Práctico 1 - Funciones de varias variables

Nota: Los ejercicios con $\star$ son optativos.

1. Dibujar el conjunto de todos los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que:

(a) $\|(x,y)-(1,2)\| < 3$. (b) $2 < \|(x,y)-(1,2)\| \leq 3$. (c) $\|(x,y)-(1,2)\| = 3$.

(d) $\|(x,y)-(1,2)\| < -\frac{1}{2}$. (e) $x > y$. (f) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1$; a, b no nulos.

2. Dibujar los siguientes conjuntos:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = t(1,2),\ t \in \mathbb{R}\}$.
(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t(1,0,-1),\ t \in \mathbb{R}\}$.
(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq \frac{1}{4}\}$.
(d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 2,\ |z| \leq 3\}$.
(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1,\ |y| < 2,\ |z| \leq 3\}$.

3. Considerando los conjuntos definidos en los ejercicios **1.** y **2.**, responder las siguientes cuestiones (sin rigurosidad):

(a) Decidir si son abiertos, cerrados, ambas, o ninguna de las dos cosas.
(b) Identificar sus puntos interiores, de acumulación y su frontera
(c) Hallar su clausura.
(d) Decidir cuáles son compactos y cuáles no.

4. $\star$ Para los conjuntos definidos en **1.**(a), **1.**(b), **1.**(c), probar cuáles puntos son interiores, cuáles son de acumulación y cuáles son de frontera (con rigurosidad).

5. $\star$ Probar rigurosamente que el conjunto definido en **2.**(c) no es abierto, y que el de **1.**(e) no es cerrado.

6. Considerar la función $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

(a) Dibujar el dominio de f.
(b) Dibujar la imagen de f.
(c) Dibujar el gráfico de f.

7. Para cada una de las siguientes funciones lineales:

(a) Hallar el dominio.
(b) Describir y dibujar la imagen.
(c) Describir y dibujar el conjunto dado implícitamente por la ecuación $L(\mathbf{x}) = 0$, con $\mathbf{x}$ un vector de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

(i) $L(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. (ii) $L(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(iii) $L(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

8. Dibujar los conjuntos definidos explícitamente por:

(a) $z = 4-x^2-y^2$, (b) $z = x^2+y^2+x+5y$, (c) $z = x^2-36y^2$,

(d) $z = \sqrt{x^2+y^2}$, (e) $z = x+y$, (f) $z = \sqrt{1-2x^2-3y^2}$,

(g) $z = \operatorname{sen}(x)$, (h) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, (i) $z = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < |y|, \\ 0 & \text{si } |x| \geq |y|. \end{cases}$

9. Sea $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2-y^2\\2xy\end{pmatrix}$.

(a) Encontrar la imagen del segmento de recta $y = x$ entre (0,0) y (1,1).

(b) Encontrar el ángulo entre las imágenes de las rectas $y = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

(c) Hallar la imagen de la región definida por $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 < 1$.

10. Sea $f(x, y) = \big(x, y(1 + x^2)\big)$.

(a) ¿Cuáles son las imágenes de las rectas horizontales?

(b) ¿Cuál es la imagen de la recta $y = x$?

11. Dibujar los conjuntos definidos paramétricamente por las siguientes funciones:

(a) $f(t) = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad -\infty < t < \infty;$

(b) $f(t) = (2t, t), \quad -1 \leq t \leq 1;$

(c) $h(t) = (t, t, t^2), \quad -1 \leq t \leq 2.$

(d) $g(t) = \begin{pmatrix}2\cos(t)\\3\operatorname{sen}(t)\end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

(e) $g(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t), \quad -\infty < t < \infty.$ Ayuda: $\cos(t)^2 + \operatorname{sen}(t)^2 = 1.$

12. Dibujar los conjuntos definidos paramétricamente por las siguientes funciones:

(a) $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad -\infty < u, v < \infty.$$

(b) $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\cos(u)\operatorname{sen}(v)\\b\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)\\c\cos(v)\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}0 \leq u \leq 2\pi,\\0 \leq v \leq \frac{\pi}{2},\\a, b, c > 0.\end{cases}$$

