se representa en la figura 8.10b) en que ahora la fuerza  $\vec{F}$  es aplicada hacia abajo. Como ya es costumbre, para analizar esta situación seguimos los siguientes pasos:

- Identificar el o los cuerpos cuyo movimiento (o equilibrio) se quiere estudiar.
- Reconocer cuáles son las fuerzas que actúan sobre él.
- Dibujar el diagrama de cuerpo aislado, como el de la figura 8.10b).
- Escribir la ecuación de la segunda ley de Newton en forma vectorial.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}. \quad (8.46)$$

- Elegir el sistema de coordenadas que resulte conveniente. En este caso, en el sistema  $x, y$  de la figura 8.10 la fuerza  $\vec{F}$  tiene componentes  $F_x > 0$  y  $F_y < 0$ . Con esta elección, los vectores de la ecuación anterior quedan:  $\vec{P} = -mg\hat{j}$ ,  $\vec{N} = N\hat{j}$ ,  $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$  y  $\vec{a} = a\hat{i}$ .
- Escribir la segunda ley de Newton en componentes.

$$\begin{aligned} \text{en } x : \quad F_x &= ma \Rightarrow a = \frac{F_x}{m}; \\ \text{en } y : \quad N - mg + F_y &= 0 \Rightarrow N = mg - F_y. \end{aligned} \quad (8.47)$$

- Resolver, es decir, encontrar las cantidades incógnitas en términos de las cantidades conocidas. En este caso estamos analizando cómo es la fuerza de vínculo y la aceleración que adquiere el cuerpo.

Se ha encontrado que  $N = mg - F_y$ , pero como  $F_y < 0$  es  $F_y = -|F_y|$ ; entonces, en este caso,  $N = mg + |F_y|$  es siempre positiva y no puede ser cero. La fuerza de vínculo sólo puede crecer con la fuerza aplicada hasta que eventualmente la superficie o el objeto no logren soportar las fuerzas aplicadas sobre ellos, lo cual no está previsto en las hipótesis de trabajo.

### Plano inclinado

Consideremos ahora un cuerpo que se desliza sobre una superficie plana y lisa que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. En este caso la segunda ley de Newton para el cuerpo queda expresada como  $\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$ .

En la figura 8.11 se muestra el diagrama de cuerpo aislado correspondiente (marcado con un óvalo) y se propone un sistema de coordenadas cuyo eje  $x$  es paralelo al plano. En consistencia con esta elección,

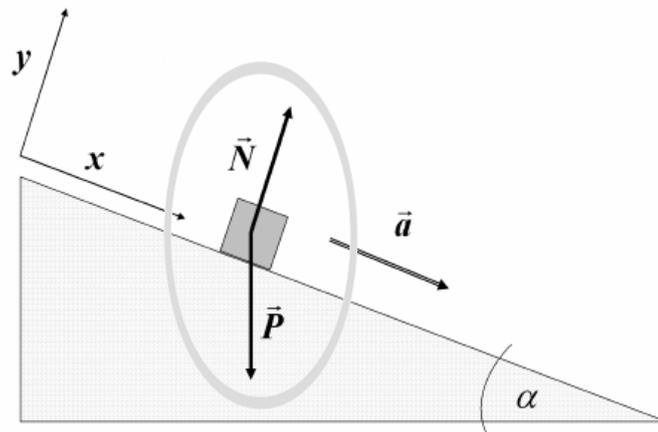


Figura 8.11: Fuerza de contacto en un plano inclinado.

el movimiento del cuerpo será unidimensional en la dirección del eje  $x$  y podemos escribir:

$$\vec{N} = N\hat{j}; \quad \vec{P} = mg \sin\alpha \hat{i} - mg \cos\alpha \hat{j} \quad \text{y} \quad \vec{a} = a_x \hat{i} \quad (8.48)$$

con lo que las ecuaciones de movimiento quedan

$$\begin{aligned} \text{en } x: \quad mg \sin\alpha &= ma_x \Rightarrow a_x = g \sin\alpha; \\ \text{en } y: \quad N - mg \cos\alpha &= 0 \Rightarrow N = mg \cos\alpha. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Vemos que si el ángulo  $\alpha$  crece, la fuerza de vínculo decrece hasta hacerse 0 cuando  $\alpha = \pi/2$ .

Resumiendo:

- Las fuerzas de vínculo son siempre normales al vínculo y apuntan hacia fuera de él.
- dependen de las fuerzas aplicadas.
- son aplicadas por objetos que limitan las posibilidades de movimiento (paredes, rieles, superficies, piso, etc.).

### 8.4.3. Fuerza centrípeta

Este tipo de fuerza puede ser ejercida por cualquier tipo de mecanismo, por lo cual no debe entenderse este apartado como la descripción de una fuerza más en cuanto al agente que la produce, sino en cuanto al tipo de movimiento con el que se relaciona; en particular, el movimiento circular, cuya cinemática ya fue tratada en detalle en el capítulo 5. Analicemos el caso de una bolita de masa  $m$  girando con velocidad de módulo uniforme en el interior de una cacerola de radio  $\rho$ . En otras palabras, estamos en presencia de un movimiento circular uniforme de radio  $\rho$ . Sabemos que la velocidad  $\vec{v}$ , tangente a la trayectoria, cambia de dirección; entonces debe existir una aceleración. Como sólo cambia la dirección pero no el módulo de  $\vec{v}$ , la aceleración debe ser perpendicular a la velocidad en todo instante (si no imponemos que el módulo de la velocidad sea constante, entonces habría también una componente tangencial de la aceleración). En el movimiento circular llamamos aceleración centrípeta a la aceleración normal a la trayectoria:

$$a_n \equiv a_c = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 \rho. \quad (8.50)$$

Si hay aceleración, debe haber una fuerza tal que  $ma_c = F_c$  y que llamamos fuerza centrípeta por ser paralela a la aceleración centrípeta:

$$\vec{F}_c = -m \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_\rho, \quad (8.51)$$

donde  $\hat{u}_\rho$  es el versor que apunta en la dirección del radio de la circunferencia de radio  $\rho$  con sentido saliente (centrífugo). Ahora nos preguntamos ¿cuál es el agente que produce esta fuerza? La única respuesta posible es que la pared evita que la bolita se salga de su trayectoria circular, obligando al cuerpo a que constantemente se desvíe de una trayectoria rectilínea. Es decir que la pared de la cacerola ejerce una fuerza de vínculo  $\vec{N}_h$  que limita el movimiento en el plano horizontal, entonces  $\vec{F}_c = \vec{N}_h$ , como puede verse en la figura 8.12a). Pero, ésta no es la única acción que ejerce la cacerola: también evita que la bolita se mueva en el eje vertical oponiéndose a la fuerza peso mediante una fuerza de vínculo vertical  $\vec{N}_v$ . En consecuencia, para describir las fuerzas que actúan en una dirección perpendicular a  $\hat{u}_\rho$ , debemos agregar una dimensión al sistema de coordenadas: la dirección vertical  $z$ . Un sistema adecuado para representar este problema es uno que tenga los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_z \equiv \hat{k}$ . El diagrama de cuerpo aislado de la figura 8.12b), muestra un corte vertical de la cacerola donde se han representado todas las fuerzas que actúan sobre la bolita, suponiendo que no hay rozamiento. Como no hay aceleración en la dirección vertical, entonces debe cumplirse que  $\vec{N}_v = -\vec{P}$ , es decir,  $N_v = mg$ .

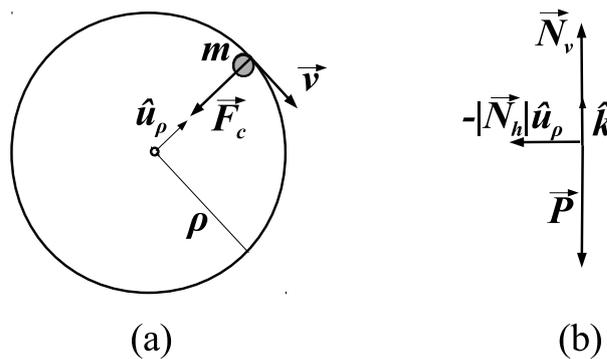


Figura 8.12: Fuerza centrípeta sobre una bolita. (a) Vista desde arriba; (b) corte lateral.

Un caso parecido es el de un cuerpo apoyado sobre una superficie lisa y horizontal, que gira alrededor de un punto fijo al cual está ligado por un hilo o cuerda inextensible. La única diferencia con el ejemplo anterior es que ahora la fuerza centrípeta responsable del cambio de dirección del cuerpo es la tensión de la cuerda.

$$\vec{F}_c = \vec{T} = -m \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_\rho. \quad (8.52)$$

En este caso la cuerda es el vínculo que limita el movimiento de la bolita y la tensión  $\vec{T}$  es la fuerza de vínculo correspondiente.

#### 8.4.4. Aplicación combinada de varias fuerzas de vínculo

Veamos cómo tratar algunos casos que involucran uno o más cuerpos ligados entre sí por cuerdas e interactuando con la superficie de apoyo.

## Ejemplo 1

Dado el sistema de cuerpos en equilibrio de la figura 8.13, nos preguntamos cómo depende la tensión  $\vec{T}_1$  del peso de los cuerpos A y B. Los cuerpos de masas  $m_A$  y  $m_B$  están ligados por un hilo. La masa  $m_A$  está además atada a la pared, mientras que  $m_B$  cuelga del hilo que la une a  $m_A$  a través de una polea sin masa ni rozamiento. Suponemos que no hay rozamiento en ninguna superficie. Describimos las fuerzas que actúan sobre  $m_A$  usando un sistema de coordenadas en el que  $x$  es horizontal con el sentido positivo hacia la derecha del dibujo e  $y$  es vertical con el sentido positivo hacia arriba. La figura 8.13 muestra el diagrama de cuerpo aislado de cada uno de los cuerpos interactuantes. Nótese que cada cuerpo debe tener su diagrama de cuerpo aislado por separado.

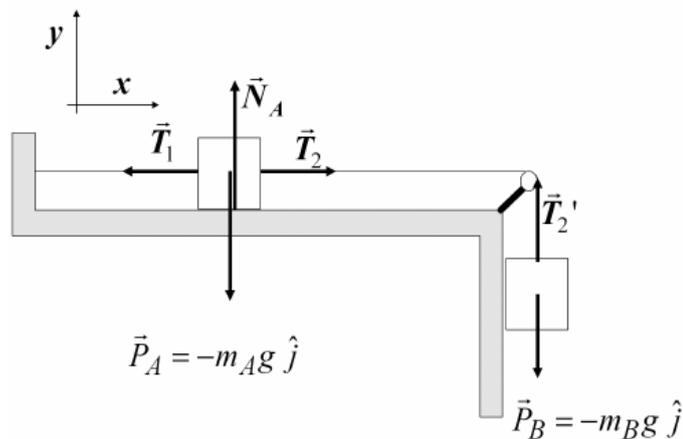


Figura 8.13: Sistema descrito en el ejemplo 1.

Sobre  $m_A$  actúan las fuerzas  $\vec{T}_1 = -|\vec{T}_1|\hat{i}$ ,  $\vec{T}_2 = |\vec{T}_2|\hat{i}$ ,  $\vec{P}_A = -m_A g \hat{j}$  y  $\vec{N}_A = |\vec{N}_A|\hat{j}$ . Y sobre  $m_B$  actúan las fuerzas  $\vec{T}_2' = |\vec{T}_2'|\hat{j}$  y  $\vec{P}_B = -m_B g \hat{j}$ . Como los cuerpos están en equilibrio, se cumplen las siguientes condiciones:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{N}_A + \vec{P}_A = 0 \quad \text{y} \quad \vec{T}_2' + \vec{P}_B = 0. \quad (8.53)$$

Escribimos a continuación las ecuaciones correspondientes a cada uno de los cuerpos en las componentes  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} \text{en } x: \quad & |\vec{T}_2| - |\vec{T}_1| = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|; \\ \text{en } y: \quad & |\vec{N}_A| - m_A g = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{N}_A| = m_A g, \\ & |\vec{T}_2'| - m_B g = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{T}_2'| = m_B g. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Pero por las propiedades de las cuerdas inextensibles que hemos visto,  $|\vec{T}_2'| = |\vec{T}_2|$ . Entonces podemos escribir  $|\vec{T}_1| = m_B g$ , por lo tanto:

$$\vec{T}_1 = -m_B g \hat{i}. \quad (8.55)$$

A veces resulta cómodo, para referirse al módulo de un vector  $|\vec{A}|$ , escribir simplemente  $A$ ; con esta notación resumida las ecuaciones anteriores se escriben de forma más compacta:

$$\begin{aligned} \text{en } x: \quad & T_2 - T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2; \\ \text{en } y: \quad & N_A - m_A g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = m_A g, \\ & T_2' - m_B g = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2' = m_B g; \end{aligned} \quad (8.56)$$

pero debe recordarse que  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_2'$  y  $N_A$  denotan los módulos de los vectores correspondientes.

### Ejemplo 2

En el ejemplo de la figura 8.14a) un cuerpo apoyado sobre una superficie rígida y lisa es acelerado por la acción de una fuerza horizontal. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son  $\vec{T} = |\vec{T}|\hat{i}$ ,  $\vec{P} = mg\hat{j}$  y  $\vec{N} = |\vec{N}|\hat{j}$ . La ecuación vectorial de movimiento del cuerpo es

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{T} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}. \quad (8.57)$$

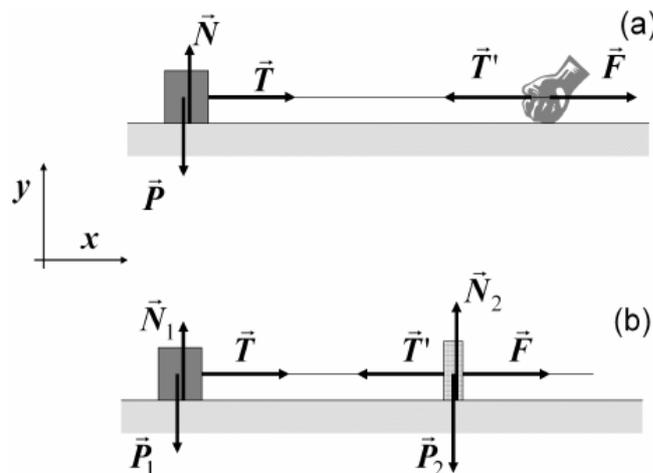


Figura 8.14: Sistemas descritos en los ejemplos 2 (a) y 3 (b).

Para escribir las ecuaciones en componentes utilizaremos la notación simplificada introducida al final del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} \text{en } x: & \quad T = ma; \\ \text{en } y: & \quad N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Por otra parte, según la tercera ley de Newton,  $\vec{F} = -\vec{T}'$  y debido a las propiedades de las cuerdas,  $\vec{T} = -\vec{T}'$ , con lo cual, resulta que  $\vec{F} = m\vec{a}$ , es decir que la cuerda transmite la fuerza ejercida por la mano, como ya habíamos discutido.

### Ejemplo 3

Analicemos las fuerzas en el sistema de cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  de la figura 8.14b), que se mueve bajo la acción de la fuerza externa  $\vec{F}$ . Suponemos conocidas  $\vec{F}$ ,  $m_1$  y  $m_2$ , de modo que las incógnitas son  $T$ ,  $T'$ ,  $a_1$  y  $a_2$ . Las ecuaciones para  $m_1$  son

$$\begin{aligned} \vec{T} + \vec{P}_1 + \vec{N}_1 &= m_1\vec{a}_1; \\ \text{en } x: & \quad T = m_1a_1; \\ \text{en } y: & \quad N_1 - m_1g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = m_1g. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Y para  $m_2$ ,

$$\begin{aligned} \vec{T}' + \vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F} &= m_2\vec{a}_2; \\ \text{en } x: & \quad F - T' = m_2a_2; \\ \text{en } y: & \quad N_2 - m_2g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = m_2g. \end{aligned} \quad (8.60)$$

En el eje vertical no hay movimiento de ninguna de las masas, así que las ecuaciones en la coorde-

nada y no aportan información relevante en este caso. Nos centramos pues con lo que ocurre según la componente  $x$ , es decir,  $T = m_1 a_1$  y  $F - T' = m_2 a_2$ , pero también sabemos que  $T = T'$  y si el hilo es inextensible, los dos cuerpos necesariamente se mueven solidarios y entonces las aceleraciones son las mismas:  $a_1 = a_2 = a$ . Con esto, las ecuaciones quedan

$$T = m_1 a ; \quad F - T = m_2 a . \quad (8.61)$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $T$  y  $a$ ), cuyas soluciones pueden obtenerse fácilmente:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} ; \quad T = \frac{m_1 F}{m_1 + m_2} . \quad (8.62)$$

#### Ejemplo 4

Las masas  $m_1$  y  $m_2$  están apoyadas sobre una superficie horizontal, en contacto entre sí y se aplica sobre una de ellas una fuerza  $\vec{F}$  paralela a la superficie y en el sentido de la otra masa, como se muestra en la figura 8.15.

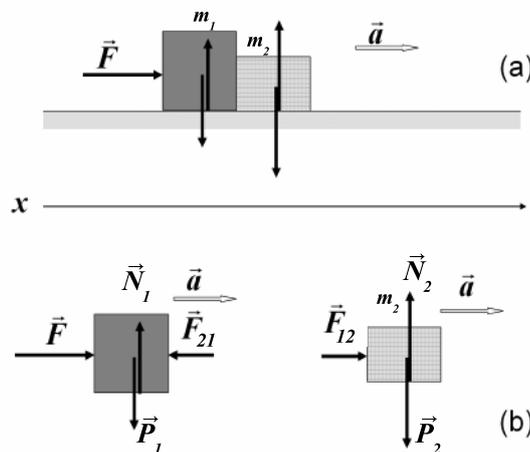


Figura 8.15: Sistema descrito en el ejemplo 4. Esquema general (a) y diagrama de cuerpo aislado de cada cuerpo (b).

Sabemos por experiencia que ambos cuerpos se moverán juntos, como si estuvieran pegados. Por lo tanto, podremos tratar el problema como el de un único cuerpo de masa  $m = m_1 + m_2$ , de manera que la ecuación de movimiento correspondiente en el sistema de coordenadas de la figura es

$$\vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_1 + m_2} , \quad (8.63)$$

ya que las ecuaciones referidas a las fuerzas verticales no aportan al movimiento (el sistema de cuerpos no se hunde en la superficie de apoyo ni se eleva sobre ella). También podemos estudiar cada masa por separado, usando en el diagrama de cuerpo aislado de la figura 8.15b). Si analizamos el movimiento de la masa  $m_2$  vemos que tiene la aceleración expresada en la ecuación(8.63), por lo tanto sobre ella hay aplicada una fuerza neta igual a

$$\vec{F}_{12} = m_2 \vec{a} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F} . \quad (8.64)$$

En esta expresión se puede notar que el módulo de la fuerza aplicada sobre la masa  $m_2$  es menor que  $|\vec{F}|$ , ya que se cumple que  $m_2/(m_1 + m_2) < 1$ . En la dirección  $x$  la masa  $m_2$  solamente está en contacto con la masa  $m_1$ , por lo tanto la fuerza  $\vec{F}_{12}$  debe estar aplicada por  $m_1$ .

Sobre la masa  $m_1$  actúa directamente la fuerza  $\vec{F}$ , pero ésta no puede ser la única fuerza horizontal aplicada, ya que si lo fuera, el cuerpo tendría una aceleración  $\vec{a} = \vec{F}/m_1$ , lo cual es incorrecto según ecuación(8.63). Llamemos  $\vec{F}_{21}$  a la fuerza que ejerce el bloque 2 sobre el bloque 1. De acuerdo a esto y tal como se muestra en el diagrama de cuerpo aislado, en la dirección horizontal la ecuación de movimiento es

$$\vec{F} + \vec{F}_{21} = m_1 \vec{a}. \quad (8.65)$$

Entonces,

$$\vec{F}_{21} = m_1 \vec{a} - \vec{F} = \frac{m_1 \vec{F}}{m_1 + m_2} - \vec{F} = -\frac{m_2 \vec{F}}{m_1 + m_2} = -\vec{F}_{12}, \quad (8.66)$$

es decir, se cumple la tercera ley de Newton. No debemos caer en el error de decir que estas fuerzas se anulan y que podría no tenérselas en cuenta, ya que  $\vec{F}_{12}$  está aplicada al cuerpo 2 y  $\vec{F}_{21}$  al cuerpo 1. Estas fuerzas de contacto podrían medirse si colocáramos un resorte u otro dispositivo sensible a la compresión entre ambas masas.

En este último ejemplo hemos tratado un mismo problema de dos maneras. Cuando consideramos el sistema como un único bloque obtuvimos la aceleración correcta sin necesidad de considerar las fuerzas de contacto entre ambos bloques ya que en esta descripción éstas son fuerzas *internas*. En cambio, cuando consideramos cada masa por separado, las fuerzas de contacto son fuerzas externas. Entonces, de estos ejemplos vemos que

- Sólo las fuerzas exteriores al sistema observado son las que producen aceleración y por lo tanto, son las únicas que deben tenerse en cuenta al escribir las ecuaciones de Newton.
- La fuerza que un cuerpo le ejerce a otro es igual en módulo y dirección pero de sentido opuesto a la que el otro cuerpo le ejerce al primero, tal como vimos al presentar la tercera ley de Newton.

## SECCIÓN 8.5

# Fuerzas de rozamiento

Hemos experimentado que cuando ejercemos fuerza sobre un cuerpo apoyado sobre una superficie horizontal, se logra, con mayor o menor esfuerzo, que el cuerpo se mueva (ver figura 8.1). Primero el cuerpo está quieto y si se incrementa la fuerza aplicada por encima de cierto valor, empieza a moverse. En términos de la segunda ley de Newton, podemos decir que como el cuerpo no se mueve aun cuando lo empujamos con una fuerza  $\vec{F}$ , debe existir otra fuerza, que llamaremos  $\vec{f}_e$ , que está contrarrestando el efecto de la primera:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f}_e = 0. \quad (8.67)$$

Según se muestra en la figura 8.16, como en la dirección vertical no hay aceleración, sabemos que el peso y la fuerza normal del plano de apoyo se cancelan mutuamente. Esto nos habilita a omitir estas dos fuerzas, de manera que debe cumplirse:

$$\vec{F} + \vec{f}_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_e = -\vec{F}. \quad (8.68)$$

La fuerza  $\vec{f}_e$  se denomina fuerza de rozamiento estático. Es importante notar que la magnitud de esta fuerza depende de la fuerza externa  $\vec{F}$  aplicada; en particular, podemos ver de la ecuación anterior que  $\vec{f}_e$  tiene igual módulo que  $\vec{F}$  y sentido opuesto. La experiencia indica que al aumentar la intensidad de la fuerza  $\vec{F}$  aplicada, eventualmente se logra que comience el movimiento; deducimos entonces que el módulo de la fuerza de rozamiento estático sólo puede crecer acompañando el crecimiento de fuerza aplicada hasta un cierto valor máximo  $|\vec{f}_e \text{ máx}|$ . Se comprueba experimentalmente que, como se indica en

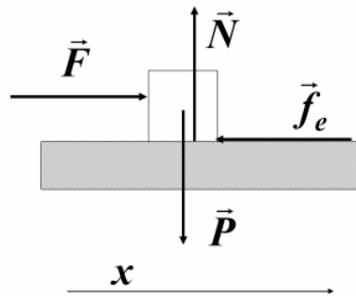


Figura 8.16: Fuerza de rozamiento estático.

la figura 8.17,

$$|\vec{f}_e \text{ máx}| = \mu_e |\vec{N}|. \quad (8.69)$$

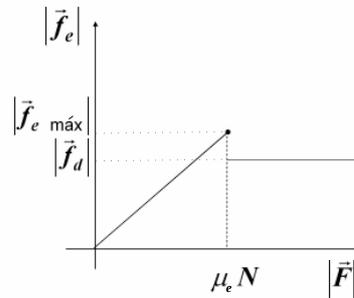


Figura 8.17: Fuerzas de rozamiento estático y dinámico.

Es decir, la máxima fuerza de rozamiento estático posible entre un cuerpo y una superficie es proporcional al módulo de la fuerza normal que ejerce la superficie sobre el cuerpo, aunque claramente **no** tiene la misma dirección que  $\vec{N}$ . La constante de proporcionalidad  $\mu_e$  se denomina coeficiente de rozamiento estático y depende de las características de las dos superficies en contacto. Si la fuerza aplicada supera el valor  $|\vec{f}_e \text{ máx}|$ , el cuerpo finalmente se pone en movimiento. En esta situación, si dejamos de aplicar la fuerza  $\vec{F}$ , la experiencia nos dice que en un experimento real el móvil comenzará a disminuir la velocidad hasta detenerse, tanto más rápidamente cuanto más rugosas sean las superficies en contacto. Esto nos dice que hay involucrada otra fuerza que llamaremos  $\vec{f}_d$  o fuerza de rozamiento dinámico. Esta fuerza siempre se opone al movimiento, siendo paralela a la velocidad del cuerpo y de sentido contrario. Por la segunda ley de Newton se tiene que

$$\vec{F} + \vec{f}_d = m\vec{a}. \quad (8.70)$$

En cuanto al módulo de  $\vec{f}_d$ , se comprueba que en general, se puede aproximar por un valor constante (ver figura 8.17) y que es proporcional a la fuerza normal. Entonces, podemos escribir

$$\vec{f}_d = -\mu_d |\vec{N}| \hat{v}, \quad (8.71)$$

donde el coeficiente de proporcionalidad  $\mu_d$  es el llamado coeficiente de rozamiento dinámico y  $\hat{v}$  es el versor velocidad. De las ecs. (8.69) y (8.71) puede verse que los coeficientes  $\mu_e$  y  $\mu_d$  son adimensionales. Además se cumple que la fuerza de roce dinámico es menor que la fuerza de roce estático máximo, como puede verse en la figura 8.17. El valor que tienen las cantidades  $\mu_e$  y  $\mu_d$  es característico de las

superficies y por lo general se cumple que

$$\mu_e < 1 \quad \text{y} \quad \mu_d < \mu_e. \quad (8.72)$$

A continuación sintetizamos las características principales de las fuerzas de rozamiento:

- hay rozamiento estático sólo si actúa una fuerza externa
- sólo hay rozamiento dinámico si hay movimiento relativo entre dos superficies
- la fuerza de rozamiento dinámico tiene la misma dirección y sentido opuesto a la velocidad
- el rozamiento estático alcanza un valor máximo que es proporcional a la fuerza normal.
- la fuerza de rozamiento dinámico es aproximadamente constante y también es proporcional a la fuerza normal (con un factor menor de proporcionalidad)

## SECCIÓN 8.6

# Fuerza gravitatoria

La fuerza que la Tierra ejerce sobre los cuerpos, llamada fuerza gravitatoria, tiene características algo diferentes de las fuerzas que tratamos hasta ahora, pues no es necesario el contacto directo entre el cuerpo y la Tierra para que exista interacción entre ellos. Hay otras fuerzas que comparten esta característica; tal es el caso de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: la nuclear débil, la nuclear fuerte, la electromagnética y la gravitatoria, ya mencionada, que es la más débil. Para que exista fuerza gravitatoria debe haber dos masas, y no necesariamente la Tierra o un planeta debe ser una de ellas; sin embargo, como la interacción gravitatoria es débil, sus efectos sólo son fácilmente apreciables cuando está involucrada una masa grande. La interacción gravitatoria entre masas pequeñas es difícil de medir o detectar; sin embargo existe. Este punto fue demostrado por el físico británico Henry Cavendish en 1797<sup>6</sup>.

### 8.6.1. Marco histórico

Cada civilización en cada región geográfica ha desarrollado modelos para explicar el movimiento de los cuerpos celestes. Las ideas existentes en Europa hacia el siglo XVI, para describir el movimiento de la luna, los planetas y estrellas eran, básicamente los siguientes:

- Modelo geocéntrico. Todos los cuerpos celestes giran alrededor de la Tierra. La Tierra no tiene movimiento de traslación ni de rotación. Esta idea muy antigua, que viene de la civilización griega (Aristóteles, 384 aC-322 aC), tenía, al menos, mayor asidero fáctico que otras que involucraban causas improbables.

Claudio Ptolomeo de Alejandría (c. 100-c. 170) perfeccionó el sistema geocéntrico de Aristóteles basado en esferas simples, reemplazándolo por otro sistema geocéntrico según el cual los planetas giran en torno a una esfera pequeña (epiciclo) que a su vez gira en torno a una mayor (deferente), centrada en un punto cercano a la Tierra. El modelo geocéntrico aristotélico o ptolemaico estuvo vigente durante casi veinte siglos y su aceptación está ligada al desarrollo de la filosofía durante ese período.

<sup>6</sup>Véase una versión moderna de este experimento en <https://www.youtube.com/watch?v=11sLusnVZwM>

- Modelo heliocéntrico: los planetas, incluida la Tierra, giran alrededor del Sol. Esta teoría, inicialmente enunciada por Aristarco de Samos (310 aC.-c. 230 aC) pasó desapercibida o fue descartada durante unos dieciocho siglos, hasta que fue retomada y perfeccionada por Nicolás Copérnico (1473-1543). En esta última versión, puede resumirse en los siguientes puntos:
  1. Los movimientos celestes son uniformes, eternos, y **circulares o compuestos de diversos ciclos (epiciclos)**<sup>7</sup>.
  2. **El centro del universo se encuentra cerca del Sol.**
  3. Orbitando alrededor del Sol, en orden, se encuentran Mercurio, Venus, la Tierra, **la Luna**, Marte, Júpiter y Saturno (aún no se conocían Urano y Neptuno.)
  4. Las estrellas son objetos distantes que permanecen fijos y por lo tanto no orbitan alrededor del Sol.
  5. La Tierra tiene tres movimientos: la rotación diaria, la revolución anual, **y la inclinación anual de su eje.**
  6. El movimiento retrógrado de los planetas es explicado por el movimiento de la Tierra.
  7. La distancia de la Tierra al Sol es pequeña comparada con la distancia a las estrellas.

Esta visión fue muy resistida por razones filosóficas y religiosas y porque no explicaba todas las observaciones. Si bien hoy sabemos que este modelo no es correcto, al menos proveyó un marco de referencia inercial desde el cual describir un problema de movimiento. Por otro lado, se parece mucho más a la realidad que el modelo ptolemaico.

El siguiente gran aporte para resolver el problema del movimiento de los astros vino a través del sustento experimental que proveyó el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), recolectando datos sistemáticos y precisos. La calidad de los datos astronómicos que recogió llega al límite de lo que es accesible al ojo humano sin instrumentos ópticos. Su gran labor observacional, le permitió desechar algunos modelos existentes e incluso llegó a afirmar que los cielos no son “inmutables” (como había enunciado Aristóteles) como consecuencia de su estudio de la aparición en el cielo de una estrella nueva o “nova” en 1572. Se sabe ahora que ese hecho fue la explosión de una supernova (estrella muy masiva que al no poder desarrollar más reacciones nucleares se enfría, colapsa a su propia gravedad y luego se expande súbitamente).

El astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler (1571-1630) heredó de Brahe la colección más abundante y precisa de datos planetarios. Con los datos sobre la órbita de Marte abandonó el postulado de la circularidad de las órbitas y pudo enunciar tres leyes que reconciliaban los datos de Brahe con el modelo heliocéntrico. Adoptando el marco de referencia de Copérnico, presentó la información cinemática del movimiento de algunos planetas en una forma sencilla:

1. Los planetas giran en órbitas elípticas, con el sol situado en uno de los focos de la elipse.
2. La línea recta que une al planeta con el sol, barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. La razón entre el cuadrado de los períodos de rotación alrededor del Sol de dos planetas cualesquiera es igual al cubo de las razones de sus distancias máximas al Sol:  $\frac{T^2}{r^3} = cte$ .

Paralelamente, las observaciones de Galileo, usando el telescopio, proveyeron más datos precisos y sistemáticos. Finalmente, Isaac Newton concibe una teoría según la cual el movimiento de los astros puede explicarse a través de una única ley, que maravillosamente es la misma que explica la caída de los cuerpos hacia el suelo.

---

<sup>7</sup>En negrita se destacan las afirmaciones erróneas de la teoría copernicana. Algunas no subrayadas no son exactas, pero se pueden considerar correctas haciendo una interpretación laxa. Por ejemplo, los movimientos de los cuerpos celestes no son eternos, pero son prácticamente inmutables en una escala de tiempo compatible con la historia del hombre.



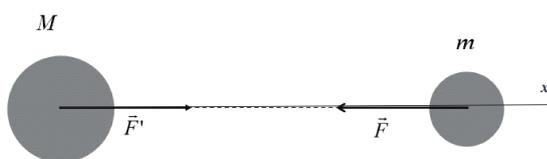


Figura 8.19: Atracción gravitatoria.

general, ya que afecta el movimiento de los cuerpos independientemente del tipo de fuerza que se le aplique. Por ejemplo, si sobre un cuerpo de masa inercial  $m_i$  un resorte aplica una fuerza  $\vec{F}$ , el cuerpo adquiere una aceleración  $\vec{a} = \vec{F}/m_i$ ; si sobre ese mismo cuerpo la Tierra ejerce su influencia gravitatoria, la aceleración experimentada por el cuerpo será, en módulo,  $a = F/m_i = GM_g m_g / (m_i r^2)$ .

Sin embargo, hasta donde la precisión de los experimentos ha permitido, se ha observado experimentalmente que,  $m_g = m_i$ . Esta sorprendente relación nos exime de distinguir entre ambas magnitudes y, por lo tanto, a partir de ahora designaremos indistintamente cualquiera de ellas simplemente como “masa”.

#### 8.6.4. Tiro vertical a gran altura

Consideremos ahora el movimiento de un cuerpo de masa  $m$  bajo la acción de la fuerza gravitatoria de la Tierra, dada por la ecuación(8.73). En primer lugar haremos la suposición de que la Tierra es un sistema inercial, es decir, no consideraremos el movimiento de rotación ni la traslación en su órbita<sup>8</sup>. Elegimos un sistema de coordenadas polares con origen en el centro de la Tierra, como se muestra en la figura 8.20.

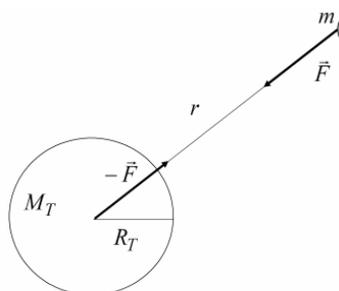


Figura 8.20: Tiro vertical a gran altura.

En ese sistema,

$$\vec{F} = -G \frac{mM_T}{r^2} \hat{u}_\rho, \quad (8.74)$$

donde  $r$  se mide desde el centro de la Tierra hasta la posición del cuerpo,  $M_T$  es la masa de la Tierra y  $\hat{u}_\rho$  es el versor radial. Para estimar cuál es el valor de  $M_T$ , analicemos que el peso de un cuerpo sobre la superficie terrestre es

$$P = mg, \quad \text{pero también} \quad P = GmM_T/R_T^2, \quad (8.75)$$

<sup>8</sup>Dadas las velocidades de rotación y traslación involucradas, resulta que la aproximación efectuada es muy buena para el análisis que sigue.

y como  $R_T = 6400 \text{ km} = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$  y  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , entonces

$$M_T = \frac{gR_T^2}{G} \simeq 6 \times 10^{24} \text{ kg}. \quad (8.76)$$

Este valor coincide con el valor actualmente aceptado  $(5,97223 \pm 0,00008) \times 10^{24} \text{ kg}$ .

De la ecuación(8.74) y la segunda ley de Newton puede escribirse la ecuación de movimiento para el cuerpo de masa  $m$ :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M_T}{r^2}. \quad (8.77)$$

Encontrar la función posición de la masa  $m$ ,  $r(t)$ , presenta cierta dificultad porque hay que resolver una ecuación diferencial en que la derivada segunda de la función que se desea encontrar es inversamente proporcional al cuadrado de esa función. Entonces utilizaremos la siguiente estrategia: recordemos que el primer miembro de la ecuación(8.77) se puede escribir como

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr} v = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} v^2 \right). \quad (8.78)$$

También, en el segundo miembro de la ecuación(8.77) podemos reemplazar  $-\frac{1}{r^2}$  por  $\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right)$ , entonces queda:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{GM_T}{r} \right), \quad (8.79)$$

o bien,

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{d}{dr} \left( \frac{GM_T}{r} \right) = 0, \quad (8.80)$$

es decir,

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM_T}{r} \right) = 0. \quad (8.81)$$

Esta última ecuación indica que la cantidad  $\frac{1}{2} v^2 - \frac{GM_T}{r}$  es una constante de movimiento. Multiplicando por la masa, obtenemos una magnitud que sigue siendo constante y que tiene unidades de energía:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM_T}{r}. \quad (8.82)$$

El término que involucra la velocidad es la energía cinética  $E_c$ , mientras que el otro término, que depende de la posición, es la energía potencial  $E_p$ . Notemos que si  $r \rightarrow \infty$  entonces  $E_p \rightarrow 0$  y si  $r \rightarrow 0$  entonces  $E_p \rightarrow -\infty$ . A partir de la ecuación(8.82) es posible despejar el módulo de la velocidad en función de la posición:

$$v(r) = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM_T}{r}}, \quad (8.83)$$

donde el signo + indica que el cuerpo va subiendo y el signo -, que va bajando. Como  $v = \frac{dr}{dt}$ , se puede escribir:

$$dr = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM_T}{r}} dt. \quad (8.84)$$

El siguiente paso en el procedimiento se usa frecuentemente para resolver ecuaciones diferenciales; se llama *separación de variables* y consiste en llevar a cada miembro de la igualdad sólo un tipo de variables. En este caso dejaremos el tiempo  $t$  de un lado y el resto de la función, que contiene a la

variable  $r$  pero no al tiempo, del otro:

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM_T}{r}}} . \quad (8.85)$$

Luego podemos integrar para obtener  $t = t(r)$ , y de allí eventualmente,  $r = r(t)$ , si es que sabemos resolver la integral...

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM_T}{r}}} \quad (8.86)$$

Aunque todavía no disponemos de una expresión explícita de la función de movimiento, sí podemos obtener cierta información sobre el movimiento a partir de la expresión de la energía. La cantidad  $E$  de la ecuación(8.82), como buena constante de movimiento, tiene el mismo valor para todo tiempo. Supongamos que en el punto de partida el cuerpo está a una distancia  $r_0$  y tiene velocidad  $v_0$ . Entonces la velocidad del cuerpo en una posición genérica  $r$  será

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2GM_T \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)} . \quad (8.87)$$

Lo primero que podemos ver es que si  $r > r_0$ , entonces  $|v| < |v_0|$ , es decir, el cuerpo va cada vez más lento a medida que sube. Otra cosa importante a considerar es que si

$$2GM_T \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) > v_0^2 , \quad (8.88)$$

es decir, si

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2GM_T} , \quad (8.89)$$

entonces el radicando es negativo y  $v$  es imaginaria. Esto significa que el móvil no puede ir más allá de

$$r_{\text{máx}} = \frac{1}{\frac{1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2GM_T}} . \quad (8.90)$$

Esta es la máxima distancia al centro de la Tierra a la que puede llegar un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba desde la posición  $r_0$  con velocidad inicial  $v_0$ . Otra forma de interpretar la ecuación (8.87) es que para llegar a una posición  $r$ , el proyectil debe partir con una velocidad

$$v_0^2 > v_{\text{mín}}^2 = 2GM_T \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) , \quad (8.91)$$

ya que si  $v_0 = v_{\text{mín}}$ , entonces  $v = 0$ : el cuerpo llega hasta ahí nomás y empieza a caer. ¿Es posible que un cuerpo sea lanzado de tal manera que no vuelva nunca, es decir, que escape al alcance de la fuerza gravitatoria de la Tierra? Sí, sólo basta con hacer  $r \rightarrow \infty$  en la ecuación(8.87) y despejar la velocidad inicial necesaria para alcanzar la posición de retorno, es decir en la cual  $v = 0$ :

$$v_e = v_0 = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}} ; \quad (8.92)$$

$v_e$  se denomina velocidad de escape. Si el objeto es lanzado desde la superficie terrestre, entonces  $r_0 = R_T$  y

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} , \quad (8.93)$$

donde la última igualdad sale de la ecuación(8.76). Puede verse que la velocidad de escape no depende

de la masa del cuerpo lanzado, sino de la masa del planeta desde el cual se lanza.

El análisis que acabamos de presentar es válido para cualquier planeta. Compruebe que la velocidad de escape de la Tierra es  $v_e=11,2 \text{ km/s} = 40320 \text{ km/h}$  y que las de los siguientes cuerpos celestes son como se muestra en la tabla 8.1

Luna	Marte	Venus	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
2,38 km/s	5,027 km/s	10,36 km/s	59,54 km/s	35,49 km/s	21,3 km/s	23,71 km/s

Tabla 8.1: Velocidad de escape para distintos cuerpos celestes.

Analicemos por último cómo varía el peso de un cuerpo cuando éste se aleja de la Tierra en dirección radial. La dependencia del peso con la distancia al centro está dada por:

$$P = G \frac{mM_T}{r^2}, \quad (8.94)$$

mientras que si la variable es la distancia  $h$  medida desde la superficie, la expresión es

$$P = G \frac{mM_T}{(R_T + h)^2}. \quad (8.95)$$

Como ejemplo, en la tabla 8.2 se muestra la variación porcentual  $(\Delta P)/P$  del peso con la distancia a la superficie de la Tierra.

$h$ (m)	$(\Delta P)/P$ (%)
1000	0,03
10000	0,3
30000	0,9

Tabla 8.2: Variación porcentual  $(\Delta P)/P$  del peso con la distancia a la superficie de la Tierra..

Esta tabla nos muestra que la práctica del alpinismo no es un buen método para bajar de peso. También nos sugiere que el peso de un cuerpo es *razonablemente* constante mientras no se lo aparte *demasiado* de la superficie de la Tierra. Las palabras “razonablemente” y “demasiado” son deliberadamente ambiguas, para indicar que todo dependerá de la precisión con que se pretenda describir el peso de ese cuerpo.

### 8.6.5. Satélite en órbita circular

Consideremos un satélite de masa  $m$  orbitando alrededor de la Tierra con una órbita circular cuyo centro coincida con el centro del planeta. La primera pregunta que surge es si es posible tal movimiento. La respuesta es que sí, siempre que se aplique sobre el satélite la fuerza necesaria para proveer la aceleración compatible con un movimiento circular<sup>9</sup>. Ya sabemos que la fuerza gravitatoria ejerce una atracción hacia el centro de la Tierra, por lo tanto esta es la fuerza centrípeta requerida. Además, si la órbita es circular, la fuerza centrípeta será de módulo constante, ya que la distancia  $r$  en la ecuación(8.74) es constante, lo que nos lleva a que el movimiento circular será uniforme.

<sup>9</sup>Por otra parte esto no contradice la primera ley de Kepler, ya que una circunferencia es un caso particular de elipse.

Sabemos que para el módulo de la aceleración (centrípeta) podemos escribir, por un lado,

$$a = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{gR_T^2}{r^2}, \quad (8.96)$$

donde la última igualdad se cumple en virtud de la ecuación(8.76). Por otro lado, tenemos que

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (8.97)$$

Igualando las últimas dos ecuaciones podemos despejar el módulo de la velocidad del satélite:

$$v^2 = \frac{gR_T^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{g}{r}}R_T. \quad (8.98)$$

El período de revolución esta dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{gR_T}}r^{3/2}, \quad (8.99)$$

o bien,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{gR_T^2}r^3, \quad (8.100)$$

Esta última ecuación no es otra cosa que la tercera ley de Kepler aplicada a este caso. La segunda, también se cumple: es fácil ver que si el movimiento es circular y uniforme, la línea que une el satélite con la Tierra barre áreas iguales en tiempos iguales.

