Práctico 3 - Diferenciabilidad

1. Encontrar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = x^2 + x\operatorname{sen}(x+y)$,
(b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cos(x+y)$,
(c) $f(x,y) = \arctan(y/x)$,
(d) $f(x,y) = x^y$,
(e) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y h(t)\,dt$, h continua,
(f) $f(x,y,z,w) = \dfrac{x^2-y^2}{z^2+w^2}$.

2. Calcular f_{xy}, f_{yx} y verificar que coinciden para las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = xy + x^2y^3$,
(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

3. Demuestre que si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$. ¿Vale la recíproca?

4. (a) Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ existe para todo $1 \le i \le n$. Demuestre que f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si y sólo si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0.$$

(b) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0, \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostrar que f tiene matriz jacobiana en $(0,0)$, pero que no es diferenciable en ese punto. ¿Qué conclusión puede sacar?

5. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ no son diferenciables las siguientes funciones? Justifique.

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$,
(b) $g(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$,
(c) $h(x,y) = |x+y|$.

Además, aproximar a cada una de las funciones por una función afín en $\mathbf{x}_0 = (1,2)$ para (a), en $\mathbf{x}_0 = (1,0)$ para (b), y en $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ para (c).

6. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Decidir en qué puntos la función f es continua.
(b) Determinar dónde existen las derivadas parciales de f, y dónde resultan continuas.
(c) Decidir dónde f es diferenciable. ¿Qué conclusión puede sacar en relación al ítem (b)?

7. Para cada una de las siguientes funciones, encuentre la derivada direccional en el punto $\mathbf{x}_0$, en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$.
(a) $f(x,y,z) = xyz$; $\mathbf{u} = (\cos\alpha\operatorname{sen}\beta, \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, \cos\beta)$; $\mathbf{x}_0 = (1,0,1)$.
(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$; $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; $\mathbf{x}_0 = (1,1)$.
(c) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$; $\mathbf{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$; $\mathbf{x}_0 = (1,0)$.

8. Demuestre que si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{u}$ es una dirección unitaria dada, entonces

$$\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

9. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2-y^2} & \text{si } x\neq\pm y,\\ 0 & \text{si } x=\pm y.\end{cases}$$

(a) Estudiar la existencia de las derivadas direccionales $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$, para todo $\mathbf{u}$ unitario.

(b) Analizar la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$.

10. Demuestre que la función f definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

tiene derivada direccional en todas las direcciones unitarias en el punto $(0,0)$, pero no es diferenciable en $(0,0)$.

11. (a) Sea f diferenciable en $\mathbf{x}_0$ tal que si $w=f(x,y)$, la derivada direccional de w en $\mathbf{x}_0=(1,2)$ en la dirección $\mathbf{u}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es $2\sqrt{2}$ y en la dirección $\mathbf{u}_2=(1,0)$ es -3. ¿Cuál es la derivada direccional de w en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$?

(b) Ahora sea f diferenciable en $\mathbf{x}_0=(a,b)$, tal que se conocen las derivadas direccionales de f en $\mathbf{x}_0$ en las direcciones $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. ¿Puedo conocer las derivadas direccionales en $\mathbf{x}_0$ en cualquier dirección? ¿Qué condición sobre $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ me permite hacerlo?

12. Sea $P:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $P(x,y,z)=(x,y)$. Demuestre que P es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ y encuentre la matriz de su diferencial en $(1,1,1)$.

13. Sea $f(x,y)=\begin{pmatrix}x^2-y^2\\ 2xy\end{pmatrix}$. Hallar su derivada en los siguientes puntos: (a,b), $(1,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

14. Hallar la diferencial de cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados:

(a) $f(x,y)=x^2+y^2$ en $(1,1)$.

(b) $f(t)=(\operatorname{sen} t,\cos t)$ en $t=\pi/4$.

(c) $f(u,v)=\begin{pmatrix}u\cos v\\ u\operatorname{sen} v\\ v\end{pmatrix}$ en $(u,v)=(1,\pi)$.

15. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ no son diferenciables las siguientes funciones? ¿Por qué?

(a) $f(x,y)=\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2},\ x^2+y^2\right)$.

(b) $g(x,y)=(\sqrt{x^2-y^2},x+y)$.

(c) $h(x,y)=\begin{cases}\left(x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right),x^2+y^2\right) & \text{si } x\neq 0,\\ (0,x^2+y^2) & \text{si } x=0.\end{cases}$

Además, aproximar a $f(x,y)$ por una función afín en el punto $(1,2)$, y a $h(x,y)$ en el punto $(1,0)$.

16. Sea $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}) = 0\}$, donde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable contenida en S (i. e. $F(\gamma(t)) = 0$ para todo t). Probar que $\nabla F_{\gamma(t)}$ es perpendicular a $\gamma'(t)$ para todo t.

17. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, su gráfico puede definirse implícitamente como la superficie de nivel $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}) = 0\}$, donde $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.
   (a) Muestre que $\nabla F = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$, el cual es un vector nunca nulo.
   (b) Encuentre el vector normal y el plano tangente al gráfico de $f(x,y) = xy + ye^x$ en $(1,1)$.

18. Dadas las siguientes funciones, encuentre una representación explícita para el plano tangente al gráfico de f en el punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$, y una representación paramétrica para la recta normal al mismo, que pasa por el punto de tangencia.
   (a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ en $\mathbf{x}_0 = (1/2,\ 1/2,\ 1/\sqrt{2})$.
   (b) $f(x,y) = x^2y^2$ en $\mathbf{x}_0 = (1,2,4)$.
   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ en $\mathbf{x}_0 = (0,0,1)$.

19. Si la temperatura en cada punto (x,y,z) de la bola sólida de radio 3 centrada en $(0,0,0)$ es dada por $T(x,y,z) = yz + zx + xy$, encontrar la dirección en la cual T crece más rápidamente en $(1,2,2)$.

20. $\star$ Sea $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{-(n-2)}$. Demuestre que $f_{x_1x_1} + \cdots + f_{x_nx_n} = 0$.

21. $\star$ Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Calcule $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$. ¿Qué deducimos del resultado?

22. $\star$ Sea f dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Probar que f admite derivadas direccionales en el origen en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, pero que sin embargo f no es continua en el origen.

23. $\star$ Supongamos que la función $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^3}$ representa la altura de una montaña en la posición (x,y). Estamos parados en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano xy son $(1,0)$. ¿En qué dirección deberíamos caminar para escalar más rápido?