1. Las **coordenadas polares** en el plano se definen por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

(a) Encontrar $\mathrm{d}_{\mathbf{u}} T$ y su inversa en aquellos $\mathbf{u} = (r,\theta)$ donde existan.
(b) Calcular T^{-1} explícitamente, y comparar $\mathrm{d}_{T(\mathbf{u})} T^{-1}$ y $[\mathrm{d}_{\mathbf{u}} T]^{-1}$ en los puntos correspondientes.

2. Dibuje las siguientes curvas dadas en coordenadas polares:
(a) $r = \theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$.
(b) $r(\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta) = \pi/2$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$.
(c) $r = \pi/2\cos\theta$, $\pi \le \theta \le 3\pi/2$.

3. ⋆ Si $z = f(x,y)$ es diferenciable y $(x,y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, probar que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

4. Las **coordenadas esféricas** en $\mathbb{R}^3$ se definen por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\cos\theta \\ r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ r\cos\phi \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ 0 < \phi < \pi, \\ 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

(a) Hallar $\mathrm{d}_{\mathbf{u}} S$ en los puntos $\mathbf{u} = (r,\phi,\theta)$ donde exista.
(b) Calcular S^{-1} explícitamente.

5. Use las coordenadas esféricas para describir la región en $\mathbb{R}^3$ definida por $x > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

6. ⋆ Dibuje las curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$ expresadas en coordenadas esféricas:
(a) $r = 2$, $0 \le \theta \le \pi/4$, $\pi/4 \le \phi \le \pi/2$.
(b) $1 \le r \le 2$, $\theta = \pi/2$, $\phi = \pi/4$.
(c) $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $\phi = \pi/4$.

7. Dados $a > 0$ y $b > 0$, las **coordenadas elípticas** en el plano están determinadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(r,\theta) = \begin{pmatrix} ar\cos\theta \\ br\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Calcular explícitamente T^{-1}, y el jacobiano de T.

8. Dados $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, las **coordenadas elipsoidales** en $\mathbb{R}^3$ están determinadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} ar\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \\ br\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ cr\cos\phi \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ 0 < \phi < \pi, \\ 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

(a) Graficar para el caso $a = 1$, $b = c = 2$.
(b) Calcular explícitamente T^{-1}, y el jacobiano de T.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y, xy + y).$$

(a) Demostrar que existe un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1) \in U$, un entorno $V \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(-7, 2) \in V$ y una inversa para f, $f^{-1} : V \to U$, C^1 tal que $f^{-1}(-7, 2) = (1, 1)$.

(b) Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 5$ y $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calcular $\frac{\partial(g \circ f^{-1})}{\partial \mathbf{v}}(-7, 2)$.

10. Si

$$\begin{cases} x = u + v + w, \\ y = u^2 + v^2 + w^2, \\ z = u^3 + v^3 + w^3, \end{cases}$$

calcule $\frac{\partial v}{\partial y}$ en la imagen $(x, y, z) = (2, 6, 8)$ de $(u, v, w) = (1, 2, -1)$.

11. Sea $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$. Observar que identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ de manera que $(x, y) \longleftrightarrow z = x + iy$ entonces $f(x, y)$ se corresponde con la función $g(z) = z^2$.

(a) Mostrar que para todo punto $\mathbf{x}_0$, excepto $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, la restricción de f a algún entorno abierto de $\mathbf{x}_0$ tiene inversa.

(b) Mostrar que si no se restringe el dominio, f no tiene inversa.

(c) Si f^{-1} es la inversa de f en un entorno de $(1, 2)$, calcular la transformación afín $A(x, y)$ que mejor aproxima a f^{-1} cerca de $f(1, 2) = (-3, 4)$.

(d) Si $w = (-3.2, 4.1)$ calcular $u = A(w)$ y comprobar que $f(u) \approx w$.

12. Probar que la función diferenciable

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, x) \\ f(x, y, z) + g(x, y, z) \end{pmatrix}$$

no puede tener nunca una inversa diferenciable.

13. Probar que existen funciones inversibles en un entorno de un punto $\mathbf{x}_0$ sin tener la derivada inversible en $\mathbf{x}_0$.

14. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que $f'(0)$ es inversible pero que f no tiene inversa en ningún entorno de 0. ¿Por qué no se cumple el teorema de la función inversa?

15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2.$$

(a) Demostrar que $f(x, y, z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y, z)$ en el punto $(1, 1, 1)$.

(b) Encontrar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$.

16. (a) Probar que las ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = x^2 + y + 2z + u - v \\ 0 = xy + z - u + 2v - 1 \\ 0 = yz + xz + u^2 + v \end{cases}$$

definen x, y y z como funciones de u y v cerca de $(x, y, z, u, v) = (1, 1, -1, 1, 1)$.

(b) Hallar la matriz de la diferencial de la función definida implícitamente por

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = f(u,v), \quad \text{en} \quad (u,v) = (1,1).$$

17. Considerar la ecuación $(x-2)^3 y + xe^{y-1} = 0$.

(a) ¿Está y definida implícitamente como función de x en un entorno de $(x, y) = (1, 1)$?

(b) ¿En un entorno de $(0, 0)$?

(c) ¿En un entorno de $(2, 1)$?

18. La hipótesis de que $F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ tenga inversa en el teorema de la función implícita no es condición necesaria para que la ecuación $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ defina una única función diferenciable f tal que $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$. Probar esto tomando $F(x, y) = x^9 - y^3$ y $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

19. $\star$ El punto $(x, y, t) = (0, 1, -1)$ satisface las ecuaciones

$$xyt + \operatorname{sen}(xyt) = 0, \quad x + y + t = 0.$$

¿Están x e y definidas implícitamente como función de t en un entorno de $(0, 1, -1)$?

20. $\star$ Probar que bajo las hipótesis del teorema de la función implícita existe una única función f tal que $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$ en un entorno de $\mathbf{x}_0$. (Ayuda: usar la función $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ y aplicar el teorema de la función inversa).

21. $\star$ Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Probar que si existe $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\mathbf{p}) = 0$ y $\nabla f(\mathbf{p}) \neq 0$, entonces f se anula en infinitos puntos de $\mathbb{R}^n$.