

SEEMI 2013 MINICURSO FORMACIÓN DE IMÁGENES DE RADIODIAGNÓSTICO: PROCESOS FÍSICOS Y MODELADO COMPUTACIONAL

Mauro Valente^{†*}

[†] Instituto de Física E. Gaviola CONICET & Universidad Nacional de Córdoba; Argentina

11 -12-13 de Diciembre 2013



Facultad de Matemática, Astronomía y Física - FaMAF
Universidad Nacional de Córdoba

*Contacto e-mail: valente@famaf.unc.edu.ar

PROGRAMA Y CONTENIDO

MÓDULO I: Introducción al transporte de radiación

1. Ecuación de transporte de Boltzmann: Interacciones físicas y conceptos básicos.
2. Radiagnóstico: Efectos de radiación primaria y de dispersión.

MÓDULO II: Técnicas de modelado computacional para transporte de radiación

1. Descripción de soluciones analíticas para la ecuación de transporte.
2. Métodos determinísticos para formación de imágenes de radiodiagnóstico.
3. Descripción de soluciones numéricas para la ecuación de transporte.
4. Métodos estadísticos para formación de imágenes de radiodiagnóstico: El método Monte Carlo.

MÓDULO III: Formación y procesamiento de imágenes de radiodiagnóstico

1. Formación de imágenes de radiografía digital.
2. Formación de imágenes de mamografía digital.
3. Formación de imágenes de tomografía computada.
4. Formación de imágenes metabólicas.

Índice

1.. Módulo I: Introducción al transporte de radiación	5
1.1.. Transporte de radiación e interacciones	5
1.2.. Estado de fase en transporte de radiación	6
1.3.. Bases para el cálculo de observables a partir de la ecuación de transporte de radiación	7
1.3.1.. Densidad de fluencia energética	7
1.4.. Interacción partículas-materia a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann	8
1.4.1.. Périda energéticas en interacciones de partículas cargadas	9
1.4.2.. Efectos angulares por interacciones de partículas cargadas	9
1.4.3.. Determinación de distancias de interacción	9
1.5.. Interpretación de la interacción de fotones con la materia	10
1.6.. Breve descripción de interacciones entre rayos X y materia	10
1.7.. Breve descripción de interacciones entre partículas cargadas y materia	12
1.8.. Penetración y alcance de partículas cargadas en la materia	13
2.. Modelado computacional para transporte de radiación	16
2.1.. Técnicas de modelado computacional para transporte de radiación	16
2.2.. Cálculo determinista de transporte de radiación e interpretación	17
2.3.. Interpretación en marco estricto de transporte radiativo	18
2.4.. Transporte estocástico: reformulación integral de la ecuación de transporte	19
2.5.. El método Monte Carlo: estimadores y eficiencia en transporte de radiación	21
2.6.. Aplicación de de simulación Monte Carlo	23
2.6.1.. Cálculo-estimación del número π por medio de técnicas Monte Carlo	23
2.6.2.. Integrales definidas por medio del método Monte Carlo	24
2.7.. Modelado de procedimientos médicos con radiación ionizante	28
2.8.. El método Monte Carlo aplicado al transporte de radiación	28
2.8.1.. Tracking de partículas con el método Monte Carlo	28
2.8.2.. Modelado de colisiones e interacciones con el método Monte Carlo	30
2.8.3.. Ejemplo básico artificial de transporte con el método Monte Carlo	31
2.9.. Introducción y parámetros en la simulación del transporte de radiación	32
2.10..Setups virtuales	32
2.11..Consideraciones para la simulación de imágenes morfológicas	33
2.12..Radiodiagnóstico para estructuras anatómicas	33
2.13..Simulación Monte Carlo de radiografía, mamografía y tomografía	34
2.14..Información de estructuras internas: Tomografía por rayos X	35
2.15..Morfología por reconstrucción tomográfica	36
2.16..Aplicaciones en radiodiagnóstico anatómico y metabólico	38
2.17..Nociones sobre requerimientos de <i>matching</i> y fusión de imágenes anatómicas y metabólicas	39

SEEMI 2013
MÓDULO I

1.. Módulo I: Introducción al transporte de radiación

El *Capítulo 1.* es un breve resumen dedicado a presentar el formalismo básico y común a las áreas de transporte de radiación. Los modelos que describen los procesos de transporte y colisión están fundamentados en teorías de transporte, entre las cuales la de Boltzmann es la más aceptada y utilizada.

1.1.. Transporte de radiación e interacciones

En términos generales, la ecuación de transporte de Boltzmann es la representación de la distribución estadística de partícula en un entorno fuera del equilibrio. Se aplica al estudiar de varios fenómenos físicos como flujo de calor o carga eléctrica en medios materiales pudiendo determinar cantidades como conductividades térmica y eléctrica.

