1. Encontrar $\dfrac{df}{dt}$ para:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad x = t, \quad y = t^2.$
(b) $f(x,y) = x\,y, \quad x = 1 - \sqrt{t}, \quad y = 1 + \sqrt{t}.$
(c) $f(x,y) = x/y, \quad x = e^t, \quad y = e^{2t}.$

2. (a) Si $g(x,y) = e^{x+y}$ y $f'(0) = (1,2)$, calcular $F'(0)$, donde $F(t) = g(f(t))$ y $f(0) = 0$.
(b) Si $f(x,y,z) = \operatorname{sen} x$, $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, encuentre $g'(\pi)$, donde $g(t) = f(F(t))$.

3. Sean $f(u,v) = e^{uv}\operatorname{sen}(u^2 + v^2)$, $g(u,v,w) = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$. Dadas

$$u(x,y) = x + y, \quad v(x,y) = xy, \quad w(x,y) = x - y + 1,$$

calcular las derivadas parciales de las funciones

$$f(u(x,y), v(x,y)) \quad \text{y} \quad g(u(x,y), v(x,y), w(x,y)),$$

utilizando la regla de la cadena.

4. Si $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\operatorname{sen}\theta \\ r \end{pmatrix},$$

hallar $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ usando la regla de la cadena. Comprobar el resultado por sustitución directa.

5. Considerar las funciones

$$f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = w.$$

(a) Hallar la diferencial de $F \circ f$ en (a,b).
(b) Hallar $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

6. Dadas

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + xy + 1 \\ y^2 + 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ 2u \\ v^2 \end{pmatrix},$$

encontrar la matriz de la diferencial de $g \circ f$ en $\mathbf{x}_0 = (1,1)$.

7. Sean f y g funciones vectoriales definidas por

$$f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\operatorname{sen} v \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} u > 0, \\ -\pi/2 < v < \pi/2, \end{cases}$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix}, \text{ con } x \neq 0.$$

(a) Encontrar la matriz jacobiana de $g \circ f$ en (u,v).
(b) Encontrar la matriz jacobiana de $f \circ g$ en (x,y).

8. Sea $f(x,y)$ una función a valores reales tal que

$$f_x(2,1)=3, \qquad f_y(2,1)=-2, \qquad f_{xx}(2,1)=0,$$
$$f_{xy}(2,1)=1, \qquad f_{yx}(2,1)=1, \qquad f_{yy}(2,1)=2.$$

Sea $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(u,v)=(u+v,uv).$$

Hallar $\dfrac{\partial^2(f\circ g)}{\partial u\partial v}$ en $(1,1)$.

9. Encuentre el desarrollo de Taylor de tercer grado de $(u+v)^3$, alrededor de:
(a) $(u_0,v_0)=(0,0)$,
(b) $(u_0,v_0)=(1,2)$.

10. Encuentre la mejor aproximación de segundo grado de la función $f(x,y)=xe^y$ cerca del punto $(x_0,y_0)=(2,0)$.

11. Calcular el desarrollo de Taylor de segundo grado de xe^{x+y} en $(x_0,y_0)=(0,0)$,
(a) calculando las derivadas,
(b) por sustitución.

12. Si $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}$, usar el desarrollo de Taylor de f para calcular $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)$.

13. Hallar el polinomio de Taylor de grado $2n$ de la función $f(x,y)=\dfrac{1}{1+xy}$ en el $(0,0)$. ¿Qué ocurre con el de grado n?

14. Probar que $(0,0,0)$ es un punto crítico de $f(x,y,z)=\cos(x^2+yz)$, y analizar si es extremo relativo o no.

15. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y decidir si allí la función tiene un máximo local, un mínimo local o ninguno de los anteriores.

(a) $f(x,y)=x^2y^2$,
(b) $f(x,y)=x\,\mathrm{sen}(y)$,
(c) $f(x,y)=x^4+y^4$,
(d) $f(x,y)=x^2-xy-y^2+5y-1$,
(e) $f(x,y)=(x-y)^4$,
(f) $f(x,y)=(x+y)e^{-xy}$,
(g) $f(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$,
(h) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$.

16. Encuentre los máximos y mínimos de las siguientes funciones:
(a) $f(x,y)=x+y$ en el cuadrado de vértices $(\pm1,\pm1)$.
(b) $f(x,y,z)=x+y+z$ en la región $x^2+y^2+z^2\le 1$.
(c) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ en la región $(x-2)^2+y^2\le 1$.
(d) $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}xy$ en la región $x^2+2y^2\le 1$.
(e) $f(x_1,\dots,x_n)=x_1+\cdots+x_n$ en la región $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$.

17. Hallar los puntos más lejanos al origen y que están en la curva

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ \mathrm{sen}\, t\\ \mathrm{sen}(t/2)\end{pmatrix}.$$

18. Encuentre el valor máximo de la función $x(y+z)$ dado que $x^2+y^2=1$ y $xz=1$.

19. Una caja rectangular sin tapa debe tener una superficie con un área de 32 unidades cuadradas. Encuentre las dimensiones que le darán volumen máximo.

20. Encuentre la distancia mínima en $\mathbb{R}^2$ entre la elipse $x^2+2y^2=1$ y la recta $x+y=4$. Indicación: considerar el cuadrado de la distancia como función de cuatro variables.

21. Los hiperplanos $x+y-z-2w=1$ y $x-y+z+w=2$ se cortan en un conjunto $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}^4$. Hallar el punto de $\mathcal{F}$ más cercano al origen.

22. ⋆ Demuestre, resolviendo un problema adecuado de mínimo, que si $a_k > 0\ \forall\, k = 1,\dots,n$, entonces

$$(a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

23. ⋆ Supóngase que un científico tiene razón en pensar que dos cantidades x e y están relacionadas linealmente, esto es, $y=mx+b$, por lo menos aproximadamente, para ciertos valores de m y b. El científico lleva a cabo un experimento y colecciona datos en forma de puntos $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$, los cuales grafica luego. Estos puntos no se encuentran exactamente en una línea recta, por lo que desea encontrar constantes m y b de manera que la recta $y=mx+b$ "se ajuste" a los puntos lo mejor posible. Sea $d_i = y_i-(mx_i+b)$ la desviación vertical del punto (x_i,y_i) con respecto a la recta. El método de los cuadrados mínimos determina los valores de m y b de manera que se minimice $\sum_{i=1}^n d_i^2$, la suma de los cuadrados de estas desviaciones. Demuestre que, de acuerdo a este método, la recta de mejor ajuste se obtiene cuando

$$\begin{aligned} m\sum_{i=1}^n x_i + bn &= \sum_{i=1}^n y_i \qquad \text{y} \\ m\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i, \end{aligned}$$

de manera que la recta se encuentra resolviendo estas dos ecuaciones en las incógnitas m y b.

24. ⋆ Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

(a) Encuentre máximo y mínimo de la función $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ sujeta a las restricciones $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ y $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$.

(b) Deduzca de (a) la desigualdad de Schwarz:

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \qquad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n.$$

Pruebe además que vale la igualdad si y sólo si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son paralelos.