Tanto en este ejemplo, como en cualquier otro que involucre la ley de atracción gravitatoria, hay que tener en cuenta que  $r$  es la distancia entre los centros de los cuerpos interactuantes (o más precisamente entre los centros de masa, cuya definición veremos más adelante); por este motivo, no debe medirse desde la superficie del planeta, sino siempre desde el centro.

## SECCIÓN 8.7

# Fuerzas viscosas

Hemos analizado el movimiento de distintos cuerpos a los cuales se les aplica diferentes fuerzas. En algunos casos hay una única fuerza aplicada sobre el cuerpo y en otros casos, más de una fuerza. Sin embargo, algunas de las descripciones realizadas parecen no reflejar lo que observamos en nuestra vida cotidiana. Cuando analizamos el movimiento de cuerpos sobre los cuales está aplicada únicamente la fuerza peso, todos ellos adquieren la misma aceleración ( $\vec{g}$ ). Por lo tanto, si dejamos caer desde la misma altura dos cuerpos, deberían caer juntos, es decir, su altura con respecto al piso debería ser la misma para todo instante.

Consideremos ahora el siguiente experimento sencillo: tomemos dos hojas de papel, pleguemos una de ellas formando una pelota, y dejemos caer ambas desde la misma altura. El resultado de nuestra observación será que la hoja sin plegar caerá más lentamente que aquella con la que formamos una pelota. Esto evidencia que los dos cuerpos tuvieron diferentes aceleraciones y por lo tanto, diferentes fuerzas aplicadas. En ambos casos actúa la fuerza peso, que es igual para ambas hojas de papel, pero además, debemos tener en cuenta el efecto de la atmósfera sobre el movimiento de los cuerpos. La única conclusión posible es que este efecto no es el mismo para las dos hojas.

Hasta ahora habíamos supuesto que los cuerpos caían en el vacío, pero no siempre es posible des-

preciar el efecto del ambiente sobre el movimiento de los cuerpos, como acabamos de ver. Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido (ya sea gaseoso o líquido), aparte de la fuerza peso y el empuje, actúa sobre él una fuerza de rozamiento debida el medio, la cual se suele denominar *fuerza viscosa*. Esta fuerza se origina en la resistencia de las moléculas del fluido a desplazarse para dejar que el cuerpo avance. Se puede intuir que esta fuerza dependerá de la velocidad relativa al medio, de la forma cuerpo y de las características del fluido en el que se mueve. En particular, las magnitudes relevantes del fluido para determinar la fuerza viscosa son la densidad y la viscosidad, donde esta última está relacionada con la resistencia que puede oponer el fluido a la deformación. Debido a que esta fuerza se origina por la interacción entre el cuerpo y todas las moléculas que se encuentran en su dirección de movimiento, solo podemos dar una expresión fenomenológica de la misma. Por otra parte, no existe una única expresión para la fuerza viscosa, sino que esta depende de la velocidad que pueda alcanzar el cuerpo y de las características del medio.

Las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo de masa  $m$  que se mueve en el seno de un líquido viscoso son el peso, el empuje y la fuerza viscosa. (ver figura 8.21)

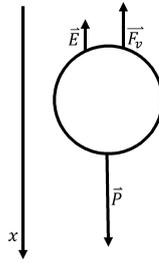


Figura 8.21: Fuerzas aplicadas sobre un cuerpo que se mueve en el seno de un líquido.

Si el cuerpo se mueve en el seno de un líquido muy viscoso no alcanzará altas velocidades. Para este caso particular la expresión que describe la fuerza viscosa es:

$$\vec{F}_v = -D\eta\vec{v} = -D\eta v \hat{i}, \quad (8.101)$$

donde  $D$  es una constante que depende de la geometría del cuerpo (por ejemplo para una esfera  $D = 6\pi R$ ) y  $\eta$  es la viscosidad del líquido. Teniendo en cuenta que el empuje corresponde al peso del fluido desalojado, las expresiones para las fuerzas peso y empuje son:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= mg \hat{i}; \\ \vec{E} &= -V_c \rho_f g \hat{i}, \end{aligned} \quad (8.102)$$

donde  $m$  y  $V_c$  son la masa y volumen del cuerpo respectivamente, y  $\rho_f$  es la densidad del fluido. Como en este ejemplo consideraremos que el movimiento es unidimensional, omitiremos los versores en el desarrollo matemático. También, sin pérdida de generalidad, supondremos que  $v(0) = 0$  y  $x(0) = 0$  (queda como ejercicio repetir los cálculos suponiendo que la velocidad y la posición iniciales son distintas de cero).

La ecuación de movimiento del cuerpo será

$$ma = mg - V_c \rho_f g - D\eta v. \quad (8.103)$$

Antes de determinar las funciones velocidad y posición del cuerpo en función del tiempo analicemos cualitativamente la ecuación (8.103). En  $t = 0$  la aceleración del cuerpo será

$$a = g - \frac{V_c \rho_f}{m} g. \quad (8.104)$$

El móvil, inicialmente en reposo, comenzará a desplazarse hacia abajo incrementando su velocidad. Cuando la velocidad es diferente de cero la aceleración del cuerpo será

$$a = g - \frac{V_c \rho_f}{m} g - \frac{D\eta}{m} v, \quad (8.105)$$

e irá disminuyendo a medida que la velocidad aumente. En un determinado instante la aceleración se anula y la velocidad toma un valor  $v_l$ , denominado *velocidad límite*.

$$g - \frac{V_c \rho_f}{m} g - \frac{D\eta}{m} v_l = 0; \quad (8.106)$$

despejando obtenemos:

$$v_l = g \frac{m - V_c \rho_f}{D\eta}. \quad (8.107)$$

Luego de que el cuerpo alcance la velocidad límite ( $v = v_l$ ) mantendrá su velocidad constante. Escribiendo la masa del móvil en términos de su densidad ( $\rho_c$ ), la expresión de la velocidad límite queda

$$v_l = \frac{g V_c}{D\eta} (\rho_c - \rho_f), \quad (8.108)$$

y para el caso particular de una esfera,

$$v_l = \frac{2R^2 g}{9\eta} (\rho_c - \rho_f). \quad (8.109)$$

Usando esta última ecuación se puede calcular, por ejemplo, la velocidad final de una gota de lluvia. Si la viscosidad del aire fuera nula, la ecuación(8.103) nos muestra que la aceleración sería constante, con lo cual la velocidad alcanzada por las gotas sería tan alta que en lugar de usar paraguas, deberíamos usar casco. En otro ejemplo de aplicación de la ecuación(8.109), usando valores tabulados de viscosidad y densidad, es posible obtener la velocidad límite de una esfera de aluminio de 0,5 cm de diámetro moviéndose en glicerina a 20 °C como  $v_l = 5,2 \text{ cm/s}$ .<sup>10</sup>

Ahora determinaremos la función de movimiento del cuerpo que se mueve en el seno del líquido. La aceleración está dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = \alpha - \beta v, \quad (8.110)$$

donde

$$\alpha = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_c} \right) \quad \text{y} \quad \beta = \frac{D\eta}{V_c \rho_c}. \quad (8.111)$$

A partir de la ecuación (8.110) podemos escribir

$$\int_0^v \frac{dv}{\alpha - \beta v} = \int_0^t dt. \quad (8.112)$$

Integrando obtenemos

$$t = -\frac{1}{\beta} \ln(\alpha - \beta v) \Big|_0^v = -\frac{1}{\beta} \ln \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha} v \right), \quad (8.113)$$

y la expresión de la velocidad del cuerpo en función del tiempo es:

$$v(t) = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}). \quad (8.114)$$

A partir de las definiciones de  $\alpha$  y  $\beta$  y de la ecuación (8.108) puede verse que  $\frac{\alpha}{\beta} = v_l$ , con lo cual la

<sup>10</sup>Recíprocamente, utilizando la ecuación (8.109), y midiendo la velocidad límite de una esfera que se mueve en el seno de un líquido de alta viscosidad es posible determinar de manera simple esta viscosidad.

función velocidad puede escribirse como

$$v(t) = v_l(1 - e^{-\beta t}). \quad (8.115)$$

Integrando la función velocidad con respecto al tiempo obtenemos la función posición

$$x(t) = \int_0^t v_l(1 - e^{-\beta t}) dt. \quad (8.116)$$

Luego,

$$x(t) = v_l t \Big|_0^t + \frac{v_l}{\beta} e^{-\beta t} \Big|_0^t = v_l t + \frac{v_l}{\beta} (e^{-\beta t} - 1). \quad (8.117)$$

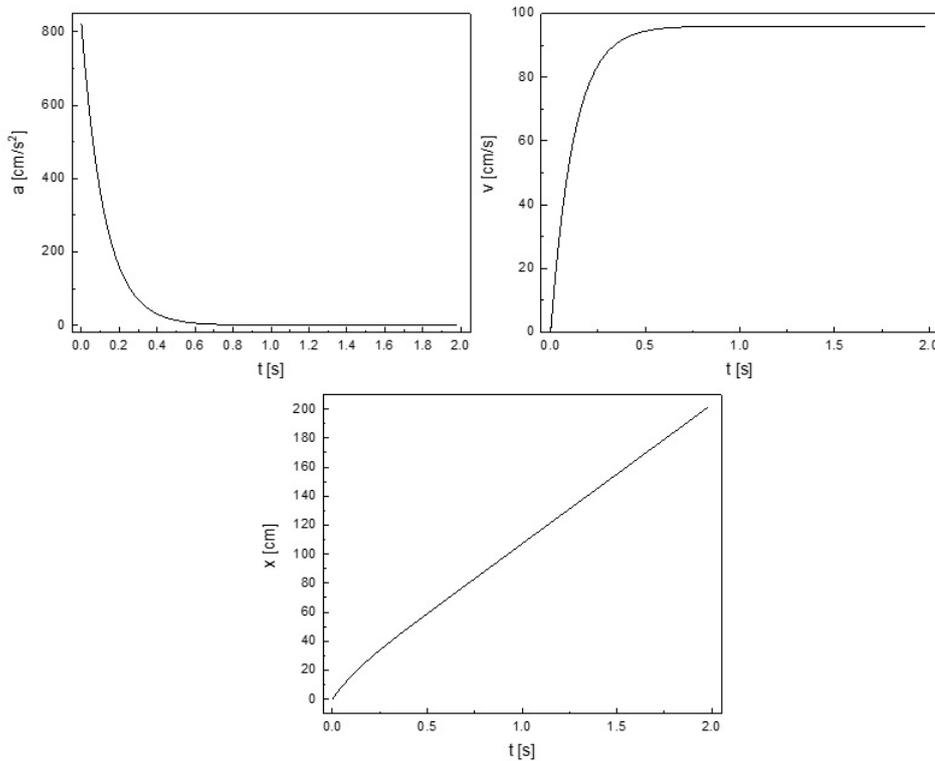


Figura 8.22: Aceleración, velocidad y posición en función del tiempo de una esfera de hierro de 1 cm de radio cayendo en glicerina

En la figura 8.22 se muestran las funciones aceleración, velocidad y posición de una esfera de hierro de 1 cm de radio cayendo en glicerina. Se ve claramente que a medida que la aceleración se aproxima a cero la velocidad va alcanzando su valor límite y la función de movimiento se aproxima a un comportamiento lineal.

Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido de baja viscosidad actúan las mismas fuerzas que se grafican en la figura 8.21. En este caso, el cuerpo puede alcanzar velocidades grandes, y se observa que la fuerza viscosa puede expresarse de la siguiente manera:

$$\vec{F}_v = -\frac{1}{2} C_d A \rho_f v^2 \hat{i}, \quad (8.118)$$

donde  $C_d$  es una constante adimensional denominada coeficiente de arrastre y depende de la forma del cuerpo y de características del fluido,  $A$  es el área que presenta el móvil en el plano perpendicular a la

dirección del movimiento; al igual que en el caso anterior,  $\rho_f$  es la densidad del fluido y  $v$  es la velocidad relativa del cuerpo respecto del fluido. La ecuación de movimiento en la coordenada  $x$  es:

$$ma = mg - V_c \rho_f g - \frac{1}{2} C_d A \rho_f v^2 . \quad (8.119)$$

Por lo tanto la aceleración del cuerpo es

$$a = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_c} \right) - \frac{1}{2} \frac{C_d A \rho_f}{m} v^2 . \quad (8.120)$$

En los casos de fluidos de baja viscosidad como el que estamos tratando, generalmente la densidad del fluido es mucho menor que la densidad del cuerpo, por lo tanto se puede despreciar el empuje que ejerce el fluido en la descripción del movimiento del cuerpo. Por simplicidad, en los cálculos siguientes no tendremos en cuenta el empuje del fluido; sin embargo, para aquellos casos en que no sea posible despreciarlo, solo hay que reemplazar  $g$  por  $g(1 - \rho_f/\rho_c)$ .

De manera similar al caso anterior, la aceleración del cuerpo irá disminuyendo a medida que aumente su velocidad hasta anularse. En ese instante se alcanza la velocidad límite  $v_l$ , cuya expresión se obtiene igualando a cero la aceleración en la ecuación(8.120):

$$v_l = \sqrt{\frac{2gm}{C_d A \rho_f}} . \quad (8.121)$$

Si dejamos caer una esfera de aluminio de 1 cm de diámetro dentro de un recipiente con agua, su velocidad límite, teniendo en cuenta el empuje, será de 0,68 m/s. Si consideráramos válido el modelo para la fuerza viscosa correspondiente al caso de alta viscosidad dado por la ecuación (8.108), obtendríamos una velocidad límite de 92,6 m/s, lo cual no se corresponde con lo observado experimentalmente.

Para un mejor análisis del efecto de la fuerza viscosa sobre el movimiento del cuerpo determinaremos cómo varía la velocidad del cuerpo con la posición. Sabemos que:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v . \quad (8.122)$$

Entonces podemos escribir

$$v \frac{dv}{dx} = g - \gamma v^2 , \quad (8.123)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{C_d A \rho_f}{m} . \quad (8.124)$$

A partir de la ecuación(8.123) planteamos

$$\int_0^v \frac{v dv}{g - \gamma v^2} = \int_0^x dx . \quad (8.125)$$

Integrando obtenemos

$$x = -\frac{1}{2\gamma} \ln (g - \gamma v^2) \Big|_0^v = -\frac{1}{2\gamma} \ln \left( 1 - \frac{\gamma}{g} v^2 \right) . \quad (8.126)$$

A partir de las ecs.(8.121) y (8.124) puede verse que  $\sqrt{g/\gamma} = v_l$ ; con lo cual, la ecuación anterior puede reescribirse como

$$x = -\frac{1}{2\gamma} \ln \left( 1 - \frac{v^2}{v_l^2} \right) . \quad (8.127)$$

Entonces, la dependencia de la velocidad con la posición esta dada por

$$v(x) = v_l \sqrt{1 - e^{-2\gamma x}} . \quad (8.128)$$

Si analizamos el movimiento de un paracaidista de 90 kg de masa, antes de que abra el paracaídas y haciendo la aproximación de que la densidad del aire es constante con la altura, podemos estimar que si vuela cabeza abajo ( $C_d = 0,7$  y  $A = 0,25 \text{ m}^2$ ) su velocidad límite será  $v_l \simeq 87,4 \text{ m/s}$  y la alcanzará al recorrer aproximadamente 2500 m. Sin embargo, si cae en posición horizontal ( $C_d = 1$  y  $A = 0,9 \text{ m}^2$ ) su velocidad límite es  $v_l \simeq 39,0 \text{ m/s}$  y la alcanzará al recorrer aproximadamente 500 m. Cuando abre el paracaídas aumenta la fuerza viscosa (se incrementan los valores de  $C_d$  y  $A$ ) generando una aceleración hacia arriba lo que reduce notablemente la velocidad límite con la que llegará a tierra.

En la figura 8.23 podemos ver el comportamiento de la velocidad, en función de la distancia recorrida, de una esfera de hierro de 1 cm de radio que se deja caer en aire. También se grafica, para hacer un análisis comparativo, la velocidad de caída en aire de una esfera de telgopor de alta densidad ( $30 \text{ kg/m}^3$ ) de idénticas dimensiones y la velocidad suponiendo caída libre.

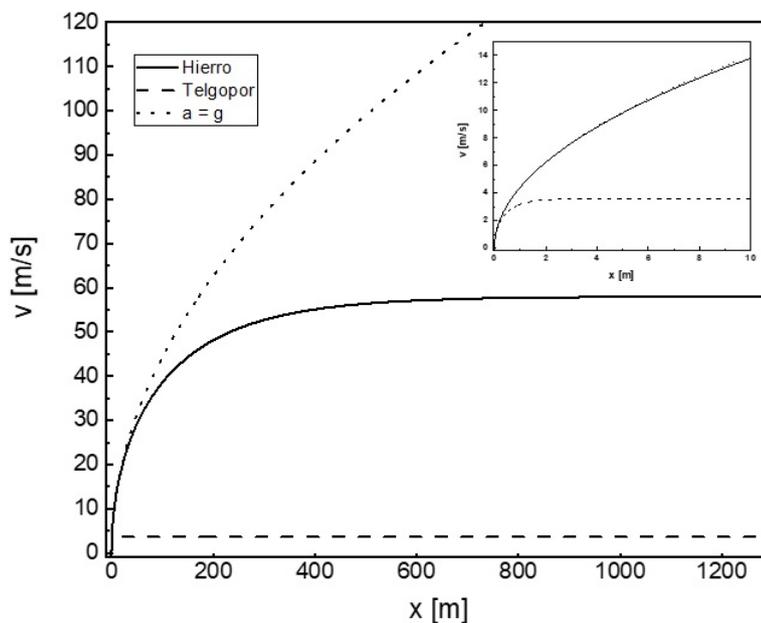


Figura 8.23: Velocidad en función de la distancia recorrida de esferas de hierro y telgopor cayendo en el vacío y en aire. Inserto: se observa una ampliación de los 10 primeros metros de recorrido.

Como se observa en la figura 8.23, la esfera de hierro alcanza su velocidad límite (58,0 m/s) cuando ha recorrido aproximadamente 1200 m, mientras que una esfera de telgopor alcanza su velocidad límite (3,6 m/s) aproximadamente a los 5 m de recorrido.

Entonces es válido preguntarnos, ¿en la caída en aire de un cuerpo podemos despreciar el efecto del fluido sobre el movimiento y considerar que su aceleración es  $g$ ? Será válido considerar que la aceleración es  $g$  dependiendo del cuerpo (dimensiones y masa) y de la distancia que estemos analizando. En el ejemplo graficado en la figura 8.23 vemos que para la esfera de hierro se comienza a hacer evidente el efecto de la fuerza viscosa cuando el móvil ha recorrido aproximadamente 5 m, mientras que en el caso de la esfera de telgopor los efectos de viscosidad se hacen evidentes cuando ha recorrido aproximadamente 2 cm.

## SECCIÓN 8.8

## Fuerzas elásticas

Ya hemos mencionado que los resortes son capaces de proveer una fuerza proporcional a su estiramiento o contracción,  $|\vec{F}| = k|\Delta\ell|$  (ley de Hooke), cuando son deformados dentro de cierto límite de  $\Delta\ell$  conocido como rango elástico. Ahora analizaremos cómo es el movimiento de un cuerpo sometido a la fuerza de un resorte.

### 8.8.1. Movimiento oscilatorio

Consideremos el siguiente ejemplo: un cuerpo de masa  $m$  está fijo al extremo libre de un resorte de constante elástica  $k$  y el otro extremo del resorte está fijo a una pared. Todo el conjunto está colocado sobre una mesa horizontal sin rozamiento. En la figura 8.24 se esquematizan las fuerzas aplicadas sobre una masa  $m$  unida a un resorte de longitud natural  $\ell_0$ , en distintas situaciones de estiramiento.

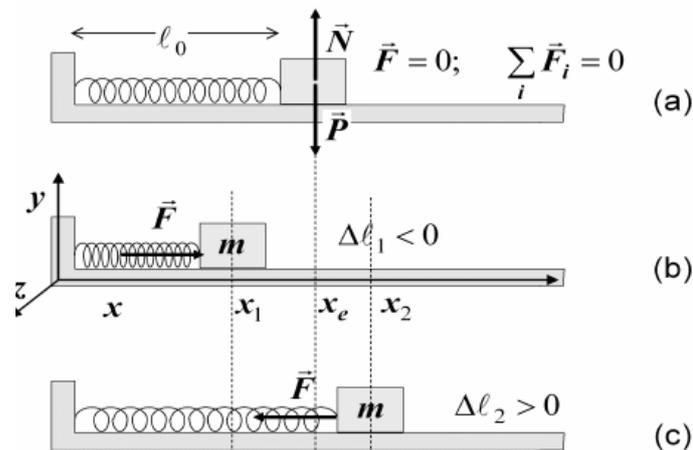


Figura 8.24: Diferentes instantes en un movimiento oscilatorio armónico, (a) equilibrio, (b) resorte comprimido, (c) resorte estirado.

Para analizar el movimiento del cuerpo bajo la acción de la fuerza elástica planteamos la ecuación de movimiento para este caso particular. Elegimos un sistema de coordenadas como el de la figura 8.24, donde el eje  $x$  coincide con la dirección de la fuerza del resorte; las fuerzas peso y reacción de la superficie están sobre el eje  $y$  y su suma es idénticamente nula durante todo el movimiento. El eje  $z$  resulta perpendicular al plano de la figura. Sólo hay fuerzas netas sobre la dirección  $x$ , por lo cual el movimiento será en esta dirección. Entonces:

$$F_y = 0 \quad y \quad F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y = v_z = \text{cte.} = 0. \quad (8.129)$$

Con lo que sólo resta resolver la ecuación de movimiento en la dirección  $x$ , donde ocurren eventos más interesantes. Como puede observarse en la figura 8.24, teniendo en cuenta que se cumple la ley de Hooke, vemos que:

si  $m$  está en la posición  $x_e$ , entonces  $\vec{F} = 0$ ,

si  $m$  está en la posición  $x_1$ , entonces  $\vec{F} = -k(x_1 - x_e)\hat{i}$  ( $F_x > 0$ ),

si  $m$  está en la posición  $x_2$ , entonces  $\vec{F} = -k(x_2 - x_e)\hat{i}$  ( $F_x < 0$ ).

De manera genérica, si el cuerpo se encuentra en una posición  $x$ ,

$$\vec{F} = -k(x - x_e)\hat{i}, \quad (8.130)$$

lo que indica que la fuerza del resorte siempre apunta hacia la posición de equilibrio  $x_e$ .

La segunda ley de Newton nos dice que la ecuación de movimiento en la única variable de interés (la coordenada  $x$ ) es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_e). \quad (8.131)$$

Como  $x_e$  es una constante, su derivada segunda es nula, de manera que podemos reescribir convenientemente la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$m \frac{d^2(x - x_e)}{dt^2} = -k(x - x_e). \quad (8.132)$$

Si hacemos un cambio de variables, llamando  $u = x - x_e$  podemos escribir:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -ku, \quad (8.133)$$

o bien,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{k}{m} u = 0. \quad (8.134)$$

Debemos notar que el cambio de variables efectuado implica un cambio a un sistema de coordenadas  $u$  cuyo origen coincide con la posición de equilibrio del resorte. La ecuación diferencial de segundo grado resultante tiene un término lineal en la variable  $u$ , por lo tanto su solución no será trivial como en el caso del tiro vertical con aceleración constante ni tan complicado como el caso de la atracción gravitatoria dependiente de la distancia. La función de movimiento que es solución de esta ecuación debe ser tal que si se la deriva dos veces respecto del tiempo, se vuelva a obtener la misma función pero multiplicada por un factor constante  $-k/m$ .

Una función que cumple con esta condición es  $f(t) = \text{sen}(\omega t)$ , donde  $\omega$  es una constante, ya que

$$\frac{df}{dt} = \omega \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 \text{sen}(\omega t) = \text{cte. } f(t). \quad (8.135)$$

Para encontrar la constante  $\omega$  debemos sustituir la función  $f(t)$  en la ecuación(8.134):

$$0 = \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{k}{m} f = -\omega^2 \text{sen}(\omega t) + \frac{k}{m} \text{sen}(\omega t) = \left( -\omega^2 + \frac{k}{m} \right) \text{sen}(\omega t). \quad (8.136)$$

Para que el último término se anule para todo tiempo es necesario que  $\omega = 0$ , con lo cual  $u(t) = 0$  y no hay movimiento, o bien, debe cumplirse que

$$-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0, \quad (8.137)$$

es decir,  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Entonces, una solución para la ecuación(8.134) es  $\text{sen}(\sqrt{k/m}t)$ . Como puede verse,  $\text{cos}(\sqrt{k/m}t)$  también es solución de la ecuación(8.134); ya que ésta es una ecuación lineal, es fácil convencerse de que cualquier combinación lineal de ambas soluciones, también será solución. Esto

puede verificarse directamente sustituyendo una combinación lineal arbitraria en la ecuación(8.134). Luego, la solución más general es

$$u(t) = A \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}t) + B \operatorname{cos}(\sqrt{k/m}t) . \quad (8.138)$$

Volviendo al sistema de coordenadas inicial:

$$x(t) = x_e + A \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}t) + B \operatorname{cos}(\sqrt{k/m}t) . \quad (8.139)$$

Por simplicidad, adoptaremos un sistema de coordenadas con origen en la posición de equilibrio del extremo libre del resorte, es decir, que en definitiva:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}t) + B \operatorname{cos}(\sqrt{k/m}t) . \quad (8.140)$$

Como vemos, la solución dada en la ecuación(8.140) tiene dos constantes a determinar ya que responde a una ecuación diferencial de segundo grado, de manera que para encontrar completamente la función de movimiento  $x(t)$  es necesario conocer información adicional (como ocurre siempre en la integración de las ecuaciones de movimiento). Supongamos que, para un caso particular se tienen las siguientes condiciones iniciales: para  $t = 0$ ,  $x = x_0$  y  $v = v_0$ . Haciendo  $t = 0$  en la ecuación(8.140) vemos que

$$x_0 = x(0) = B \quad \Rightarrow \quad B = x_0 . \quad (8.141)$$

Derivando la función de movimiento podemos escribir:

$$v(t) = \sqrt{k/m} \left[ A \operatorname{cos}(\sqrt{k/m}t) - B \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}t) \right] . \quad (8.142)$$

Ahora hacemos  $t = 0$  en esta última expresión:

$$v_0 = v(0) = \sqrt{k/m}A \quad \Rightarrow \quad A = v_0 \sqrt{m/k} = \frac{v_0}{\omega} . \quad (8.143)$$

Entonces, la solución de este caso particular queda:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) + x_0 \operatorname{cos}(\omega t) , \quad (8.144)$$

con  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Consideremos ahora otra forma de escribir la solución de este tipo de movimiento, que a veces resulta conveniente. Para ello, retomemos la expresión de la función de movimiento dada en la ecuación(8.140) sustituyendo las constantes  $A$  y  $B$  de manera conveniente:

$$A = x_m \operatorname{cos}(\phi_0) \quad \text{y} \quad B = x_m \operatorname{sen}(\phi_0) . \quad (8.145)$$

Reemplazando en la solución de la función de movimiento queda:

$$x(t) = x_m \operatorname{cos}(\phi_0) \operatorname{sen}(\omega t) + x_m \operatorname{sen}(\phi_0) \operatorname{cos}(\omega t) . \quad (8.146)$$

Recordando que  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{cos}(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{cos}(\alpha)$ , la expresión anterior puede escribirse como:

$$x(t) = x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) . \quad (8.147)$$

Esta es la misma función que la dada en la ecuación(8.140), pero escrita en términos de otras constantes:  $x_m$  y  $\phi_0$ . En ambos casos tenemos dos constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales. La ecuación(8.145) muestra cómo se expresan las constantes  $A$  y  $B$  en función de  $x_m$  y  $\phi_0$ ; las últimas en

función de las primeras se expresan de la siguiente forma:

$$x_m = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{y} \quad \text{tg}(\phi_0) = \frac{B}{A}. \quad (8.148)$$

La ecuación(8.147) nos dice que:

- El movimiento es sinusoidal. Es decir, responde a una función periódica; por este motivo al movimiento de una masa enganchada a un resorte se lo denomina movimiento oscilatorio armónico.
- $x(t)$  toma valores entre  $-x_m$  y  $x_m$ , por lo tanto la constante  $x_m$  está relacionada con los valores extremos de la variable, por lo que se la llama amplitud máxima.
- la constante  $\phi_0$  se llama fase inicial; es el argumento de la función seno para  $t = 0$ . Es decir, para  $t = 0$  la posición es  $x(0) = x_m \text{sen}(\phi_0)$ .

Repitamos el cálculo del ejemplo anterior con esta nueva expresión. Ahora las condiciones para  $t = 0$ :  $x = x_0$  y  $v(0) = v_0$  se traducen en la función de movimiento como

$$x(0) = x_0 = x_m \text{sen}(\phi_0), \quad (8.149)$$

y en la función velocidad:

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_m \cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v(0) = v_0 = \omega x_m \cos(\phi_0). \quad (8.150)$$

Las expresiones encontradas para  $x_0$  y  $v_0$  en términos de  $x_m$  y  $\phi_0$  constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (este último par de parámetros) fácil de resolver:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = x_m \text{sen}(\phi_0) \\ v_0 = \omega x_m \cos(\phi_0) \end{array} \right\} \Rightarrow x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}; \quad \text{tg}(\phi_0) = \frac{\omega x_0}{v_0}. \quad (8.151)$$

Resta todavía considerar el significado del parámetro  $\omega$ . Supongamos que para un dado tiempo  $t'$  el argumento del seno de la ecuación(8.147) es  $\omega t' + \phi_0 = \alpha$ . Como la función seno es periódica de período  $2\pi$ , existe un tiempo  $T$  para el cual se verifica que el seno evaluado en  $t' + T$  es igual al seno evaluado en  $t'$ , es decir,

$$\omega(t' + T) + \phi_0 = \alpha + 2\pi. \quad (8.152)$$

Escrito de otra forma vemos que

$$\alpha + 2\pi = \overbrace{\omega t' + \phi_0}^{\alpha} + \omega T = \alpha + \omega T. \quad (8.153)$$

Por lo tanto,

$$\omega T = 2\pi. \quad (8.154)$$

Entonces, transcurrido un tiempo  $T$ , la función de movimiento vuelve a repetir sus valores:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (8.155)$$

El tiempo  $T$  se denomina período del movimiento y físicamente representa el mínimo tiempo que debe transcurrir para que el cuerpo pase por la misma posición con la misma velocidad. La cantidad  $f = 1/T$  es la frecuencia con que oscila el cuerpo; su valor numérico coincide con el número de períodos que realiza el movimiento en la unidad de tiempo. La cantidad  $\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi/T$  es proporcional a la frecuencia  $f$  y se denomina frecuencia angular de oscilación. Cabe notar que la frecuencia depende de la

constante de resorte  $k$  y de la masa  $m$  del cuerpo, pero no depende de la amplitud  $x_m$  ni de las condiciones iniciales del movimiento.

**Energía del oscilador armónico**

Recordemos la ecuación de movimiento del oscilador armónico ecuación(8.131), con el origen de coordenadas en la pared:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_e), \tag{8.156}$$

o bien:

$$m \frac{dv}{dt} = -k(x - x_e). \tag{8.157}$$

Repetiendo algunos pases mágicos ya utilizados anteriormente:

$$m \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = -k \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} (x - x_e)^2 \right], \tag{8.158}$$

es decir,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = - \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} k (x - x_e)^2 \right]. \tag{8.159}$$

Entonces,

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k (x - x_e)^2 \right] = 0, \tag{8.160}$$

lo que nos dice que el término entre paréntesis es una constante de movimiento, nuestra conocida energía; como siempre, el término que depende de la velocidad es la energía cinética y el que depende de la posición es la energía potencial:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k (x - x_e)^2. \tag{8.161}$$

Se puede ver que el término de energía potencial elástica tiene una expresión diferente de la que obtuvimos en el caso de la fuerza gravitatoria. Las energías correspondientes a los distintos tipos de interacción que hemos tratado pueden verse en la tabla 8.3. Claramente, la energía cinética es siempre la misma y lo que varía es la energía potencial, que es característica de cada tipo de fuerza.

Fuerza	Energía	Tipo de fuerza
$m\vec{g}$	$\frac{1}{2}mv^2 + mgz$	Gravitatoria cerca de la sup. de la Tierra
$m\vec{g}$	$\frac{1}{2}mv^2 - mgz$	
$-\frac{GmM}{r^2}\hat{u}_p$	$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$	Gravitatoria de largo alcance
$-k(x - x_e)\hat{i}$	$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2$	Elástica causada por un resorte

Tabla 8.3: Expresiones para la energía para distintos tipos de fuerza

Una manera alternativa de llegar a la función de movimiento de un cuerpo enganchado a un resorte, a partir del concepto de energía, puede verse en el apéndice A. Todo lo analizado en esta sección ignora el efecto de las fuerzas viscosas estudiadas en la sección 8.7; en el apéndice A.1 se desarrolla el problema teniendo en cuenta esta situación.

### 8.8.2. Movimiento oscilatorio bajo acción de una fuerza constante

Analizaremos ahora el caso de una masa  $m$  suspendida de un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $x_0$ , como se indica en la figura 8.25. Como ya es usual, elegimos un sistema de coordenadas, planteamos la ecuación de movimiento y la resolvemos para obtener las funciones de movimiento.

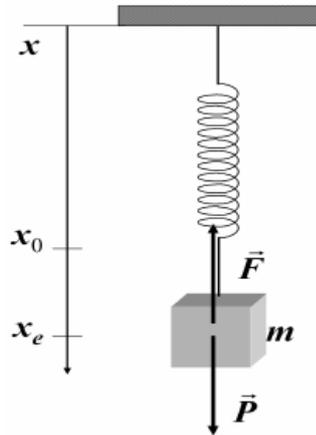


Figura 8.25: Movimiento oscilatorio bajo la acción del peso.

Las fuerzas que actúan sobre la masa  $m$  son: su peso  $\vec{P} = mg\hat{i}$  y la fuerza del resorte  $\vec{F} = -k(x - x_0)\hat{i}$ , de manera que la segunda Ley de Newton para este caso toma la expresión

$$mg\hat{i} - k(x - x_0)\hat{i} = m\vec{a}. \quad (8.162)$$

¿Cuál es la posición de equilibrio de la masa colgada? No tiene por qué ser la misma que la longitud natural del resorte. Llamemos  $x_e$  a la posición de equilibrio y  $x_0$  a la posición del resorte sin carga (longitud natural), como indica la figura. Dado que en el equilibrio se cumple  $\vec{F} + m\vec{g} = 0$  y esto es equivalente a

$$-k(x_e - x_0) + mg = 0, \quad (8.163)$$

entonces,  $x_e = mg/k + x_0$ . Si el cuerpo está en cualquier otra posición, ya no estará en equilibrio. La ecuación de movimiento que satisface la posición  $x$  de la masa  $m$  es la dada en la ecuación(8.162) de manera vectorial:

$$mg - k(x - x_0) = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (8.164)$$

Si dentro del paréntesis del miembro izquierdo sumamos y restamos  $x_e$ , no modificamos la igualdad, por lo tanto resulta

$$mg - k(x - x_e - x_0 + x_e) = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (8.165)$$

$$-k(x - x_e) - k(x_e - x_0) + mg = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (8.166)$$

Usando la ecuación(8.163) podemos escribir:

$$-k(x - x_e) = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (8.167)$$

En la ecuación(8.167) se ve que la ecuación de movimiento para la masa colgada del resorte tiene la misma forma que la de la masa unida al extremo de un resorte que se mueve sobre una superficie

horizontal, como puede verse en la ecuación de movimiento del resorte, ecuación(8.131), sólo que ahora la posición  $x_e$  no es la longitud natural del resorte, sino la nueva posición de equilibrio de la masa suspendida. Como se vio en la sección 8.8.1, la función de movimiento que satisface esta ecuación es de la forma

$$u(t) = x(t) - x_e = A \operatorname{sen}(\omega t) + B \operatorname{cos}(\omega t) \quad \text{o} \quad u(t) = x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0), \quad (8.168)$$

donde  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . La función de movimiento que resulta es idéntica a la del caso anterior, salvo que ahora la masa oscila alrededor de una nueva posición de equilibrio. El movimiento tiene el mismo período y frecuencia que el caso anterior, porque ninguna de estas magnitudes depende de dónde está la posición de equilibrio. En cuanto a la energía, dado que la ecuación es la misma, podremos identificar nuevamente una constante de movimiento cuya expresión será igual a la del resorte horizontal; según la ecuación(8.161):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2. \quad (8.169)$$

Sólo que ahora  $x_e$  no es más  $x_0$ , sino  $mg/k + x_0$ . El segundo término, correspondiente a la energía potencial no incluye explícitamente un término para la energía potencial gravitatoria del tipo  $mgx$ , en el sistema de coordenadas usado. Sin embargo, si sustituimos el valor de  $x_e$  tenemos

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(x - \frac{mg}{k} - x_0\right)^2, \quad (8.170)$$

es decir

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 - mgx + mgx_0 + \frac{(mg)^2}{2k}. \quad (8.171)$$

Los dos últimos términos son constantes, con lo cual, puesto que  $E$  es una constante de movimiento, la magnitud

$$E' = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 - mgx \quad (8.172)$$

también lo es, y también representa la energía mecánica del sistema. En la última expresión para la energía aparecen explícitamente los términos elástico y gravitatorio.

### Ejemplo: cuerpo enganchado a un resorte sobre un plano inclinado

Consideremos el sistema de la figura 8.26, en el cual un cuerpo de masa  $m$  está enganchado a un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $\ell_0$ , y el sistema oscila sobre un plano inclinado en un ángulo  $\theta$  respecto de la horizontal. En primer lugar encontraremos la coordenada  $x_e$  de equilibrio; para ello planteamos el sistema en equilibrio:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = 0 \quad \text{con} \quad \vec{F} = -k(x - \ell_0)\hat{i}. \quad (8.173)$$

En la componente  $x$ :

$$mg \operatorname{sen}(\theta) - k(x - \ell_0) = 0. \quad (8.174)$$

Despejando la coordenada de equilibrio  $x = x_e$  de esta ecuación tenemos:

$$x_e = \ell_0 + \frac{mg}{k} \operatorname{sen}(\theta). \quad (8.175)$$

Ahora planteamos la ecuación de movimiento (fuera del equilibrio):

$$mg \operatorname{sen}(\theta) - k(x - \ell_0) = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (8.176)$$

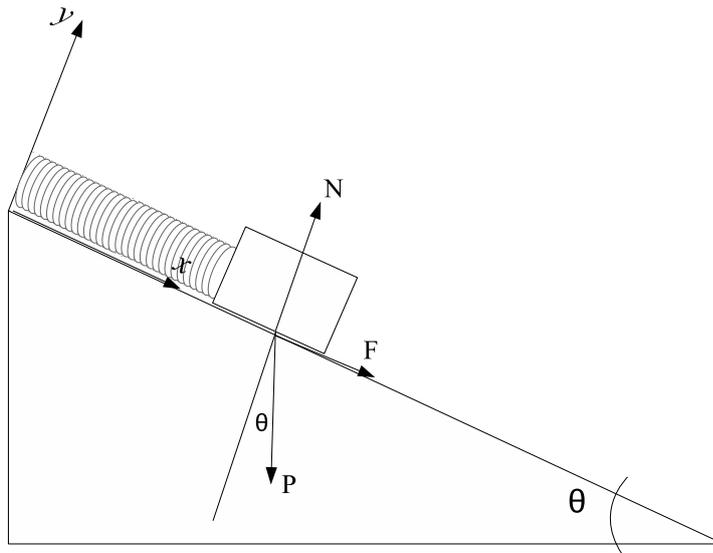


Figura 8.26: Cuerpo enganchado a un resorte sobre un plano inclinado.

Esta última ecuación puede reescribirse como

$$-k \left[ x - \ell_0 - \frac{mg}{k} \sin(\theta) \right] = m \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (8.177)$$

Si consideramos la expresión para  $x_e$  dada en ecuación(8.175) obtenemos una expresión que ya conocemos:

$$-k(x - x_e) = m \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (8.178)$$

Esta es la ecuación(8.167), que como vimos, conduce a la solución

$$u(t) = x(t) - x_e = x_m \sin(\omega t + \phi_0). \quad (8.179)$$

En este caso, igual que en el anterior,  $\omega$  sigue siendo  $\sqrt{k/m}$  y el único cambio es desde dónde se mide la coordenada: en este caso, desde un valor  $x_e$  dado por la ecuación(8.175).

### 8.8.3. Propiedades elásticas de los sólidos

Consideremos un arreglo ordenado de pequeñas masas  $m$  en tres dimensiones (supuestas todas iguales por simplicidad) unidas mediante resortes que pueden ser paralelos a la dirección  $x$ ,  $y$  ó  $z$  (que también supondremos todos iguales). La figura 8.27 muestra una representación en dos dimensiones de tal arreglo. Al aplicar una fuerza sobre este arreglo, va a producirse una deformación que involucra, en principio, a todas las masas porque todas están ligadas: son cuerpos interactuantes. Este tipo de construcción es un modelo adecuado para representar algunas características de los sólidos. En este modelo microscópico, las masas  $m$  representan los átomos y las barras que los unen actúan como resortes y son las fuerzas interatómicas que mantienen ligado al sólido. De esta manera, podemos esperar que un sólido sufra deformaciones en respuesta a la aplicación de una fuerza externa. Si se aplica una fuerza en alguna de las direcciones  $x$ ,  $y$  ó  $z$ , por ejemplo la dirección  $x$ , capaz de apartar al átomo  $j$ -ésimo en una cantidad  $\Delta x_j$ , la fuerza restitutoria capaz de devolver el átomo a su lugar será  $F_x^j = -k\Delta x_j$ . Algo similar pasará si la fuerza es aplicada en otra dirección. Si pensamos en fuerzas y deformaciones macroscópicas que se pueden medir en el laboratorio, es lógico prever que el comportamiento tendrá relación con el modelo microscópico (si es que éste es un buen modelo). Si consideramos una barra de longitud  $L$  y sección transversal  $A$  a la cual le aplicamos una fuerza  $F$  en la dirección longitudinal, podríamos esperar obser-

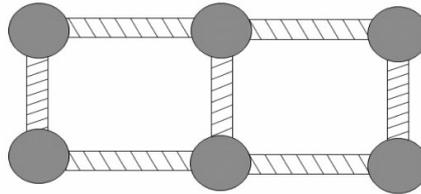


Figura 8.27: Modelo microscópico de un sólido elástico.

var una pequeña variación  $\Delta L$  proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada; es decir, sería esperable una relación tipo

$$F \propto \Delta L. \quad (8.180)$$

Ahora bien, podemos pensar esta barra como una gran cantidad de resortes en serie a lo largo de la longitud y en paralelo cubriendo toda la sección transversal. Teniendo en cuenta que la constante equivalente de resortes en paralelo aumenta, pues se suman las constantes, y que la constante equivalente de resortes en serie disminuye, pues se suman las inversas, para una dada fuerza, la variación de  $L$  aumentará si el “resorte” es blando, es decir, si la longitud es larga, y disminuirá si el “resorte” es duro, es decir, si el área es grande. Entonces podemos escribir:

$$F = Y \frac{A}{L} \Delta L, \quad (8.181)$$

donde la constante de proporcionalidad  $Y$  se llama módulo de Young y efectivamente vemos que para una dada fuerza  $F$ , la variación de  $L$  aumenta con  $L$  y disminuye con  $A$ . La expresión dada en ecuación(8.181) se observa experimentalmente, lo que habla bien del modelo microscópico supuesto. En la tabla 8.4 se muestran los módulos de Young para algunos materiales frecuentemente utilizados en la industria.

La fuerza por unidad de área  $\sigma = F/A$ , recibe el nombre de tensión, mientras que la variación relativa de la longitud de la barra  $\epsilon = \Delta L/L$  se denomina deformación. Con estas definiciones, la expresión anterior se escribe

$$\sigma = Y\epsilon, \quad (8.182)$$

que indica que la tensión y la deformación son proporcionales. Esta relación vale tanto para valores positivos como negativos de la tensión, es decir tanto para fuerzas de tracción como de compresión.