13. Dibujar los conjuntos definidos implícitamente por:

(a) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0.$

(b) $(x^2 + y^2 + x)(x^2 + y^2 - 1) > 0.$

(c) $9z^2 + 6z - x^2 - 4y^2 = 0.$

(d) $x^2 + y^2 = 1.$

14. Dibujar los conjuntos definidos implícitamente por:

(a) $3x - 2y^2 - 6y + 7 = 0.$

(b) $(2x + y - 3)(x^2 + y^2 - 4) = 0.$

(c) $x + y = 1.$

(d) $(x + 2y + z - 1)(-x + 2y - z) = 0.$

(e) $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1.$

15. Encontrar las ecuaciones que corresponden a las ocho superficies etiquetadas del I al VIII en la Figura 1. Dar argumentos para justificar su elección.

(a) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1.$

(b) $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1.$

(c) $x^2 - y^2 + z^2 = 1.$

(d) $z = x^2 + 2z^2.$

(e) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1.$

(f) $y = 2x^2 + z^2.$

(g) $y^2 = x^2 + 2z^2.$

(h) $x^2 + 2z^2 = 1.$

(i) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1.$

(j) $y = x^2 - z^2.$

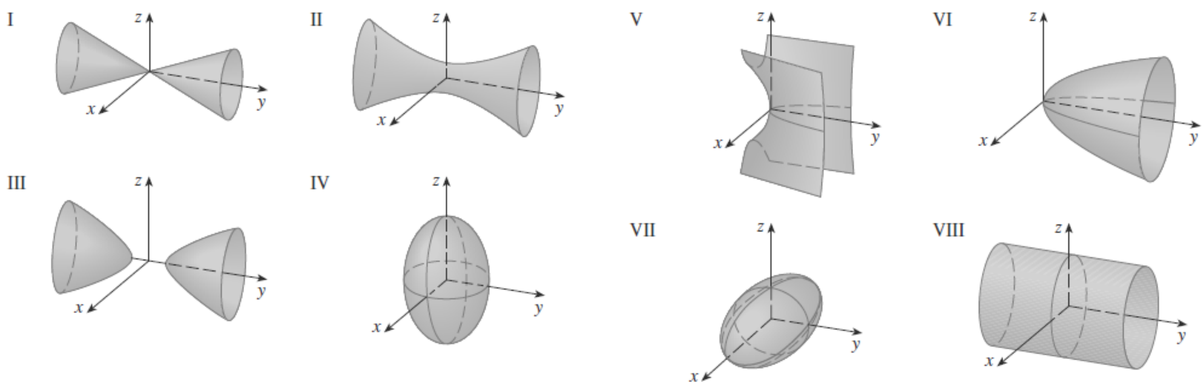


Figura 1. Superficies del ejercicio 15.

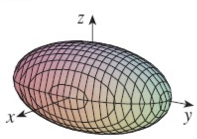
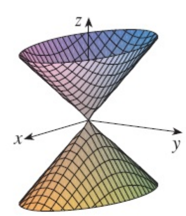
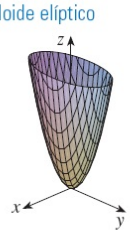
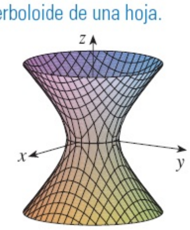
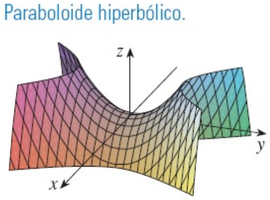
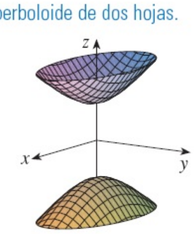
Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Todas las trazas son elipses. Si $a=b=c$, la elipsoide es una esfera.	Cono 	$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x=k$ y $y=k$ son hipérbolas si $k\neq 0$ pero son pares de líneas si $k=0$.
Paraboloide elíptico 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja. 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Las trazas verticales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide hiperbólico. 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas. Se ilustra el caso donde $c<0$.	Hiperboloide de dos hojas. 	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Las trazas horizontales en $z=k$ son elipses si $k>c$ o $k<-c$. Las trazas verticales son hipérbolas. Los dos signos menos indican dos hojas.

Figura 2. Superficies cuádricas