Práctico 2 - Límites y continuidad

1. Demostrar las siguientes desigualdades:
(a) $\|(a,b)\| \leq |a| + |b|$,
(b) $\|(x_1,\ldots,x_n)\| \geq |x_i| \quad \forall\, i = 1,\ldots,n$,
(c) $\|(x_1,\ldots,x_n)\| \leq \sqrt{n}\ \text{máx}\{|x_i|, i = 1,\ldots,n\}$.

2. Demostrar, usando la definición, que:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x+y^2) = 5$,
(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$,
(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x+y = x_0+y_0$,
(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} xy = x_0y_0$.

3. Determinar si tienen límite en $t=0$ las siguientes curvas:

(a) $\gamma(t) = \left(\frac{t-\cos(t)}{t}, t^3, e^{-1/t^2}\right)$,
(b) $\gamma(t) = \left(\sqrt{t+3}, \frac{t-1}{t^2-1}, \frac{\tan(t)}{t}\right)$,
(c) $\gamma(t) = \left(e^{-t}, \frac{t-1}{t+1}, \arctan(t)\right)$.

4. Determinar si tienen límite en $(0,0)$ las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^4+y^2}$,
(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{|x|+|y|}$,
(c) $f(x,y) = \dfrac{x}{|x|+|y|}$,
(d) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$,
(e) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$,
(f) $f(x,y) = \dfrac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$,
(g) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$,
(h) $f(x,y) = \dfrac{(y^2-x)^3}{y^4+x^2}$,
(i) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

Ahora en $(0,0,0)$, para las siguientes funciones:

(j) $g(x,y,z) = \dfrac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$,
(k) $g(x,y,z) = \dfrac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}$.

5. Describir el dominio y el conjunto de puntos en los cuales no tienen límite las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = y + \tan(x)$,
(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2-1}$,
(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\text{sen}(x)} + y & \text{si } x \neq 0, \\ 2+y & \text{si } x = 0, \end{cases}$
(d) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$.

6. Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{|x^3|+|y^3|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{3xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

7. Decidir en cuáles puntos no son continuas las siguientes funciones (tomar el mayor dominio posible para f):

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\|\mathbf{x}\|}{1-\|\mathbf{x}\|^2}$.

8. Estudiar el límite y la continuidad en el origen de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2/y & \text{si } y > 0 \ \wedge \ x^2 \leq y, \\ y/x^2 & \text{si } y > 0 \ \wedge \ x^2 > y, \\ f(x,-y) & \text{si } y < 0, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\{(y-x^2)(y-2x^2)\} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

donde $\operatorname{sgn}(t) = 1$ si $t \geq 0$ y $\operatorname{sgn}(t) = -1$ si $t < 0$.

9. Describir el dominio y el conjunto de puntos en los cuales no tienen límite las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = (y + \tan(x), \ln(x+y))$.

(b) $f(x,y) = \left(\dfrac{1}{y^2+1}, \dfrac{x}{y^2-1}\right)$.

10. Decidir en cuáles puntos no son continuas las siguientes funciones (tomar el mayor dominio posible para f).

(a) $f(x,y) = (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}, x^2+y^2)$.

(b) $f(u,v) = (3u-4v, u+8v)$.

(c) $f(u,v) = (v + \tan(u), u + \operatorname{sen}(v), v)$.

(d) $f(x,y) = \left(\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right)$.

11. $\star$ Determinar si la siguiente función tiene límite en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{|x-y|}.$$