Material	$Y[\times 10^9 \text{N/m}^2]$	Material	$Y[\times 10^9 \text{N/m}^2]$
Níquel	205	Vidrio	70
Acero	200	Aluminio	70
Hierro forjado	190	Hormigón	23
Cobre	110	Plomo	16
Hierro fundido	100	Hueso	16
Bronce	90	Goma	15
Oro	81	Poliestireno	3
Plata	80	Caucho	0,001

Tabla 8.4: Módulos de Young de varios sólidos.

## SECCIÓN 8.9

## Péndulo ideal o matemático

Analicemos ahora otro movimiento particular: el que realiza una masa puntual suspendida de un hilo, cerca de la superficie de la Tierra. Esto es, la masa puntual está bajo la acción de la gravedad (constante) y está sostenida por un hilo de longitud  $l$ , sin masa e inextensible. En el movimiento pendular, la trayectoria del cuerpo suspendido será un arco de circunferencia, contenida en un plano vertical. En la figura (8.28) se muestran las fuerzas que actúan sobre el péndulo de masa  $m$ , el vector velocidad que es tangente a la trayectoria y el vector aceleración.

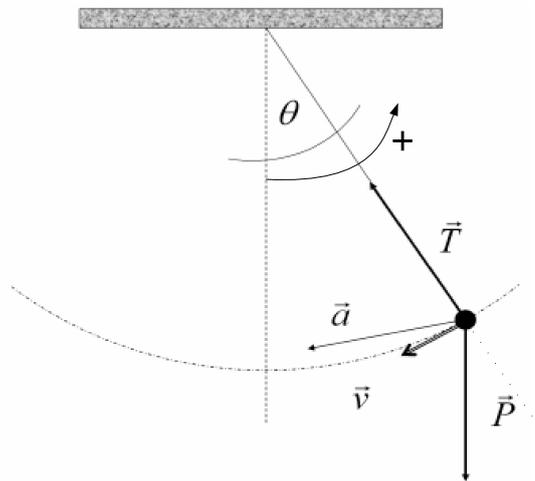


Figura 8.28: Péndulo ideal.

La segunda ley de Newton para este problema se expresa como

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}. \quad (8.183)$$

Elegimos un sistema de coordenadas polares con origen en el punto de suspensión del hilo, en el cual consideramos que el ángulo  $\theta$  es positivo cuando crece en sentido antihorario. Está claro que de las dos coordenadas, sólo la coordenada angular  $\theta$  es relevante, ya que  $\rho = \ell = \text{cte}$ . En este sistema las fuerzas son

$$\vec{P} = mg \cos(\theta)\hat{u}_\rho - mg \sin(\theta)\hat{u}_\theta \quad \text{y} \quad \vec{T} = -|T|\hat{u}_\rho. \quad (8.184)$$

Mientras que a la aceleración podemos escribirla en sus componentes normal y tangencial:

$$\vec{a} = a_n\hat{u}_\rho + a_t\hat{u}_\theta. \quad (8.185)$$

Ahora podemos analizar las ecuaciones de movimiento según cada coordenada.

Según  $\hat{u}_\rho$ ,

$$-T + mg \cos(\theta) = ma_n . \quad (8.186)$$

Como se trata de un movimiento circular,  $ma_n = -m\omega^2\ell$ . Entonces queda:

$$-T + mg \cos(\theta) = -m\omega^2\ell = -m\ell \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 . \quad (8.187)$$

La solución de esta ecuación relacionará la función de movimiento  $\theta(t)$  con  $T$ .

Según  $\hat{u}_\theta$ ,

$$-mg \sin(\theta) = ma_t , \quad (8.188)$$

donde  $a_t$  es la componente tangencial de la aceleración. Sabemos que

$$a_t = \frac{d(\omega\ell)}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\ell . \quad (8.189)$$

Entonces, la ecuación(8.188) puede escribirse

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta) . \quad (8.190)$$

La solución de esta ecuación diferencial es una función tal que derivada dos veces es igual a una constante multiplicada por el seno de esa función. Enseguida nos damos cuenta de que... no podemos encontrar la función de movimiento  $\theta(t)$  para el péndulo ideal. Sin darnos por vencidos, veamos qué información podemos extraer de este problema. Sabemos que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \omega = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{2} \omega^2 \right) . \quad (8.191)$$

Además,

$$-\frac{g}{\ell} \sin(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{g}{\ell} \cos(\theta) \right] . \quad (8.192)$$

Sustituyendo el primer miembro de esta última ecuación por el primer miembro de la ecuación(8.190) y haciendo pasaje de términos,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{g}{\ell} \cos(\theta) \right] = 0 . \quad (8.193)$$

Entonces, utilizando la ecuación(8.191) podemos escribir:

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{g}{\ell} \cos(\theta) \right] = 0 . \quad (8.194)$$

El término entre corchetes es necesariamente una constante de movimiento. Si multiplicamos ese término por  $m\ell^2$  obtenemos la energía mecánica del péndulo ideal:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - mg\ell \cos(\theta) . \quad (8.195)$$

Para llegar a la ecuación(8.195) hemos descrito el problema desde un sistema de coordenadas polares. Podemos reescribir este resultado desde un sistema de coordenadas cartesiano en que el eje  $x$  coincida con la horizontal, el eje  $y$  con la vertical y tal que el origen esté en el punto de suspensión del péndulo, como se muestra en la figura (8.29).

Puede verse que la coordenada vertical del péndulo es, para todo tiempo  $y(t) = -\ell \cos[\theta(t)]$ . Reem-

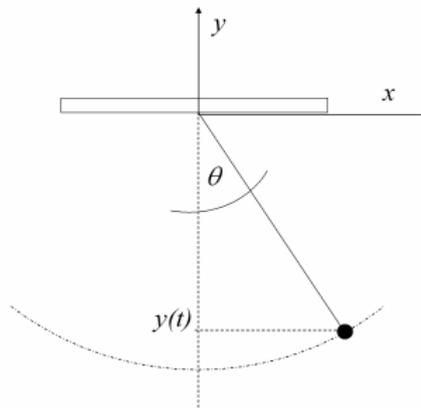


Figura 8.29: Péndulo ideal en coordenadas cartesianas.

plazando esto en la ecuación(8.195), queda

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy(t) . \quad (8.196)$$

Como vemos, la energía potencial del péndulo coincide con la energía potencial de la interacción gravitatoria cerca de la Tierra.

En principio, puede utilizarse la expresión de la energía dada en la ecuación(8.195) para averiguar algo más sobre el movimiento del péndulo. Si la posición y la velocidad del péndulo son conocidas para algún instante, puede determinarse el valor de la energía. Luego, usando un sistema de coordenadas polares como el de la figura 8.28 se puede escribir la velocidad a un tiempo  $t$  arbitrario en función de  $E$ .

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + 2g\ell \cos(\theta)} . \quad (8.197)$$

Como  $v = \ell \frac{d\theta}{dt}$ , se cumple que  $dt = \ell \frac{d\theta}{v}$ . Reemplazando en esta ecuación la expresión para  $v$  dada en la ecuación(8.197):

$$dt = \pm \frac{\ell d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{m} + 2g\ell \cos(\theta)}} . \quad (8.198)$$

La integración de esta ecuación para obtener el tiempo en función de la coordenada  $\theta$ , y a partir de allí obtener  $\theta(t)$ , no puede hacerse de manera analítica y exacta, sino sólo mediante métodos numéricos. Vamos a plantear el problema del péndulo ideal en una situación particular, para resolverlo de manera aproximada.

### 8.9.1. Pequeñas oscilaciones

Recordemos la ecuación de movimiento (8.190):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \text{sen}(\theta) . \quad (8.199)$$

Consideremos ahora que las oscilaciones del péndulo se apartan poco de la posición de equilibrio  $\theta = 0$ . Veamos a qué se puede aproximar la función  $\text{sen}(\theta)$  en este caso de pequeñas oscilaciones. Para ello

manipulemos su derivada:

$$d \operatorname{sen}(\theta) = \frac{d \operatorname{sen}(\theta)}{d\theta} d\theta = \cos(\theta) d\theta . \quad (8.200)$$

$\theta$ (°)	$\theta$ (rad)	$\operatorname{sen}(\theta)$	dif. relativa	$\cos(\theta)$	$1-\cos(\theta)$
0,1	0,0017453293	0,00174532836	$5 \times 10^{-7}$	0,9999985	$2 \times 10^{-6}$
0,5	0,0087266	0,00872654	$7 \times 10^{-6}$	0,999962	$4 \times 10^{-5}$
1	0,0174533	0,0174524	$5 \times 10^{-5}$	0,99985	$2 \times 10^{-4}$
2	0,034907	0,034899	$2 \times 10^{-4}$	0,99939	$6 \times 10^{-4}$
5	0,08727	0,08716	$1 \times 10^{-3}$	0,9962	$4 \times 10^{-3}$
10	0,1745	0,1736	$5 \times 10^{-3}$	0,985	$1,5 \times 10^{-2}$
20	0,3491	0,3420	$2 \times 10^{-2}$ (2%)	0,940	$6 \times 10^{-2}$ (6%)
30	0,524	0,500	$5 \times 10^{-2}$ (5%)	0,87	0,13 (13%)
40	0,698	0,643	$8 \times 10^{-2}$ (8%)	0,77	0,23 (23%)
50	0,873	0,766	0,12 (12%)	0,64	0,36 (36%)

Tabla 8.5: La aproximación de ángulos  $\theta$  pequeños.

Para  $\theta$  cerca de 0,  $\cos(\theta) \approx 1$ , con lo cual podemos hacer la siguiente aproximación:

$$d \operatorname{sen}(\theta) \approx d\theta . \quad (8.201)$$

Luego, en esta aproximación  $\operatorname{sen}(\theta) \approx \theta$ , y la ecuación de movimiento queda

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta . \quad (8.202)$$

Esta ecuación es igual a la de oscilador armónico, cuya solución ya conocemos, de manera que la función de movimiento del péndulo en la aproximación de oscilaciones de pequeña amplitud queda

$$\theta(t) = \theta_{m\acute{a}x} \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) , \quad (8.203)$$

donde la frecuencia angular es  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ , y  $\theta_{m\acute{a}x}$  y  $\phi_0$  son constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales. El período de oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} ; \quad (8.204)$$

es decir,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} . \quad (8.205)$$

Debemos notar que el período es independiente de la amplitud (en esta aproximación) y tampoco depende de la masa del péndulo. El período sólo depende de la longitud del péndulo y de la gravedad del lugar. En relación a cuándo podemos considerar que la aproximación realizada es “buena”, podríamos decir que con un  $\theta_{m\acute{a}x}$  de hasta  $40^\circ$  la aproximación está dentro del 10%. Para más detalles véase la Tabla 8.5. La calidad de la aproximación efectuada se manifiesta en la duración del período de oscilación: a medida que aumenta  $\theta_{m\acute{a}x}$ , el período se aparta más del expresado en la ecuación(8.205). En la Tabla 8.6 se muestra la relación entre el período exacto  $T_{ex}$ , obtenido mediante resolución numérica de la ecuación de movimiento sin hacer la aproximación de pequeñas oscilaciones, ecuación(8.190), y el valor aproximado  $T$  que obtiene resolviendo la ecuación, ecuación(8.202), para distintos valores de  $\theta_{m\acute{a}x}$ .

$\theta_{m\acute{a}x}$ (°)	$T_{ex}/T$
1	1,0000
4	1,0000
5	1,0005
10	1,002
15	1,004
20	1,007
30	1,017
40	1,031
50	1,049

Tabla 8.6: Relación entre el período exacto  $T_{ex}$  y los períodos aproximados  $T$  para distintos valores de  $\theta_{m\acute{a}x}$ .

Nótese que el error cometido al hacer la aproximación para un ángulo bastante grande ( $50^\circ$ ) es sólo del 5%; sin embargo, por un efecto acumulativo, al cabo de unos pocos períodos, la coordenada predicha por la ecuación aproximada comienza a apartarse de manera importante de la solución exacta. Para mayor información sobre el problema de grandes oscilaciones, ver el apéndice B.

# 9

## Momento Lineal y Momento angular

### SECCIÓN 9.1

### Momento lineal

#### 9.1.1. Momento lineal de una partícula

Consideremos una partícula sometida a la acción de muchas fuerzas. La segunda ley de Newton nos dice:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}. \quad (9.1)$$

Si expresamos el segundo miembro en términos de la velocidad, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\sum_i \vec{F}_i = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (9.2)$$

Definimos la cantidad entre paréntesis como  $\vec{p} = m\vec{v}$ , de manera que en términos de este nuevo vector, la segunda ley de Newton se escribe:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (9.3)$$

El vector  $\vec{p}$  será, en general, una función del tiempo característica de la partícula en cuestión y recibe muchos nombres: momento lineal, impulso lineal, cantidad de movimiento, momento e ímpetu. Las unidades del momento lineal están dadas por  $[p] = [m][v]$ , es decir:

$$\text{en MKS } [p] = \frac{kgm}{s} \quad \text{y en cgs } [p] = \frac{gcm}{s}. \quad (9.4)$$

#### 9.1.2. Interacción entre dos partículas

Consideremos ahora un sistema de dos masas puntuales interactuantes “aislado”, es decir, un sistema sobre el cual no se ejerce ninguna fuerza exterior. Por ejemplo, dos masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas por un resorte sin masa, como muestra la figura 9.1.

En la figura, las fuerzas de interacción se han dibujado cuando el resorte está estirado, pero esta situación irá cambiando con el tiempo. La tercera ley de Newton nos asegura que  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ . Combi-

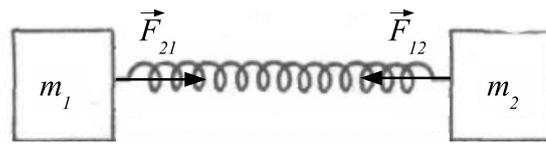


Figura 9.1: Sistema aislado de dos masas interactuantes.

nando esta relación con la segunda ley:

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0. \quad (9.5)$$

La última ecuación puede escribirse en términos de la velocidad:

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0, \quad (9.6)$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0, \quad (9.7)$$

donde  $\vec{p}_1$  y  $\vec{p}_2$  son los momentos de las partículas. Vamos a definir el vector momento de un sistema de partículas como la suma vectorial de los momentos de cada una de ellas, así como la masa de un sistema es la suma de las masas de todas sus partes. En este caso de dos masas puntuales tenemos que  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ , donde con  $\vec{P}$  nos referimos al momento total del sistema de partículas. Entonces podemos escribir:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0. \quad (9.8)$$

Por lo tanto, para un sistema de dos partículas interactuantes, sobre el que no actúan fuerzas exteriores, el momento lineal total es una cantidad que se conserva. Esto nos dice que si conocemos las velocidades  $\vec{v}_{10}$  y  $\vec{v}_{20}$  en algún instante  $t_0$ , el momento total  $\vec{P} = m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20}$  tendrá siempre ese valor, aunque las velocidades individuales cambien a lo largo del tiempo. Cabe destacar que no importa qué tipo de interacción existe entre ambas masas puntuales, ya que en ningún momento hemos usado el hecho de que están unidas por un resorte.

Podemos pensar que el sistema está caracterizado por un vector momento  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  y por una sola masa  $M = m_1 + m_2$ , como si se tratara de una única partícula. Surge entonces una pregunta: ¿cómo se mueve esa partícula ficticia? En primer lugar, sabemos que para una única partícula  $\vec{p} = m\vec{v}$ , con lo cual,  $\vec{v} = \vec{p}/m$ . Siguiendo este razonamiento, en nuestro caso, podemos pensar que la velocidad “del sistema” estará dada por

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.9)$$

El subíndice  $_{CM}$  se refiere a “centro de masa”, que es el nombre del punto ficticio que representa a todo el sistema que se mueve con  $\vec{V}_{CM}$ . Para encontrar la posición del centro de masa sólo hay que integrar su velocidad:

$$\vec{r}_{CM} = \int \vec{V}_{CM} dt = \frac{m_1 \int \vec{v}_1 dt + m_2 \int \vec{v}_2 dt}{m_1 + m_2}, \quad (9.10)$$

es decir,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.11)$$

Si el sistema está aislado  $\vec{P} = \text{cte.}$ , es decir, puede representarse por una única partícula cuya posición está dada por el vector posición del centro de masa  $\vec{r}_{CM}$  de la ecuación (9.11), que se mueve con velocidad  $\vec{V}_{CM}$  constante, dada por la ecuación (9.9). Si elegimos un sistema de coordenadas que se mueva con

velocidad  $\vec{V}_{CM}$  (podemos hacerlo sin problemas, ya que se trata de un sistema inercial), entonces en ese sistema la velocidad del centro de masa es nula y la posición, constante.

### 9.1.3. Sistemas de muchas partículas

Consideremos ahora un sistema de varias masas puntuales interactuantes aislado de la influencia de toda fuerza exterior. La figura 9.2 muestra un ejemplo con cuatro partículas, pero podrían ser muchas más. Sobre cada partícula actúan varias fuerzas que sumadas dan la fuerza resultante sobre ella, así:

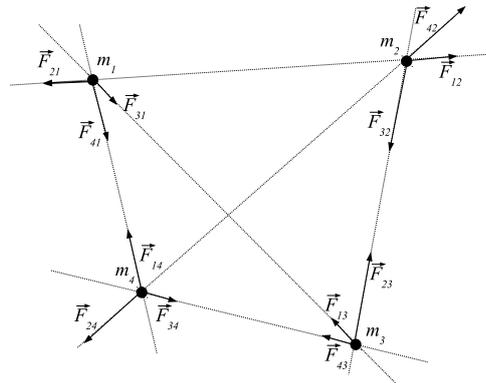


Figura 9.2: Sistema aislado de varias masas interactuantes.

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \dots \\
 \vec{F}_2 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \dots \\
 \vec{F}_3 &= \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} + \dots \\
 \vec{F}_4 &= \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34} + \dots \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{9.12}$$

Podemos ver que para cada fuerza del tipo  $\vec{F}_{ij}$  hay una fuerza del tipo  $\vec{F}_{ji}$ . Por la tercera ley de Newton, sabemos que  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ . Esto nos dice que si sumamos todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas, el resultado será nulo:

$$\vec{F} \equiv \sum_i \vec{F}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = 0 .
 \tag{9.13}$$

Pero  $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$ , entonces:

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \vec{p}_i \right) = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 .
 \tag{9.14}$$

Por lo tanto, en un sistema aislado, se conserva el momento total del sistema, ya que si  $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ , entonces  $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{cte}$ .

Si en cambio existen fuerzas exteriores aplicadas a una o más partículas constituyentes del sistema (es decir, el sistema ya no está aislado), entonces se da una situación como la que ilustra la figura 9.3.

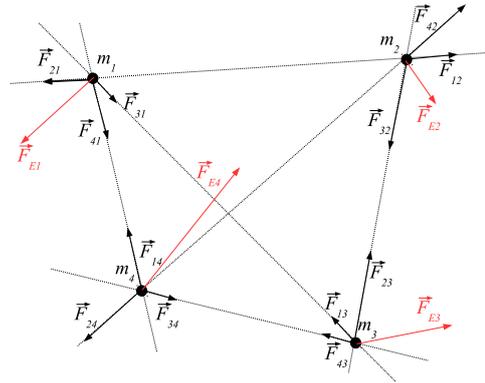


Figura 9.3: Sistema no aislado de varias masas interactuantes.

Ahora, el sistema de ecuaciones (9.12) debe incluir las fuerzas externas  $\vec{F}_{Ei}$ , cada una de las cuales actúa sobre la partícula  $i$ .

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= \vec{F}_{E1} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \dots \\
 \vec{F}_2 &= \vec{F}_{E2} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \dots \\
 \vec{F}_3 &= \vec{F}_{E3} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} + \dots \\
 \vec{F}_4 &= \vec{F}_{E4} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34} + \dots \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{9.15}$$

Si separamos las fuerzas en dos categorías: fuerzas internas y fuerzas externas, claramente vemos que

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_{Ei};
 \tag{9.16}$$

pero la suma de las fuerzas internas  $\sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$  es nula, con lo cual,

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{Ei}.
 \tag{9.17}$$

Por otro lado,  $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$  y  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$ . Esto nos dice que

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = \frac{d\vec{P}}{dt},
 \tag{9.18}$$

es decir, la suma de las fuerzas externas aplicadas sobre un sistema de partículas es igual a la derivada del vector momento lineal total del sistema. Cuando el sistema está aislado (no se aplican fuerzas externas) se cumple que  $\vec{P}$  es una constante de movimiento. Este resultado generaliza a un número arbitrario de masas puntuales lo que habíamos visto para dos partículas en la ecuación (9.8). En este caso general, la velocidad del centro de masa del sistema sigue estando dada por la relación  $\vec{V}_{CM} = \vec{P}/M$ , donde  $M$  es la masa total. Entonces:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} \quad \text{y} \quad \vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}.
 \tag{9.19}$$

Estas dos ecuaciones muestran que la velocidad y la posición del centro de masa son, respectivamente, promedios pesados de las velocidades y posiciones de las partículas que componen el sistema, donde los pesos son las masas correspondientes.

La aceleración del centro de masa es la derivada del vector  $\vec{V}_{CM} = \vec{P}/M$ . Reemplazando en la ecuación (9.18):

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = M\vec{a}_{CM} . \quad (9.20)$$

**Ejemplo**

Determinemos la posición del CM de un sistema simple formado por 4 masas puntuales tales que  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  y  $m_4 = 5m$  dispuestas en los vértices de un cuadrado de lado de longitud  $L$ , como indica la figura 9.4.

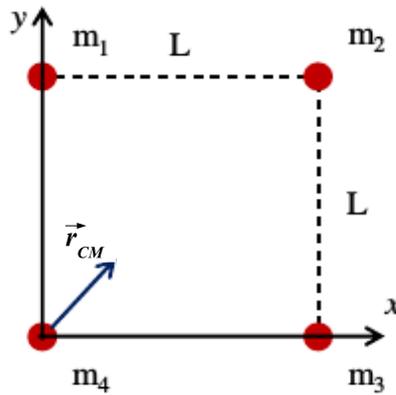


Figura 9.4: Sistema de cuatro masas puntuales.

Para encontrar  $\vec{r}_{CM}$ , primero debemos determinar las posiciones  $\vec{r}_i$  de todas las masas y la masa total  $M$ , como sugiere la ecuación (9.19). Utilizando un sistema de coordenadas como el mostrado en la figura, tenemos:

$$\vec{r}_1 = L\hat{j} , \quad \vec{r}_2 = L(\hat{i} + \hat{j}) , \quad \vec{r}_3 = L\hat{i} , \quad \vec{r}_4 = 0 \quad \text{y} \quad M = 8m . \quad (9.21)$$

Entonces,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{mL\hat{j} + mL(\hat{i} + \hat{j}) + mL\hat{i} + 0}{M} = \frac{2mL\hat{i} + 2mL\hat{j}}{8m} . \quad (9.22)$$

Luego,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{L}{4}\hat{i} + \frac{L}{4}\hat{j} . \quad (9.23)$$

Vemos en la figura 9.4 que el centro de masa se ubica a la misma distancia de las masas  $m_1$  y  $m_3$ , que son iguales pero más cerca de  $m_4$  que de  $m_2$ , ya que la primera masa es mayor que la segunda.

**9.1.4. Movimiento del centro de masa**

Aunque el movimiento de un sistema de partículas puede ser muy complicado si se considera el comportamiento individual de cada una de ellas, el movimiento del centro de masa es mucho más sencillo, por tratarse de un único punto, que representa de alguna manera la posición “global” del sistema. Consideremos un sistema de dos carritos (supuestos) puntuales, de masas  $m_A$  y  $m_B$ , unidos por un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $\ell_0$ , como indica la figura 9.5.

Sobre este sistema, en particular sobre el carrito A, se aplica una fuerza  $\vec{F}$ . Vamos a considerar primero el movimiento del centro de masa, que será un punto situado entre los carritos, equidistante de ambos si las masas son iguales y más cercano al de mayor masa en una situación general, como sugiere

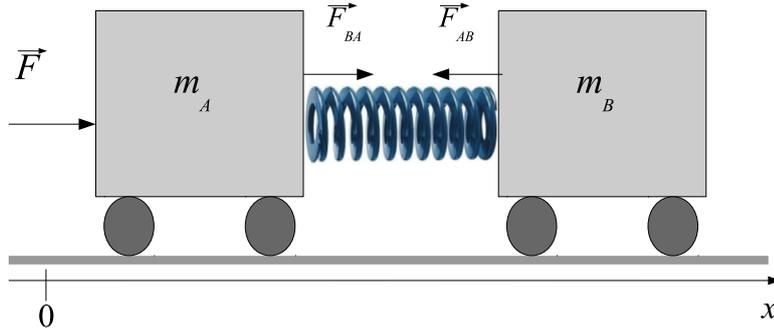


Figura 9.5: Sistema de dos carritos unidos por un resorte.

el ejemplo 9.1.3. Usando la segunda ley de Newton para sistemas de partículas, expresada en la ecuación (9.20), podemos escribir:

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = \vec{F} = M\vec{a}_{CM} = (m_A + m_B)\vec{a}_{CM}. \quad (9.24)$$

Si la fuerza  $\vec{F}$  es constante y está aplicada sobre la dirección del versor  $\hat{i}$ , es inmediato ver que la velocidad del centro de masa estará dada por

$$V_{CM} = a_{CM}t + V_{CM}^0, \quad (9.25)$$

mientras que la función de movimiento será

$$x_{CM} = \frac{1}{2}a_{CM}t^2 + V_{CM}^0t + x_{CM}^0. \quad (9.26)$$

Las constantes  $V_{CM}^0$  y  $x_{CM}^0$  representan, respectivamente, la velocidad del CM y su posición, en el instante  $t = 0$ . Sus valores dependerán de la elección adoptada para el sistema de coordenadas.

Ahora consideremos el movimiento de cada una de las masas por separado. Pensemos que el sistema de coordenadas tiene su origen a la izquierda de los carritos; en ese caso, el estiramiento (o compresión) del resorte estará dado por  $\Delta\ell = \ell - \ell_0 = x_B - x_A - \ell_0$ , donde  $\ell = x_B - x_A$  es la longitud que adopta el resorte en algún momento arbitrario del movimiento. Sobre el carrito A se aplican las fuerzas  $F$  y  $F_{BA} = k\Delta\ell$ , de manera que

$$F + k(x_B - x_A - \ell_0) = m_A \frac{d^2x_A}{dt^2}. \quad (9.27)$$

Sobre el carrito B la única fuerza aplicada es  $F_{AB} = -F_{BA} = -k\Delta\ell$ , entonces,

$$-k(x_B - x_A - \ell_0) = m_B \frac{d^2x_B}{dt^2}. \quad (9.28)$$

Para encontrar las funciones de movimiento  $x_A$  y  $x_B$  de ambas masas es necesario resolver el sistema de dos ecuaciones diferenciales formado por las ecs. (9.27) y (9.28). Una estrategia posible es dividir la ecuación (9.28) por  $m_B$ , la ecuación (9.27) por  $m_A$  y restar ambas ecuaciones:

$$\frac{F}{m_A} + \frac{k}{m_A}(x_B - x_A - \ell_0) = \frac{d^2x_A}{dt^2}; \quad (9.29)$$

$$-\frac{k}{m_B}(x_B - x_A - \ell_0) = \frac{d^2x_B}{dt^2}; \quad (9.30)$$

$$-\frac{F}{m_A} - \left(\frac{k}{m_B} + \frac{k}{m_A}\right)(x_B - x_A - \ell_0) = \frac{d^2x_B}{dt^2} - \frac{d^2x_A}{dt^2} = \frac{d^2(x_B - x_A)}{dt^2}. \quad (9.31)$$

Definiendo una variable  $u = \Delta\ell = x_B - x_A - \ell_0$ , la ecuación anterior puede escribirse de la siguiente forma:

$$-\frac{F}{m_A} - uk \left( \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_A} \right) = \frac{d^2u}{dt^2}. \quad (9.32)$$

El factor entre paréntesis es  $(m_A + m_B)/(m_A m_B)$ . Definiendo la masa reducida  $\mu = m_A m_B / (m_A + m_B)$ :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{k}{\mu}u - \frac{F}{m_A} = -\frac{k}{\mu} \left( u + \frac{\mu F}{km_A} \right). \quad (9.33)$$

Esta ecuación es parecida a la que satisface un único cuerpo unido a un resorte y su solución es también similar:

$$u(t) = C \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) - \frac{\mu F}{km_A}, \quad (9.34)$$

lo cual puede comprobarse sustituyendo en ecuación (9.33) (las constantes  $C$  y  $\phi_0$  dependen de las condiciones iniciales). La diferencia fundamental es que la variable  $u$  no corresponde a la posición de ninguno de los dos carritos, sino que está relacionada a la diferencia de sus coordenadas. Para obtener la posición de cada uno, es necesario relacionar las coordenadas entre sí a través de la posición del centro de masa:

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \Rightarrow x_B = \frac{(m_A + m_B)x_{CM} - m_A x_A}{m_B}. \quad (9.35)$$

Reemplazando esta expresión para  $x_B$  en  $u = x_B - x_A - \ell_0$  se llega a que

$$x_A = x_{CM} - \frac{u + \ell_0}{m_A + m_B} m_B, \quad (9.36)$$

donde  $x_{CM}(t)$  describe un movimiento acelerado uniformemente como se indica en ecuación (9.26) y  $u(t)$  un movimiento oscilatorio descrito en la ecuación (9.34).

A partir de este ejemplo se observa que es más fácil describir el movimiento del CM, por ser un único punto, que el de todas las partículas que componen el sistema. Esto podría complicarse más si la fuerza de interacción dependiera de otra manera de las coordenadas y mucho más aún, si se tratara de más masas puntuales.

### 9.1.5. Ejemplos de conservación del momento lineal

En la subsección 9.1.4 estudiamos el caso en que sobre un sistema de masas puntuales actúa una fuerza externa; ahora veremos el caso más sencillo en que el sistema está aislado, es decir, no actúan fuerzas exteriores.

#### Ejemplo 1: conservación del vector $\vec{P}$

Un astronauta de masa  $M$  que flota en el espacio intergaláctico al lado de una estación espacial arroja un martillo de masa  $m$  con velocidad  $v_m$  medida respecto de la estación espacial. ¿Qué velocidad  $v_a$  adquiere el astronauta?

El sistema astronauta-martillo está aislado, por lo tanto se conserva el vector  $\vec{P} = M\vec{v}_A + m\vec{v}_m$ . Inicialmente el astronauta y el martillo (en la mano del astronauta) flotan en reposo con respecto a la estación espacial, es decir, sus velocidades son nulas. Entonces podemos escribir:

$$\vec{P}_{inicial} = 0 \quad \vec{P}_{final} = M\vec{v}_A + m\vec{v}_m. \quad (9.37)$$

Como  $\vec{P} = \text{cte.}$ ,  $\vec{v}_A = -\frac{m}{M}\vec{v}_m$ .

**Ejemplo 2: conservación de una componente del vector  $\vec{P}$** 

Un cañón de masa  $M$  inicialmente en reposo dispara horizontalmente (en la dirección  $x$ ) una bala de masa  $m$  con velocidad  $v_b$  respecto de tierra. ¿Cuál es la velocidad del cañón?

Este caso es similar al anterior, con la salvedad de que ahora el sistema cañón-bala no está aislado, ya que cuando la bala es disparada actúa sobre ella la fuerza peso, que es exterior al sistema. Por otro lado, en todo momento también actúa la fuerza peso del cañón, pero ésta es compensada por la normal del suelo.

Como el sistema no está aislado, no podemos apelar a la conservación del vector  $\vec{P}$ . De todas maneras, la ecuación (9.18)

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad (9.38)$$

como toda ecuación vectorial, debe satisfacerse componente a componente; es decir, si alguna componente de  $\sum_i \vec{F}_{Ei}$  es nula, la componente correspondiente de  $\frac{d\vec{P}}{dt}$  también lo es. Dicho de otro modo, basta con que sea nula alguna de las componentes de la fuerza resultante exterior aplicada para que se conserve esa componente del momento lineal. En nuestro caso, ninguna fuerza exterior es aplicada en la dirección horizontal, razón por la cual, debe conservarse  $P_x$ . Luego:

$$P_x^{antes} = 0 \quad P_x^{después} = Mv_c + mv_b, \quad (9.39)$$

donde *antes* hace referencia a lo que ocurre antes del disparo y *después*, a lo que ocurre *inmediatamente* después del disparo. Está claro que  $v_c$  sólo tiene componente horizontal y que  $v_b$  también si es que consideramos el instante inmediatamente posterior al disparo; luego, la bala se verá afectada por su peso e iniciará un movimiento parabólico de caída. Teniendo en cuenta estas consideraciones, podemos despejar la velocidad del cañón:

$$v_c = -\frac{m}{M}v_b. \quad (9.40)$$

**9.1.6. Relación entre impulso y fuerza**

Consideremos una única fuerza  $\vec{F}$  que se aplica a una masa puntual o a un sistema de partículas. Si  $\vec{P}$  es el momento lineal del sistema, hemos visto que se cumple

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (9.41)$$

Esto nos dice que si integramos entre un instante inicial  $t_0$  y un instante arbitrario  $t$ ,

$$\vec{J} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt' = \int_{t_0}^t \frac{d\vec{P}}{dt'} dt' = \vec{P}(t) - \vec{P}(t_0) \equiv \Delta\vec{P}. \quad (9.42)$$

La cantidad  $\vec{J}$  tiene las mismas unidades que el momento lineal y se denomina impulso. Entonces, si una fuerza actúa durante un cierto período sobre un sistema, producirá un impulso igual a la variación del momento lineal del sistema. En particular, si la fuerza es constante durante ese período, el impulso correspondiente será igual al producto de la fuerza aplicada por el tiempo durante el cual se aplica.

## SECCIÓN 9.2

## Colisiones

Llamamos choque o colisión al proceso de interacción entre dos o más cuerpos durante un intervalo de tiempo muy corto. La longitud del intervalo de tiempo será corta o larga dependiendo de la escala de tiempo en la que estemos interesados. Por ejemplo, si el problema de estudio son dos galaxias que colisionan, un segundo es un tiempo extremadamente corto. En cambio, si se trata del choque de dos bolas de billar, un segundo es mucho tiempo.

Vamos a considerar colisiones entre dos cuerpos aislados del resto, de manera que para estudiar el problema se puede hacer uso de la conservación del momento lineal del sistema. Si conocemos el vector  $\vec{P}$  antes del choque, podemos asegurar que *después* va a seguir valiendo lo mismo. Acá las palabras *antes* y *después* hacen referencia a instantes *suficientemente* alejados de la colisión propiamente dicha; es en ese contexto en el cual se considera que el choque ocurre en un tiempo *suficientemente* corto.

## 9.2.1. Choque en una dimensión

Sean dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que tienen velocidades iniciales  $v_1$  y  $v_2$ . Vamos a suponer que las partículas viajan sobre el mismo eje, que las velocidades son tales que en algún momento va a haber colisión y que después de ella ambas seguirán viajando sobre el mismo eje con velocidades  $v'_1$  y  $v'_2$ .

Como el sistema es aislado, se conserva el vector  $\vec{P}$  del sistema; en particular, basta hablar de una única componente, que llamaremos  $P$ . Entonces, podemos escribir:

$$P = P' \quad \Rightarrow \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2. \quad (9.43)$$

Agrupando los términos correspondientes según cada partícula:

$$-m_1(v'_1 - v_1) = m_2(v'_2 - v_2). \quad (9.44)$$

La energía del sistema no es necesariamente una magnitud que se conserve a lo largo del movimiento, ya que no sabemos exactamente qué es lo que ocurre durante el choque propiamente dicho. Es conveniente estudiar la variación de energía en términos de las masas y velocidades que intervienen. Lo primero que vamos a observar es que antes del choque la energía  $E$  de las partículas es sólo de tipo cinético ( $T$ ), ya que no hay ninguna fuerza en juego y la energía potencial, como hemos visto, siempre se relaciona con alguna fuerza. Después del choque la situación es análoga, entonces:

$$\Delta E = \Delta T = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (9.45)$$

Luego,

$$2\Delta T = m_1(v_1'^2 - v_1^2) + m_2(v_2'^2 - v_2^2). \quad (9.46)$$

Si dividimos ambos miembros por la masa reducida  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  definida en la sección 9.1.4,

$$\frac{2}{\mu} \Delta T = \frac{m_1 + m_2}{m_2} (v_1'^2 - v_1^2) + \frac{m_1 + m_2}{m_1} (v_2'^2 - v_2^2). \quad (9.47)$$

Desarrollando la diferencia de cuadrados, la ecuación anterior queda:

$$\frac{2}{\mu} \Delta T = \left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right) (v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) + \left( \frac{m_2}{m_1} + 1 \right) (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2); \quad (9.48)$$

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = \frac{m_1}{m_2}(v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) + (v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) + \frac{m_2}{m_1}(v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) + (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2). \quad (9.49)$$

Ahora, teniendo en cuenta la ecuación (9.44), reemplazamos  $\frac{m_1}{m_2}(v'_1 - v_1)$  por  $-(v'_2 - v_2)$  y  $\frac{m_2}{m_1}(v'_2 - v_2)$  por  $-(v'_1 - v_1)$ :

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = -(v'_2 - v_2)(v'_1 + v_1) + (v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) - (v'_1 - v_1)(v'_2 + v_2) + (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2); \quad (9.50)$$

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = -(v'_1 + v_1)[(v'_2 - v_2) - (v'_1 - v_1)] + (v'_2 + v_2)[-(v'_1 - v_1) + (v'_2 - v_2)]; \quad (9.51)$$

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = [(v'_2 - v_2) - (v'_1 - v_1)][(v'_2 + v_2) - (v'_1 + v_1)]. \quad (9.52)$$

Si ahora ordenamos la expresión anterior de otra forma nos queda:

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = [(v'_2 - v'_1) - (v_2 - v_1)][(v'_2 - v'_1) + (v_2 - v_1)]. \quad (9.53)$$

Utilizando la expresión para la diferencia de cuadrados,

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = (v'_2 - v'_1)^2 - (v_2 - v_1)^2. \quad (9.54)$$

La diferencia  $v_2 - v_1$  es la velocidad de la masa 2 relativa a la masa 1. Entonces definimos  $v_r = v_2 - v_1$  y  $v'_r = v'_2 - v'_1$  para las situaciones antes y después del choque, respectivamente; con ello,

$$\frac{2}{\mu}\Delta T = v_r'^2 - v_r^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\mu}{2}v_r'^2 - \frac{\mu}{2}v_r^2. \quad (9.55)$$

La última ecuación muestra que la variación de la energía del sistema depende cuadráticamente de la velocidad relativa entre las partículas después del choque. Este comportamiento está graficado en la figura 9.6.

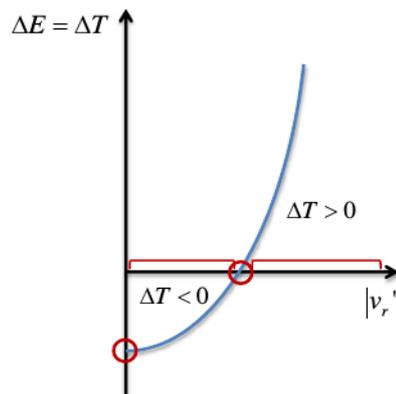


Figura 9.6: Variación de la energía en un choque unidimensional.

Vemos que según sea la relación entre las velocidades relativas antes y después del choque, será el signo de  $\Delta E$ . Por lo tanto hay tres casos:

- $\Delta E < 0$  corresponde a la situación  $|v'_r| < |v_r|$  y se denomina choque plástico.
- $\Delta E = 0$  corresponde a la situación  $|v'_r| = |v_r|$  y se denomina choque elástico.

- $\Delta E > 0$  corresponde a la situación  $|v'_r| > |v_r|$  y se denomina choque explosivo.

Existe un caso particular de choque plástico que corresponde a la situación de máxima pérdida de energía posible y ocurre cuando  $v'_r = 0$ , es decir, cuando después del choque las dos masas se mueven formando un “pegote” con la misma velocidad. Este caso se llama choque totalmente plástico o perfectamente plástico.

La ecuación (9.44) nos dice que si conocemos tres velocidades podemos averiguar la cuarta. Usando la ecuación (9.55) podríamos averiguar dos velocidades conociendo las otras dos y la variación de energía. En definitiva, en ambos casos hay que conocer tres cosas para poder describir el movimiento de las dos masas antes y después del choque.

### Choque perfectamente plástico

En este caso, además de saber que se conserva  $P$ , sabemos que

$$v'_1 = v'_2 \equiv v' . \quad (9.56)$$

Usando que

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' , \quad (9.57)$$

es inmediato obtener la velocidad final en términos de las iniciales:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} . \quad (9.58)$$

### Choque elástico

Vamos a resolver el problema particular del choque elástico en una dimensión. Supondremos conocidas las masas, las velocidades iniciales y además sabemos que  $\Delta E = 0$ . Como el choque es elástico sabemos por la ecuación (9.55) que  $v_r^2 = v_r'^2$ . Esta última relación nos dice que

$$|v'_2 - v'_1| = |v_2 - v_1| \quad \Rightarrow \quad v'_2 - v'_1 = v_2 - v_1 \quad (A) \quad \text{o bien} \quad v'_2 - v'_1 = -(v_2 - v_1) \quad (B) . \quad (9.59)$$

Para dilucidar cuál de los dos casos (A) o (B) es el correcto, vamos a volver a escribir la ecuación (9.46), para este caso en que se conserva la energía y la ecuación (9.44):

$$-m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) ; \quad (9.60)$$

$$-m_1(v'_1 - v_1) = m_2(v'_2 - v_2) . \quad (9.61)$$

Si dividimos la primera ecuación, factorizando las diferencias de cuadrados, por la segunda, obtenemos

$$v'_1 + v_1 = v'_2 + v_2 . \quad (9.62)$$

Es decir:

$$v_1 - v_2 = v'_2 - v'_1 \quad \Rightarrow \quad v'_2 - v'_1 = -(v_2 - v_1) , \quad (9.63)$$

que corresponde al caso (B). Al dividir la ecuación (9.60) por la ecuación (9.61) deberíamos habernos preguntado si alguno de los denominadores podría ser cero. Para que ello ocurra deberían ser  $v'_1 = v_1$  o  $v'_2 = v_2$ , pero cualquiera de estas condiciones nos lleva a la otra, por la ecuación (9.44), y ambas significan que las masas siguieron después del choque “como si nada”, como si se hubieran atravesado

sin interactuar, lo cual no tiene mucho sentido y es precisamente lo que reflejaría el caso (A), que hemos descartado.

En definitiva, podemos escribir dos ecuaciones, que corresponden a la conservación de  $P$  y a la conservación de la energía:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad \text{y} \quad v'_2 - v'_1 = -(v_2 - v_1). \quad (9.64)$$

La resolución de estas ecuaciones es sencilla y permite obtener

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad \text{y} \quad v'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (9.65)$$

Analicemos algunos casos particulares de choque elástico a la luz de las últimas ecuaciones:

■  $m_1 = m_2 \Rightarrow v'_1 = v_2$  y  $v'_2 = v_1$ . Las partículas intercambian sus velocidades.

■  $v_2 = 0$  y  $m_1 > m_2 \Rightarrow v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 < v_1$  y  $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 > v_1$ .

Si la partícula incidente es más pesada, las dos salen hacia adelante.

■  $v_2 = 0$  y  $m_1 < m_2 \Rightarrow v'_1 = -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_1$  y  $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 < v_1$ .

Si la partícula incidente es más liviana, rebota hacia atrás y la que estaba en reposo sale hacia adelante.

■  $v_2 = 0$  y  $m_1 = m_2 \Rightarrow v'_1 = 0$  y  $v'_2 = v_1$ . Puede verse que este es un caso particular del primero.

