Límites de funciones en varias variables

Análisis Matemático III - 2017

FaMAF - U.N.C.

Una herramienta útil para demostrar que determinados límites valen lo que valen.

Lema del Sándwich: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $\mathbf{x_0}$ un punto de acumulación de Ω. Sean $f, g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones tales que para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ vale que $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$. Supongamos que:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} h(\mathbf{x}) = L.$$

entonces se cumple que:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} g(\mathbf{x}) = L.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis tenemos que existen los límites para f y h, por lo que, por definición, existen δ_1 y δ_2 positivos tales que:

$$\text{si } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta_1 \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon \Longrightarrow L - \varepsilon < f(\mathbf{x}) < L + \varepsilon,$$

$$\text{si } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta_2 \Rightarrow |h(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon \Longrightarrow L - \varepsilon < h(\mathbf{x}) < L + \varepsilon.$$

Sea $\delta < \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, si $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta$, se tiene que:

$$L - \varepsilon < f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}) < L + \varepsilon.$$

De donde se obtiene que $|g(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$, que era lo que queríamos probar. □

Ahora una herramienta (muy útil!) para probar que una determinada función no tiene límite en un punto.

Aproximación por curvas: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea (x_0, y_0) un punto de acumulación de Ω. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$. Supongamos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que cumple que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$. Entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f(x, g(x)) = L.$$

Demostración. Fijemos un $\varepsilon > 0$. Queremos ver que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x, g(x)) - L| < \varepsilon$. Por hipótesis existe un $\delta_1 > 0$ tal que:

$$\text{si } 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon, \tag{1}$$

o equivalentemente, si $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_1^2$ entonces $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Además, en la definición de límite en x_0 para g, tomando $\varepsilon = \frac{\delta_1}{2} > 0$, existe un $\delta_2 > 0$ tal que:

$$\text{si } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - y_0| < \frac{\delta_1}{2}.$$

Tomo $\delta < \text{mín}\{\delta_2, \frac{\delta_1}{2}\}$. Luego, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|g(x) - y_0| < \frac{\delta_1}{2}$. Se tiene que $0 < (x - x_0)^2 + (g(x) - y_0)^2 < \frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\delta_1^2}{4} < \delta_1^2$, de donde se concluye por (1) que $|f(x, g(x)) - L| < \varepsilon$, como se buscaba. □

Lista de desigualdades útiles.

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, se cumple que $|\operatorname{sen}(x)| < |x|$.
2. Si a y b son números reales, se cumple que $2ab \leq a^2 + b^2$.
3. Si a y b son números reales ***positivos***, se cumple que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
4. Si a, b y c son números reales ***positivos***, se cumple que: $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$.

Nota: Las últimas dos desigualdades se conocen como *desigualdad de medias aritmética y geométrica*, y se pueden generalizar para n variables.

Demostración.
Daremos una ayuda para probar la primera y la cuarta. La segunda y la tercera son sencillas y quedan como ejercicio.

Para la primera desigualdad, considerar la función $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$. Probar que es creciente (derivar!) y por lo tanto $f(x) > f(0)$ para todo x positivo. Luego se obtiene la desigualdad buscada.

Para la cuarta, renombrar $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, y ver que todo equivale a probar que $3xyz \leq x^3 + y^3 + z^3$ con $x, y, z > 0$. Utilizar que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$. Como $x + y + z > 0$, faltaría ver que $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$ para todos $x, y, z > 0$. Para esto último, considerar $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ que vale por ser suma de cuadrados, expandir todo y simplificar. □

Ejemplos:

1. Decidir si existe el siguiente límite, y en caso de respuesta afirmativa, calcularlo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \operatorname{sen}(y)}{x^4 + y^2}.$$

Solución: Usaremos el lema del sándwich. Para esto, notemos que:

$$0 \leq \left|\frac{x^3 \operatorname{sen}(y)}{x^4 + y^2}\right| = \frac{|x|^3 |\operatorname{sen}(y)|}{x^4 + y^2} \overset{(1)}{\leq} \frac{|x|^3 |y|}{x^4 + y^2} \overset{(2)}{\leq} \frac{|x|^3 |y|}{2x^2 |y|} = \frac{|x|}{2}.$$

Donde en (1) se usó la primera desigualdad de la lista, y en (2) se usó la segunda, con $a = x^2$ y $b = |y|$ (en el denominador!).

Ahora, notemos que de la cadena de desigualdades mostrada, se deduce que:

$$-\frac{|x|}{2} \leq \frac{x^3 \operatorname{sen}(y)}{x^4 + y^2} \leq \frac{|x|}{2}.$$

Finalmente, es muy sencillo ver que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{|x|}{2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{2} = 0$ (queda como ejercicio!). Se sigue que el límite pedido es 0 usando el lema del sándwich.

2. Decidir si existe el siguiente límite, y en caso de respuesta afirmativa, calcularlo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{y}.$$

Solución: Llamemos $f(x, y)$ a la expresión a la que estamos tomando límite. Veremos que el límite no existe. Supongamos, con la idea de llegar a un absurdo, que el límite efectivamente existe y vale L. Consideremos la función g_1 definida por $g_1(x) = x$ (la recta $y = x$). En este caso $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Es evidente que se cumple que $\lim_{x\to 0} g_1(x) = 0$. Luego, al aproximarnos por esta curva:

$$\lim_{x\to 0} f(x, g_1(x)) = L \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x, x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{x} = L \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = L.$$

De la última igualdad se ve que $L = 0$. Sin embargo, al considerar g_2 definida por $g_2(x) = x^2$, que también verifica que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} f(x, g_2(x)) = L \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x, x^2) = L \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{x^2} = L \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = L.$$

Sabemos que el último límite vale 1, y por lo tanto $L = 1$. Es decir, $L = 0$ y $L = 1$. Absurdo, que provino de suponer que el límite de la función existía.