Práctico 0 - Rectas y planos

Definición 1. Sean $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$ vectores fijos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x_1} \neq 0$. Definimos la recta que pasa por $\mathbf{x_0}$ y generada por el vector $\mathbf{x_1}$, al conjunto

$$L = \{\mathbf{z} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{x_1} : t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{(ecuación vectorial de la recta).}$$

Si $\mathbf{x_0} \neq 0$, ¿asegura esto que la recta L no pasa por el origen? Además, decimos que dos rectas son paralelas si sus generadores lo son, i.e. L es paralela a $L_1 = \{\mathbf{y_0} + t\mathbf{y_1} : t \in \mathbb{R}\}$ si $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{y_1}$ son vectores colineales.

1. Dar la ecuación vectorial de las siguientes rectas:
- (a) Que pasa por $(-3, 0, 2)$ y es paralela a $(0, 3, -2)$.
- (b) Que pasa por los puntos $(-1, 5, 4)$ y $(0, 3, -2)$.
- (c) Definida por $x = 3t + 1$, $y = 5t - 2$, $z = 2t + 1$.
- (d) Que pasa por $(2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.
- (e) Que pasa por $(1, 3)$ y es paralela a la que pasa por $(-1, 4)$ y $(3, -2)$.
- (f) Que pasa por $(2, 0, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3, 0)$. ¿Es única?

Definición 2. Sean $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, y $\mathbf{x_2}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ son linealmente independientes. Se llama plano que pasa por $\mathbf{x_0}$, generado por los vectores $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, al conjunto

$$P = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{y} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{x_1} + s\mathbf{x_2} \text{ con } s, t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{(ecuación vectorial del plano } P\text{).}$$

El plano P debe interpretarse entonces como un plano que contiene al punto $\mathbf{x_0}$, y es paralelo a los vectores $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$.

2. Dar la ecuación vectorial de los siguientes planos:
- (a) Generado por $(-1, 0, 4)$, $(2, 3, -10)$ que contiene al punto $(2, 3, -5)$.
- (b) Generado por $(-1, 0, 4)$, $(2, 3, -10)$ que pasa por $(3, -3, 6)$. ¿Pasa este plano por el origen?
- (c) Que pasa por los vectores $(1, -1, 0)$, $(1, 2, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

3. Sea P el plano generado por $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ y que pasa por $\mathbf{x_0}$, y sea $\mathbf{N} \neq 0$ un vector ortogonal a $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$.
- (a) Probar que $\mathbf{x} \in P \iff (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{N} = 0$ (ecuación normal del plano).
- (b) Dar la ecuación normal del plano definido por
$$P = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{y} = u(1, 2, 0) + v(2, 0, 1) + (1, 0, 0) \text{ con } u, v \in \mathbb{R}\}.$$
- (c) Dar la ecuación normal del plano que pasa por $(1, -1, 1)$, $(-2, 0, 1)$, y $(-1, 1, 1)$.

4. Sea P el plano definido implícitamente por la ecuación $ax + by + cz + d = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ no simultáneamente nulos (ecuación general del plano).
- (a) Probar que $\mathbf{N} = (a, b, c)$ es un vector normal al plano.
- (b) ¿Qué condiciones debe cumplir d para que el plano P pase por el origen?
- (c) Dar la ecuación normal del plano definido por
$$3x - y + 4z = 3.$$
- (d) Dar la ecuación general del plano que pasa por $(1, 1, 1)$ y es generado por $(0, -1, 2)$ y $(1, 0, 3)$.
- (e) Dar la ecuación vectorial del plano definido implícitamente por la ecuación $2x + 3y + z = 1$.

5. Sean P_1 y P_2 los planos definidos por las siguientes ecuaciones generales
$$x + 2y + 3z = 4, \qquad 3x + 2y + z = 0.$$
Describir paramétricamente a la intersección de P_1 y P_2.