### 9.2.2. Choques en dos y tres dimensiones

En este caso, la conservación del vector  $\vec{P}$  lleva a plantear la conservación de cada componente:

$$P_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}; \quad (9.66)$$

$$P_y = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}. \quad (9.67)$$

Suponiendo que se conocen las velocidades iniciales, las últimas igualdades constituyen un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas: dos componentes de velocidad por cada partícula. Si se conoce la variación de la energía (por ejemplo, se sabe que el choque es elástico) entonces se tiene una ecuación más:

$$\Delta E = \Delta T = \frac{1}{2} m_1 (v'^2_{1x} + v'^2_{1y}) + \frac{1}{2} m_2 (v'^2_{2x} + v'^2_{2y}) - \frac{1}{2} m_1 (v^2_{1x} + v^2_{1y}) - \frac{1}{2} m_2 (v^2_{2x} + v^2_{2y}). \quad (9.68)$$

En este caso, es necesario conocer una de las componentes finales de la velocidad de alguna de las dos partículas para obtener las otras tres.

La situación de un choque en tres dimensiones es análoga a la anterior, sólo que en este caso, la conservación de  $\vec{P}$  impone tres ecuaciones e incluye seis incógnitas (suponiendo conocidas las velocidades iniciales): tres componentes de velocidad por cada partícula. Suponiendo que se conoce la variación de la energía, lo que aporta otra ecuación, es necesario conocer dos de las componentes finales de la velocidad de alguna de las dos partículas para obtener las otras cuatro.

SECCIÓN 9.3

## Algunas definiciones vectoriales

### 9.3.1. Producto vectorial

Sabemos que dados dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  que forman un ángulo  $\theta$  su producto escalar es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\theta) \quad \text{o bien} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (9.69)$$

donde  $A$  y  $B$  denotan los módulos de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , respectivamente.

Ahora definimos la operación *producto vectorial*  $\vec{A} \times \vec{B}$  entre dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  cuyo resultado es otro vector  $\vec{C}$  que satisface las siguientes propiedades:

- El módulo está dado por el producto de los módulos y el seno del ángulo comprendido  $\theta$ :  $|\vec{C}| = AB \sin(\theta)$ , lo cual nos dice que el producto vectorial de vectores paralelos es nulo.
- La dirección del vector  $\vec{C}$  es perpendicular al plano formado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .
- El sentido está dado por la regla de la mano derecha ilustrada en la figura 9.7. Es decir, el sentido es hacia donde apunta el pulgar de la mano derecha al hacer girar el vector  $\vec{A}$  hacia el vector  $\vec{B}$ . Otra forma de verlo es que el vector  $\vec{C}$  apunta hacia el sentido de avance de una canilla que se gira desde  $\vec{A}$  hacia  $\vec{B}$ : hacia arriba en el ejemplo de la figura. El producto  $\vec{B} \times \vec{A}$  tiene el sentido opuesto, ya que en este caso hay que llevar (con la mano derecha) el vector  $\vec{B}$  hacia el vector  $\vec{A}$ , con lo que el pulgar apuntaría hacia abajo. Entonces,  $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$ , es decir, el producto vectorial es anticonmutativo.

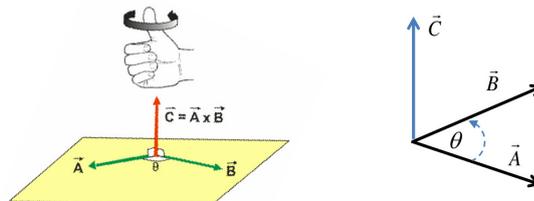


Figura 9.7: Regla de la mano derecha.

Se puede demostrar que el producto vectorial posee la propiedad distributiva respecto de la suma de vectores. Para calcular el producto vectorial entre dos vectores suele ser práctico escribirlos en componentes y operar aplicando esta propiedad:

$$\text{Si } \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}, \quad (9.70)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}); \quad (9.71)$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = & A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \times \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} + \\ & A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \times \hat{k}. \end{aligned} \quad (9.72)$$

Como el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo, la expresión anterior se reduce a:

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} + A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j}. \quad (9.73)$$

Si ahora usamos la anticonmutatividad del producto vectorial,

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \hat{i} \times \hat{j} + (A_x B_z - A_z B_x) \hat{i} \times \hat{k} + (A_y B_z - A_z B_y) \hat{j} \times \hat{k}. \quad (9.74)$$

Para ver cuánto valen los productos vectoriales entre versores podemos usar la regla de la mano derecha y ayudarnos con el esquema de la figura 9.8.

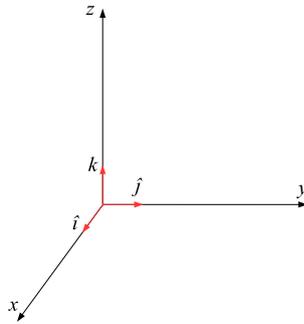


Figura 9.8: Ejes cartesianos y sus versores.

Es fácil ver que:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \quad \text{y} \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad (9.75)$$

con lo cual podemos escribir:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}. \quad (9.76)$$

Otra forma más compacta de expresar el resultado de la ecuación (9.76) es usando el determinante de una matriz:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (9.77)$$

Esta expresión conduce al mismo resultado que la ecuación (9.76).

### 9.3.2. Momento de un vector

Consideremos un vector  $\vec{A}$  cuya posición respecto de un origen  $O$  está indicada por el vector  $\vec{r}_{OA}$ , como muestra la figura 9.9.

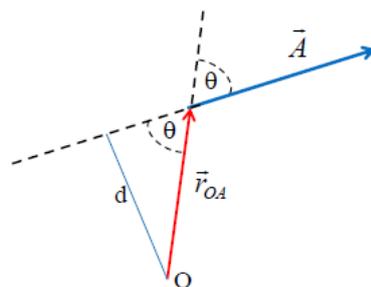


Figura 9.9: Momento de un vector  $\vec{A}$ .

Se define el vector momento  $\vec{M}_O$  del vector  $\vec{A}$  respecto del punto  $O$ , denominado centro de momentos, como el producto vectorial

$$\vec{M}_O = r_{OA} \times \vec{A} . \tag{9.78}$$

Usando la definición de producto vectorial

$$|\vec{M}_O| = |\vec{A}| |r_{OA}| \text{sen}(\theta) = d|\vec{A}| . \tag{9.79}$$

Por otro lado, el vector  $\vec{M}_O$  es perpendicular al plano determinado por los vectores  $\vec{A}$  y  $r_{OA}$ . El momento de un vector depende del centro de momentos que se elija. Por lo tanto, siempre que se haga mención al momento de un vector hay que aclarar cuál es el centro de momentos respecto del cual ha sido calculado.

**Momento de un par de vectores**

Se denomina par de vectores al sistema formado por dos vectores de igual módulo, sentido opuesto y cuyas direcciones, o rectas de acción, son paralelas entre sí. En la figura 9.10 se muestra el par de vectores  $\vec{A}_1; \vec{A}_2$ .

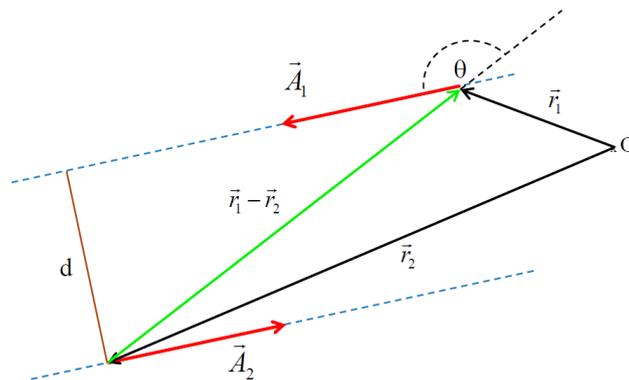


Figura 9.10: Par de vectores.

Se llama momento del par respecto del punto  $O$  a la suma de los momentos, respecto del punto  $O$ , de los vectores que forman el par:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O} , \tag{9.80}$$

donde

$$\vec{M}_{1O} = \vec{r}_1 \times \vec{A}_1 \quad \text{y} \quad \vec{M}_{2O} = \vec{r}_2 \times \vec{A}_2 \tag{9.81}$$

son los momentos de  $\vec{A}_1$  y  $\vec{A}_2$  respecto de  $O$ . Entonces,

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{A}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{A}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{A}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{A}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{A}_1 . \tag{9.82}$$

El módulo de este vector esta dado por

$$|\vec{M}_O| = |\vec{A}_1| |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \text{sen}(\theta) = d|\vec{A}_1| . \tag{9.83}$$

Es decir, el módulo del momento de un par de vectores de módulo  $A$  separados entre sí por una distancia  $d$  es igual al producto del módulo por la distancia y no depende del centro de momentos elegido.

## SECCIÓN 9.4

## Vectores velocidad angular y momento angular

### 9.4.1. Vector velocidad angular

Consideremos una partícula que describe un movimiento circular. Si el sistema de coordenadas tiene origen en el centro del círculo, los vectores posición  $\vec{r}$  y velocidad  $\vec{v}$  de la partícula son ortogonales en cualquier instante (siempre que no se anule la velocidad). Además sabemos que la velocidad angular  $\omega$  está dada por el cociente entre los módulos de los vectores velocidad y posición. Vamos a definir el vector velocidad angular  $\vec{\omega}$  de manera que  $|\vec{\omega}| = \omega = |\vec{v}|/|\vec{r}|$ , cuya dirección sea perpendicular al plano del movimiento (determinado por  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ ) y cuyo sentido esté dado por la regla de la mano derecha desde  $\vec{r}$  hacia  $\vec{v}$  (trasladando estos vectores de manera que tengan un origen común), como se indica en la figura 9.11.



Figura 9.11: Dirección del vector velocidad angular.

Vemos que con esta definición de  $\vec{\omega}$  se cumple que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (9.84)$$

ya que según esta expresión,  $|\vec{v}| = |\vec{\omega}| |\vec{r}|$ , como debe ser, y además, recurriendo otra vez a la figura 9.11, puede verse que la dirección del vector  $\vec{v}$  también queda bien definida.

### 9.4.2. Momento angular

#### Momento angular de una partícula

Sea una partícula de masa  $m$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$ , es decir tiene un momento  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Se define el momento angular (o impulso angular)  $\vec{L}$  de la partícula con respecto al punto  $O$  como el producto vectorial de los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{p}$ , es decir:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (9.85)$$

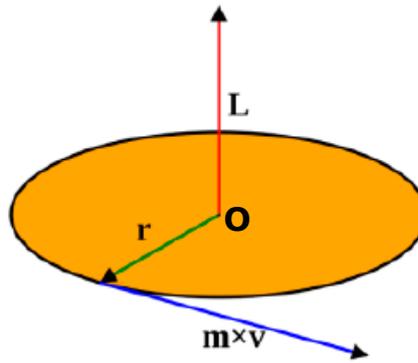


Figura 9.12: Momento angular de una partícula.

La figura 9.12 muestra que el vector  $\vec{L}$  en un dado instante del movimiento es perpendicular al plano formado por los vectores posición y velocidad en ese instante. Esta observación, que se desprende trivialmente de la definición de producto vectorial, tiene como consecuencia interesante que, **en el caso en que  $\vec{L}$  es constante**, los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{p}$  permanecen siempre en un mismo plano, que constituye el plano del movimiento.

Según la definición vista en la sección 9.3.2, vemos que  $\vec{L}$  es el momento del vector  $\vec{p}$ . Las unidades del momento angular están dadas por:

$$[\vec{L}] = [\vec{r}][\vec{p}] = \begin{cases} \frac{kgm^2}{s} & \text{MKS} \\ \frac{gcm^2}{s} & \text{cgs} \end{cases} . \quad (9.86)$$

Analicemos la variación temporal del momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} , \quad (9.87)$$

donde con  $\vec{F}$  denotamos la suma de las fuerzas aplicadas sobre la partícula y se ha hecho uso de la relación entre el momento de una partícula y la fuerza aplicada, dada en ecuación (9.3). Además, como  $\vec{v} // \vec{p}$ ,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{\tau} , \quad (9.88)$$

donde  $\vec{\tau}$  es el momento de la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al punto  $O$  (el mismo centro de momentos usado para  $\vec{L}$ ).

De la ecuación (9.88) vemos que si  $\vec{\tau} = 0$  se cumple que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 , \quad (9.89)$$

es decir, *si el momento de la resultante de las fuerzas exteriores es nulo, el momento angular de una partícula es una constante de movimiento*. Podemos ver que aunque la fuerza aplicada no sea nula, el momento  $\tau$  podría serlo. Pensemos en el siguiente ejemplo: una boleadora es mantenida en movimiento circular uniforme en el plano horizontal. Obviamente, la mano que está en el centro del movimiento ejerce una fuerza  $\vec{F} \neq 0$ , de tipo central, es decir, provee la aceleración centrípeta necesaria para torcer el vector velocidad en todo instante. En este caso, si consideramos como centro de momentos el centro

del movimiento, donde está situada la mano,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad \forall t, \tag{9.90}$$

pues  $\vec{r} \parallel \vec{F}$  para todo tiempo. Por la ecuación (9.88), vemos que  $\vec{L}$  se conserva. Si elegimos otro centro de momentos,  $\vec{r}$  no es paralelo a  $\vec{F}$ , con lo cual  $\vec{\tau}$  no se anula y  $\vec{L}$  no se conserva.

Es interesante analizar el caso en que se aplica una fuerza de tal manera que su momento  $\vec{\tau}$  es normal al vector  $\vec{L}$ , como muestra la figura 9.13, donde se da como ejemplo la situación en que  $\vec{L} \parallel \hat{i}$  y  $\vec{\tau} \parallel \hat{j}$ . En virtud de la ecuación (9.88), en este caso la derivada temporal de  $\vec{L}$  es perpendicular al propio vector  $\vec{L}$ , por lo tanto, para intervalos pequeños  $\vec{L} \perp \Delta\vec{L}$ , es decir, el vector momento angular gira alrededor del eje  $z$  en el ejemplo ilustrado en la figura.

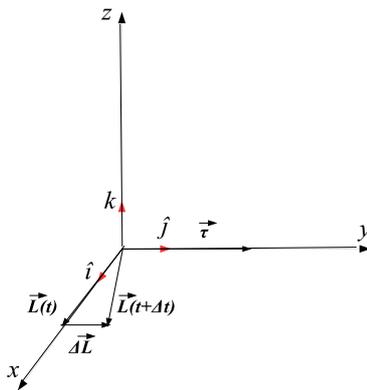


Figura 9.13: Momento angular de una partícula.

### El momento angular y la segunda ley de Kepler

Consideremos una partícula de masa  $m$  que se mueve en un plano, como hemos mencionado que ocurre en el caso en que actúa una fuerza central. Vamos a describir este movimiento en un sistema de coordenadas polares. En la figura 9.14 se indica, para un dado instante, su posición, dada por el vector  $\vec{r}$  y su momento lineal  $\vec{p}$ , descompuesto según las direcciones de los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$ , paralelos a la dirección de  $\vec{r}$  y a la dirección de crecimiento del ángulo  $\theta$ , respectivamente.

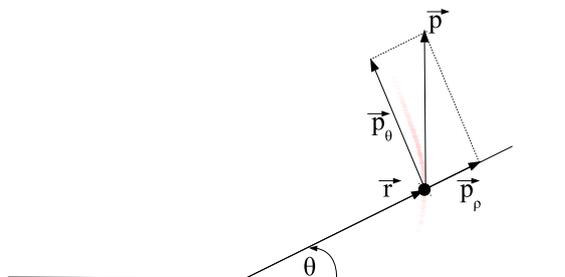


Figura 9.14: Movimiento de una partícula en coordenadas polares.

El momento angular de esta partícula estará dado por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\vec{p}_\rho + \vec{p}_\theta) = rp_\theta \hat{k}, \quad (9.91)$$

donde  $\hat{k}$  es el versor en la dirección perpendicular al plano formado por los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$ , apuntando hacia afuera de la hoja (o pantalla). Sabemos que  $\vec{r} = r\hat{u}_\rho$ . Derivando podemos obtener el vector velocidad en coordenadas polares:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_\rho + r\dot{\hat{u}}_\rho. \quad (9.92)$$

En la expresión anterior hemos usado la notación que consiste en indicar la derivada temporal agregando un punto encima de la magnitud derivada. Luego,

$$\vec{v} = \overbrace{\dot{r}}^{v_\rho} \hat{u}_\rho + \overbrace{r\dot{\theta}}^{v_\theta} \hat{u}_\theta \quad \text{pues} \quad \dot{\hat{u}}_\rho = \dot{\theta}\hat{u}_\theta. \quad (9.93)$$

Sabemos que la componente del momento lineal,  $p_\theta$  que sobrevivió al producto vectorial de la ecuación (9.91) es  $mv_\theta$ , por lo tanto:

$$\vec{L} = rmv_\theta \hat{k} = mr^2 \dot{\theta} \hat{k} = mr^2 \omega \hat{k}. \quad (9.94)$$

Analicemos ahora el movimiento de un planeta alrededor del Sol. En la figura 9.15 se observa que el área  $\Delta A$  barrida por la línea que une el planeta con el Sol en un tiempo  $\Delta t$  puede aproximarse por el área del triángulo  $ABC$ . Esta área será:

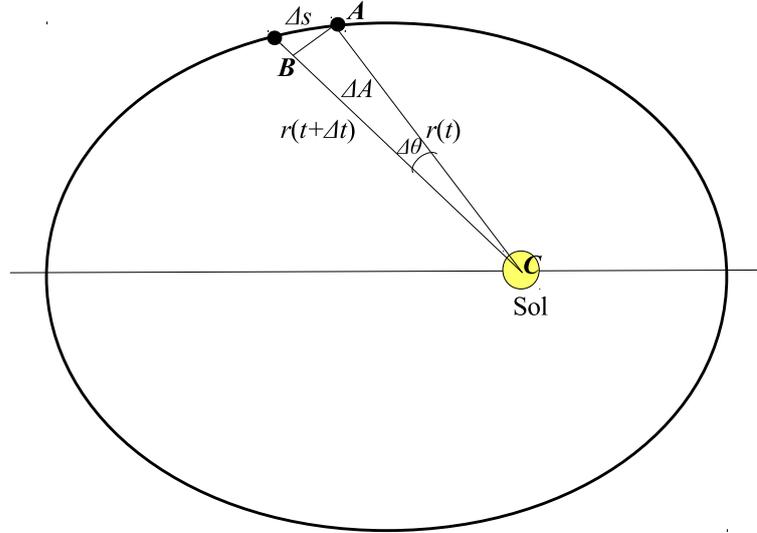


Figura 9.15: Movimiento de un planeta alrededor del Sol.

$$\Delta A = \frac{\overline{AB}r}{2} \simeq \frac{\Delta s r}{2} = \frac{r\Delta\theta r}{2} = \frac{r^2\Delta\theta}{2}. \quad (9.95)$$

Si definimos la velocidad areolar de la segunda ley de Kepler como  $\dot{A} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$ ,

$$\dot{A} = \frac{r^2\Delta\theta}{2\Delta t}. \quad (9.96)$$

Pasando al límite para  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\dot{A} = \frac{r^2 d\theta}{2dt} = \frac{r^2 \omega}{2}. \quad (9.97)$$

Pero esta última ecuación puede reescribirse utilizando la expresión de  $\vec{L}$  de la ecuación (9.94):

$$\dot{A} = \frac{L}{2m} . \quad (9.98)$$

La fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre el planeta es siempre paralela al vector posición (fuerza central), por lo tanto  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ . Entonces, por la ecuación (9.88),  $\vec{L} = L\hat{k} = \text{cte}$ . Esto nos dice que  $\dot{A}$  es constante, como afirma la segunda ley de Kepler.

### Momento angular de dos partículas

Analicemos ahora el momento angular de un sistema aislado de dos partículas interactuantes como el ilustrado en la figura 9.16.

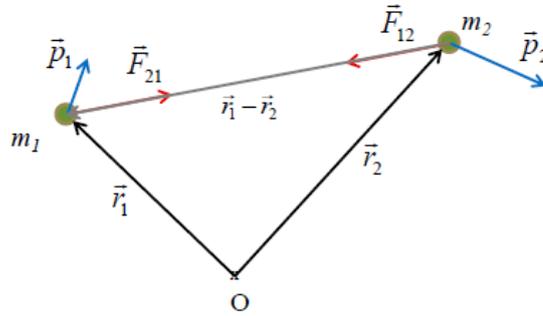


Figura 9.16: Momento angular de un sistema de dos partículas interactuantes.

Definimos el momento angular de dos partículas como la suma de los momentos individuales:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 . \quad (9.99)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) + \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 \times \vec{p}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} \times \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{v}_1 \times \vec{p}_1 + \\ &\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{v}_2 \times \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} . \end{aligned} \quad (9.100)$$

Como  $\vec{v}_1 \parallel \vec{p}_1$  y  $\vec{v}_2 \parallel \vec{p}_2$ ,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} . \quad (9.101)$$

Además, por la tercera ley de Newton,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ , luego:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21} . \quad (9.102)$$

Puede verse claramente en la figura 9.16 que  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \parallel \vec{F}_{21}$ . Esto último nos dice que para un sistema aislado de dos partículas interactuantes

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 , \quad (9.103)$$

es decir, el momento angular total del sistema se conserva.

Vemos en la ecuación (9.102) que la derivada temporal del momento angular del sistema es igual

al momento del par de fuerzas  $\vec{F}_{12}; \vec{F}_{21}$ , que como vimos en la sección 9.3.2, es independientemente del centro de momentos elegido, con lo cual  $\vec{L}$  es una constante de movimiento para un sistema aislado de dos partículas sin importar dónde se ubique el centro de momentos. Sin embargo, si ponemos el centro de momentos en el centro de masa del sistema pueden sacarse conclusiones interesantes. Recordemos que desde el centro de masa

$$\vec{r}_{CM} = 0 = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (9.104)$$

lo que implica que  $\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1$ . Por otra parte, desde el centro de masa,

$$\vec{V}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{P} = 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_1; \quad (9.105)$$

entonces, podemos expresar el momento angular de la partícula 2 en términos de la coordenada y el momento de la partícula 1:

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \frac{m_1}{m_2} \vec{L}_1. \quad (9.106)$$

Notemos que la última expresión nos dice que  $\vec{L}_2 // \vec{L}_1$ . Como  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ , concluimos que  $\vec{L} // \vec{L}_1 // \vec{L}_2$ . Sabemos que

- $\vec{L}_1$  es perpendicular al plano determinado por  $\vec{r}_1$  y  $\vec{p}_1$ ;
- $\vec{L}_2$  es perpendicular al plano determinado por  $\vec{r}_2$  y  $\vec{p}_2$ ;
- $\vec{L}_1 // \vec{L}_2$ .

Estas tres afirmaciones nos llevan a asegurar que si el sistema se describe desde el centro de masa, el plano determinado por  $\vec{r}_1$  y  $\vec{p}_1$  y el plano determinado por  $\vec{r}_2$  y  $\vec{p}_2$  son en realidad un único plano; dicho de otra manera, los cuatro vectores  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{p}_1$ ,  $\vec{r}_2$  y  $\vec{p}_2$  están en un mismo plano: el plano en el cual se produce el movimiento. Por otro lado, como  $\vec{L} // \vec{L}_1 // \vec{L}_2$ , el vector  $\vec{L}$  es perpendicular al plano de movimiento. Ahora bien,  $\vec{L}$  es un vector constante a lo largo del movimiento; en particular su dirección es siempre la misma. De aquí podemos concluir que el movimiento se realiza en un plano para todo tiempo, y las dos partículas nunca se salen de él. Esto es un hecho físico, que si bien fue deducido usando el centro de masa como origen de coordenadas, no puede depender de esa elección particular. Es decir, el movimiento se describe en un plano, que puede contener al origen o no, independientemente de la elección de este último.

### Momento angular de un sistema de partículas

Por último, vamos a considerar un sistema de  $n$  partículas interactuantes entre sí y con el exterior; es decir, no estamos pensando necesariamente en un sistema aislado. Podemos calcular el momento angular del sistema:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (9.107)$$

Entonces,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^n \left( \vec{v}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right). \quad (9.108)$$

Sabemos que el primer producto vectorial del último miembro se anula, ya que  $\vec{v}_i // \vec{p}_i$ ; en cuando al segundo producto vectorial, podemos escribir:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{Ei} + \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ji}, \quad (9.109)$$



# 10 | Trabajo y Energía

## SECCIÓN 10.1

### Energías cinética y potencial

Hemos visto que en algunos casos en que hay ciertas fuerzas aplicadas podemos encontrar una constante de movimiento que llamamos energía mecánica. En la Tabla 8.3 habíamos presentado las expresiones de la energía mecánica correspondientes a distintos tipos de fuerza.

Para casos como los mostrados en la Tabla 8.3, podemos escribir  $E = T + V$ , donde la energía cinética  $T = \frac{1}{2}mv^2$  depende de la velocidad y la energía potencial  $V$  depende de las coordenadas. Entonces, para modificar la energía cinética del cuerpo es necesario modificar el módulo de la velocidad. Pero, como hemos visto, para modificar el módulo de la velocidad es necesario que exista una aceleración tangencial y para ello debe existir una componente tangencial de la fuerza aplicada sobre el cuerpo.

## SECCIÓN 10.2

### Trabajo de una fuerza

Consideremos un caso particular en el que una fuerza constante se aplica en la dirección del desplazamiento de una masa puntual. En la figura 10.1 se muestra una fuerza  $\vec{F}$  que es aplicada sobre un cuerpo de masa  $m$  inicialmente en la posición  $x_0$  y con una velocidad  $v_0$ , cuya dirección es la misma que la de la fuerza.

Queremos calcular la variación de la energía cinética desde la posición inicial hasta una posición  $x_1$ , también indicada en la figura. Para ello integramos la aceleración  $a = \frac{F}{m}$ :

$$v = at + v_0, \quad (10.1)$$

e integramos nuevamente para obtener la posición:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0. \quad (10.2)$$

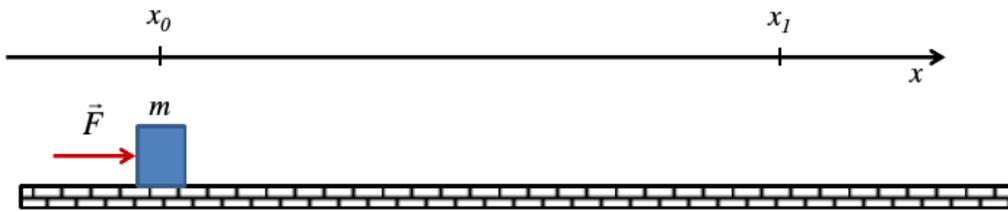


Figura 10.1: Fuerza aplicada paralelamente al desplazamiento.

La variación de la energía cinética es

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv^2(t_1) - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m [v^2(t_1) - v_0^2] . \quad (10.3)$$

Vamos a despejar  $t_1$  de la ecuación (10.1) para expresar  $x_1$  en términos de  $v_1 \equiv v(t_1)$ :

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a} , \quad (10.4)$$

entonces, reemplazando en ecuación (10.2),

$$x_1 = \frac{1}{2}a \left( \frac{v_1 - v_0}{a} \right)^2 + v_0 \frac{v_1 - v_0}{a} + x_0 = \frac{v_1^2/2 + v_0^2/2 - v_1v_0 + v_0v_1 - v_0^2}{a} + x_0 ; \quad (10.5)$$

es decir,

$$x_1 - x_0 = \frac{v_1^2/2 - v_0^2/2}{a} \Rightarrow \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = a(x_1 - x_0) . \quad (10.6)$$

Sustituyendo en ecuación (10.3) podemos escribir:

$$\Delta T = ma(x_1 - x_0) = F(x_1 - x_0) , \quad (10.7)$$

o bien,

$$\Delta T = F\Delta x , \quad (10.8)$$

donde  $\Delta x$  representa el desplazamiento del bloque. El segundo miembro de la ecuación (10.8) se denomina trabajo realizado por la fuerza aplicada y se denota con la letra  $W$ .

La figura 10.2 muestra una situación más general, donde la fuerza constante  $\vec{F}$  se aplica en forma oblicua a la dirección del desplazamiento.

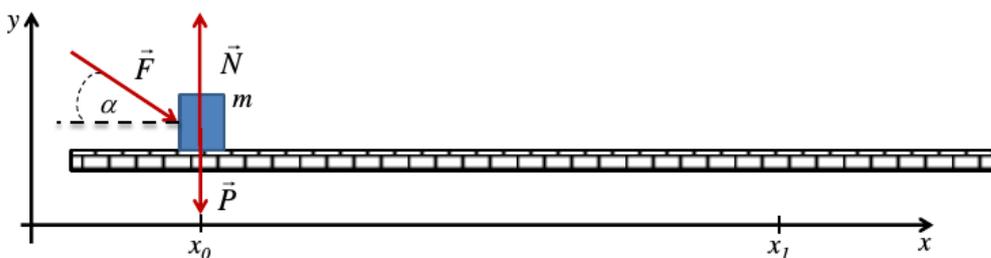


Figura 10.2: Fuerza aplicada en forma oblicua al desplazamiento.

Si planteamos la segunda ley de Newton tenemos que

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a} . \quad (10.9)$$

Estamos interesados solamente en lo que ocurre según el eje  $x$ , que es la dirección del desplazamiento, entonces

$$F \cos(\alpha) = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F \cos(\alpha)}{m} . \quad (10.10)$$

La primera igualdad de la ecuación (10.7) fue obtenida de manera independiente al valor de la fuerza. Sólo se utilizó para su deducción el hecho de que se trata de una fuerza constante, por lo tanto sigue siendo válida en este caso. Sustituyendo el valor encontrado para la aceleración,

$$\Delta T = F \cos(\alpha)(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta T = F \cos(\alpha)d . \quad (10.11)$$

Esta última expresión incluye la ecuación (10.8) como caso particular con  $\alpha = 0$ . Vemos que si  $\cos(\alpha) > 0$ , es decir, si la componente de la fuerza aplicada en la dirección el desplazamiento es positiva, el trabajo es positivo, mientras que si  $\cos(\alpha) < 0$ , es decir, si la componente de la fuerza aplicada en la dirección el desplazamiento es negativa, el trabajo es negativo.

Analicemos ahora el caso más general posible, ilustrado en la figura 10.3.

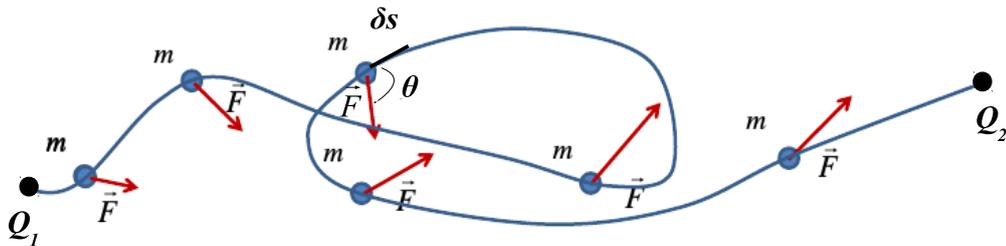


Figura 10.3: Fuerza variable aplicada sobre una trayectoria curvilínea  $C$ .

En este caso se aplica una fuerza de módulo y dirección variable sobre una trayectoria curvilínea  $C$  entre los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$ . Podemos imaginar la trayectoria como una sucesión de pequeños tramos rectos de longitud  $\delta s$  como indica la figura. En virtud de la ecuación (10.11) la variación de la energía cinética en cada uno de ellos estará dada por  $\delta T = F \cos(\alpha)\delta s$ . Para la variación de energía cinética entre los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$  podemos escribir:

$$\Delta T = \sum_i \Delta T_i = \sum_i F_i \cos(\theta_i) \delta s_i . \quad (10.12)$$

Pasando al límite cuando los  $\delta s_i$  tienden a cero,

$$\Delta T = \int_{C|Q_1}^{Q_2} F \cos(\theta) ds . \quad (10.13)$$

La letra  $C$  en el límite inferior de la integral significa que ésta debe efectuarse “a lo largo de la curva  $C$ ”. Integrales de este tipo se denominan integrales de línea. Definimos ahora el vector  $d\vec{s}$ , de módulo  $ds$  y dirección dada por la dirección del versor  $\hat{v}$ , es decir, siempre tangente a la curva y apuntando hacia la dirección de avance de la masa  $m$ . Entonces la expresión anterior puede escribirse de manera más compacta:

$$\Delta T = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = W . \quad (10.14)$$

Es decir, el trabajo  $W$  realizado por la fuerza  $\vec{F}$  aplicada sobre una masa puntual  $m$  entre los puntos  $Q_1$

y  $Q_2$  sobre la trayectoria  $C$  es igual a la variación de la energía cinética de la partícula entre esos dos puntos.

Las unidades del trabajo son las mismas que las de energía y están dadas por:

$$[W] = [E] = [F][\ell] = \begin{cases} \text{Nm} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} \equiv \text{Joule (J)} & \text{MKS} \\ \text{dyn cm} = \frac{\text{gcm}^2}{\text{s}^2} \equiv \text{ergio (erg)} & \text{cgs} \end{cases} . \quad (10.15)$$

### 10.2.1. Cálculo del trabajo; ejemplos

Supongamos que queremos calcular el trabajo  $W$  de una fuerza  $\vec{F}$  a lo largo de una trayectoria entre dos puntos. Para poder hacerlo necesitamos las coordenadas de los puntos de partida  $Q_1$  y de llegada  $Q_2$ , la expresión de cada componente  $F_i$  de la fuerza en función de las coordenadas  $x_i$  y la ecuación de la trayectoria  $C$ . En el caso de una fuerza con componentes en el plano  $x$ - $y$  y una trayectoria sobre el mismo plano necesitaremos:

$$Q_{1,x}, Q_{1,y}, Q_{2,x}, Q_{2,y}, \quad (10.16)$$

$$F_x(x,y), F_y(x,y) \text{ y la forma funcional de la curva } C : y(x) . \quad (10.17)$$

Para resolver la integral de línea dada en ecuación (10.14) debemos ser capaces de expresar el vector  $d\vec{s}$  en términos de las coordenadas  $x$  e  $y$ . En la figura 10.4 se muestra que  $\Delta\vec{s} = \Delta\vec{r}$ , es decir, es la variación del vector posición cuando transcurre un intervalo pequeño  $\Delta t$ . Para obtener  $d\vec{s}$  solo hace falta hacer tender  $\Delta t$  a cero:

$$d\vec{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\vec{s}. \quad (10.18)$$

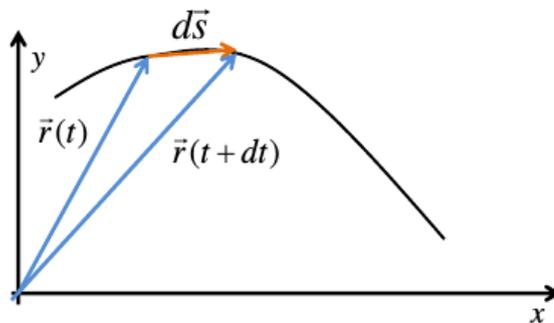


Figura 10.4: Vector  $d\vec{s}$ .

Luego, las componentes de  $d\vec{s}$  son las componentes  $dx$  y  $dy$  del vector  $d\vec{r}$ :

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} . \quad (10.19)$$

Entonces podemos escribir:

$$W = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C|(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} [F_x(x,y)\hat{i} + F_y(x,y)\hat{j}] \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \quad (10.20)$$

$$= \int_{C|(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} F_x(x,y)dx + \int_{C|(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} F_y(x,y)dy . \quad (10.21)$$

Si expresamos  $y$  como función de  $x$  podemos pasar de tener integrales de línea a tener integrales en una sola variable:

$$\int_{C|(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} F_x(x,y)dx = \int_{x_1}^{x_2} F_x[x,y(x)]dx ; \quad \int_{C|(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} F_y(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} F_y[x,y(x)]\frac{dy}{dx}dx . \quad (10.22)$$

Veamos cómo se hace esto en la práctica.

### Ejemplo

Calcular el trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F} = x^2yNm^{-3}\hat{i} + xyNm^{-2}\hat{j}$  a lo largo de la curva  $y(x) = 2x^2m^{-1}$  entre los puntos  $(x_1,y_1) = (-2,8)m$  y  $(x_2,y_2) = (2,8)m$ .

$$W = \int_{C|(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} F_x(x,y)dx + \int_{C|(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} F_y(x,y)dy \quad (10.23)$$

$$= \int_{C|(-2,8)m}^{(2,8)m} x^2yNm^{-3}dx + \int_{C|(-2,8)m}^{(2,8)m} xyNm^{-2}dy \quad (10.24)$$

$$= \int_{-2m}^{2m} x^2 \cdot 2x^2m^{-1}Nm^{-3}dx + \int_{-2m}^{2m} x \cdot 2x^2m^{-1}Nm^{-2}\frac{dy}{dx}dx \quad (10.25)$$

$$= \int_{-2m}^{2m} 2x^4Nm^{-4}dx + \int_{-2m}^{2m} 2x^3Nm^{-3}4xm^{-1}dx \quad (10.26)$$

$$= \int_{-2m}^{2m} 2x^4Nm^{-4}dx + \int_{-2m}^{2m} 8x^4Nm^{-4}dx \quad (10.27)$$

$$= 2 \frac{x^5}{5} \Big|_{-2m}^{2m} Nm^{-4} + 8 \frac{x^5}{5} \Big|_{-2m}^{2m} Nm^{-4} \quad (10.28)$$

$$= 10 \frac{x^5}{5} \Big|_{-2m}^{2m} Nm^{-4} = 2x^5 \Big|_{-2m}^{2m} Nm^{-4} = 4 \cdot (2m)^5 Nm^{-4} = 128Nm = 128J . \quad (10.29)$$

### 10.2.2. Potencia

La ecuación (10.14) nos dice que si una fuerza constante  $\vec{F}$  trabaja sobre una masa puntual mientras ésta se desplaza en  $\Delta\vec{s}$ , el trabajo  $\Delta W$  estará dado por

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} . \quad (10.30)$$

Si esto ocurre durante un intervalo tiempo  $\Delta t$ , podemos escribir

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} . \quad (10.31)$$

Haciendo tender  $\Delta t$  a 0 obtenemos la “potencia” instantánea  $P$ :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} . \quad (10.32)$$

Las unidades de potencia son unidades de fuerza por unidades de velocidad. En el sistema MKS:

$$[P] = [F][v] = N \frac{m}{s} = \frac{kgm}{s^2} \frac{m}{s} = \frac{kgm^2}{s^3} \equiv \text{watt o vatio (w)} . \quad (10.33)$$

## SECCIÓN 10.3

## Fuerzas conservativas y no conservativas; conservación de la energía mecánica

Vamos a estudiar ahora un caso muy interesante: ciertas fuerzas presentan la particularidad de que el trabajo que realizan entre dos puntos determinados no depende de la trayectoria que une esos puntos. Veamos dos ejemplos.

### Trabajo de la fuerza peso

Consideremos el trabajo que la fuerza peso ejerce sobre un cuerpo de masa  $m$  cuando desliza sobre la superficie de un plano inclinado entre las posiciones  $x_i$  y  $x_f$ , como muestra la figura 10.5.

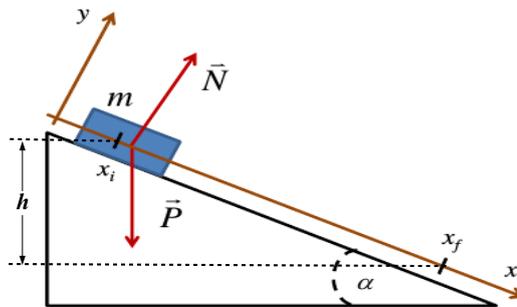


Figura 10.5: Trabajo de la fuerza peso.

En este caso,  $d\vec{s} = dx\hat{i}$ , por lo tanto,

$$W_P = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_{x_i}^{x_f} P_x dx \quad (10.34)$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} mg \sin(\alpha) dx = mg [\sin(\alpha)x_f - \sin(\alpha)x_i]. \quad (10.35)$$

pero  $\sin(\alpha)x_f - \sin(\alpha)x_i = h = h_i - h_f > 0$ , donde las alturas  $h$  se miden desde la base del plano, por ejemplo. Entonces vemos que

$$W_P = mg(h_i - h_f) = V_i - V_f = -\Delta V. \quad (10.36)$$

De esta última ecuación se pueden decir dos cosas: por un lado, vemos que el trabajo realizado por la fuerza peso no depende del camino elegido, ya que el resultado sólo depende de los estados inicial y final, sea que consideremos  $x_i$  y  $x_f$ , o  $h_i$  y  $h_f$ , o  $V_i$  y  $V_f$ . Por otro lado, el valor del trabajo coincide con la variación de la energía potencial cambiada de signo.

### Trabajo de la fuerza de atracción gravitatoria lejos de la superficie de la Tierra

Calculemos ahora el trabajo de la fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa  $m$  que se mueve bajo la atracción gravitatoria de un objeto de masa  $M$ , como está esquematizado en la figura 10.6.

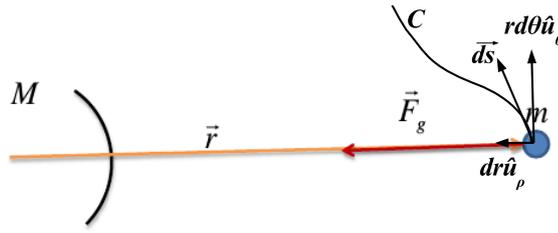


Figura 10.6: Trabajo de la fuerza de atracción gravitatoria.

$$W_{F_g} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{s}. \quad (10.37)$$

En este caso,  $\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \hat{u}_\rho$  y  $d\vec{s} = dr\hat{u}_\rho + rd\theta\hat{u}_\theta$ . Entonces, el trabajo realizado entre dos puntos de coordenadas  $(r_1, \theta_1)$  y  $(r_2, \theta_2)$  puede escribirse como

$$W_{F_g} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} -\frac{GMm}{r^2} \hat{u}_\rho \cdot (dr\hat{u}_\rho + rd\theta\hat{u}_\theta) = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}. \quad (10.38)$$

Según las expresiones de energía potencial presentadas en la Tabla 8.3, podemos escribir:

$$W_{F_g} = -V(r_2) + V(r_1) = -[V(r_2) - V(r_1)] = -\Delta V. \quad (10.39)$$

En este caso también vemos que el trabajo de la fuerza aplicada corresponde a la variación de la energía potencial cambiada de signo y que no depende del camino elegido para llegar al punto final.

En ambos casos estudiados, la fuerza depende de una única variable, digamos,  $u$  y el trabajo  $W = -\Delta V$ :

$$W = \int_{u_1}^{u_2} F(u) du = -[V(u_2) - V(u_1)]. \quad (10.40)$$

Entonces, la función  $-V(u)$  es una primitiva de la función  $F(u)$ ; dicho de otra forma:

$$F(u) = -\frac{dV}{du}. \quad (10.41)$$

Esta última ecuación nos da la receta para obtener la energía potencial si se conoce la fuerza, o viceversa. Sin embargo, no siempre es posible encontrar una función  $V(u)$  para una fuerza; para que ello ocurra, en primer lugar debe poder expresarse la fuerza como función de la coordenada  $u$  y en segundo lugar, la función debe ser integrable. Cuando se dan estas condiciones y la fuerza tiene asociada una función energía potencial, se dice que la fuerza es *conservativa*. Claramente, las fuerzas mencionadas en la Tabla 8.3 son conservativas, ya que tienen una energía potencial asociada. Las fuerzas que no son conservativas se denominan fuerzas *no conservativas*.

Por un lado hemos visto que el trabajo de las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética:  $W = \Delta T$ . Por otro lado, si las fuerzas aplicadas son conservativas ( $F_c$ ), se cumple que  $W = -\Delta V$ ; entonces:

$$W_{F_c} = \int F_c(u) du = \Delta T = -\Delta V. \quad (10.42)$$

La última igualdad nos dice que

$$\Delta T + \Delta V = 0, \quad (10.43)$$

pero  $\Delta E = \Delta T + \Delta V$ , por lo tanto, cuando la fuerza aplicada es conservativa, la energía se conserva,

lo que explica el nombre elegido para designar este tipo de fuerzas. Aquí es importante mencionar que lo significativo de la energía mecánica es su variación, y no su valor, que dependerá del origen de coordenadas utilizado para describirla. Dicho de otra manera, no cambia sustancialmente en nada medir la energía desde un origen de coordenadas o de otro, ya que lo que cuenta es su variación (nula si se conserva o distinta de cero si no se conserva) entre dos puntos de la trayectoria de un móvil.

Si una fuerza conservativa depende de más de una coordenada, por ejemplo de las coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , puede generalizarse lo explicado hasta aquí. En este caso,

$$-dV(x, y, z) = \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = (F_{cx}\hat{i} + F_{cy}\hat{j} + F_{cz}\hat{k}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) : \quad (10.44)$$

entonces,

$$F_{cx}dx + F_{cy}dy + F_{cz}dz = -dV(x, y, z) . \quad (10.45)$$

Consideremos variaciones de una coordenada independientemente de las otras dos, por ejemplo, hagamos variar  $x$  dejando fijas  $y$  y  $z$ . En este caso, los sumandos segundo y tercero del primer miembro no contribuyen a la suma. Pasando el incremento  $dx$  dividiendo y tomando límite se obtiene:

$$F_{cx} = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} . \quad (10.46)$$

En palabras: la componente  $x$  de de la fuerza  $\vec{F}_c$  es igual a menos la *derivada parcial* de  $V$  respecto de la variable  $x$ . El significado de este concepto es justamente lo que hemos hecho: considerar la variación de una sola de las variables, la variable  $x$ , pensando a las otras como fijas. Podríamos haber hecho lo mismo considerando la coordenada  $y$  o la coordenada  $z$  como variable. En general tenemos:

$$F_{cx} = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} , \quad F_{cy} = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} , \quad F_{cz} = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} . \quad (10.47)$$

Un vector  $\vec{A}$  dependiente de las coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , cuyas componentes cartesianas pueden escribirse como las derivadas parciales de una función escalar  $B(x, y, z)$  se denomina *gradiente*: si

$$A_x = \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial x} , \quad A_y = \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial y} \quad \text{y} \quad A_z = \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial z} , \quad (10.48)$$

entonces,  $\vec{A}$  es el gradiente de  $B(x, y, z)$  y se denota mediante el símbolo “nabla” ( $\nabla$ ):  $\vec{A} = \nabla B$ . En virtud de las ecuaciones (10.47) podemos escribir:

$$\vec{F}_c = -\nabla V(x, y, z) . \quad (10.49)$$

Sabemos que todas las fuerzas aplicadas a un cuerpo pueden agruparse en dos conjuntos: las fuerzas conservativas  $\vec{F}_c$  y las fuerzas no conservativas  $\vec{F}_{nc}$ . El trabajo de todas las fuerzas aplicadas cuando la masa puntual se desplaza por la curva  $C$  desde el punto  $Q_1$  al punto  $Q_2$  será:

$$W = W_{F_c} + W_{F_{nc}} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{s} + \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{s} . \quad (10.50)$$

Además, sabemos que el trabajo de todas las fuerzas aplicadas es igual a la variación de la energía cinética –ver ecuación (10.14)– y que el trabajo de las fuerzas conservativas es menos la variación de la energía potencial –ecuación (10.42); entonces:

$$\Delta T = -\Delta V + W_{F_{nc}} . \quad (10.51)$$

Esto nos dice que

$$W_{F_{nc}} = \Delta T + \Delta V = \Delta E , \quad (10.52)$$

es decir, el trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica del sistema. Resumiendo:

$$W_{F_c+F_{nc}} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} (\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}) \cdot d\vec{s} = \Delta T ; \quad (10.53)$$

$$W_{F_c} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = -\Delta V ; \quad (10.54)$$

$$W_{F_{nc}} = \int_{C|Q_1}^{Q_2} \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{s} = \Delta E . \quad (10.55)$$

Como hemos dicho, las fuerzas conservativas dependen de las coordenadas. Una propiedad que depende de las coordenadas, y eventualmente del tiempo, se denomina *campo*. En particular, si esta propiedad es una magnitud vectorial, se denomina *campo vectorial*. Un campo de fuerzas en dos o tres dimensiones es un campo vectorial. Si existe una función potencial  $V(u)$  dada por ecuación (10.41) en el caso unidimensional, o una función potencial  $V(x, y, z)$  dada por la ecuación (10.49) en el caso tridimensional (en coordenadas cartesianas), entonces se dice que este campo de fuerzas es conservativo.

Volvamos al ejemplo del plano inclinado de la figura 10.5. Si en vez de calcular el trabajo de la fuerza peso deseáramos calcular el trabajo de todas las fuerzas actuantes sobre el bloque, tendríamos:

$$W = \int_{C|Q_1}^{Q_2} (\vec{P} + \vec{N}) \cdot d\vec{s} = \int_{x_i}^{x_f} P_x dx + \int_{x_i}^{x_f} \vec{N} \cdot d\vec{s} = \int_{x_i}^{x_f} P_x dx , \quad (10.56)$$

pues  $\vec{N}$  es perpendicular a  $d\vec{s} = dx\hat{i}$ , con lo cual la segunda integral se anula y el resultado es el mismo que si hubiéramos calculado el trabajo de la fuerza peso solamente. Dicho de otra manera, el trabajo de las fuerzas normales al desplazamiento es nulo; tal es el caso de las fuerzas de reacción debidas a superficies de apoyo.

### 10.3.1. Ejemplos de aplicación de la conservación de la energía mecánica

#### Movimiento de un satélite

Como vimos en la Tabla 8.3, la expresión para la energía de un objeto de masa  $m$  sometido al campo gravitatorio de un planeta de masa  $M$  es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{r_0} , \quad (10.57)$$

donde  $v_0$  y  $r_0$  son la velocidad y la posición del objeto en algún instante determinado; por ejemplo, sobre la superficie de la Tierra. Si despejamos la velocidad de la expresión anterior obtenemos el resultado de la ecuación (8.87):

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2GM \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)} = \sqrt{v_0^2 - v_e^2 + \frac{2GM}{r}} , \quad (10.58)$$

donde  $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$  es la velocidad de escape. Debemos notar que  $V(r) = -\frac{GmM}{r}$  es siempre menor que cero, como puede verse en la figura 10.7. A partir de la ecuación (10.57) vemos que  $E = 0$  corresponde a  $v_0^2 = \frac{2GM}{r_0} = v_e^2$ . Entonces, podemos plantear dos casos:

1.  $E < 0$ , que corresponde a  $v_0 < v_e$  ;
2.  $E \geq 0$ , que corresponde a  $v_0 \geq v_e$  .

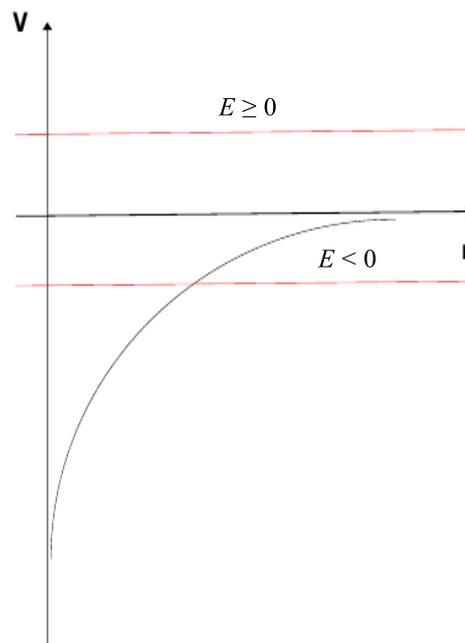


Figura 10.7: Energía potencial en el campo gravitatorio.

Sabemos que  $T = E - V$ . Para valores muy grandes de  $r$ ,  $V \rightarrow 0$ , es decir,  $T \rightarrow E$ . Si  $E < 0$  ( $v_0 < v_e$ ), deberíamos concluir que para valores grandes de  $r$ ,  $T$  se hace negativa, pero esto no es posible por la definición de  $T$ , lo cual significa que el móvil no puede alcanzar grandes valores de  $r$ , es decir, el movimiento está acotado o ligado y puede mostrarse que consiste en órbitas circulares o elípticas.

Si, en cambio,  $E \geq 0$  ( $v_0 \geq v_e$ ), para valores grandes de  $r$ ,  $T$  sigue siendo positiva (o cero), lo cual no impone ninguna restricción. Esto nos dice que si  $v_0 \geq v_e$  el móvil no está limitado a una parte del espacio y sus trayectorias son abiertas; en particular puede mostrarse que son hiperbólicas o parabólicas.

En el caso de órbitas elípticas, a partir de la ecuación (10.57) de conservación de la energía podemos ver que a mayor distancia al centro del campo de fuerzas (centro del planeta), menor será la velocidad. En particular, la máxima velocidad se alcanza en el punto de máxima proximidad (perigeo) y la mínima velocidad, cuando el satélite está a la máxima distancia (apogeo).

### Acción combinada de una fuerza conservativa y una reacción de vínculo

Consideremos ahora el movimiento de una masa puntual  $m$  que puede deslizar sin rozamiento sobre un esfera rígida de radio  $R$  bajo la acción de la gravedad (constante), tal como muestra la figura 10.8.

Si la masa puntual parte desde el punto superior con velocidad  $\vec{v}_0$  dirigida horizontalmente, ¿en que punto se despega de la superficie? Para averiguarlo vamos a plantear la segunda ley de Newton usando un sistema de coordenadas cartesianas con el eje  $y$  en la dirección radial. Las ecuaciones resultan:

$$\text{en } x, \quad mg \sin(\alpha) = ma_t ; \quad (10.59)$$

$$\text{en } y, \quad N - mg \cos(\alpha) = ma_c . \quad (10.60)$$

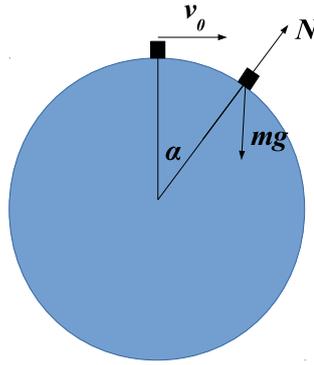


Figura 10.8: Trabajo de la fuerza de atracción gravitatoria.

De la segunda ecuación obtenemos:

$$N - mg \cos(\alpha) = -m \frac{v^2}{R}. \quad (10.61)$$

El ángulo de despegue corresponde al instante en que se anula la reacción normal, con lo cual

$$g \cos(\alpha_d) = \frac{v_d^2}{R}, \quad (10.62)$$

donde el subíndice  $d$  hace referencia a la situación de *despegue*. Por otro lado, como el peso es una fuerza conservativa y la reacción normal no trabaja, podemos afirmar que la energía se conserva:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos(\alpha) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR, \quad (10.63)$$

donde la altura  $h$  se mide desde el centro de la esfera. La última igualdad, considerada en la situación de despegue y la ecuación (10.62) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:  $v_d$  y  $\alpha_d$ . De la ecuación (10.62) se obtiene  $v_d^2 = Rg \cos(\alpha_d)$ . Sustituyendo en la otra ecuación:

$$\frac{1}{2}Rg \cos(\alpha_d) + gR \cos(\alpha_d) = \frac{1}{2}v_0^2 + gR. \quad (10.64)$$

Es decir:

$$\frac{3}{2}Rg \cos(\alpha_d) = \frac{1}{2}v_0^2 + gR \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha_d) = \frac{v_0^2}{3Rg} + \frac{2}{3}, \quad (10.65)$$

de donde puede sacarse el valor de  $\alpha_d$ , es decir, el ángulo para el cual la masa puntual deja de estar en contacto con la esfera. Debe notarse que siempre debe ser  $\cos(\alpha_d) \leq 1$ , con lo cual tiene que cumplirse que  $v_0^2 \leq Rg$ . Para velocidades iniciales mayores lo que sucede es que la masa puntual nunca llega a estar en contacto con la esfera.

### 10.3.2. Análisis del movimiento de una partícula en un potencial unidimensional

Consideremos una partícula moviéndose a lo largo de la coordenada  $r$  bajo la acción de una fuerza que se deriva de un potencial  $V(r)$ , como se muestra en la figura 10.9.

Lo primero que debemos observar es que el movimiento se produce sobre el eje  $r$ , y no sobre la curva. Dicho esto, recordemos que  $F(r) = -\frac{dV}{dr}$ ; entonces, según sea la pendiente de la curva, será el

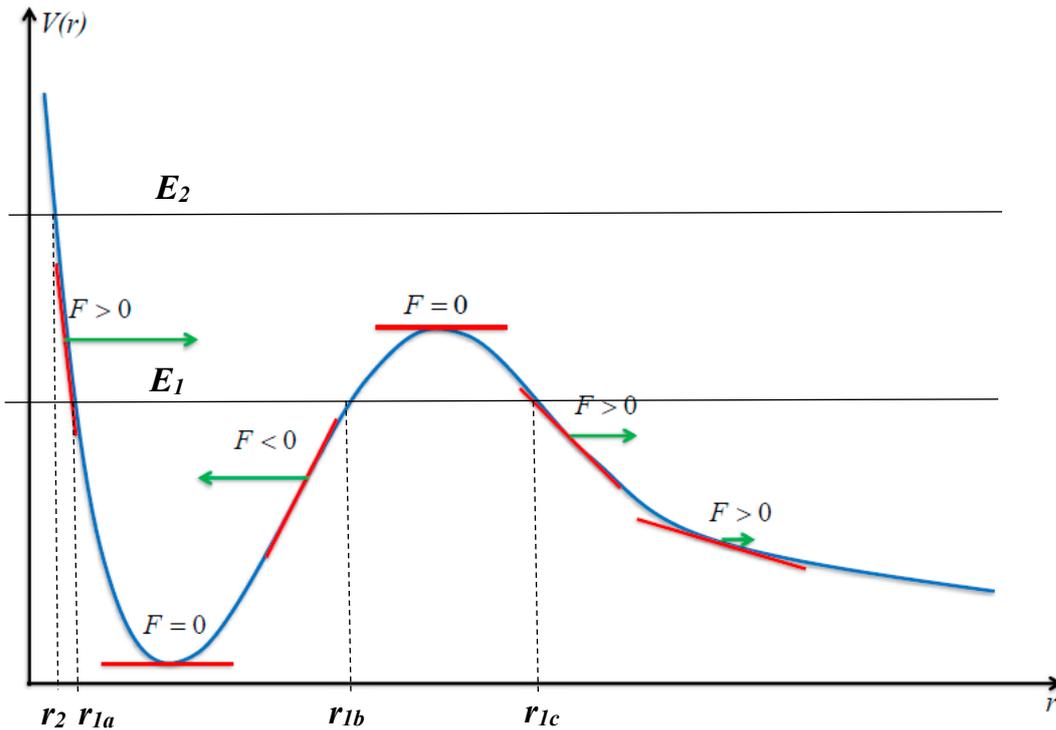


Figura 10.9: Curva de potencial unidimensional.

sentido de la fuerza actuante sobre el móvil. En la figura 10.9 están indicados estos sentidos en varias posiciones características; es importante notar que en los máximos y mínimos de la curva el valor de la fuerza es nulo. Las posiciones correspondientes a las situaciones en las que el móvil está libre de fuerzas se denominan posiciones de equilibrio, como ya sabíamos. En el caso de los mínimos, podemos ver que si el móvil está en reposo en uno de ellos y es apartado levemente de la posición de equilibrio, la fuerza que aparece es del sentido necesario para que la masa puntual sea llevada nuevamente hacia la posición de equilibrio; por ese motivo, los mínimos son posiciones de *equilibrio estable*. Por otro lado, si el móvil se encuentra en reposo en un máximo y es apartado levemente de esa posición, la fuerza que actúa sobre él lo aleja de la posición de equilibrio, denominada por lo tanto, de *equilibrio inestable*.

Los casos en los que la curva  $V(r)$  presenta un punto de inflexión con derivada primera nula (no mostrados en la figura), corresponden también a situaciones de equilibrio inestable: cuando se aparta el móvil hacia la región donde el potencial decrece, la fuerza que surge, lo alejará del equilibrio: si, en cambio, se aparta el móvil en la dirección hacia donde  $V$  crece, la fuerza llevará el móvil a la posición de equilibrio con velocidad no nula, de manera que “pasará de largo” y se alejará del equilibrio definitivamente. Existe otra posibilidad, tampoco representada en la figura: las posiciones de *equilibrio metaestable o indiferente*, que se observan como mesetas a lo largo de las cuales la pendiente de la curva  $V(r)$  se anula. En estos casos, si un móvil en reposo es apartado de la posición de equilibrio sigue estando en equilibrio, por lo cual se queda donde es colocado.

El movimiento será distinto, incluso cualitativamente distinto, según sea el valor de la energía mecánica  $E$ . Supongamos primero que el valor de la energía mecánica es  $E_1$ . Como  $T = E - V$  debe ser siempre mayor o igual que cero, debe cumplirse siempre que  $E \geq V$ , por lo tanto, el movimiento sólo es posible entre las posiciones  $r_{1a}$  y  $r_{1b}$ , y también para  $r \geq r_{1c}$ . Es decir, si  $E = E_1$  la partícula no puede moverse libremente por todo el espacio, sino que su movimiento está acotado: si su posición está alguna vez entre  $r_{1a}$  y  $r_{1b}$  nunca podrá salir de ese intervalo, y si se cumple que  $r \geq r_{1c}$ , jamás podrá ingresar a la región de los  $r < r_{1c}$ . Pensemos que el móvil está entre las posiciones  $r_{1a}$  y  $r_{1b}$ ; ¿qué ocurrirá cuando llegue a los extremos de ese intervalo? Podemos observar que tanto para  $r = r_{1a}$  como para  $r = r_{1b}$ ,  $E = V$ , con lo cual  $T = 0$ , es decir,  $v = 0$ . Esto nos dice que el móvil llega, por ejemplo, a la posición  $r_{1a}$  con velocidad

nula, pero allí la fuerza tiene sentido positivo, como indica la figura, por lo tanto “rebotará” hacia los  $r$  mayores. Otro tanto ocurrirá cuando el móvil llegue a la posición  $r_{1b}$ : en este caso también se anula la velocidad y la fuerza negativa actuante obliga a la partícula a regresar a posiciones con  $r$  menor. Si el móvil hubiera estado inicialmente en la región  $r \geq r_{1c}$ , al llegar a  $r = r_{1c}$  lo haría con velocidad nula y rebotaría hacia los  $r$  mayores sin volver a regresar nunca; en cambio, si el movimiento ocurre entre  $r_{1a}$  y  $r_{1b}$ , el regreso a estos puntos se repetirá mientras dure el movimiento, siendo éste de característica periódica. Las posiciones  $r_{1a}$ ,  $r_{1b}$  y  $r_{1c}$  se denominan *puntos de retorno*.

Pensemos ahora que el valor de la energía mecánica es  $E_2$ . Existe un único punto de retorno, correspondiente a la posición  $r_2$ , de manera que el movimiento no es acotado: la única restricción es que el móvil no se podrá acercar al origen más allá de  $r = r_2$ .



# 11 | Cuerpo Rígido

Entendemos por cuerpo rígido a un cuerpo cuyos puntos mantienen invariable la distancia entre sí, sin importar las fuerzas que estén aplicadas.

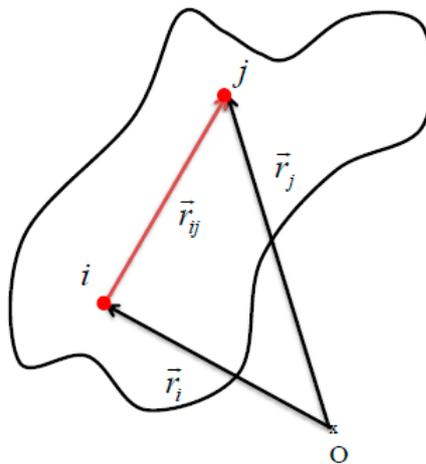


Figura 11.1: Cuerpo rígido.

En la figura 11.1 vemos que la condición de rígido equivale a plantear que la distancia  $|\vec{r}_{ij}|$  entre dos puntos cualesquiera es constante:

$$|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{cte.} \quad (11.1)$$

Estrictamente hablando, no existen los cuerpos rígidos, pues todos los cuerpos se deforman cuando se les aplican fuerzas suficientemente intensas. Consideraremos como cuerpos rígidos a aquellos que cuando se les aplican fuerzas, sufren deformaciones que son despreciables frente a sus dimensiones. Otra forma de abordar el tema es pensar que trabajaremos con cuerpos rígidos ideales, donde se cumple perfectamente la condición de rigidez. Las situaciones reales se aproximarán mejor o peor a esta abstracción matemática, según sea el caso, al igual que ocurría al considerar cuerpos puntuales.

## SECCIÓN 11.1

## Cinemática del cuerpo rígido

### 11.1.1. Centro de masa

Con la definición dada, un cuerpo rígido podría ser un sistema discreto de partículas cuyas distancias relativas permanecen inalterables. Podríamos también pensar que las distancias entre ellas son tan pequeñas que ocupan el espacio en forma continua: es la imagen intuitiva que podemos tener de un sólido (rígido), es decir, una porción continua de materia indeformable, como se ilustra en la figura 11.2.

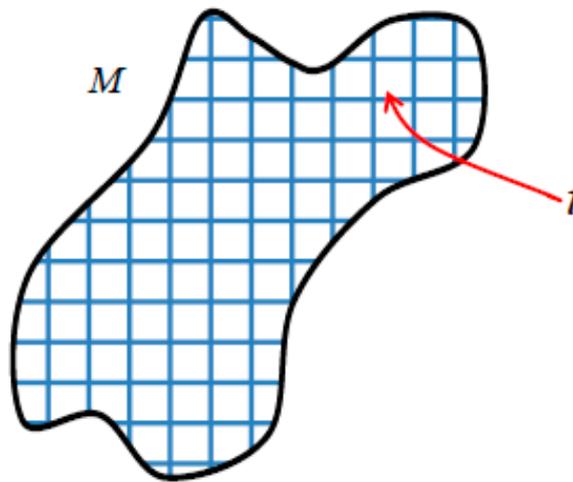


Figura 11.2: Cuerpo rígido continuo.

Consideremos el cuerpo rígido continuo de la figura 11.2 como un conjunto de celdas, cada una de las cuales está ubicada en la posición  $\vec{r}_i$ , ocupa un volumen  $\delta V_i$  y tiene una masa  $\delta m_i$ . Para la masa  $M$  y el volumen  $V$  totales podemos escribir:

$$M = \sum_i \delta m_i \quad \text{y} \quad V = \sum_i \delta V_i . \quad (11.2)$$

Por otro lado, la densidad de la celda  $i$ -ésima será

$$\rho_i = \frac{\delta m_i}{\delta V_i} \quad \Rightarrow \quad \delta m_i = \rho_i \delta V_i . \quad (11.3)$$

Como el rígido es continuo, podemos hacer tender a cero los volúmenes de las celdas, con lo cual se obtiene:

$$\rho(x, y, z) = \frac{dm}{dV} \quad \Rightarrow \quad dm = \rho dV . \quad (11.4)$$

Entonces, para la masa total tenemos:

$$M = \int dm = \int_{V_c} \rho dV , \quad (11.5)$$

donde las integrales deben efectuarse sobre todo el volumen  $V_c$  del rígido.

De acuerdo con la definición de centro de masa, podemos escribir

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \delta m_i}{\sum_{i=1}^N \delta m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \rho_i \delta V_i}{\sum_{i=1}^N \rho_i \delta V_i}. \quad (11.6)$$

Si hacemos tender  $\delta V_i$  a cero, las sumas se convierten en integrales:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_{V_c} \vec{r} \rho dV}{\int_{V_c} \rho dV} = \frac{\int_{V_c} \vec{r} \rho dV}{M}. \quad (11.7)$$

La última ecuación en realidad involucra tres ecuaciones, ya que  $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$ , donde

$$x_{CM} = \frac{\int_{V_c} x \rho dV}{M}, \quad y_{CM} = \frac{\int_{V_c} y \rho dV}{M} \quad \text{y} \quad z_{CM} = \frac{\int_{V_c} z \rho dV}{M}. \quad (11.8)$$

### Ejemplos de cálculo del vector centro de masa

#### Prisma rectangular homogéneo

Calculemos el centro de masa del prisma homogéneo ( $\rho = \text{cte.}$ ) de la figura 11.3:

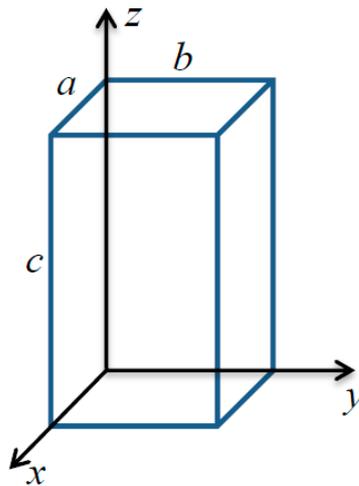


Figura 11.3: Prisma rectangular homogéneo.

Vamos a utilizar coordenadas cartesianas para resolver la integral de la ecuación (11.7), de manera que el diferencial de volumen  $dV$  corresponde a un cubo cuyos lados son  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ , es decir,  $dV = dx dy dz$ . El cálculo de la coordenada  $x$  del centro de masa está dado por

$$x_{CM} = \frac{\int_{V_c} x \rho dV}{M} = \rho \frac{\int_{V_c} x dV}{M}, \quad (11.9)$$

pues  $\rho = \text{cte.}$  Reemplazando la expresión para  $dV$  en cartesianas,

$$x_{CM} = \rho \frac{\int_{V_c} x dx dy dz}{M} = \rho \frac{\int_0^a x dx \int_0^b dy \int_0^c dz}{M} = \frac{\rho}{M} \frac{a^2}{2} bc = \frac{\rho}{M} \frac{a}{2} V = \frac{a}{2}. \quad (11.10)$$

Aquí se ha reemplazado la integral triple por el producto de tres integrales simples, como haríamos con una suma sobre tres índices, que puede expresarse como el producto de tres sumas cuidando que cada

una de ellas contenga todos los términos que dependen del índice correspondiente. Análogamente,

$$y_{CM} = \rho \frac{\int_{V_c} y dx dy dz}{M} = \rho \frac{\int_0^a dx \int_0^b y dy \int_0^c dz}{M} = \frac{\rho}{M} \frac{b^2}{2} ac = \frac{\rho}{M} \frac{b}{2} V = \frac{b}{2}; \quad (11.11)$$

$$z_{CM} = \rho \frac{\int_{V_c} z dx dy dz}{M} = \rho \frac{\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c z dz}{M} = \frac{\rho}{M} \frac{c^2}{2} ab = \frac{\rho}{M} \frac{c}{2} V = \frac{c}{2}. \quad (11.12)$$

Entonces,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{a}{2} \hat{i} + \frac{b}{2} \hat{j} + \frac{c}{2} \hat{k}. \quad (11.13)$$

Es decir, el centro de masa coincide con el centro geométrico del rígido.

Cilindro homogéneo

Calculemos el centro de masa del cilindro homogéneo ( $\rho = \text{cte.}$ ) de radio  $R$  y altura  $h$  de la figura 11.4:

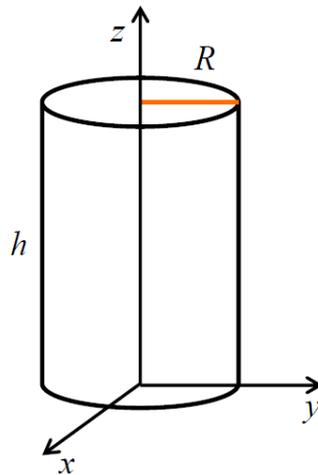


Figura 11.4: Cilindro homogéneo.

Para esta geometría las coordenadas cartesianas no resultan convenientes para barrer todo el volumen del cilindro; para ello usaremos coordenadas cilíndricas. El diferencial de volumen  $dV$  se ilustra en la figura 11.5. El diferencial de volumen es el volumen del cuerpo delimitado por las líneas rojas, es decir,

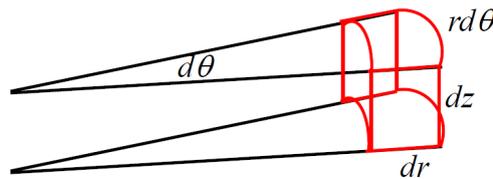


Figura 11.5: Diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas.

$$dV = r d\theta dr dz \quad (11.14)$$

Por otra parte, las coordenadas cartesianas pueden expresarse en términos de las cilíndricas, de manera que

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z. \quad (11.15)$$

Entonces,

$$x_{CM} = \frac{\rho}{M} \int_{V_c} x dV = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r \cos(\theta) r d\theta dr dz = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta \int_0^R r^2 dr \int_0^h dz. \quad (11.16)$$

La integral en  $\theta$  se anula, por lo tanto,  $x_{CM} = 0$ .

$$y_{CM} = \frac{\rho}{M} \int_{V_c} y dV = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r \sin(\theta) r d\theta dr dz = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^R r^2 dr \int_0^h dz. \quad (11.17)$$

La integral en  $\theta$  se anula, por lo tanto,  $y_{CM} = 0$ .

$$z_{CM} = \frac{\rho}{M} \int_{V_c} z dV = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h z r d\theta dr dz = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_0^h z dz. \quad (11.18)$$

Entonces,

$$z_{CM} = \frac{\rho}{M} 2\pi \frac{R^2}{2} \frac{h^2}{2} = \frac{\rho}{M} \frac{(\pi R^2 h) h}{2} = \frac{\rho}{M} \frac{V h}{2} = \frac{h}{2}. \quad (11.19)$$

Luego,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{h}{2} \hat{k}. \quad (11.20)$$

Es decir, en este caso, también el centro de masa coincide con el centro geométrico. En los cuerpos homogéneos el centro de masa siempre coincide con el centro geométrico. Resulta sencillo calcular el centro de masa de cuerpos que son combinaciones de cuerpos homogéneos de geometría simple. En primer lugar, pensemos que tenemos un sistema de dos cuerpos 1 y 2. Estos cuerpos pueden pensarse como dos sistemas de  $N_1$  y  $N_2$  partículas con posiciones  $\vec{r}_{1i}$  y  $\vec{r}_{2i}$ , respectivamente: el centro de masa del sistema estará dado por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1+N_2} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N_1+N_2} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} m_i \vec{r}_{1i}}{\sum_{i=1}^{N_1+N_2} m_i} + \frac{\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} m_i \vec{r}_{2i}}{\sum_{i=1}^{N_1+N_2} m_i} \quad (11.21)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N_1} m_i \vec{r}_{1i}}{M} + \frac{\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} m_i \vec{r}_{2i}}{M} \quad (11.22)$$

$$= \frac{M_1}{M} \vec{r}_{CM1} + \frac{M_2}{M} \vec{r}_{CM2} = \frac{M_1 \vec{r}_{CM1} + M_2 \vec{r}_{CM2}}{M}. \quad (11.23)$$

Entonces, el centro de masa  $\vec{r}_{CM}$  de todo el sistema puede calcularse pensando que los cuerpos 1 y 2 están representados por masas puntuales  $M_1$  y  $M_2$  ubicadas en las posiciones de sus respectivos centros de masa. La extensión de este razonamiento a un número arbitrario de cuerpos es trivial. Cuando los cuerpos que componen el sistema son homogéneos y tienen una geometría sencilla se puede encontrar los centros de masa de cada uno de ellos utilizando argumentos geométricos.

Veamos el caso de un cuerpo formado por dos discos homogéneos de masas  $m_1$  y  $m_3$  unidos por una barra homogénea de masa  $m_2$  (figura 11.6).

Debajo de cada una de las partes que componen el cuerpo se indica la posición del centro de masa correspondiente. La posición del centro de masa del sistema total se determina utilizando la fórmula de centro de masa aplicada a las tres masas puntuales  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  ubicadas como se indica.

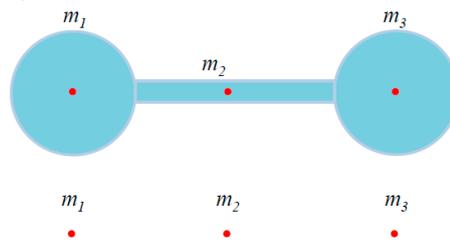


Figura 11.6: Cuerpo compuesto por partes con geometría sencilla.

Disco homogéneo con un agujero circular

Consideremos ahora el cuerpo homogéneo de masa  $M$  de la figura 11.7

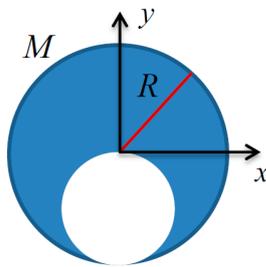


Figura 11.7: Disco homogéneo con un agujero circular.

Para determinar su centro de masa vamos a ayudarnos utilizando otro cuerpo de la misma densidad: un disco de radio  $R$  y masa  $m_T$ , cuya geometría es mucho más sencilla. Podemos pensar que este disco completo está formado por el cuerpo de la figura 11.7 y por el disco más pequeño faltante, de masa  $m$  y radio  $R/2$ , como se muestra en la figura 11.8.

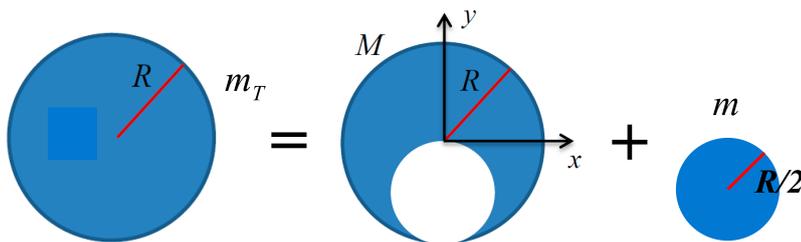


Figura 11.8: Disco homogéneo con un agujero circular.

Según lo que habíamos visto, el centro de masa del disco completo,  $\vec{r}_{CMT}$  puede calcularse a partir de los centros de masa de sus dos partes:

$$\vec{r}_{CMT} = \frac{M\vec{r}_{CM} + m\vec{r}'_{CM}}{m_T}. \tag{11.24}$$

Es fácil determinar el centro de masa del disco completo  $\vec{r}_{CMT}$  y el centro de masa del disco pequeño

$\vec{r}'_{CM}$ ; usando argumentos de simetría se obtiene:

$$\vec{r}_{CMT} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{r}'_{CM} = -\frac{R}{2}\hat{j}. \quad (11.25)$$

Por lo tanto,

$$0 = M\vec{r}_{CM} - \frac{R}{2}m\hat{j}. \quad (11.26)$$

Despejando en la última ecuación la incógnita buscada, tenemos que

$$\vec{r}_{CM} = \frac{mR}{2M}\hat{j}. \quad (11.27)$$

Para obtener la relación  $m/M$  pensemos que

$$m = \rho V' \quad \text{y} \quad M = \rho V, \quad (11.28)$$

donde los volúmenes  $V'$  y  $V$  de los discos pequeño y hueco, respectivamente, son en realidad áreas (aunque podría pensarse que son volúmenes de discos de cierto espesor, pero eso no agrega nada importante a la discusión). Sabemos que

$$V' = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi \frac{R^2}{4} \quad \text{y} \quad V = V_T - V' = \pi R^2 - \pi \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}\pi R^2, \quad (11.29)$$

donde  $V_T$  es el volumen del disco grande completo. Por lo tanto,

$$\frac{m}{M} = \frac{V'}{V} = \frac{1}{3}. \quad (11.30)$$

Entonces, finalmente se obtiene

$$\vec{r}_{CM} = \frac{R}{6}\hat{j} \quad (11.31)$$

### 11.1.2. Tipos de movimiento de un cuerpo rígido

#### Movimiento de traslación

En un movimiento de traslación pura todos los puntos del rígido se mueven con la misma velocidad; en el caso de la figura 11.9,  $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0$ . Es decir, existe un *campo vectorial de velocidades*, ya que cada punto del rígido tiene asignada una velocidad, que es igual a  $\vec{v}_0$ .

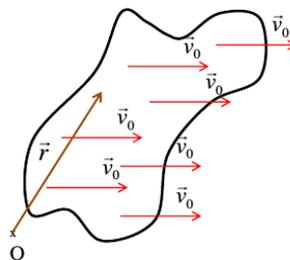


Figura 11.9: Movimiento de traslación de un cuerpo rígido.

#### Movimiento de rotación

En un movimiento de rotación pura todos los puntos del cuerpo rígido giran alrededor de un eje

fijo. En la figura 11.10 se muestra un ejemplo en el cual la velocidad angular está dada por el vector  $\vec{\omega}$ , que coincide con ese eje, como habíamos visto en la sección 9.4.1 (ver figura 9.11). Si cortamos el rígido con un plano perpendicular al vector  $\vec{\omega}$ , los puntos del rígido pertenecientes a ese plano giran en circunferencias concéntricas en torno al vector  $\vec{\omega}$  con velocidades tangenciales de igual módulo en cada circunferencia; esta velocidad disminuye a medida que nos acercamos al eje de rotación. Es decir, para que se cumpla la condición de rigidez (distancia invariable entre dos puntos cualesquiera), todos los puntos rotan el mismo ángulo en un dado  $\Delta t$ . Esto significa que todos los puntos tienen la misma velocidad angular alrededor del eje.

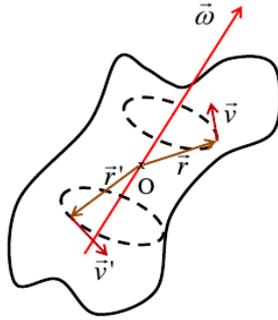


Figura 11.10: Movimiento de rotación de un cuerpo rígido.

Como habíamos visto en la ecuación (9.84), cuando definimos el vector velocidad angular, la velocidad de cualquier punto del rígido estará dada por el producto vectorial del vector velocidad angular por el vector posición, así, para dos puntos ubicados en las posiciones  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ , la velocidad será:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{y} \quad \vec{v}' = \vec{v}(\vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{r}' . \quad (11.32)$$

Entonces, vemos que el campo vectorial de velocidades está determinado por el vector  $\vec{\omega}$ .

### Movimiento de roto-traslación

Si a un movimiento de rotación con velocidad angular  $\vec{\omega}$  alrededor de un eje le superponemos un movimiento de traslación del eje, caracterizado por el vector velocidad  $\vec{v}_0$ , igual para cada punto del rígido, la velocidad resultante para cada punto del rígido se calcula por adición de velocidades:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0 , \quad (11.33)$$

como ilustra la figura 11.11.

Los puntos del cuerpo rígido que están sobre el eje de rotación tienen la misma velocidad: la velocidad  $\vec{v}_0$ , ya que en este caso  $\vec{r} = \vec{0}$ , o bien  $\vec{r} \parallel \vec{\omega}$ . Es decir: en un movimiento de roto-traslación, todos los puntos del rígido giran en torno a un eje de rotación; todos los puntos del eje, a su vez, se trasladan con la misma velocidad  $\vec{v}_0$ . Vamos a mostrar que el campo de velocidades dado por la ecuación (11.33) satisface la condición de rigidez del cuerpo, es decir, la invariancia de la distancia  $d_{12}$  entre dos puntos arbitrarios del rígido, de posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , ilustrados en la figura 11.12.

Para probar la condición de rigidez entonces basta con corroborar que la derivada temporal de  $d_{12}^2$  es nula. Podemos ver que

$$\frac{d d_{12}^2}{dt} = \frac{d}{dt} [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = 2(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) . \quad (11.34)$$

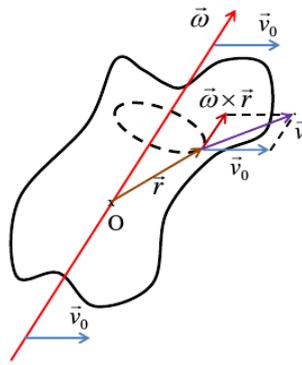


Figura 11.11: Movimiento de roto-traslación de un cuerpo rígido.

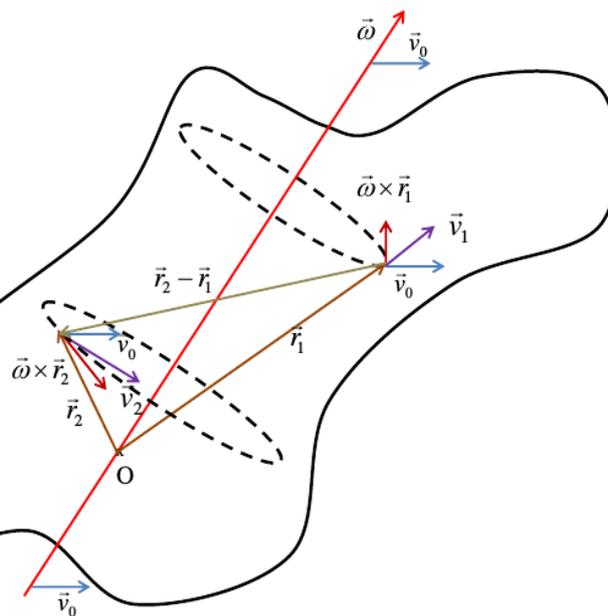


Figura 11.12: Condición de rigidez en un movimiento de roto-traslación.

Por otro lado sabemos que

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1 + \vec{v}_0 \quad \text{y} \quad \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \vec{r}_2 + \vec{v}_0. \quad (11.35)$$

Restando estas dos ecuaciones,

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{\omega} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (11.36)$$

Esta expresión nos dice que  $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \perp (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ , pero entonces el producto escalar del tercer miembro de ecuación (11.34) se anula, con lo cual se demuestra que la distancia entre dos puntos cualesquiera del rígido es constante, como debe ser.

La roto-traslación es la forma más general de movimiento de un cuerpo rígido; cualquier expresión para la velocidad que no fuese reducible a la ecuación (11.33) no nos habría conducido a la condición de rigidez. Es interesante notar que a pesar de esta gran generalidad, basta sólo dos vectores:  $\vec{\omega}$  y  $\vec{v}_0$ , para describir la velocidad de cada punto del rígido. Es decir, la restricción impuesta por la condición de rigidez es tal que con sólo seis funciones del tiempo: tres para  $\vec{\omega}$  y tres para  $\vec{v}_0$ , podemos describir las velocidades de cualquier punto del rígido, de hecho infinitos puntos, para todo tiempo y con ello, la

posición de cada punto en función del tiempo.

Veamos ahora qué relación existe entre las velocidades de dos puntos que están sobre una recta paralela al eje de rotación. Consideremos la velocidad de dos puntos  $O'$  y  $J$  (sobre una recta paralela al eje de rotación), como indica la figura 11.13:

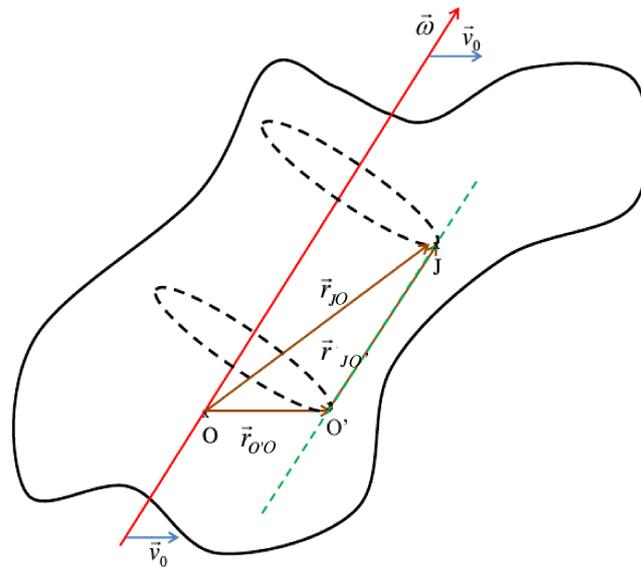


Figura 11.13: Velocidad de puntos en una recta paralela al eje de rotación.

$$\vec{v}_{O'} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{O'O} + \vec{v}_0 \quad \text{y} \quad \vec{v}_J = \vec{\omega} \times \vec{r}_{JO} + \vec{v}_0 . \tag{11.37}$$

Restando miembro a miembro,

$$\vec{v}_J - \vec{v}_{O'} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{JO} - \vec{r}_{O'O}) , \tag{11.38}$$

pero  $\vec{r}_{JO} - \vec{r}_{O'O} = \vec{r}_{JO'}$  es un vector paralelo a  $\vec{\omega}$ , con lo cual el producto vectorial se anula y queda demostrado que  $\vec{v}_J = \vec{v}_{O'}$ . Como estos puntos son puntos arbitrarios de cualquier recta paralela al eje de rotación, podemos afirmar que en cualquier recta paralela al eje todos los puntos se mueven con la misma velocidad. Entonces, cualquier recta paralela al eje de rotación podría ser tomada como eje de rotación.

Consideremos el rígido de la figura 11.14, que rota alrededor de un eje que pasa por el punto  $O$  con velocidad angular  $\vec{\omega}$ . La velocidad de traslación de este eje  $O$  es  $\vec{v}_0$ .

Podemos referir el movimiento a otro eje, paralelo al anterior; por ejemplo al eje que pasa por  $O'$  indicado en la figura. La velocidad de traslación de este eje tendrá algún valor  $\vec{v}'_0$ . ¿Cuál será la velocidad angular de rotación  $\vec{\omega}'$  en torno a este nuevo eje? Para responder a esta pregunta debemos tener en cuenta que la velocidad de un dado punto  $P$  del rígido respecto del sistema de referencia considerado es la misma, independientemente del eje de rotación elegido. Si referimos el movimiento al eje que pasa por  $O$ ,

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO} + \vec{v}_0 . \tag{11.39}$$

Si el eje elegido es el que pasa por  $O'$ ,

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}' \times \vec{r}_{PO'} + \vec{v}'_0 . \tag{11.40}$$

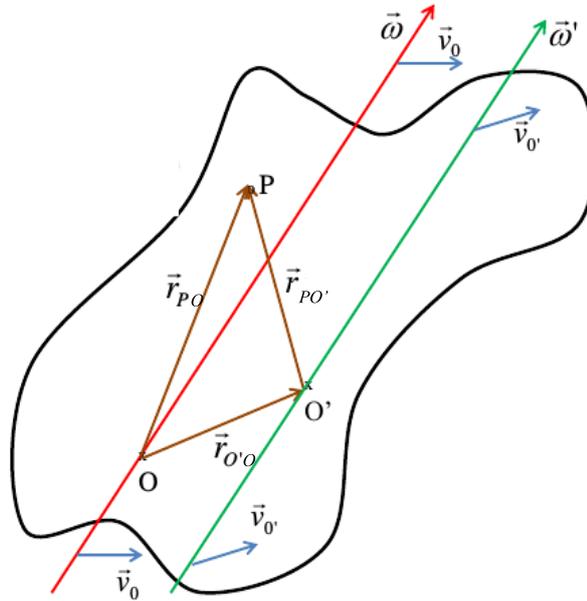


Figura 11.14: Velocidad referida a distintos ejes de rotación.

Además,

$$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{PO'} + \vec{r}_{O'O} . \quad (11.41)$$

Reemplazando en ecuación (11.39),

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{PO'} + \vec{r}_{O'O}) + \vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O'O} + \vec{v}_0 , \quad (11.42)$$

pero la velocidad del punto O', que es la velocidad del eje correspondiente,  $\vec{v}'_0$ , puede expresarse como la composición de una rotación alrededor del eje O con velocidad angular  $\vec{\omega}$  más una traslación de este eje con velocidad  $\vec{v}_0$ , de manera que

$$\vec{v}'_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{O'O} + \vec{v}_0 . \quad (11.43)$$

Reemplazando esta expresión en ecuación (11.42),

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO'} + \vec{v}'_0 . \quad (11.44)$$

Comparando esta última ecuación con la ecuación (11.40) es inmediato concluir que  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ . Esto nos dice que si un cuerpo rígido rota alrededor de un eje con una velocidad angular  $\vec{\omega}$ , para describir el movimiento de rotación puedo elegir ese, o cualquier otro eje paralelo, siendo la velocidad de rotación la misma. Lo único que se modifica es la velocidad de traslación del nuevo eje elegido.

Hemos visto que en todo sistema de partículas el centro de masa es un punto notable dentro del cuerpo. Como dado un eje de rotación podemos arbitrariamente elegir cualquier otro eje de rotación mientras que sea paralelo al primero, podemos elegir uno que pase por el centro de masa del cuerpo. En este caso particular, la expresión de la velocidad será:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{CM} . \quad (11.45)$$

Por último, si a un movimiento rotatorio puro de velocidad angular  $\vec{\Omega}_1$  le superponemos otro movimiento rotatorio puro de velocidad angular  $\vec{\Omega}_2$ , como se ve en la figura 11.15, la velocidad de cualquier punto de posición  $\vec{r}$  puede determinarse mediante la adición de las velocidades de ambos movimientos:

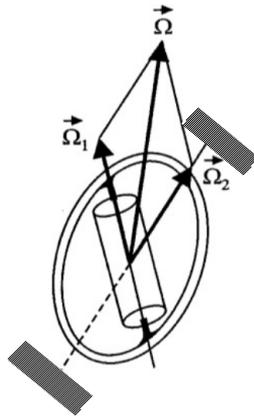


Figura 11.15: Movimiento rotatorio compuesto.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{\Omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\Omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2) \times \vec{r}. \tag{11.46}$$

Es decir, el movimiento resultante será otro movimiento rotatorio puro con velocidad angular

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2, \tag{11.47}$$

cuyo eje de rotación es el vector  $\vec{\Omega}$  y pasa por el punto de intersección de los ejes de rotación de los movimientos rotatorios simples. En este ejemplo, el eje correspondiente a  $\vec{\Omega}_1$  es móvil, pues rota alrededor del eje  $\vec{\Omega}_2$  fijo a la pared. Naturalmente, el vector  $\vec{\Omega}$  resultante tampoco es fijo, sino que también rota en torno al eje fijo  $\vec{\Omega}_2$ .

### 11.1.3. Rodadura

Se llama rodadura al movimiento que describen los puntos situados sobre el perímetro de una rueda que rueda sin deslizar sobre una superficie plana. La condición de rodadura implica entonces que un punto situado sobre el borde de la rueda no tiene una velocidad horizontal en el momento en que toca el suelo, de lo contrario habría deslizamiento. Puede verse que los puntos del borde de la rueda describen una trayectoria llamada cicloide, que se muestra en la figura 11.16.

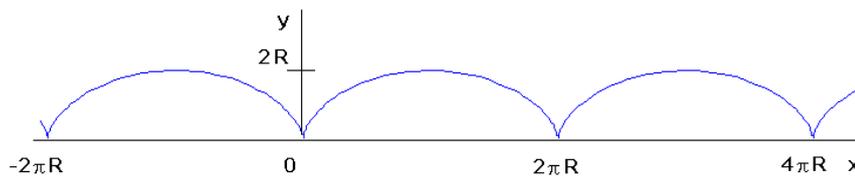
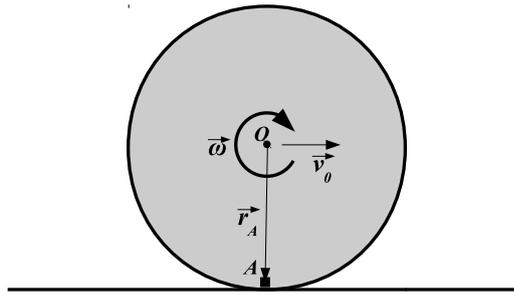


Figura 11.16: Trayectoria de un punto del borde de una rueda que rueda sin deslizar.

Podemos considerar que el movimiento de cualquier punto de la rueda es la composición de un movimiento de traslación de su eje  $O$ , que se desplaza con velocidad  $\vec{v}_0$  y una rotación alrededor de este eje con velocidad angular  $\vec{\omega}$ , tal como está esquematizado en la figura 11.17.

Figura 11.17: Rodadura. Rotación alrededor del eje  $O$ .

La velocidad del punto  $A$  entonces sería

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A + \vec{v}_0 ; \quad (11.48)$$

pero sabemos que  $\vec{v}_A = 0$ , con lo cual

$$\vec{v}_0 = -\vec{\omega} \times \vec{r}_A . \quad (11.49)$$

Vemos entonces, que cuando hay rodadura la velocidad angular y la velocidad de traslación están ligadas por la ecuación anterior; es decir,  $|\vec{v}_0| = |\vec{\omega}|R$ , donde  $R$  es el radio de la rueda. Por otro lado, podemos pensar que el movimiento es una rotación alrededor de un eje paralelo al anterior, pero que pasa por el punto de contacto (ver figura 11.18).

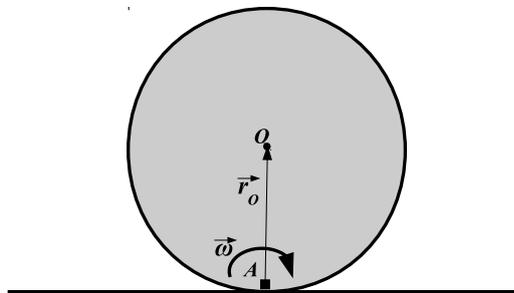


Figura 11.18: Rodadura. Rotación alrededor del eje instantáneo que está en contacto con el suelo.

En este caso, la velocidad de traslación del eje es cero, ya que no hay deslizamiento. Entonces, a la velocidad del centro de masa podemos expresarla como

$$\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM} = \vec{\omega} \times (-\vec{r}_A) = -\vec{\omega} \times \vec{r}_A = \vec{v}_0 . \quad (11.50)$$

Es decir, describiendo el movimiento como una rotación pura alrededor del eje *instantáneo* de rotación que pasa por el punto de contacto con el suelo, se obtiene para el punto  $O$ , la velocidad de traslación  $\vec{v}_0$  del movimiento roto-traslatorio considerado inicialmente. El término *instantáneo*, aplicado a este eje de rotación que pasa por el punto de contacto, se refiere a que solo permanecerá un instante en contacto con la superficie plana; al siguiente instante estará situado más arriba. En particular, puede verse a partir de la figura 11.16 que dicho eje tiene instantáneamente velocidad nula, pero está acelerado hacia arriba.

### 11.1.4. Aceleración de los puntos de un cuerpo rígido

Consideremos el cuerpo rígido de la figura 11.19. A partir de ahora, los vectores posición medidos desde un sistema inercial  $Q$  serán denotados por  $\vec{R}$ , mientras que los medidos desde el eje de rotación, se indicarán con  $\vec{r}$ .

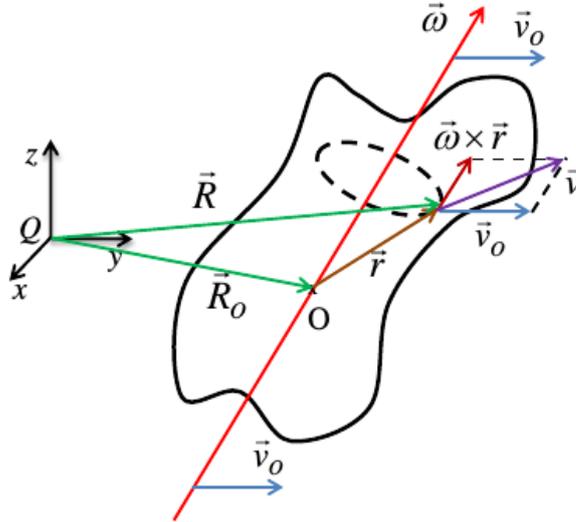


Figura 11.19: Aceleración de los puntos de un cuerpo rígido.

El cuerpo rígido describe un movimiento de roto-traslación compuesto por la traslación del eje que pasa por  $O$  con velocidad  $\vec{v}_0$  medida respecto de un referencial  $Q$  y la rotación alrededor de este eje con velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Un punto cualquiera del sólido, cuyo vector posición respecto de  $Q$  es  $\vec{R}$ , tendrá una velocidad  $\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}$  dada por

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0, \quad (11.51)$$

donde  $\vec{r}$  es el vector posición del punto medido desde un punto  $O$  del eje de rotación.

Para determinar la aceleración del punto en cuestión es necesario derivar el vector velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{v}_0}{dt}. \quad (11.52)$$

Llamando  $\vec{\gamma}$  al vector aceleración angular y  $\vec{a}_0$  a la aceleración de traslación del eje,

$$\vec{a} = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{a}_0. \quad (11.53)$$

Como puede verse en la figura 11.19,  $\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r}$ ; por lo tanto,  $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_O$  y  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} - \frac{d\vec{R}_O}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_0$ ; entonces podemos reescribir la última ecuación:

$$\vec{a} = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{v}_0) + \vec{a}_0. \quad (11.54)$$

Pero, por la ecuación (11.51),  $\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , con lo cual la aceleración queda:

$$\vec{a} = \vec{\gamma} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}_0. \quad (11.55)$$

El último término del vector aceleración corresponde a la aceleración con que se traslada el eje de rotación, mientras que los dos primeros son aceleraciones debidas al movimiento de rotación; estudiemos

el significado de estos primeros términos. El movimiento de cualquier punto del rígido es un movimiento circular, superpuesto eventualmente a un movimiento de traslación. En el caso particular en el que el eje de rotación no cambia su dirección, el vector velocidad angular tampoco lo hace:  $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  es paralelo a  $\vec{\omega}$  y el significado de los dos primeros términos de la ecuación (11.55) se ilustra en la figura 11.20.

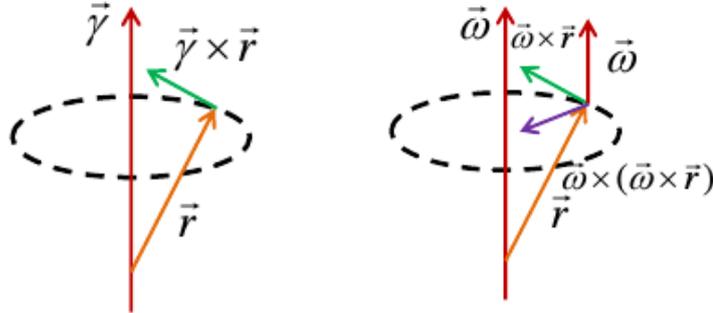


Figura 11.20: Aceleración de un rígido cuyo eje de rotación se mantiene paralelo a sí mismo.

En primer lugar, vemos que  $\vec{\gamma} \times \vec{r}$  apunta en la dirección tangente al movimiento y además su módulo es  $\gamma R$ , donde  $R$  es el radio del círculo descrito por el punto estudiado. Por lo tanto, el primer término de la ecuación (11.55) es la aceleración tangencial.

Por otro lado,  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  apunta hacia el eje de rotación y su módulo es  $\omega^2 R$ ; esto nos dice que el segundo término de la ecuación (11.55) es la aceleración normal. Resumiendo, en este caso particular:

$$\vec{\gamma} \times \vec{r} = \vec{a}_t \quad \text{y} \quad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_n . \quad (11.56)$$

### Relación entre las aceleraciones en la condición de rodadura

Como habíamos visto, cuando un disco o un cilindro rueda sin deslizar, significa que el punto que está en contacto con el piso (punto  $A$  en la figura 11.18) tiene velocidad nula con respecto a él. Si escribimos la primera parte de la ecuación (11.50)

$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \times \vec{r}_O \quad (11.57)$$

y derivamos respecto del tiempo para obtener la aceleración del punto  $O$ , es decir, el centro de masa, ~~B~~habremos caído en una trampa!!

Pensemos con cuidado cuál es la expresión de la velocidad del punto  $O$  considerando una rotación alrededor del punto  $A$ :

$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \times \vec{r}_O + \vec{v}_A . \quad (11.58)$$

Podríamos decir que  $\vec{v}_A = 0$ , ya que se trata de un eje instantáneo de rotación pura y que se trata de un punto de la rueda que no desliza respecto del suelo y entonces su velocidad tiene que ser la misma que la del suelo, es decir, nula. Eso es todo cierto, pero **solamente** en un instante particular: cuando el punto  $A$  toca el suelo. Antes de eso el punto  $A$  desciende hacia el suelo y después, asciende desde el suelo, como se puede apreciar en la figura 11.16. Ahora queda claro cuál es la trampa en la que estuvimos a punto de caer: primero evaluar la función velocidad en un instante particular y luego derivar. Sabemos que eso no debe hacerse porque cualquier función evaluada en un valor particular se convierte en una constante y su derivada es cero. En lugar de eso escribiremos

$$\vec{a}_{CM} = \vec{a}_O = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_O + \vec{v}_A) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_O + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{\gamma} \times \vec{r}_O + \vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{a}_A , \quad (11.59)$$

o bien,

$$\vec{a}_{CM} = \vec{\gamma} \times \vec{r}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{CM} + \vec{a}_A . \quad (11.60)$$

Si analizamos esta última ecuación, podemos observar que el primer término del segundo miembro tiene la dirección tangencial, es decir, la dirección del movimiento del centro de masa, mientras que el segundo apunta radialmente desde el centro de masa hacia el punto de contacto (de manera análoga a lo ilustrado en la figura 11.20). Por otro lado, sabemos que la aceleración del centro de masa sólo tiene componente tangencial, ya que el vínculo con el suelo impone la condición de que el centro de masa se desplace paralelo a su superficie. Entonces podemos escribir:

$$\vec{a}_{CM} = \vec{\gamma} \times \vec{r}_{CM} \quad \text{y} \quad 0 = \vec{\omega} \times \vec{v}_{CM} + \vec{a}_A . \quad (11.61)$$

La aceleración del punto  $A$  resulta ser

$$\vec{a}_A = -\vec{\omega} \times \vec{v}_{CM} , \quad (11.62)$$

es decir, hacia arriba, como se mostró en la figura 11.16.

## SECCIÓN 11.2

# Dinámica del cuerpo rígido

Hasta aquí, en esta unidad se ha descrito el movimiento de un cuerpo rígido; a partir de ahora nos interesaremos en relacionar las causas (fuerzas y torques) con las variaciones que ellas producen en el movimiento de un rígido.

### 11.2.1. Ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido

Puesto que los cuerpos rígidos son sistemas de partículas, valen también para ellos las ecs.(9.18) y (9.113):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{Ei} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} . \quad (11.63)$$

Sabemos que

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i , \quad (11.64)$$

y en el caso de un rígido continuo,  $\vec{p}_i = \delta m_i \vec{v}_i = \rho_i \delta V_i \vec{v}_i$ . Pasando al límite  $\delta V_i \rightarrow 0$ ,

$$\vec{P} = \int_{V_c} \rho \vec{v} dV . \quad (11.65)$$

Si reemplazamos la expresión para la velocidad de un rígido  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0$  en la ecuación anterior,

obtenemos:

$$\vec{P} = \int_{V_c} \rho (\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0) dV \quad (11.66)$$

$$= \int_{V_c} \rho \vec{\omega} \times \vec{r} dV + \int_{V_c} \rho \vec{v}_0 dV \quad (11.67)$$

$$= \vec{\omega} \times \int_{V_c} \rho \vec{r} dV + \vec{v}_0 \int_{V_c} \rho dV . \quad (11.68)$$

Utilizando las ecs.(11.5) y (11.7), la última ecuación queda:

$$\vec{P} = \vec{\omega} \times M\vec{r}_{CM} + \vec{v}_0 M = M(\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM} + \vec{v}_0) ; \quad (11.69)$$

es decir,

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} , \quad (11.70)$$

con lo cual corroboramos para el caso particular de un cuerpo rígido algo que ya sabíamos en general para cualquier sistema de partículas. En relación con la ecuación (9.18) vale la pena recordar que la aceleración del centro de masa de un sistema de partículas, en particular de un cuerpo rígido, depende de las fuerzas externas aplicadas, pero sin importar en qué parte del sistema están aplicadas. Esta ecuación, sin embargo, solo nos da información sobre la traslación del centro de masa. Analicemos ahora la ecuación (9.113) aplicada a un cuerpo rígido; en primer lugar veamos cuál es la expresión del momento angular para un cuerpo rígido. Llamaremos  $\vec{R}$  al vector posición de los puntos del rígido respecto de un sistema inercial  $Q$  ilustrado en la figura 11.21.

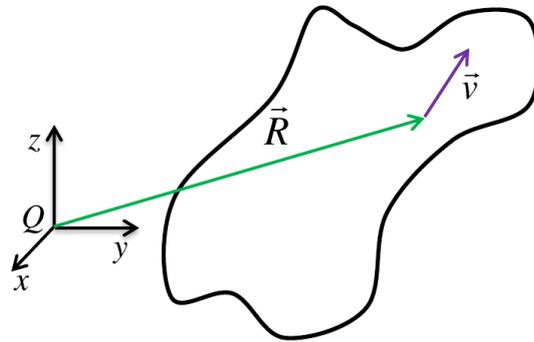


Figura 11.21: Momento angular en un rígido que se traslada.

Para cualquier sistema de partículas tenemos que

$$\vec{L}_Q = \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i . \quad (11.71)$$

Si el cuerpo es continuo, la expresión para el momento de un rígido queda:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \vec{R} \times \vec{v} \rho dV . \quad (11.72)$$

Ahora vamos a reemplazar la expresión para la velocidad:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) dV ; \quad (11.73)$$

o sea,

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times \vec{v}_0 dV + \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV . \quad (11.74)$$

La ecuación (11.74) es la expresión general. Vamos a estudiar dos casos por separado: cuando hay traslación pura y cuando hay rotación pura. En el primer caso,  $\vec{\omega} = 0$ , con lo cual la expresión para el momento angular se reduce a

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times \vec{v}_0 dV = \int_{V_c} \rho \vec{R} dV \times \vec{v}_0 = M \vec{R}_{CM} \times \vec{v}_0 . \quad (11.75)$$

Si el rígido se traslada sin rotar, todos sus puntos tienen la misma velocidad  $\vec{v}_0$ , en particular  $\vec{v}_{CM} = \vec{v}_0$ ; entonces,

$$\vec{L}_Q = \vec{R}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} \equiv \vec{L}_O , \quad (11.76)$$

donde el vector  $\vec{R}_{CM} \times M \vec{v}_{CM}$  se denomina momento angular orbital,  $\vec{L}_O$ , independientemente del tipo de movimiento que describa el rígido.

Ahora veamos qué pasa si el rígido tiene un movimiento de rotación pura; en ese caso, la velocidad del eje de rotación  $\vec{v}_0$  es nula y el primer sumando de la ecuación (11.74) se anula, de manera que

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV . \quad (11.77)$$

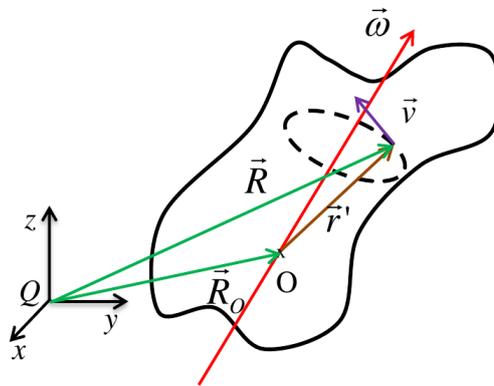


Figura 11.22: Momento angular en un rígido que rota.

Vamos a introducir un cambio en la notación: si el eje de rotación pasa por el centro de masa del rígido, al vector posición de un punto del rígido medido desde cualquier punto del eje lo denominaremos  $\vec{r}$ , pero si el eje no pasa por el centro de masa, el vector posición medido desde este eje será llamado  $\vec{r}'$ , como en el caso de la figura 11.22; con este cambio, la expresión anterior queda:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV . \quad (11.78)$$

Podemos expresar el vector posición de un punto del rígido medido desde el sistema  $Q$  como el vector posición del punto  $O$  del eje de rotación más el vector posición del punto en cuestión medido desde ese

punto  $O$ :  $\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r}'$ ; entonces podemos escribir

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho(\vec{R}_O + \vec{r}') \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.79)$$

$$= \int_{V_c} \rho \vec{R}_O \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.80)$$

$$= \vec{R}_O \times \left( \vec{\omega} \times \int_{V_c} \rho \vec{r}' dV \right) + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.81)$$

$$= \vec{R}_O \times (\vec{\omega} \times M \vec{r}'_{CM}) + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.82)$$

$$= \vec{R}_O \times M (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{CM}) + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.83)$$

$$= \vec{R}_O \times M \vec{v}_{CM} + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV . \quad (11.84)$$

Vemos que el centro de masa juega un papel importante en la expresión para el momento angular. Si el rígido rota alrededor de un eje que pasa por el centro de masa,  $\vec{r}' = \vec{r}$  y  $\vec{v}_{CM} = 0$ , con lo cual la expresión para el momento angular en el caso de rotación pura queda un poco más simple:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV \equiv \vec{L}_S , \quad (11.85)$$

donde  $\vec{L}_S$  se denomina momento angular intrínseco o de espín.

Finalmente veamos cuál es la expresión del momento angular para un cuerpo que tiene un movimiento de roto-traslación. Podemos partir de la ecuación (11.74) pensando que en general, el eje de rotación no pasa por el centro de masa, con lo cual hay que sustituir  $\vec{r}$  por  $\vec{r}'$ , según la notación utilizada. Además vamos a usar que  $\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r}'$  (ver figura 11.22):

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho(\vec{R}_O + \vec{r}') \times \vec{v}_0 dV + \int_{V_c} \rho(\vec{R}_O + \vec{r}') \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.86)$$

$$= \int_{V_c} \rho \vec{R}_O \times \vec{v}_0 dV + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times \vec{v}_0 dV + \int_{V_c} \rho \vec{R}_O \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.87)$$

$$= \vec{R}_O \times \vec{v}_0 \int_{V_c} \rho dV + \left( \int_{V_c} \rho \vec{r}' dV \right) \times \vec{v}_0 + \vec{R}_O \times \left( \vec{\omega} \times \int_{V_c} \rho \vec{r}' dV \right) + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.88)$$

$$= \vec{R}_O \times \vec{v}_0 M + M \vec{r}'_{CM} \times \vec{v}_0 + \vec{R}_O \times (\vec{\omega} \times M \vec{r}'_{CM}) + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.89)$$

$$= M \vec{R}_O \times [\vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{CM})] + M \vec{r}'_{CM} \times \vec{v}_0 + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.90)$$

$$= \vec{R}_O \times M \vec{v}_{CM} + M \vec{r}'_{CM} \times \vec{v}_0 + \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV . \quad (11.91)$$

Esta es la expresión para el momento angular de un cuerpo rígido, respecto a un sistema de coordenadas (y centro de momentos)  $Q$ , cuando el movimiento puede describirse como una rotación alrededor de un eje que pasa por el punto  $O$ , más la traslación de dicho eje. Podemos elegir cualquier eje de rotación que sea paralelo al eje dado; si elegimos como eje de rotación uno paralelo al anterior y que pase por el centro de masa se simplifica la expresión del momento angular, ya que:

$$\vec{r} = \vec{r}' , \quad \vec{r}_{CM} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{R}_O = \vec{R}_{CM} . \quad (11.92)$$

Sustituyendo en la última expresión se obtiene:

$$\vec{L}_Q = \vec{R}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} + \int_{V_c} \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV. \quad (11.93)$$

Comparando con las definiciones de momento angular orbital y de espín, queda claro que, en general, el momento angular de un rígido puede expresarse como la suma de los momentos angulares orbital y de espín:

$$\vec{L} = \vec{L}_O + \vec{L}_S. \quad (11.94)$$

El momento angular orbital es el momento angular debido al movimiento de traslación del cuerpo y depende del centro de momentos elegido. Este momento angular es idéntico al que tendría una partícula de igual masa que el rígido, ubicada en su centro de masa. El momento angular intrínseco o de espín es el momento angular debido al movimiento de rotación del cuerpo rígido alrededor de un eje que pasa por el centro de masa. Por su definición puede verse que tiene en cuenta la distribución de la masa respecto al centro de masa. El valor del momento angular intrínseco no depende del centro de momentos elegido, ya que siempre se calcula respecto de un eje que pasa por el centro de masa.

Volviendo a la ecuación (9.113), podemos escribir:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei}. \quad (11.95)$$

Reemplazando la expresión de  $\vec{L}_O$  dada en la ecuación (11.76),

$$\frac{d}{dt}(\vec{R}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}) + \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei}. \quad (11.96)$$

Vamos a estudiar la primera derivada:

$$\frac{d}{dt}(\vec{R}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}) = M \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} \times \vec{v}_{CM} + M\vec{R}_{CM} \times \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} \quad (11.97)$$

$$= M\vec{v}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + M\vec{R}_{CM} \times \vec{a}_{CM} \quad (11.98)$$

$$= \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei}, \quad (11.99)$$

donde en la última línea se sustituyó  $M\vec{a}_{CM}$  usando la segunda ley de Newton —ecuación (9.18)—. Entonces, sustituyendo en ecuación (11.96) podemos escribir,

$$\vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei} + \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei}. \quad (11.100)$$

Podemos despejar el término que involucra la derivada temporal de  $\vec{L}_S$ :

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} - \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei} \quad (11.101)$$

$$= \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_{Ei} - \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei} \quad (11.102)$$

$$= \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_{Ei} - \sum_i \vec{R}_{CM} \times \vec{F}_{Ei} \quad (11.103)$$

$$= \sum_i (\vec{R}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{F}_{Ei} \quad (11.104)$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{Ei} . \quad (11.105)$$

Los vectores involucrados en las ecuaciones precedentes se indican en la figura 11.23.

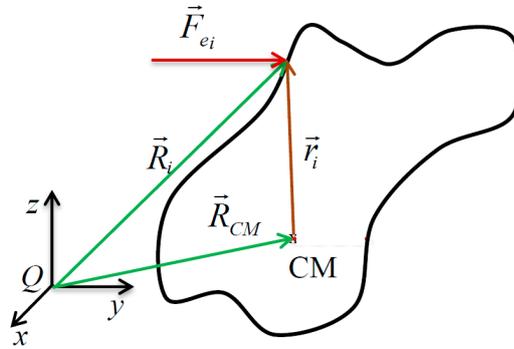


Figura 11.23: Cuerpo rígido sometido a fuerzas externas.

Resumiendo, podemos escribir:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_{Ei} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} , \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{Ei} . \quad (11.106)$$

Es decir, la derivada del momento angular orbital respecto del tiempo es el momento de la resultante de todas las fuerzas exteriores como si estuvieran aplicadas sobre el centro de masa del sistema. Por otro lado, la derivada temporal del momento angular de espín es la suma de los momentos de las fuerzas exteriores respecto de un eje que pasa por el centro de masa del sistema. Así, podemos relacionar el primer término con el movimiento del centro de masa y el segundo con la rotación del cuerpo alrededor del centro de masa.

### 11.2.2. Equilibrio en un cuerpo rígido

Se dice que un cuerpo rígido está en equilibrio si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = 0 \quad \text{y} \quad \sum_i \vec{\tau}_{Ei} = 0 , \quad (11.107)$$

es decir:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{cte.} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte.} \quad (11.108)$$

Debe notarse que en el caso de una masa puntual, solamente la primera condición es necesaria para definir el equilibrio. Veamos con un par de ejemplos qué ocurre si no se cumple alguna de las dos condiciones enunciadas.

En la figura 11.24 se muestra el caso en que una única fuerza externa se aplica en la misma dirección del vector posición del centro de masa. En este caso se cumple que  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$ , pues  $\vec{R}_{CM} \parallel \vec{F}_E$  y  $\frac{d\vec{L}_S}{dt} = 0$ , pues el vector  $\vec{r}$  del punto de aplicación de la fuerza externa medido desde el centro de masa es nulo. Sin embargo,  $\vec{P}$  no es constante pues hay una fuerza externa aplicada y entonces el cuerpo no está en equilibrio.

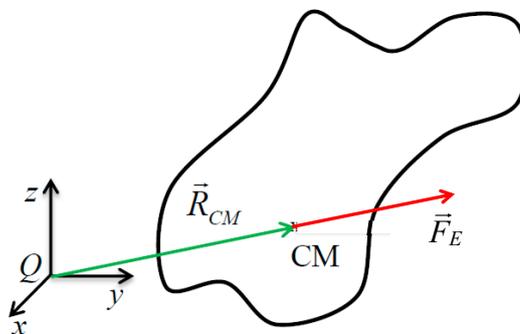


Figura 11.24: Rígido fuera del equilibrio con centro de masa acelerado.

La figura 11.25 presenta la situación de un par de fuerzas aplicado sobre un rígido. Como en todo par de fuerzas, la resultante es nula, de manera que  $\vec{P}$  en este caso sí es constante y  $\vec{a}_{CM} = 0$ . Esto también nos dice, en virtud de la ecuación (11.106), que  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$ . Sin embargo,

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{Ei} = \vec{r}_1 \times (-\vec{F}_E) + \vec{r}_2 \times \vec{F}_E = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_E \neq 0. \quad (11.109)$$

Luego, en este caso,  $\vec{L}_S$  (y por lo tanto  $\vec{L}$ ) no es constante y el cuerpo tampoco está en equilibrio.

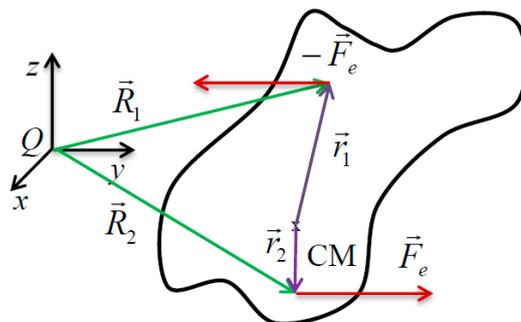


Figura 11.25: Rígido fuera del equilibrio con centro de masa no acelerado.

**11.2.3. Dirección del momento angular y de la velocidad angular**

Si consideramos una única partícula que describe un movimiento circular alrededor del punto  $O$ , es fácil ver que el vector  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , respecto del punto  $O$ , es perpendicular al plano del movimiento, y por lo tanto paralelo al vector  $\vec{\omega}$ . Sin embargo, no siempre el momento angular de un rígido es paralelo al vector velocidad angular. Consideremos, para convencernos, el sencillo caso de dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas por una barra rígida de masa despreciable, que giran alrededor de un eje fijo que pasa por el centro de masa del sistema, como indica la figura 11.26.

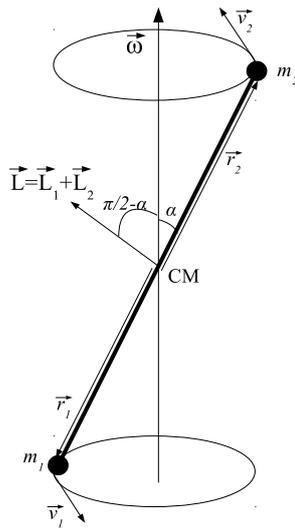


Figura 11.26: Dos masas puntuales unidas por una barra rígida:  $\vec{L}$  no es paralelo a  $\vec{\omega}$ .

El momento angular  $\vec{L}_1$  de la masa  $m_1$  está dado por el producto vectorial  $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1$  y por lo tanto es perpendicular al plano  $\mu$  determinado por  $\vec{r}_1$  y  $\vec{v}_1$ , mientras que  $\vec{L}_2$  es perpendicular al plano determinado por  $\vec{r}_2$  y  $\vec{v}_2$ , que justamente es el mismo plano  $\mu$ . Más aun,  $\vec{L}_2$  tiene el mismo sentido que  $\vec{L}_1$ , de manera que el momento angular del sistema  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$  tiene también el mismo sentido. Entonces, en este caso,  $\vec{L}$  y  $\vec{\omega}$  no son vectores paralelos, sino que forman un ángulo  $\pi/2 - \alpha$ , como indica la figura 11.26. La situación  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  sólo ocurre cuando  $\alpha = \pi/2$ . Esta situación está esquematizada en la figura 11.27.

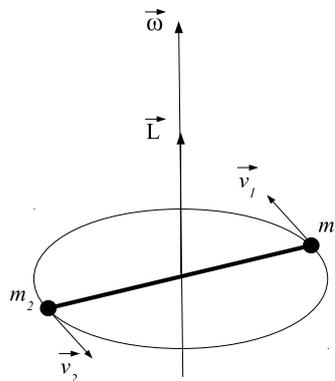


Figura 11.27: Dos masas puntuales unidas por una barra rígida:  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ .

Queda claro que en los casos estudiados de las masas puntuales unidas a una barra rígida, el momento angular coincide con el momento angular de espín, pues la velocidad del centro de masa es nula y por

lo tanto el momento angular orbital también lo es. Entonces, hemos visto que a veces  $\vec{L}_S \parallel \vec{\omega}$  y a veces no. A continuación vamos a calcular la proyección del vector  $\vec{L}_S$  en la dirección de  $\vec{\omega}$  para un caso general.

#### 11.2.4. Momento de inercia

Para calcular la proyección de  $\vec{L}_S$  en la dirección de  $\vec{\omega}$ , multiplicaremos escalarmente  $\vec{L}_S$  por el versor en la dirección de  $\vec{\omega}$ :

$$L_{S\omega} = \vec{L}_S \cdot \hat{\omega} = \int_{V_c} \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV \cdot \hat{\omega}. \quad (11.110)$$

Para operar con el triple producto vectorial que está en el integrando vamos a usar un resultado que el lector interesado podrá demostrar fácilmente: dados tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , se cumple que

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}), \quad (11.111)$$

regla conocida popularmente como “ *baca menos caballo* ”. En el caso que nos ocupa,

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) = \omega[\hat{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \hat{\omega})]. \quad (11.112)$$

Sustituyendo esta expresión en ecuación (11.110),

$$L_{S\omega} = \int_{V_c} \rho \omega [\hat{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \hat{\omega})] dV \cdot \hat{\omega} \quad (11.113)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega [\hat{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \hat{\omega})] \cdot \hat{\omega} dV \quad (11.114)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega [r^2 - (\vec{r} \cdot \hat{\omega})(\vec{r} \cdot \hat{\omega})] dV \quad (11.115)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega [r^2 - (\vec{r} \cdot \hat{\omega})^2] dV. \quad (11.116)$$

En la figura 11.28 se muestra que la diferencia  $r^2 - (\vec{r} \cdot \hat{\omega})^2$  es igual (por el teorema de Pitágoras) al cuadrado de la distancia  $s$  al eje de rotación que pasa por el centro de masa.

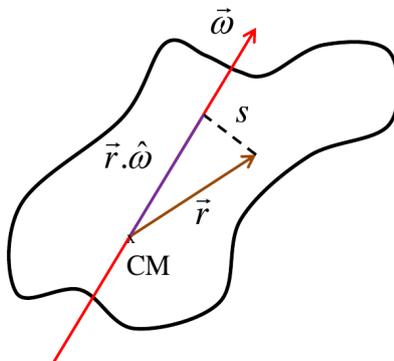


Figura 11.28: Proyección de  $\vec{L}_S$  en la dirección de  $\vec{\omega}$ .

Luego, podemos sustituir en la ecuación anterior, con lo que se obtiene

$$L_{S\omega} = \omega \int_{V_c} \rho s^2 dV . \quad (11.117)$$

La integral de la última ecuación se denomina *momento de inercia* respecto de un eje que pasa por el centro de masa  $I_G$  (también denotado como  $I^*$ ), o *momento de inercia baricéntrico*:

$$I_G = \int_{V_c} \rho s^2 dV . \quad (11.118)$$

Con esta última definición, vemos que la componente del momento angular de espín en la dirección del vector velocidad angular queda:

$$L_{S\omega} = I_G \omega . \quad (11.119)$$

Vemos que el momento de inercia baricéntrico depende de cómo está distribuida la masa alrededor de un eje que pasa por el centro de masa. En particular,  $I_G$  será mayor cuanto mayor sea la cantidad de masa que se distribuya lejos de ese eje. Entonces, si dos cuerpos tienen la misma masa, el mayor valor de  $I_G$  corresponderá al cuerpo cuya masa esté más lejos del eje. También puede verse a partir de su definición, que el momento de inercia es un concepto aditivo; es decir, el momento de inercia de dos rígidos respecto de un eje de rotación es igual a la suma de los momentos de inercia de cada rígido respecto del mismo eje de rotación.

Como hemos visto, el momento angular de espín no es necesariamente paralelo al vector velocidad angular. Sin embargo, puede demostrarse que en todo cuerpo rígido existen tres direcciones, perpendiculares entre sí, llamadas ejes principales de inercia, tales que si el cuerpo está rotando alrededor de alguno de esos ejes, entonces el momento angular intrínseco es paralelo al vector velocidad angular. Cuando un cuerpo homogéneo tiene algún eje de simetría, éste es también eje principal de inercia.

Entonces, por la ecuación (11.119), sólo si el cuerpo está rotando alrededor de uno de estos ejes, es decir, en el caso en que  $\vec{\omega}$  es paralelo a un eje principal de inercia, podemos escribir una relación vectorial entre el momento angular de espín y la velocidad angular:

$$\vec{L}_S = I_G \vec{\omega} . \quad (11.120)$$

Los momentos de inercia baricéntricos ( $I_G$  o  $I^*$ ) de un rígido respecto de sus ejes principales de inercia se denominan momentos principales de inercia.

Si  $\vec{\omega}$  no es paralelo a un eje principal de inercia, es posible descomponerlo en las direcciones 1, 2 y 3 de los ejes principales de inercia, de manera que el vector velocidad angular puede escribirse como

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 , \quad (11.121)$$

como se muestra en la figura 11.29. Para cada una de estas tres rotaciones valdrá una relación vectorial del tipo (11.120), con lo cual el momento angular total resulta

$$\vec{L}_S = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = I_1^* \vec{\omega}_1 + I_2^* \vec{\omega}_2 + I_3^* \vec{\omega}_3 , \quad (11.122)$$

donde  $I_1^*$ ,  $I_2^*$  y  $I_3^*$  son los tres momentos principales de inercia. Queda claro que  $\vec{\omega}$  no será paralelo a  $\vec{L}_S$  a menos que  $I_1^* = I_2^* = I_3^*$ , o que  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_i$ , donde  $i$  denota algún eje principal de inercia.

A pesar de que estos casos son muy particulares, son bastante frecuentes en la práctica, y para ellos, las ecuaciones de movimiento adquieren una forma muy sencilla. Pensemos en un rígido cuyo centro de masa no se traslada, es decir se trata de una rotación pura, y que esta se produce alrededor de un eje principal de inercia. En este caso,

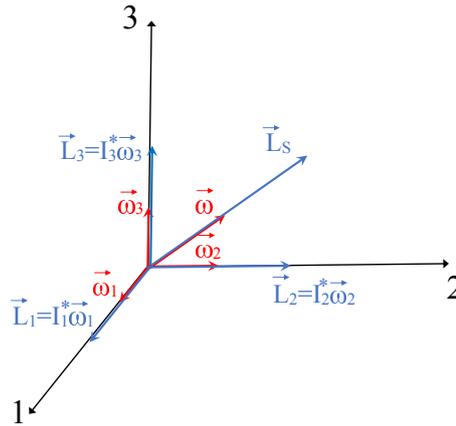


Figura 11.29: Velocidad angular descompuesta según los ejes principales de inercia.

$$\sum_i \vec{\tau}_{Ei} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \frac{d(I_G \vec{\omega})}{dt} = I_G \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_G \vec{\gamma}. \tag{11.123}$$

Si además el centro de masa se traslada, para estudiar la variación del momento angular habrá que agregar la otra ecuación referida al momento angular orbital:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei}. \tag{11.124}$$

Comparando las ecs.(11.123) y (9.20),

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = M \vec{a}_{CM}, \tag{11.125}$$

vemos que así como la masa  $M$  en (9.20) representa una especie de resistencia a la aceleración lineal, el momento de inercia  $I_G$  en (11.123) da una idea de cuán difícil es producir una aceleración angular.

### Cálculo de algunos momentos de inercia

En esta sección vamos a dar ejemplos de cálculo del momento de inercia de cuerpos con geometría sencilla. Para empezar, consideremos una masa puntual  $m$  que gira con velocidad angular  $\vec{\omega}$ . De acuerdo con la definición

$$I = \int_{V_c} \rho s^2 dV. \tag{11.126}$$

En este caso, en que la masa es discreta, la expresión anterior adopta la forma

$$I = \sum_i m_i s^2. \tag{11.127}$$

Vemos, entonces, que el momento de inercia respecto del eje de rotación se reduce a  $I = ms^2$ , donde la distancia  $s$  es simplemente la distancia de la partícula al eje (ver. figura 11.28). Nótese que no se trata del momento baricéntrico del punto, que obviamente es nulo por carecer éste de dimensiones. Ahora pasemos a un rígido de verdad.

#### Momento de inercia de un aro

Consideremos un aro de radio  $R$  cuya masa  $m$  está distribuida uniformemente con densidad  $\rho$ , como muestra la figura 11.30.

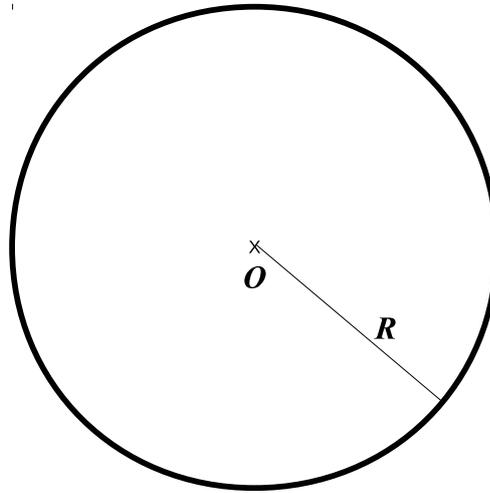


Figura 11.30: Momento de inercia de un aro.

El momento de inercia del aro con respecto a un eje que pasa por el punto  $O$  (centro de masa del aro) y es perpendicular al plano del aro resulta ser

$$I_{\text{aro}} = \int_{V_c} \rho s^2 dV = R^2 \int_{V_c} \rho dV = R^2 m \quad \Rightarrow \quad I_{\text{aro}} = mR^2. \quad (11.128)$$

En este caso,  $\rho$  es una densidad lineal de masa y  $V_c$  representa una longitud.

#### Momento de inercia de un disco

Ahora analicemos un disco de radio  $R$  de masa  $m$  distribuida uniformemente con densidad  $\rho$ , como muestra la figura 11.31.

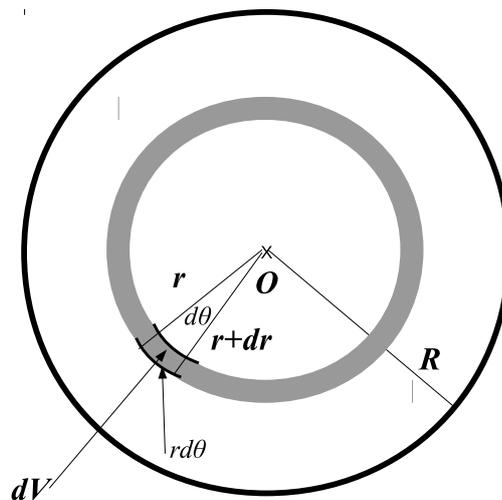


Figura 11.31: Momento de inercia de un disco.

El momento de inercia del disco con respecto a un eje que pasa por el punto  $O$  (centro de masa del disco) y es perpendicular al plano del disco puede calcularse como

$$I_{disco} = \int_{V_c} \rho r^2 dV = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r d\theta dr = \rho 2\pi \frac{R^4}{4} = \rho \pi R^2 \frac{R^2}{2} = m \frac{R^2}{2} \Rightarrow I_{disco} = m \frac{R^2}{2}. \quad (11.129)$$

En este caso,  $\rho$  es una densidad superficial de masa y  $V_c$  representa el área del disco  $\pi R^2$ .

### Momento de inercia de un cilindro

El momento de inercia de un cilindro uniforme de radio  $R$  y altura  $h$  con respecto a un eje que coincide con el eje del cilindro es análogo al caso anterior, sólo que ahora hay que agregar una integral en la coordenada axial  $z$ :

$$I_{cil} = \int_{V_c} \rho r^2 dV = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dz d\theta dr = \rho h 2\pi \frac{R^4}{4} = \rho h \pi R^2 \frac{R^2}{2} = m \frac{R^2}{2} \Rightarrow I_{cil} = m \frac{R^2}{2}. \quad (11.130)$$

### Momento de inercia de una esfera

Pensemos ahora en una esfera de radio  $R$  y masa  $m$  distribuida uniformemente con densidad  $\rho$  que rota alrededor de un eje que pasa por su centro de masa. Para calcular el momento de inercia correspondiente a ese eje vamos a utilizar la construcción de la figura 11.32.

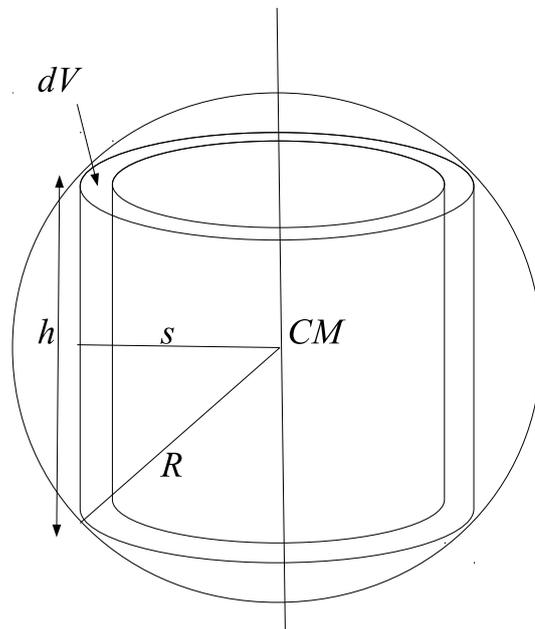


Figura 11.32: Momento de inercia de una esfera.

Sabemos que

$$I_{esf} = \int_{V_c} \rho s^2 dV. \quad (11.131)$$

En este caso vamos a pensar que el diferencial de volumen  $dV$  es el volumen del casquete cilíndrico; es decir,

$$dV = 2\pi s ds h. \quad (11.132)$$

Además

$$h = 2\sqrt{R^2 - s^2}, \quad (11.133)$$

con lo cual,

$$I_{esf} = \int_0^R \rho s^2 2\pi s 2\sqrt{R^2 - s^2} ds, \quad (11.134)$$

donde la variable  $s$  se integra entre 0 y el radio de la esfera. Entonces,

$$I_{esf} = 4\pi\rho \int_0^R s^3 \sqrt{R^2 - s^2} ds. \quad (11.135)$$

La integral puede resolverse fácilmente haciendo la sustitución  $u = R^2 - s^2$ ; queda como ejercicio mostrar que el resultado de la misma es  $\frac{8}{15}\pi\rho R^5$ . Por otro lado,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3}, \quad (11.136)$$

por lo tanto,

$$I_{esf} = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{8}{15}\pi \frac{3m}{4\pi R^3} R^5 \Rightarrow I_{esf} = \frac{2}{5}mR^2. \quad (11.137)$$

### Teorema de Steiner

Consideremos un rígido que rota con velocidad angular  $\vec{\omega}$  como se muestra en la figura 11.33. Podemos referir la rotación a un eje paralelo a la dirección de  $\vec{\omega}$ , pero que no pasa por el centro de masa, sino por otro punto  $O$ . Un buen motivo para querer hacer esto es que la rotación alrededor del nuevo eje sea una rotación pura, como en el caso de la rueda que rueda sin deslizar. Llamemos  $d$  a la distancia entre los dos ejes. El momento de inercia respecto del eje  $P$  tendrá una expresión análoga a la que habíamos encontrado para  $I_G$ :

$$I_G = \int_{V_c} \rho s^2 dV, \quad (11.138)$$

sólo que habrá que reemplazar la proyección  $s$  del vector  $\vec{r}$  respecto de la dirección perpendicular al eje que pasa por el centro de masa, por la proyección del vector  $\vec{r}'$  respecto de la dirección perpendicular al eje que pasa por  $O$ , es decir,  $s'$ . Para convencerse de esto basta repetir la construcción de la definición de momento de inercia baricéntrico, pero reemplazando en la ecuación (11.110) el vector  $\vec{r}$  por el vector  $\vec{r}'$ . Entonces,

$$I = \int_{V_c} \rho s'^2 dV, \quad (11.139)$$

Ahora vamos a utilizar los vectores coplanares  $\vec{s}$ ,  $\vec{s}'$  y  $\vec{d}$ , definidos como se muestra en la figura 11.33. La relación entre ellos es

$$\vec{s}' = \vec{s} + \vec{d}, \quad (11.140)$$

por lo tanto,

$$s'^2 = (\vec{s} + \vec{d}) \cdot (\vec{s} + \vec{d}) = s^2 + d^2 + 2\vec{s} \cdot \vec{d}. \quad (11.141)$$

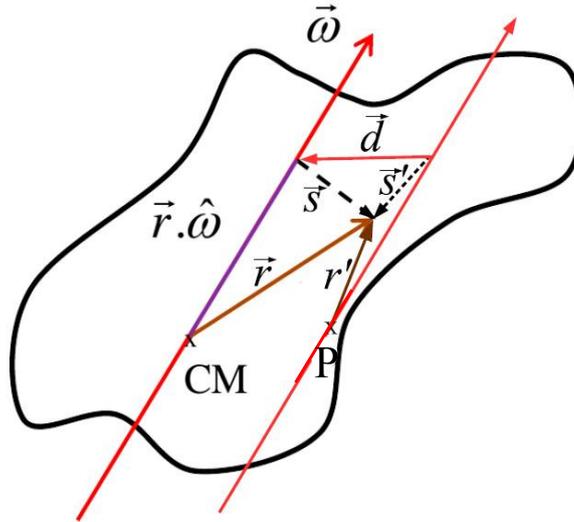


Figura 11.33: Momento de inercia respecto de un eje que no pasa por el centro de masa.

Reemplazando en la integral:

$$I = \int_{V_c} \rho (s^2 + d^2 + 2\vec{s} \cdot \vec{d}) dV \quad (11.142)$$

$$= \int_{V_c} \rho s^2 dV + \int_{V_c} \rho d^2 dV + 2 \int_{V_c} \rho \vec{s} \cdot \vec{d} dV \quad (11.143)$$

$$= I_G + d^2 \int_{V_c} \rho dV + 2\vec{d} \cdot \int_{V_c} \vec{s} \rho dV \quad (11.144)$$

$$= I_G + d^2 m + 2\vec{d} \cdot \int_{V_c} \vec{s} \rho dV . \quad (11.145)$$

La última integral es  $\vec{s}_{CM}$ , es decir, la componente del vector posición del centro de masa en la dirección perpendicular al eje, pero medida desde ese eje, por lo tanto, la integral se anula. Entonces finalmente estamos en condiciones de escribir el teorema de Steiner:

$$I = I_G + md^2 . \quad (11.146)$$

Esta expresión nos permite calcular el momento de inercia  $I$  respecto de un eje que pasa a una distancia  $d$  del centro de masa, en términos del momento de inercia baricéntrico  $I_G$ , referido a un eje paralelo al anterior.

### 11.2.5. Momento angular respecto del eje de rotación pura

Vamos a aprovechar el teorema de Steiner para describir el momento angular respecto del eje de rotación pura en cualquier movimiento roto-traslatorio. Sabemos que si el eje de rotación pura pasa por el centro de masa, entonces  $\vec{L} = \vec{L}_S$ , pero ahora consideraremos el caso general en que dicho eje no pasa necesariamente por el centro de masa. La expresión para el momento angular de un rígido continuo respecto de un sistema inercial con origen en el punto  $Q$  es

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times \vec{v} dV , \quad (11.147)$$

donde los vectores están indicados en la figura 11.22.

Reemplazando en la integral  $\vec{v}$  por  $\vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_o$  podemos escribir:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV + \int_{V_c} \rho \vec{R} \times \vec{v}_o dV . \quad (11.148)$$

En el caso de una rotación pura, la velocidad del eje  $\vec{v}_o = 0$ , con lo cual se anula la segunda integral:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV . \quad (11.149)$$

Es posible utilizar el punto  $O$ , perteneciente al eje de rotación como origen del sistema inercial de coordenadas; en ese caso,  $O$  pasa a ser  $Q$  y  $\vec{R}$  coincide con  $\vec{r}'$ . Sustituyendo en la última ecuación:

$$\vec{L}_Q = \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV . \quad (11.150)$$

Vamos ahora a calcular la componente de  $\vec{L}_Q$  en la dirección del eje de rotación:

$$L_{Q\omega} = \vec{L}_Q \cdot \hat{\omega} = \int_{V_c} \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \cdot \hat{\omega} . \quad (11.151)$$

Usando “*aca menos caballo*” se obtiene:

$$\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega}(\vec{r}' \cdot \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{\omega}) = \omega[\hat{\omega}r'^2 - \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \hat{\omega})] . \quad (11.152)$$

Sustituyendo esta expresión en ecuación (11.151),

$$L_{Q\omega} = \int_{V_c} \rho \omega[\hat{\omega}r'^2 - \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \hat{\omega})] dV \cdot \hat{\omega} \quad (11.153)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega[\hat{\omega}r'^2 - \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \hat{\omega})] \cdot \hat{\omega} dV \quad (11.154)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega[r'^2 - (\vec{r}' \cdot \hat{\omega})(\vec{r}' \cdot \hat{\omega})] dV \quad (11.155)$$

$$= \int_{V_c} \rho \omega[r'^2 - (\vec{r}' \cdot \hat{\omega})^2] dV . \quad (11.156)$$

En la figura 11.34 se muestra que la diferencia  $r'^2 - (\vec{r}' \cdot \hat{\omega})^2$  es igual (por el teorema de Pitágoras) al cuadrado de la distancia  $s'$  al eje de rotación que pasa por el punto  $Q$ .

Luego, podemos sustituir en la ecuación anterior, con lo que se obtiene

$$L_{Q\omega} = \omega \int_{V_c} \rho s'^2 dV . \quad (11.157)$$

La integral de la última ecuación es el momento de inercia  $I_Q$  respecto de un eje que pasa por el punto  $Q$ , por lo tanto, vemos que la componente del momento angular  $\vec{L}_Q$  en la dirección del vector velocidad angular queda:

$$L_{Q\omega} = I_Q \omega . \quad (11.158)$$

Finalmente, podemos concluir que cuando el eje de rotación es paralelo a un eje principal de inercia  $y$ , por lo tanto, se cumple que  $\vec{L}_Q$  es paralelo a  $\vec{\omega}$ , entonces

$$\vec{L}_Q = I_Q \vec{\omega} . \quad (11.159)$$

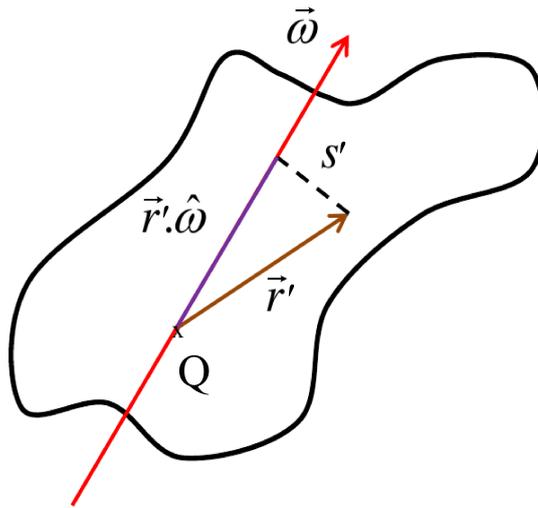


Figura 11.34: Momento angular respecto de un eje de rotación pura.

Es importante señalar que aunque esta expresión tiene la misma forma que la del momento angular de espín dado en la ecuación (11.120), no significa lo mismo. En el caso de la ecuación (11.159), el momento angular incluye la contribución del momento angular de espín y la del momento angular orbital, pues el momento de inercia  $I_Q$ , que no es el baricéntrico, involucra ambas componentes.

### 11.2.6. Sistemas de fuerzas equivalentes

Recordemos otra vez las ecs. (9.18) y (9.113) que nos permiten estudiar la evolución del movimiento de un cuerpo rígido.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{Ei} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei}. \quad (11.160)$$

Si tenemos una fuerza  $\vec{F}$  aplicada sobre un punto  $P$  de un rígido, tal como muestra la figura 11.35, podremos reemplazar ésta por otra fuerza igual  $\vec{F}'$  que esté aplicada sobre la misma recta de acción.

En efecto, es obvio que no cambia la resultante de las fuerzas externas  $\sum_i \vec{F}_{Ei}$ , que es igual a  $\vec{F}$  en ambos casos. Por otro lado, la resultante de los torques externos  $\sum_i \vec{\tau}_{Ei}$  tampoco cambia, ya que puede verse de la figura que  $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}' \times \vec{F}'$ . Entonces podemos afirmar que el desplazamiento de una fuerza sobre su recta de acción no modifica su efecto sobre el rígido.

Si en cambio, pretendemos desplazar una fuerza fuera de su recta de acción, se modifica el efecto dinámico sobre el rígido. La figura 11.36 muestra dos situaciones. En la situación A una única fuerza  $\vec{F}$  se aplica sobre el punto  $P$ , mientras que en la situación B se ha desplazado la fuerza  $\vec{F}$  al punto de aplicación  $Q$  y además se ha agregado un par de fuerzas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  de módulo  $|\vec{F}|$  paralelas a  $\vec{F}$ , es decir dos fuerzas de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario. Es fácil ver que las dos situaciones son equivalentes, ya que si en la situación B consideramos las fuerzas  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}$ , vemos que tanto su resultante, como la resultante de sus torques es nula, con lo que solamente sobrevive la fuerza  $\vec{F}_1$ , lo que es idéntico a la situación A.

Dicho de otro modo, para desplazar el punto de aplicación de una fuerza sobre un rígido sin que se modifique nada, es necesario compensar ese desplazamiento agregando un par de fuerzas del mismo

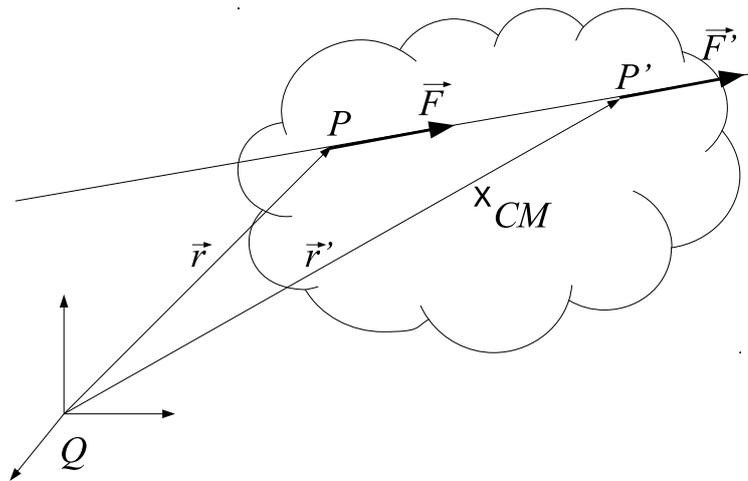


Figura 11.35: Desplazamiento de una fuerza sobre su recta de acción.

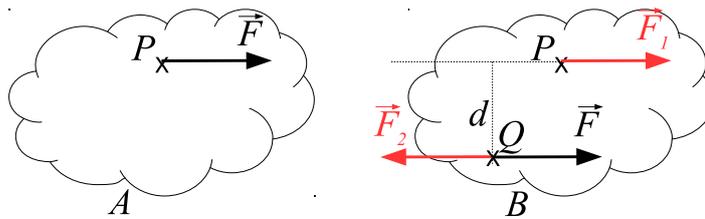


Figura 11.36: Desplazamiento de una fuerza fuera de su recta de acción.

módulo  $F$  y cuyo torque sea igual a  $Fd$ , donde  $d$  es la distancia del desplazamiento realizado.

Si se aplican dos fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  sobre puntos  $P_1$  y  $P_2$ , como se muestra en la figura 11.37, sabemos que la fuerza resultante está dada por  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , pero lo que no queda claro es dónde habría que aplicar esa fuerza para que la situación no cambie.

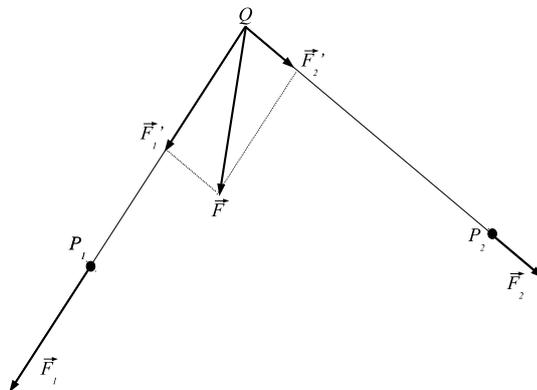


Figura 11.37: Fuerza equivalente.

Una forma de ver esto es teniendo en cuenta que desplazar una fuerza sobre su recta de acción no

afecta en nada la situación dinámica del rígido. En ese sentido, podemos desplazar las fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  sobre sus rectas de acción hasta ubicarlas en un origen común  $Q$ . Teniendo las dos fuerzas (ahora llamadas  $\vec{F}'_1$  y  $\vec{F}'_2$  en la figura 11.37), podemos sumarlas vectorialmente conservando el punto  $Q$  como punto de aplicación. La fuerza resultante  $\vec{F}$  aplicada sobre el punto  $Q$ , es también la fuerza *equivalente* para todo efecto, ya que es obvio que la suma del momento de las fuerzas  $\vec{F}'_1$  y  $\vec{F}'_2$  aplicadas sobre  $Q$  respecto de cualquier punto  $O$  será igual al momento de  $\vec{F}$  aplicada sobre  $Q$  respecto del mismo punto  $O$ .

### 11.2.7. Ejemplos de movimiento de cuerpo rígido

#### Movimiento bajo la acción de las fuerzas gravitatorias

Sea un cuerpo rígido de masa  $m$  constituido por elementos de volumen  $\delta V_i$  con masas  $\delta m_i$  sometido a la acción de la gravedad en las inmediaciones de la superficie de la Tierra. Cada  $\delta m_i$  se verá afectado por una fuerza  $\delta m_i \vec{g}$ , de manera que la resultante será:

$$\vec{F} = \sum_i (\delta m_i \vec{g}) = \left( \sum_i \delta m_i \right) \vec{g} = m \vec{g} = \vec{P}_G, \quad (11.161)$$

donde con  $\vec{P}_G$  indicamos el peso del cuerpo (el subíndice  $G$  sólo sirve para no confundirse con el momento lineal). La resultante del momento de estas fuerzas respecto de un punto  $Q$  está dada por

$$\vec{\tau} = \sum_i (\vec{R}_i \times \delta m_i \vec{g}) \rightarrow \left( \int_{V_c} \rho \vec{R} dV \right) \times \vec{g} = \vec{R}_{CM} \times m \vec{g} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_G. \quad (11.162)$$

Entonces, vemos que una única fuerza: el peso, aplicada sobre el centro de masa, es equivalente al sistema de fuerzas gravitatorias  $\delta m_i \vec{g}$  aplicadas sobre todo el rígido. El punto donde debe aplicarse la fuerza ficticia peso para reemplazar los efectos dinámicos de todas las fuerzas reales  $\delta m_i \vec{g}$  de manera que ambas situaciones sean equivalentes se denomina centro de gravedad. Vemos que el centro de gravedad coincide con el centro de masa cuando las fuerzas gravitatorias se aplican cerca de la superficie terrestre. Esto no será así cuando las dimensiones del cuerpo sean grandes comparadas con la distancia al centro de la Tierra; tal es el caso de las fuerzas gravitatorias ejercidas sobre la Luna, ya que las fuerzas aplicadas sobre las distintas porciones  $\delta m_i$  no serán iguales.

En el caso de movimiento cerca de la superficie de la Tierra, por ejemplo, cuando se lanza un objeto al aire (despreciando el rozamiento), las ecuaciones de movimiento se escriben de la siguiente manera:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{P}_G, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_G. \quad (11.163)$$

La primera ecuación nos dice que la aceleración del centro de masa será  $\vec{g}$ , constante; es decir, que el movimiento del centro de masa describirá una parábola dada por las condiciones iniciales, tal como vimos para cuerpos puntuales. La segunda ecuación nos muestra que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}, \quad (11.164)$$

por la segunda ecuación (11.106). Entonces podemos concluir que

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = 0, \quad (11.165)$$

lo que a su vez nos dice que  $\vec{L}_S$  es una constante de movimiento. Como vimos, la expresión más general que relaciona el momento angular de espín con la velocidad angular es la ecuación (11.122), según la

cual,  $\vec{L}_S$  no es paralelo a  $\vec{\omega}$  a menos que la rotación se describa respecto de un eje principal de inercia (o que el cuerpo tenga geometría esférica). O sea que para este caso, la constante vectorial de movimiento  $\vec{L}_S$  debe cumplir que

$$\vec{L}_S = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = I_1^* \vec{\omega}_1 + I_2^* \vec{\omega}_2 + I_3^* \vec{\omega}_3, \quad (11.166)$$

pero los ejes principales de inercia  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  y  $\{3\}$ , solidarios al rígido van cambiando su orientación a lo largo del movimiento. Por lo tanto, pueden variar las tres componentes de  $\vec{\omega}$  de manera complicada mientras el vector  $\vec{L}_S$  sigue manteniéndose constante (movimiento de Poincot).

Un caso simple de este tipo de movimiento —extremadamente particular— lo constituyen dos masas puntuales unidas por una varilla rígida y de masa despreciable girando alrededor de un eje principal de inercia perpendicular a la varilla (ver figura 11.38).

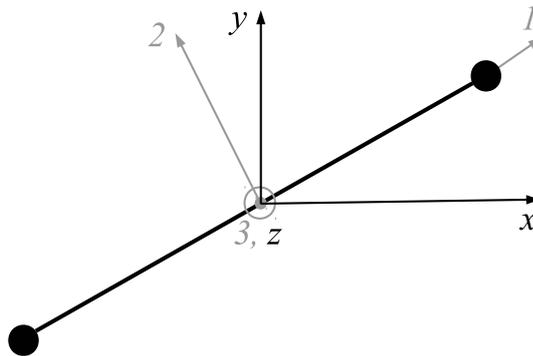


Figura 11.38: Movimiento de dos masas puntuales unidas por una varilla rígida de masa despreciable. Los ejes negros  $x, y, z$  constituyen un sistema de coordenadas inercial, fijo al laboratorio. Los ejes grises  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  y  $\{3\}$ , son ejes principales de inercia y se mueven solidarios al cuerpo rígido.

Tanto sea en una situación en la cual no actúa ninguna fuerza sobre el sistema, como en la situación de caída libre (con  $\vec{g} = -g\hat{j}$ , el momento angular de espín es una constante vectorial de movimiento que tiene la expresión dada por la ecuación (11.166). Si en un dado instante el eje de rotación coincide con el eje  $z$ , que a su vez es el eje  $\{3\}$ , para ese instante podemos escribir

$$\vec{L}_S = I_3^* \vec{\omega}_3, \quad (11.167)$$

pues  $\omega_2 = I_1^* = 0$ ; es decir,  $\vec{L}_S = I_3^* \vec{\omega} = I_3^* \omega \hat{k}$ . Por lo tanto, como  $\vec{L}_S$  es una constante de movimiento, debe cumplirse que  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$  también lo es. Esto nos dice que la varilla continuará girando con la misma velocidad angular, sin cambiar de orientación. En el caso en que el cuerpo esté afectado por la gravedad, el centro de masa además describirá una parábola. Es importante recalcar que la simplicidad del movimiento se restringe a casos muy particulares.

### Golpe seco en una bola de billar

Lo que coloquialmente llamamos “golpe seco”, se denomina percusión, y consiste en aplicar una fuerza durante un tiempo extremadamente corto en comparación con la escala de tiempo en que se desarrolla el movimiento. Si se aplica una fuerza  $\vec{F}(t)$  sobre un punto  $P$  de un rígido durante un intervalo  $\Delta t$ , podemos calcular el momento lineal transferido  $\vec{J}$ :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \vec{J} \equiv \Delta\vec{P} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}(t) dt. \quad (11.168)$$

Para el momento angular transferido  $\Delta\vec{L}$  respecto de algún punto  $Q$  fijo a tierra podemos escribir:

$$\Delta\vec{L} = \int_0^{\Delta t} \vec{\tau}(t) dt = \int_0^{\Delta t} \vec{R} \times \vec{F}(t) dt = \int_0^{\Delta t} \vec{R}_{CM} \times \vec{F}(t) dt + \int_0^{\Delta t} \vec{r} \times \vec{F}(t) dt = \vec{R}_{CM} \times \vec{J} + \vec{r} \times \vec{J}, \quad (11.169)$$

donde el término orbital es  $\Delta\vec{L}_O = \vec{R}_{CM} \times \vec{J}$  y el término de espín corresponde a  $\Delta\vec{L}_S = \vec{r} \times \vec{J}$ .

Ahora consideremos que un momento lineal  $\vec{J}$  es transferido rápidamente a la bola de billar de radio  $R$  y masa  $m$  mostrada en la figura 11.39. En este ejemplo no consideraremos ningún tipo de rozamiento entre la bola y la mesa, con lo cual se sugiere tomar con pinzas los resultados que siguen a la hora de jugar un partido de billar.

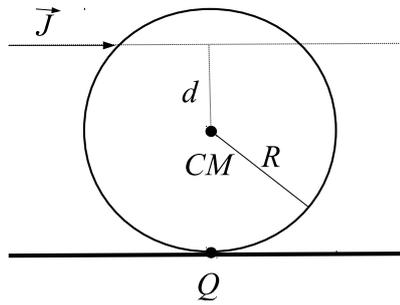


Figura 11.39: Percusión.

La transferencia de momento se producirá en la dirección de avance de la bola y las fuerzas peso y la reacción normal de la superficie se neutralizan mutuamente ya que tienen el mismo módulo, la misma dirección, la misma recta de acción y son de sentido contrario. Si consideramos que inicialmente la bola estaba en reposo, podemos escribir:

$$J = \Delta P = mv_{CM} \Rightarrow v_{CM} = \frac{J}{m}. \quad (11.170)$$

Por otro lado, para la transferencia de momento angular de espín tenemos:

$$\Delta L_S = L_S - L_S^0 = L_S = I^* \omega. \quad (11.171)$$

Además, como  $\vec{L}_S = \vec{r} \times \vec{J}$ , es decir,  $L_S = dJ$  y el momento baricéntrico de la esfera es  $I^* = \frac{2}{5}mR^2$

$$\omega = \frac{5Jd}{2mR^2}. \quad (11.172)$$

De este resultado puede verse que si se impacta la bola a la altura de su centro ( $d = 0$ ), la velocidad angular es nula. Para lograr que la bola no deslice, es decir, que esté en la condición de rodadura debe cumplirse que

$$\vec{v}_Q = 0 = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_Q \Rightarrow v_{CM} - \omega R = 0 \Rightarrow v_{CM} = \omega R. \quad (11.173)$$

Entonces podemos escribir

$$\frac{J}{m} = \frac{5Jd}{2mR^2} R \Rightarrow 1 = \frac{5d}{2R}. \quad (11.174)$$

Es decir, el punto de impacto debe estar a una distancia  $d$  del centro igual a  $\frac{2}{5}R$ . Sólo pegándole a esa altura la bola sale “sin efecto”, rodando sin deslizar. Podemos usar este ejemplo para convencernos de que puede haber rodadura sin rozamiento estático.

**Péndulo físico**

Sea un cuerpo rígido de masa  $m$  suspendido de un eje horizontal que pasa por el punto  $Q$ , bajo la acción de la gravedad, como muestra la figura 11.40.

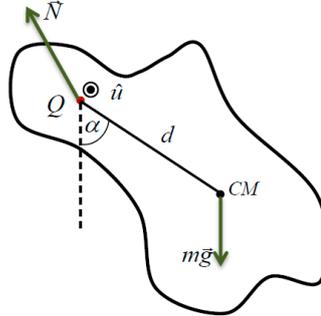


Figura 11.40: Péndulo físico.

El cuerpo efectuará un movimiento de rotación pura alrededor del eje que pasa por  $Q$  y la velocidad angular  $\vec{\omega}$  será paralela al versor  $\hat{u}$ , perpendicular a la hoja y hacia afuera. Para describir el problema utilizaremos un sistema de coordenadas polares con origen en  $Q$ . También  $Q$  será el centro de momentos. El eje soportará al objeto ejerciendo una fuerza  $\vec{N}$ , cuya dirección irá cambiando a lo largo del movimiento, de manera que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{Ei} = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}. \quad (11.175)$$

Por otro lado,

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} = \vec{r}'_{CM} \times m\vec{g} + \vec{r}'_N \times \vec{N}, \quad (11.176)$$

donde los vectores que tienen el supraíndice  $'$  están medidos desde el punto de suspensión y centro de momentos  $Q$ , de manera que  $\vec{r}'_N = 0$  y la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = -dmg \sin(\alpha) \hat{u}. \quad (11.177)$$

En el caso particular en el que  $\hat{u}$  es paralelo a un eje principal de inercia, se cumple la ecuación (11.159)

$$\vec{L}_Q = I_Q \vec{\omega}, \quad (11.178)$$

donde  $I_Q = I_G + md^2$ . Derivando la última ecuación respecto del tiempo, y teniendo en cuenta que  $\hat{u}$  corresponde a un eje fijo (a la pared, por ejemplo):

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = I_Q \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_Q \frac{d\omega}{dt} \hat{u} = I_Q \gamma \hat{u}, \quad (11.179)$$

donde  $\gamma = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$  es la aceleración angular. Relacionando las dos expresiones obtenidas para la derivada del momento angular obtenemos la ecuación de movimiento del péndulo físico:

$$I_Q \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -dmg \sin(\alpha), \quad (11.180)$$

donde  $d$  es la distancia del punto de suspensión al centro de masa.

Esta ecuación diferencial no tiene solución analítica y debe ser resuelta numéricamente. Sin embargo si nos restringimos, al igual que cuando analizamos el péndulo matemático, al caso en el cual el péndulo tiene oscilaciones de pequeña amplitud, podemos hacer la aproximación  $\sin(\alpha) \simeq \alpha$ , con lo cual,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{dmg}{I_Q} \alpha. \quad (11.181)$$

La función de movimiento resultante es

$$\alpha(t) = \alpha_{max} \sin(\Omega t + \phi_0), \quad (11.182)$$

donde  $\alpha_{max}$  representa la amplitud de la coordenada angular  $\alpha$ ,  $\phi_0$  está dado por las condiciones iniciales y

$$\Omega = \sqrt{\frac{dmg}{I_Q}} = \sqrt{\frac{dmg}{I_G + md^2}}. \quad (11.183)$$

Análogamente a lo que vimos para el péndulo matemático, el período  $T$  está dado por  $2\pi/\Omega$ , es decir,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + md^2}{dmg}}. \quad (11.184)$$

Un gráfico cualitativo de esta expresión para el período  $T$  en función de la distancia  $d$  puede verse en la figura 11.41. Se observa que existe un valor de la distancia entre el punto de suspensión y el centro de masa que minimiza el período del péndulo dado por  $d_{min} = \sqrt{I_G/m}$ .

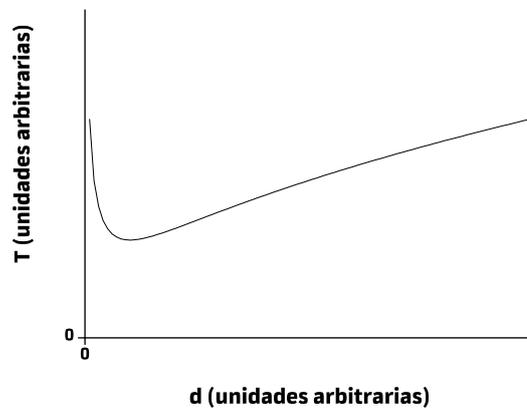


Figura 11.41: Péndulo físico.

Si el cuerpo es una masa puntual suspendida de un hilo de longitud  $\ell$ , entonces  $d = \ell$  y  $I_Q = m\ell^2$ , con lo cual,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2}{\ell mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad (11.185)$$

como habíamos obtenido para el péndulo matemático.

### Cilindro que rueda sin deslizar

Un cilindro de masa  $m$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre un plano con ángulo de inclinación  $\alpha$  como muestra la figura 11.42. Por hipótesis el cilindro rueda sin deslizar. Vamos a considerar como eje de rotación la generatriz de contacto del cilindro, es decir que se trata, por un lado, de un eje de rotación pura, ya que el eje tiene en ese instante velocidad nula y, por otro lado, es un eje instantáneo de rotación, ya que va a ir cambiando su posición a lo largo del movimiento. Poniendo, entonces centro de momentos en  $Q$ ,

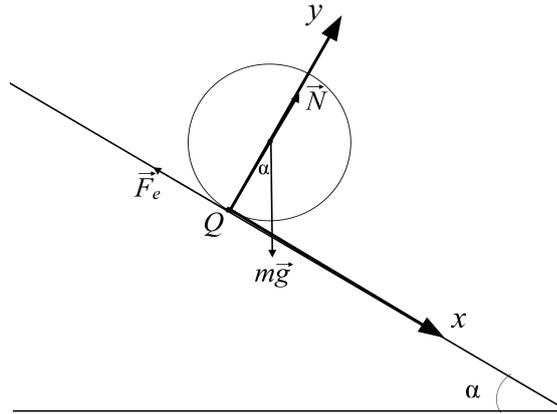


Figura 11.42: Cilindro que rueda por un plano inclinado.

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{Ei} = \vec{r}_{CM}' \times m\vec{g}, \quad (11.186)$$

ya que la reacción normal  $\vec{N}$  del plano y la fuerza de roce estático  $\vec{F}_e$  están aplicadas sobre el punto  $Q$ . Si describimos el movimiento de rotación alrededor de una dirección entrante y perpendicular a la hoja, teniendo en cuenta la ecuación (11.159),

$$I\gamma = \frac{dL_Q}{dt} = Rmg \operatorname{sen} \alpha. \quad (11.187)$$

Es decir,

$$\gamma \left( \frac{mR^2}{2} + mR^2 \right) = Rmg \operatorname{sen} \alpha; \quad (11.188)$$

o bien,

$$\gamma = \frac{2g}{3R} \operatorname{sen} \alpha. \quad (11.189)$$

La condición de rodadura nos dice que  $v_Q = 0$ :

$$0 = \vec{v}_Q = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_Q \Rightarrow 0 = v_{CM} - \omega R \Rightarrow v_{CM} = \omega R. \quad (11.190)$$

Entonces, derivando la última igualdad respecto del tiempo,

$$a_{CM} = \gamma R. \quad (11.191)$$

Luego, la aceleración del centro de masa estará dada por

$$a_{CM} = \frac{2}{3}g \operatorname{sen} \alpha. \quad (11.192)$$

Este valor es claramente menor que  $g \sen \alpha$ , correspondiente a la aceleración de una masa puntual  $m$  que desliza sin rozamiento por el mismo plano. Para obtener la fuerza de rozamiento usamos que

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_{Ei} = \vec{F}_e + \vec{N} + m\vec{g}. \quad (11.193)$$

En la componente en la dirección del plano tenemos

$$ma_{CM} = -F_e + mg \sen \alpha; \quad (11.194)$$

por lo tanto, reemplazando el valor encontrado para  $a_{CM}$ ,

$$F_e = mg \sen \alpha - m \frac{2}{3} g \sen \alpha \Rightarrow F_e = \frac{1}{3} mg \sen \alpha. \quad (11.195)$$

Ahora resolveremos nuevamente el problema del cilindro rodando sin deslizar sobre un plano inclinado, pero utilizando otro sistema de referencia diferente al que coincidía con el eje instantáneo de rotación pura. Por otra parte, plantearemos la resolución sin intentar *adivinar* los sentidos de los vectores involucrados, sino que dejaremos que estos se revelen al final, después de resolver las ecuaciones planteadas. Es importante mencionar que no es el mismo método que el seguido en la primera resolución del problema del cilindro. Puede verse cómo habíamos elegido positivo el sentido entrante hacia la hoja, de manera que la aceleración angular resultase positiva. También vemos que habíamos pensado  $\vec{F}_e = -F_e \hat{i}$ , de tal forma que  $F_e$  fuese positivo. En la figura 11.43 se muestran las fuerzas aplicadas sobre el cilindro y el sistema de coordenadas fijo al plano que utilizaremos para la descripción del movimiento. El eje  $x$  coincide con el plano inclinado, el eje  $y$  es perpendicular a dicho plano y el eje  $z$  es perpendicular a la hoja y su sentido, saliente de ella.

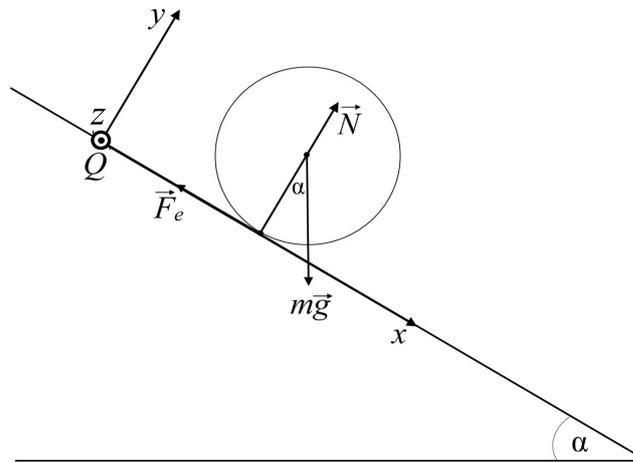


Figura 11.43: Cilindro que rueda por un plano inclinado con sistema de referencia fijo al plano.

Con esa convención, las expresiones para las fuerzas aplicadas sobre el cilindro resultan:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= mg \sen \alpha \hat{i} - mg \cos \alpha \hat{j}; \\ \vec{N} &= N \hat{j}; \\ \vec{F}_e &= F_e \hat{i}. \end{aligned} \quad (11.196)$$

Las ecuaciones de movimiento son:

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e; \quad (11.197)$$

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P} + \vec{R}_A \times \vec{N} + \vec{R}_A \times \vec{F}_e, \quad (11.198)$$

donde  $\vec{R}_{CM} = x_A \hat{i} + R \hat{j}$  y  $\vec{R}_A = x_A \hat{i}$ , siendo  $x_A$  la coordenada del punto de contacto.

Podemos escribir la derivada temporal del momento angular en términos de sus componentes orbital y de espín:

$$\frac{d\vec{L}_{O_Q}}{dt} = \vec{R}_{CM} \times (\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e); \quad (11.199)$$

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{r}_A \times (\vec{N} + \vec{F}_e). \quad (11.200)$$

donde  $\vec{r}_A = -R \hat{j}$  es la coordenada del punto de contacto medida desde el centro de masa.

Analizando la derivada del momento angular orbital con respecto al tiempo tenemos que

$$\frac{d\vec{L}_{O_Q}}{dt} = \vec{R}_{CM} \times (\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e); \quad (11.201)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{R}_{CM} \times m\vec{v}_{CM}) = \vec{R}_{CM} \times (\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e); \quad (11.202)$$

$$\vec{R}_{CM} \times m\vec{a}_{CM} = \vec{R}_{CM} \times (\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e). \quad (11.203)$$

La última ecuación es equivalente a  $m\vec{a}_{CM} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e$ , que es la ecuación (11.197), y por lo tanto, no será tenida en cuenta.

Como el cilindro está rotando alrededor de un eje principal de inercia, la expresión de la derivada del momento angular de espín con respecto al tiempo queda

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \frac{d}{dt} (I_G \vec{\omega}) = \vec{r}_A \times (\vec{N} + \vec{F}_e); \quad (11.204)$$

$$I_G \vec{\gamma} = \vec{r}_A \times (\vec{N} + \vec{F}_e). \quad (11.205)$$

Reemplazando en las ecs.(11.197) y (11.205) las expresiones de las fuerzas y teniendo en cuenta que  $\vec{a}_{CM} = a_{CM} \hat{i}$ ,

$$ma_{CM} \hat{i} = (mg \sin \alpha + F_e) \hat{i} + (N - mg \cos \alpha) \hat{j}; \quad (11.206)$$

$$I_G \vec{\gamma} = -R \hat{j} \times (N \hat{j} + F_e \hat{i}). \quad (11.207)$$

La ecuación (11.207) indica que la aceleración angular sólo tiene componentes en la dirección del eje  $z$  ( $\vec{\gamma} = \gamma \hat{k}$ ).

Escribiendo las ecs.(11.206) y (11.207) en sus componentes cartesianas, queda

$$x : ma_{CM} = mg \sin \alpha + F_e; \quad (11.208)$$

$$y : N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha; \quad (11.209)$$

$$z : I_G \gamma = RF_e. \quad (11.210)$$

Vemos que aún tenemos tres incógnitas ( $a_{CM}$ ,  $\gamma$  y  $F_e$ ) y sólo dos ecuaciones. Para poder resolver el sistema es necesario considerar la condición de que el cilindro rueda sin deslizar. Vimos que cuando esto ocurre,  $\vec{a}_{CM} = \vec{\gamma} \times \vec{r}'_{CM}$ , donde  $\vec{r}'_{CM} = R \hat{j}$  es el vector posición del centro de masa respecto del eje de rotación. Entonces,

$$\vec{a}_{CM} = \vec{\gamma} \times \vec{r}'_{CM}; \quad (11.211)$$

$$a_{CM} \hat{i} = \gamma \hat{k} \times R \hat{j}; \quad (11.212)$$

$$a_{CM} = -\gamma R. \quad (11.213)$$

Resumiendo, el sistema de ecuaciones que tenemos que resolver está dado por las ecs. en  $x$  y  $z$  de (11.210) y por la ecuación (11.213):

$$ma_{CM} = mg \operatorname{sen} \alpha + F_e ; \quad (11.214)$$

$$I_G \gamma = R F_e ; \quad (11.215)$$

$$a_{CM} = -\gamma R . \quad (11.216)$$

Teniendo en cuenta que el momento de inercia del cilindro respecto a su eje es  $I_G = \frac{1}{2} m R^2$ , la solución del sistema de ecuaciones (11.216) resulta:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{2}{3} g \operatorname{sen} \alpha \hat{i} ; \quad (11.217)$$

$$\vec{\gamma} = -\frac{2g}{3R} \operatorname{sen} \alpha \hat{k} ; \quad (11.218)$$

$$\vec{F}_e = -\frac{1}{3} mg \operatorname{sen} \alpha \hat{i} . \quad (11.219)$$

Como vemos, teniendo en cuenta las diferentes convenciones de signos utilizadas, los resultados coinciden con los obtenidos cuando analizamos el movimiento del cilindro desde un sistema con origen en el eje instantáneo de rotación pura.

### 11.2.8. Energía del cuerpo rígido

#### Energía cinética

Puesto que la energía cinética de una partícula está dada por  $T = \frac{1}{2} m v^2$ , podemos definir la energía cinética de un sistema de partículas como

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 . \quad (11.220)$$

Un cuerpo rígido es un sistema de partículas. Además, si el rígido es continuo podemos escribir la ecuación anterior como una integral:

$$T = \int_{V_c} \frac{1}{2} v^2 \rho dV = \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho v^2 dV . \quad (11.221)$$

Considerando el caso más general, es decir, un movimiento de roto-traslación alrededor de un eje de rotación arbitrario (que pasa por el punto  $O$ , por ejemplo), la velocidad es  $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ , con lo cual,

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}')^2 dV \quad (11.222)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}') \cdot (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.223)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho [\vec{v}_O^2 + (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 + 2\vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}')] dV \quad (11.224)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho [\vec{v}_O^2 + (\omega r' \operatorname{sen} \alpha)^2 + 2\vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}')] dV , \quad (11.225)$$

donde  $r' \operatorname{sen} \alpha = s$  es la proyección del vector  $\vec{r}'$  sobre la dirección perpendicular a  $\hat{\omega}$ , como habíamos

visto en la figura 11.28. Entonces,

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho [\vec{v}_O^2 + (\omega s)^2 + 2\vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}')] dV \quad (11.226)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho \vec{v}_O^2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho (\omega s)^2 dV + \int_{V_c} \rho \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV \quad (11.227)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{v}_O^2 \int_{V_c} \rho dV + \frac{1}{2} \omega^2 \int_{V_c} \rho s^2 dV + \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \int_{V_c} \rho \vec{r}') dV \quad (11.228)$$

$$= \frac{1}{2} m \vec{v}_O^2 + \frac{1}{2} \omega^2 I_O + \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times m \vec{r}_{CM}') , \quad (11.229)$$

donde  $I_O$  es el momento de inercia respecto del punto  $O$ .

Vamos a analizar algunos casos particulares.

- Traslación pura.

En este caso,  $\omega = 0$  y se cumple que

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 , \quad (11.230)$$

ya que todo el rígido (en particular el centro de masa) se desplaza con  $\vec{v} = \vec{v}_O$ . Es decir, hemos obtenido la misma expresión que para la masa puntual.

- Movimiento de rotación pura alrededor de un eje que pasa por  $O$ .

En este caso,  $\vec{v}_O = 0$ , con lo cual

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 I_O . \quad (11.231)$$

- Movimiento de roto-traslación eligiendo un eje de rotación que pase por el centro de masa. En este caso,  $\vec{v}_O = \vec{v}_{CM}$ ,  $O = CM$  y  $\vec{r}'_{CM} = \vec{r}_{CM} = 0$ , de manera que

$$T = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 . \quad (11.232)$$

En esta última expresión, el primer término corresponde a la energía cinética de translación y el segundo término, a la energía cinética de rotación.

### 11.2.9. Trabajo y energía potencial

Consideremos una fuerza que se aplica sobre un sistema de partículas. Vamos a definir el trabajo que ejerce esa fuerza sobre el sistema como la suma de los trabajos ejercidos por la fuerza sobre todas las partículas:

$$W = \sum_i W_i . \quad (11.233)$$

Por otro lado, sabemos que el trabajo  $W_i$  sobre la partícula  $i$  es igual a la variación de su energía cinética  $\Delta T_i$ , como habíamos visto en la ecuación (10.14). Si tenemos muchas fuerzas aplicadas sobre el sistema, el trabajo total, es decir, el trabajo ejercido por todas esas fuerzas sobre el sistema será la suma de los trabajos de todas las fuerzas presentes, de manera que podemos escribir para un sistema de fuerzas actuando sobre un sistema de partículas designadas con el subíndice  $i$ :

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \Delta T_i = \Delta T , \quad (11.234)$$

donde  $\Delta T$  es la variación de la energía cinética de todo el sistema. Pensemos que cada partícula es desplazada en una cantidad pequeña  $\Delta \vec{s}_i$  a lo largo de su trayectoria por la acción conjunta de las fuerzas aplicadas. Por la definición de trabajo podemos escribir:

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i. \quad (11.235)$$

En esta última expresión  $\vec{F}_i$  es la fuerza aplicada sobre la partícula  $i$ , o más generalmente, la resultante de las fuerzas aplicadas sobre la partícula  $i$ . Dividiendo por el intervalo de tiempo  $\Delta t$  durante el cual se produce la variación de las posiciones de las partículas y usando que  $W = \Delta T$ ,

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\Delta \vec{s}_i}{\Delta t}. \quad (11.236)$$

Si hacemos tender  $\Delta t$  a cero nos queda,

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i (\vec{F}_{Ei} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}) \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_{Ei} \cdot \vec{v}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}_i, \quad (11.237)$$

donde con  $\vec{F}_{Ei}$  denotamos las fuerzas exteriores al sistema aplicadas sobre la partícula  $i$  y  $\vec{F}_{ji}$  es la fuerza que la partícula  $j$  aplica sobre la partícula  $i$ . La última suma doble de ecuación (11.237) tendrá términos de la forma  $\vec{F}_{kl} \cdot \vec{v}_l$  y otros de la forma  $\vec{F}_{lk} \cdot \vec{v}_k$ . Considerando estos términos de a pares vemos que

$$\vec{F}_{kl} \cdot \vec{v}_l + \vec{F}_{lk} \cdot \vec{v}_k = \vec{F}_{kl} \cdot \vec{v}_l - \vec{F}_{kl} \cdot \vec{v}_k = \vec{F}_{kl} \cdot (\vec{v}_l - \vec{v}_k), \quad (11.238)$$

ya que, por la tercera ley de Newton,  $\vec{F}_{kl} = -\vec{F}_{lk}$ . Pero, por tratarse de un rígido, podemos escribir

$$\vec{v}_k = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_k' \quad \text{y} \quad \vec{v}_l = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_l', \quad (11.239)$$

con lo cual

$$\vec{v}_l - \vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_l' - \vec{\omega} \times \vec{r}_k' = \vec{\omega} \times (\vec{r}_l' - \vec{r}_k'). \quad (11.240)$$

Reemplazando en ecuación (11.238):

$$\vec{F}_{kl} \cdot (\vec{v}_l - \vec{v}_k) = \vec{F}_{kl} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_l' - \vec{r}_k')], \quad (11.241)$$

pero el vector  $\vec{r}_l' - \vec{r}_k'$  está dirigido desde el punto  $k$  hasta el punto  $l$ , es decir, tiene la dirección de la fuerza  $\vec{F}_{kl}$  y por lo tanto  $\vec{F}_{kl} \perp [\vec{\omega} \times (\vec{r}_l' - \vec{r}_k')]$  y el producto escalar se anula. Entonces de la ecuación (11.237) sólo sobrevive la suma que involucra las fuerzas exteriores:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \vec{F}_{Ei} \cdot \vec{v}_i. \quad (11.242)$$

Ahora reemplazamos en esta última ecuación la expresión para la velocidad:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \vec{F}_{Ei} \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i), \quad (11.243)$$

donde se ha elegido convenientemente un eje de rotación que pase por el centro de masa. La notación sigue siendo la que usamos habitualmente:  $\vec{R}_i$  es la posición del punto  $i$  vista desde un sistema inercial y  $\vec{r}_i$  es la posición del mismo punto vista desde el centro de masa.

Antes de seguir con el desarrollo, proponemos el siguiente

### Ejercicio

Dados tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , probar que

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}. \quad (11.244)$$

Usando este resultado podemos trabajar sobre la ecuación (11.243):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{F}_{Ei} + \sum_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{F}_{Ei} \quad (11.245)$$

$$= \sum_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{F}_{Ei} + \sum_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_{Ei}) \quad (11.246)$$

$$= \sum_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{F}_{Ei} + \sum_i \vec{\omega} \cdot [(\vec{R}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{F}_{Ei}] \quad (11.247)$$

$$= \vec{v}_{CM} \cdot \sum_i \vec{F}_{Ei} + \vec{\omega} \cdot \sum_i (\vec{R}_i \times \vec{F}_{Ei} - \vec{R}_{CM} \times \vec{F}_{Ei}) \quad (11.248)$$

$$= \vec{v}_{CM} \cdot \sum_i \vec{F}_{Ei} + \vec{\omega} \cdot \left( \sum_i \vec{\tau}_{Ei} - \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_{Ei} \right) \quad (11.249)$$

$$= \vec{v}_{CM} \cdot \sum_i \vec{F}_{Ei} + \vec{\omega} \cdot \left( \frac{d\vec{L}}{dt} - \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right) \quad (11.250)$$

$$= \vec{v}_{CM} \cdot \sum_i \vec{F}_{Ei} + \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{L}_S}{dt} \quad (11.251)$$

$$= \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} \cdot \sum_i \vec{F}_{Ei} + \frac{d\theta}{dt} \hat{\omega} \cdot \frac{d\vec{L}_S}{dt}, \quad (11.252)$$

donde se ha introducido la coordenada angular  $\theta$ . En base a la última ecuación podemos escribir

$$dT = dW = \left( \sum_i \vec{F}_{Ei} \right) \cdot d\vec{R}_{CM} + \frac{d\vec{L}_S}{dt} \cdot \hat{\omega} d\theta. \quad (11.253)$$

Si existe una función potencial dependiente de las coordenadas  $V$  tal que su variación es el trabajo realizado sobre el rígido cambiado de signo (como ocurría en el caso de una masa puntual), puede escribirse

$$\Delta V = -\Delta W = - \int \left( \sum_i \vec{F}_{Ei} \right) \cdot d\vec{R}_{CM} - \int \frac{d\vec{L}_S}{dt} \cdot \hat{\omega} d\theta. \quad (11.254)$$

Cuando existe una función potencial definida en ecuación (11.254), asociada a las fuerzas aplicadas, la energía mecánica del rígido es la suma de la energía cinética más la energía potencial  $V$ :

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 + V. \quad (11.255)$$

En este caso, la variación de la energía mecánica estará dada por:

$$\Delta E = \Delta T + \Delta V = \Delta W - \Delta W = 0. \quad (11.256)$$

### Ejemplo: caída libre

Calculemos la variación de la energía potencial de una piedra de masa  $m$  cuando es arrojada desde una posición inicial  $\vec{R}_{CM}^i$  en el suelo hasta una posición final  $\vec{R}_{CM}^f$  situada a una altura  $h$ . Cuando estudiamos este caso, en la sección 11.2.7, vimos que  $\sum_i \vec{F}_{Ei} = \vec{P}_G$  y que  $\frac{d\vec{L}_S}{dt} = 0$ . Entonces, reemplazando en la

ecuación (11.254) podemos escribir

$$\Delta V = - \int_{\vec{R}_{CM}^i}^{\vec{R}_{CM}^f} \vec{P}_G \cdot d\vec{R}_{CM} = - \int_{\vec{R}_{CM}^i}^{\vec{R}_{CM}^f} m(-g)\hat{j} \cdot d\vec{R}_{CM}, \quad (11.257)$$

donde se ha elegido el eje  $\hat{j}$  apuntando hacia arriba. Vemos que a medida que varía la posición del centro de masa el producto escalar  $\hat{j} \cdot d\vec{R}_{CM}$  es igual a  $dy_{CM}$ , con lo cual se obtiene

$$\Delta V = \int_0^h mg dy_{CM} = mgh. \quad (11.258)$$

Si fijamos el origen de la energía potencial tenemos simplemente que  $V = mgh$ , igual que en el caso de una masa puntual ubicada en el centro de masa del rígido.

Ejemplo: cilindro que rueda por un plano inclinado

Consideremos nuevamente el cilindro de la figura 11.42. En este caso,

$$\sum_i \vec{F}_{Ei} = \vec{F}_e + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM} = \frac{2}{3}mg \text{ sen } \alpha \hat{i} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{L}_S}{dt} = I_G \vec{\gamma} = \frac{1}{2}mR^2 \frac{2g}{3R} \text{ sen } \alpha \hat{k}, \quad (11.259)$$

donde  $\hat{i}$  y  $\hat{k}$  son las direcciones paralela al plano hacia abajo y entrante a la hoja, respectivamente. Reemplazando estas expresiones en la ecuación (11.254),

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int \frac{2}{3}mg \text{ sen } \alpha \hat{i} \cdot d\vec{R}_{CM} - \int m \frac{gR}{3} \text{ sen } \alpha \hat{k} \cdot \hat{\omega} d\theta \\ &= - \int \frac{2}{3}mg \text{ sen } \alpha dx_{CM} - \int \frac{mRg}{3} \text{ sen } \alpha d\theta. \end{aligned} \quad (11.260)$$

Pensemos que queremos calcular la variación de energía potencial desde que el centro de masa del cilindro parte de una posición  $x_{CM} = 0$  hasta una posición  $x_{CM} = d$ . Esa variación de la coordenada  $x$  se corresponderá con un giro entre  $\theta = 0$  y  $\theta = d/R$ . Entonces, en este caso,

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_0^d \frac{2}{3}mg \text{ sen } \alpha dx_{CM} - \int_0^{d/R} \frac{mRg}{3} \text{ sen } \alpha d\theta \\ &= - \frac{2}{3}mg \text{ sen } \alpha d - \frac{1}{3}mRg \text{ sen } \alpha \frac{d}{R} \\ &= -mgd \text{ sen } \alpha \\ &= -mgh, \end{aligned} \quad (11.261)$$

donde  $h$  es la coordenada vertical medida hacia abajo. Es decir, la variación de energía potencial es la misma que experimentaríamos una masa puntual, ubicada en la posición del centro de masa del cilindro, deslizando sobre el plano.

## 11.2.10. Giróscopo y trompo

### Movimiento del giróscopo

Un giróscopo es un dispositivo como el mostrado en la figura 11.44, en el cual un volante de momento de inercia  $I^*$ , respecto de su eje de simetría, puede girar alrededor de dicho eje.

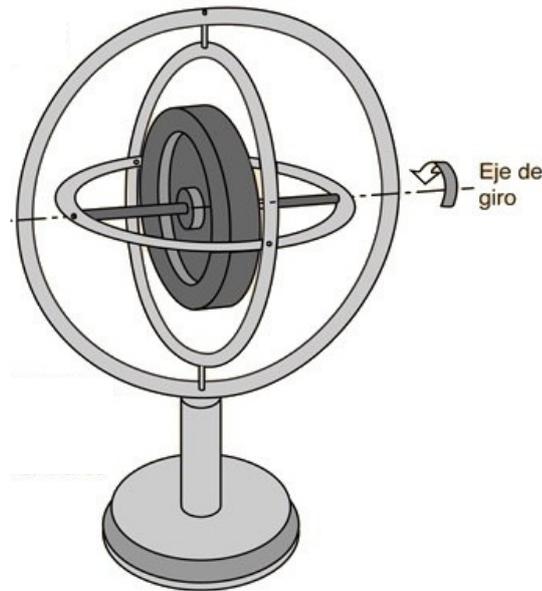


Figura 11.44: Giróscopo.

Los armazones circulares tienen masas pequeñas comparadas con la del volante. Los tres ejes, correspondientes a los tres armazones, son libres de cambiar su orientación, pero su intersección siempre se encuentra en el centro de masa del volante. Los armazones están montados en un dispositivo que tiene rozamiento despreciable, denominado suspensión cardánica. Con esta configuración sólo podrían ejercerse torques externos sobre el eje del volante, que pasa por su centro de masa, ya que el único contacto con el “exterior” es a través de este eje; sin embargo, esto no es posible debido al rozamiento ínfimo de los ejes. Entonces, como

$$0 = \sum \vec{\tau}_{Ei} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \tag{11.262}$$

podemos concluir que  $\vec{L} = \text{cte.}$  Si suponemos que el centro de masa del volante no se desplaza (producir tal desplazamiento caminando con el giróscopo en la mano, por ejemplo, sólo aportaría confusión al problema), y que originalmente el volante gira alrededor de su eje, que es un eje principal de inercia,

$$\vec{L} = \vec{L}_S = I_G \vec{\omega}, \tag{11.263}$$

pues el reposo del centro de masa asegura que el momento angular orbital es nulo. Vale decir que, por ser  $\vec{L} = \text{cte.}$ , también podemos afirmar que  $\vec{\omega} = \text{cte.}$  y el eje del volante apuntará siempre en la misma dirección a pesar de los intentos que se hagan de torcerlo. Sin embargo, si “hacemos trampa” al giróscopo y ejercemos directamente una fuerza sobre el eje del volante, habremos ejercido un torque externo sobre el volante y  $\vec{L}$  no será más constante. Es interesante estudiar cómo reacciona este dispositivo en esa situación. Para analizarlo consideremos que el eje del volante está inicialmente horizontal, como indica la figura 11.45, y girando con alguna velocidad angular  $\vec{\omega}$ , de manera que el valor inicial de  $\vec{L}$  es distinto de cero.

Si colgamos una masa  $m$ , como muestra la figura, aparecerá un torque  $\vec{\tau}$  en la dirección horizontal perpendicular al eje del volante. Como  $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$ , la variación de  $\vec{L}$  resultante será paralela a  $\vec{\tau}$  como muestra la figura 11.46. Entonces, al variar la dirección de  $\vec{L}$ , variará la dirección de  $\vec{\omega}$ , es decir, la dirección del eje del volante. Para tiempos pequeños podemos pensar que el ángulo girado  $d\phi = dL/L$ , con lo cual:

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{dL}{L dt} = \frac{\tau}{L} = \frac{\tau}{I_G \omega}, \tag{11.264}$$

donde  $\omega_p$  se denomina velocidad angular de precesión. El eje del volante, entonces, en vez de inclinarse

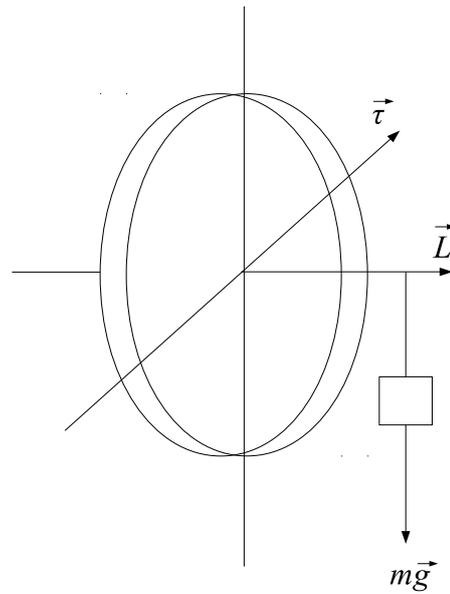


Figura 11.45: Giróscopo con una masa suspendida.

hacia abajo como podría parecer, comienza a girar con velocidad angular  $\omega_p$  alrededor de la dirección vertical.

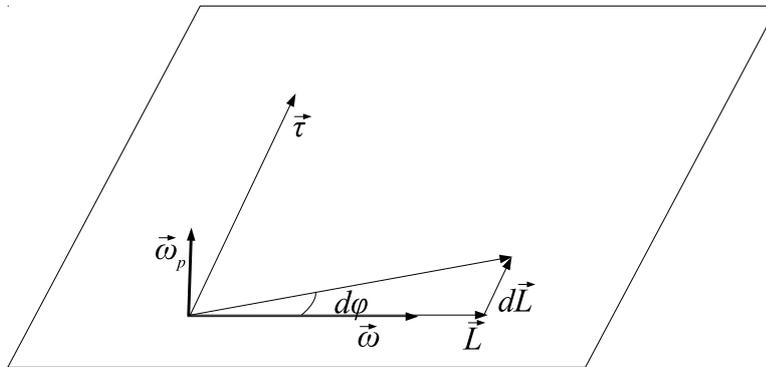


Figura 11.46: Precesión del giroscopo.

En realidad lo que ocurre es que la velocidad angular resultante es

$$\vec{\omega}_R = \vec{\omega} + \vec{\omega}_p . \quad (11.265)$$

Este vector  $\vec{\omega}_R$  no tendrá entonces la dirección de un eje principal de inercia, no podemos usar más que la velocidad angular es paralela al momento angular y la descripción del problema se complica, a menos que  $\omega_p \ll \omega$ . Cuando esta última condición no se cumple, si bien el vector  $\vec{L}$  precesa alrededor del eje vertical, los vectores  $\vec{\omega}_R$  y  $\vec{\omega}$  (y con este último, el eje del volante) realizarán un movimiento complicado denominado *nutación*. En particular, si el torque exterior aplicado es grande o la velocidad angular inicial  $\omega$  es pequeña, ocurre lo que esperaríamos: el eje del volante se inclina hacia abajo.

Sin embargo, es posible lograr que  $\omega_p \ll \omega$  mediante el uso de un motor eléctrico, por ejemplo. En este caso, el eje del volante se mantendrá estable, particularmente si se usa el giróscopo como se debe, es decir, sin tocar el eje del volante: si consideramos una velocidad de rotación  $\omega$  grande y un rozamiento despreciable en los ejes del giróscopo, el eje del volante se mantendrá siempre paralelo a sí mismo. Uno de los usos de este dispositivos es para orientación, particularmente en la navegación: en este caso, el giróscopo se denomina *girocompás*. Un girocompás es un giróscopo, cuyo eje (el eje del volante) se coloca paralelo al eje de la Tierra y es mantenido rotando a gran velocidad mediante un motor eléctrico. Por más que el explorador, el avión o el barco cambien su rumbo, el eje del girocompás siempre se mantendrá paralelo a sí mismo, de manera que su proyección horizontal siempre apuntará en la dirección sur-norte, lo que convierte al girocompás en una brújula no magnética. La proyección horizontal del eje del girocompás es un punto cuando su ubicación coincide con alguno de los polos terrestres; esto nos dice que el dispositivo no funciona en las zonas cercanas a los polos.

**Movimiento del trompo**

Un trompo es un cuerpo con geometría acimutal que puede rotar alrededor de su eje apoyado sobre uno de sus extremos bajo la acción de la fuerza gravitatoria. Consideremos un trompo de masa  $m$  y momento de inercia  $I$  respecto de su eje de simetría como el de la figura 11.47. El trompo gira alrededor de dicho eje apoyado sobre el punto  $P$ , formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal.

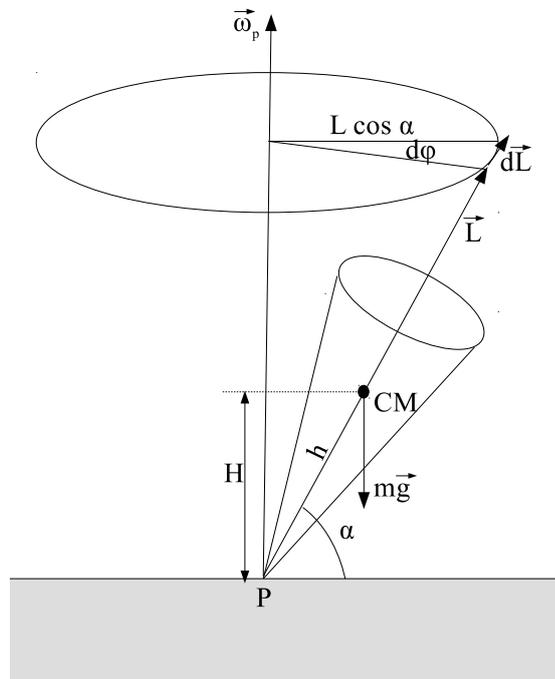


Figura 11.47: Movimiento del trompo.

Si efectuamos un análisis similar al realizado con el giróscopo, vemos que

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{dL}{L \cos \alpha dt} = \frac{\tau}{L \cos \alpha} = \frac{mgh \sin(90^\circ - \alpha)}{I \omega \cos \alpha}, \tag{11.266}$$

donde  $90^\circ - \alpha$  es el ángulo que forman los vectores peso y posición del centro de masa (medido desde

el punto  $P$ ). Por lo tanto tenemos:

$$\omega_p = \frac{mgh}{I\omega} . \quad (11.267)$$

Al igual que en el caso del giróscopo, esto vale siempre que  $\omega_p \ll \omega$ , es decir, cuando  $\omega$  coincide con un eje principal de inercia: el eje de simetría del trompo. Cuando esto no ocurre, el movimiento de precesión se combina con el de nutación, mucho más difícil de describir. La ecuación (11.267) nos dice que en la aproximación de precesión pura, la velocidad angular de precesión no depende de la inclinación del trompo.

# A

## Resolución alternativa del movimiento oscilatorio armónico

Existe una forma alternativa de obtener la función de movimiento correspondiente a la ecuación de movimiento de un cuerpo enganchado a un resorte, diferente a como hicimos al resolver la ecuación diferencial (8.134). Para ello utilizaremos el concepto de energía. Habíamos visto que la expresión de la energía para un cuerpo sobre el cuál está aplicada una fuerza elástica es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 . \quad (\text{A.1})$$

Despejando la velocidad obtenemos

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2} . \quad (\text{A.2})$$

Por lo tanto

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}} = dt . \quad (\text{A.3})$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \sqrt{\frac{k}{2E}}x$  e integrando, la ecuación anterior queda

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int dt . \quad (\text{A.4})$$

Resolviendo esta integral y escribiendo nuevamente en términos de la variable  $x$  tenemos

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsen \left( \sqrt{\frac{k}{2E}}x \right) = t + C . \quad (\text{A.5})$$

Despejando la expresión de  $x$  en función del tiempo,

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sen \left( \sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_0 \right) , \quad \text{donde } \phi_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}C . \quad (\text{A.6})$$

En el punto de máxima elongación ( $x = x_m$ ) la energía mecánica es totalmente elástica

$$\frac{1}{2}kx_m^2 = E . \quad (\text{A.7})$$

Despejando  $x_m$  tenemos

$$x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}}. \quad (\text{A.8})$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (A.6) y denominando  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  podemos escribir

$$x(t) = x_m \text{sen}(\omega t + \phi_0). \quad (\text{A.9})$$

## SECCIÓN A.1

# Movimiento oscilatorio amortiguado

Hemos visto que si tenemos un cuerpo unido a un resorte de constante elástica  $k$ , y lo liberamos desde una posición diferente a la de equilibrio, oscilará alrededor de esta posición con un movimiento oscilatorio denominado armónico simple. La función de movimiento dada en la ecuación (8.147) indica que el cuerpo nunca modificará su movimiento oscilatorio. Sin embargo, nuestra experiencia nos indica que en la práctica el cuerpo irá reduciendo la amplitud de las oscilaciones hasta detenerse. Esto se debe a que sobre el cuerpo, además de la fuerza elástica, existe la fuerza viscosa que el medio le ejerce, aunque despreciemos el posible rozamiento entre el resorte y la superficie sobre la que está apoyado. La ecuación de movimiento del cuerpo unido a un resorte que se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento o colgado verticalmente, será:

$$ma = -k(x - x_e) - D\eta v, \quad (\text{A.10})$$

donde hemos utilizado la ecuación (8.101) para la fuerza viscosa, debido a que el cuerpo no alcanza grandes velocidades. La ecuación de movimiento, expresada en términos de la coordenada  $x$ , es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_e) - D\eta \frac{dx}{dt}. \quad (\text{A.11})$$

Si llamamos  $u$  a la coordenada medida desde la posición de equilibrio ( $u = x - x_e$ ) la ecuación (A.11) queda

$$m \frac{d^2u}{dt^2} = -ku - D\eta \frac{du}{dt}; \quad (\text{A.12})$$

o bien,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad (\text{A.13})$$

donde

$$2\alpha = \frac{D\eta}{m} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad (\text{A.14})$$

aquí,  $\omega_0$  es la frecuencia angular a la que oscilaría el cuerpo en el vacío y  $\alpha$  está relacionado con el rozamiento del cuerpo con el fluido. Para poder determinar la función de movimiento del cuerpo debemos encontrar una función  $u(t)$  que satisfaga la ecuación (A.13). Proponemos como solución la función

$$u(t) = Ae^{\gamma t}, \quad \text{con } A = \text{cte}. \quad (\text{A.15})$$

Reemplazando esta función en la ecuación (A.13) resulta

$$A\gamma^2 e^{\gamma t} + 2\alpha A\gamma e^{\gamma t} + \omega_0^2 A e^{\gamma t} = 0; \quad (\text{A.16})$$

$$Ae^{\gamma t} (\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2) = 0. \quad (\text{A.17})$$

Entonces, para que la función  $u(t)$  dada en la ecuación (A.15) sea solución de la ecuación (A.13) se debe satisfacer que  $\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$ . Las soluciones a esta ecuación son:

$$\gamma_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{y} \quad \gamma_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{A.18})$$

Como cualquiera de estas dos posibilidades para  $\gamma$  permite encontrar una solución de la ecuación (A.13), la expresión más general es una combinación lineal de ambas soluciones:

$$u(t) = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}, \quad (\text{A.19})$$

donde las constantes  $A_1$  y  $A_2$  se determinan a partir de las condiciones iniciales del movimiento. Analicemos algunos casos particulares.

$$\text{a) } \alpha^2 - \omega_0^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{D\eta}{2m}} > \frac{k}{m}.$$

En este caso, la fuerza viscosa predomina sobre la fuerza elástica en el movimiento del cuerpo; las soluciones dadas en la ecuación (A.18) son reales y la función de movimiento del cuerpo es:

$$u(t) = e^{-\alpha t} \left( A_1 e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} \right) \quad (\text{A.20})$$

En esta situación, denominada *movimiento sobreamortiguado*, el cuerpo no oscila, sino que tiende a desplazarse hacia la posición de equilibrio. En la figura A.1 se muestra la función de movimiento para el caso particular en que la masa del cuerpo es 1 kg, la constante del resorte  $k = 100$  N/m y  $\alpha = 1,2\omega_0$ . La curva *a* corresponde a un cuerpo que para  $t = 0$ , está desplazado 0,1 m de la posición de equilibrio y es liberado a partir del reposo, mientras que la curva *b* corresponde a un cuerpo que para  $t = 0$  se encuentra en la posición de equilibrio con una velocidad de 2 m/s.

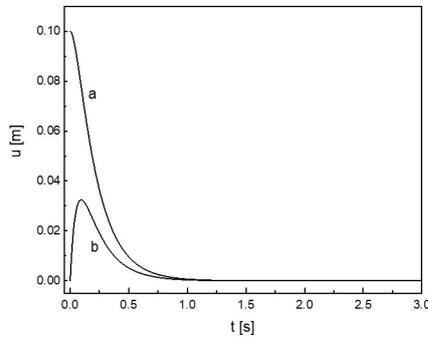


Figura A.1: Función de movimiento de un cuerpo cuyo movimiento es sobreamortiguado. a) Liberándolo desde fuera de la posición de equilibrio. b) Partiendo de la posición de equilibrio con velocidad mayor que cero.

$$\text{b) } \alpha^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{D\eta}{2m}} = \frac{k}{m}.$$

En este caso, la fuerza viscosa y la fuerza elástica son del mismo orden. Ahora la ecuación de movimiento (A.13) queda

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \alpha^2 u = 0. \quad (\text{A.21})$$

Como la ecuación (A.17) tiene una única solución real, la función de movimiento será

$$u(t) = A_1 e^{-\alpha t}. \quad (\text{A.22})$$

Sin embargo, es fácil comprobar que la función

$$u(t) = A_2 t e^{-\alpha t} \quad (\text{A.23})$$

también es solución de la ecuación (A.21). Entonces la solución más general es la suma de ambas soluciones

$$u(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} . \quad (\text{A.24})$$

La función de movimiento muestra que en esta situación, denominada *amortiguamiento crítico*, el cuerpo no oscila y simplemente se desplaza hasta llegar a la posición de equilibrio de manera similar a lo que ocurre en el caso sobreamortiguado. En la figura A.2 se muestran las funciones de movimiento para el caso de amortiguamiento crítico para las mismas condiciones del ejemplo mostrado en el caso sobreamortiguado. En la figura A.3 se muestra comparativamente las funciones de movimiento de los

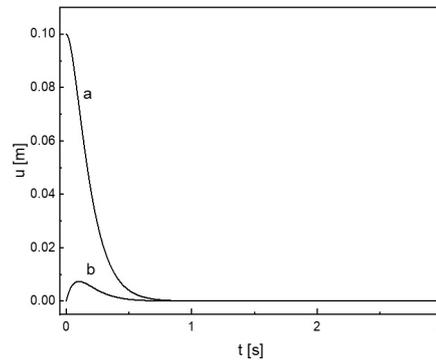


Figura A.2: Función de movimiento de un cuerpo cuyo movimiento corresponde al caso de amortiguamiento crítico. a) Liberándolo desde fuera de la posición de equilibrio. b) Partiendo de la posición de equilibrio.

casos sobreamortiguado y crítico. Cuanto más próximo es el valor  $\alpha$  a  $\omega_0$  más rápidamente retorna el cuerpo a la posición de equilibrio.

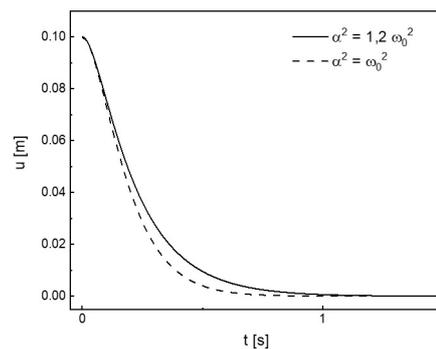


Figura A.3: Comparación entre las funciones de movimiento de los casos sobreamortiguado y crítico.

$$\text{c) } \alpha^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{D\eta}{2m}} < \frac{k}{m} .$$

En este caso las dos soluciones a la ecuación (A.17) son números complejos conjugados:

$$\gamma_1 = -\alpha - i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad , \quad \gamma_2 = -\alpha + i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad , \quad (\text{A.25})$$

y la función de movimiento, de acuerdo a la ecuación (A.19), es

$$u(t) = e^{-\alpha t} \left( A_1 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t} + A_2 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t} \right). \quad (\text{A.26})$$

Debido a que la coordenada del cuerpo debe ser un número real, en este caso las constantes  $A_1$  y  $A_2$  son números complejos. Denominando  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  podemos escribir la ecuación (A.26) como

$$u(t) = e^{-\alpha t} [B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \text{sen}(\omega_1 t)], \quad (\text{A.27})$$

donde

$$B_1 = A_1 + A_2 \quad \text{y} \quad B_2 = i(A_2 - A_1). \quad (\text{A.28})$$

Como la ecuación (A.27) describe la coordenada del móvil, las constantes  $B_1$  y  $B_2$  tienen que ser necesariamente números reales. Sabemos que podemos escribir

$$B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \text{sen}(\omega_1 t) = x_m \text{sen}(\omega_1 t + \phi_0). \quad (\text{A.29})$$

Entonces, la función de movimiento para este caso es

$$u(t) = x_m e^{-\alpha t} \text{sen}(\omega_1 t + \phi_0). \quad (\text{A.30})$$

Ahora el cuerpo oscilará con una frecuencia angular  $\omega_1$  y con una amplitud  $x_m e^{-\alpha t}$  que va disminuyendo con el tiempo. Este caso se denomina movimiento oscilatorio *subamortiguado*. En la figura A.4 se muestra un gráfico de la función de movimiento, suponiendo  $\alpha = 0,5\omega_0$ ,  $v(0) = 0$  y  $x(0) = 0,1$  m. Vemos que

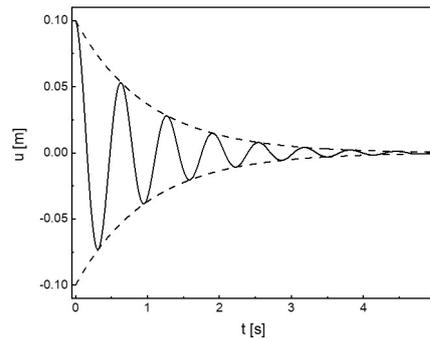


Figura A.4: Función de movimiento de un cuerpo con movimiento oscilatorio subamortiguado.

el fluido modifica la frecuencia angular de oscilación del cuerpo respecto a la que tendría en el vacío. En este caso el período  $T_1$  será

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0. \quad (\text{A.31})$$

Una aplicación práctica de estos conceptos es en la suspensión de un automóvil, que está constituida por un resorte que tiene en su interior un amortiguador. El amortiguador, como su nombre indica, es el encargado de amortiguar las oscilaciones del resorte. En general se intenta que el automóvil vuelva lo antes posible a su posición original y por lo tanto se trata de que trabaje en el régimen de amortiguación crítica.



# B

## Período del péndulo en función de la amplitud (grandes oscilaciones)

En la sección (8.9) estudiamos el movimiento de un péndulo ideal y resolvimos la ecuación de movimiento para el caso de pequeñas oscilaciones. Ahora nos abocaremos a la situación más general, en la que no es válido hacer la aproximación  $\sin(\theta) \simeq \theta$ .

Como puede verse en la ecuación (8.195), la energía mecánica de la masa del péndulo está dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos(\theta). \quad (\text{B.1})$$

Como  $v = \ell d\theta/dt$  podemos escribir

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgl \cos(\theta) = -mgl \cos(\theta_0), \quad (\text{B.2})$$

donde  $\theta_0$  es la máxima amplitud angular del péndulo. Entonces podemos despejar la velocidad angular

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} \quad (\text{B.3})$$

y escribir

$$dt = \pm \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}. \quad (\text{B.4})$$

Integrando a ambos lados de la igualdad podríamos encontrar la relación entre el tiempo y la posición angular del péndulo. Sin embargo esta integral solo se puede resolver de manera numérica.

Utilizaremos la ecuación (B.4) para determinar el período del péndulo en función de la amplitud angular, sin tener que hacer la aproximación de pequeñas amplitudes. Integrando la ecuación (B.4) en el intervalo correspondiente a un período, que corresponde a 4 veces el tiempo que demora el péndulo en recorrer desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \theta_0$ ,

$$\int_0^T dt = 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}. \quad (\text{B.5})$$

Como  $\cos(\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$  la ecuación (B.5) queda

$$T = \frac{2}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left[\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}\right]^2}}. \quad (\text{B.6})$$

Haciendo el cambio de variable

$$\beta = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}, \quad (\text{B.7})$$

la ecuación (B.6) resulta

$$T = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^1 \frac{2d\beta}{\cos(\theta/2)\sqrt{1-\beta^2}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\beta^2\sin^2(\theta_0/2)}}. \quad (\text{B.8})$$

La integral

$$K(v) = \int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta^2v^2)}} \quad (\text{B.9})$$

se denomina *integral elíptica completa de primera especie* y no tiene solución analítica cerrada. Sin embargo, se puede hacer un desarrollo en serie:

$$K(v) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 v^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 v^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 v^6 + \dots \right]. \quad (\text{B.10})$$

Es decir,

$$K(v) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right]^2 v^{2n}. \quad (\text{B.11})$$

Vemos que en la ecuación (B.8) podemos identificar una integral elíptica completa de primera especie con  $v = \sin(\theta_0/2)$ . Entonces podemos escribir

$$T(\theta) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right]^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^{2n}, \quad \text{donde } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (\text{B.12})$$

En la figura B.1 se muestra cómo varía el período del péndulo con la amplitud de oscilación. El cálculo se realizó con los 130 primeros términos de la sumatoria de la ecuación (B.12).

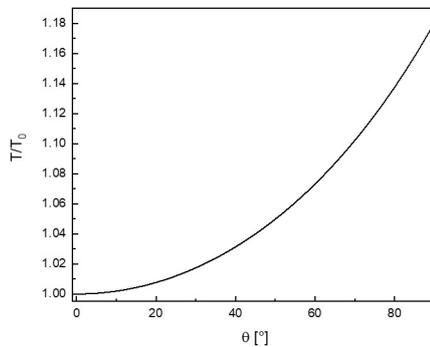


Figura B.1: Amplitud del péndulo en función de la amplitud

En la Tabla B.1 se puede comparar el período del péndulo calculado por diversos métodos. En la primera columna están los valores  $\theta_0$  y en las siguientes columnas se detallan los valores de  $T/T_0$ . El

método 1 es integrando numéricamente la integral elíptica, el método 2 es incluyendo los 130 primeros términos de la sumatoria de la ecuación (B.12) y el método 3 es tomando solo los 2 primeros términos de la sumatoria. Como puede verse es posible calcular con bastante precisión el período del péndulo utilizando solo algunos términos de la sumatoria. Si se tiene en cuenta solamente dos términos de la sumatoria para  $\theta_0 = \pi/2$  la diferencia con los otros métodos de cálculo es menor que el 2%.

Áng.	Mét. 1	Mét. 2	Mét. 3
0	1,0000	1,0000	1,0000
$\pi/6$ (30°)	1,0174	1,0174	1,0174
$\pi/4$ (45°)	1,0400	1,0400	1,0396
$\pi/3$ (60°)	1,0732	1,0732	1,0713
$\pi/2$ (90°)	1,1803	1,1803	1,1602

Tabla B.1:  $T/T_0$  integrando numéricamente la ecuación elíptica (Mét. 1), tomando los 130 primeros términos de la sumatoria (Mét. 2) y tomando solo los 2 primeros términos de la sumatoria (Mét. 3).