Como primer paso se hace referencia al transporte de fotones, lo que luego puede generalizarse por medio de desarrollos análogos que incluyan propiedades específicas del tipo de radiación de interés.

La transferencia, absorción y dispersión de energía por parte de la radiación hacia un medio material se determinan por medio de la ecuación de transporte de Boltzmann y modelos específicos de interacción. Existen diferentes expresiones y aproximaciones para la ecuación de transporte de Boltzmann, pudiendo describirse análogamente tanto en forma diferencial como integral.

El objetivo es determinar el flujo total de radiación Φ_T o bien la radiancia de partículas R emitida por una fuente y transportada en un determinado medio material. Bajo ciertas aproximaciones, las cantidades escalares Φ_T y R satisfacen:

$$R(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{d^2 \Phi_T}{dA d\Omega \cos(\theta)} \approx \frac{\Phi_T}{A \Omega \cos(\theta)} \quad (1)$$

donde \vec{r} y $\vec{\Omega}$ son los vectores posición y dirección de movimiento de la partícula que atraviesa el área A formando un ángulo θ con el versor normal a la superficie de A .

Desde un punto de vista matemático, la ecuación de transporte de radiación de Boltzmann es expresada como una ecuación difusiva integro-diferencial, cuya formulación clásica para observables caracterizados por función de distribución Θ dependientes de la posición \vec{r} es:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} \Big|_{int} - \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial \vec{r}} \frac{\vec{p}}{m} + \frac{\partial \Theta}{\partial \vec{p}} \cdot \vec{V} \quad (2)$$

donde \vec{p} y m son momento y masa de la partícula, t indica el tiempo, \vec{V} es el campo de fuerzas y el subíndice *int* hace referencia al modelo específico de interacción/colisión entre las partículas del sistema.

En este sentido, hay diferentes modos de interacción entre el flujo de partículas y el medio material. A este propósito es útil introducir la probabilidad de de ocurrencia de una cierta interacción (i), definida físicamente por la sección eficaz σ_i , referida al i -ésimo mecanismo de interacción. Por tanto, la probabilidad total σ_T de ocurrencia de una interacción, de cualquier tipo, se obtiene por medio de la suma de todas las contribuciones por parte de cada uno de los procesos de interacción. A nivel macroscópico, la sección eficaz total macroscópica Σ_T se define mediante:

$$\Sigma_T \equiv N \sigma_T \quad (3)$$

donde N es la densidad de centros de dispersión por unidad de volumen, *i.e.* $[N] = cm^{-3}$.

Los procesos de interacción incluyen absorción y dispersión o *scattering*, por tanto:

$$\Sigma_T = \Sigma_{abs} + \Sigma_{sca} \quad (4)$$

donde Σ_{abs} y Σ_{sca} indican componentes de absorción y *scattering*, respectivamente.

La distribución de la cantidad de colisiones n a lo largo de la trayectoria recorrida (*path*) así como la distanciamedia entre colisiones sucesivas λ se obtienen de:

$$\frac{dn}{ds} = -\Sigma n \Rightarrow n(s) = n(0) e^{-\Sigma s} \Rightarrow \lambda \equiv \frac{\int_0^\infty s e^{-\Sigma s} ds}{\int_0^\infty e^{-\Sigma s} ds} = \frac{1}{\Sigma_T} \quad (5)$$

La distancia media entre colisiones sucesivas obtenida a partir de esta distribución λ es el camino libre medio o *mean free path* y queda determinado por medio de la sección eficaz total.

1.2.. Estado de fase en transporte de radiación

1

Una partícula de momento p con longitud de onda $\frac{h}{p}$ transportada en un medio material de espesor x tal que $x \ll \frac{h}{p}$ estará completamente determinada (en su espacio de fase) por la posición \vec{r} , la dirección de movimiento $\vec{\Omega}$, la energía E y el tiempo t .

Sea $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ la densidad angular de partículas en estados de fase (7D) $[(x, y, z); (\theta, \phi); E; t]$, que representa la densidad de partículas en el volumen $d\vec{r}$ alrededor de \vec{r} , viajando en direcciones $d\vec{\Omega}$ entorno a $\vec{\Omega}$ con energía E a tiempo t .

El flujo vectorial angular de partículas $\vec{\Psi}$ puede obtenerse a partir de la densidad angular y la velocidad \vec{v} de las partículas:

$$\vec{\Psi} \equiv \vec{v} N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \quad (6)$$

El flujo angular escalar (o simplemente flujo angular) Ψ se obtiene a partir de la expresión ??, y sus unidades son $cm^{-2} s^{-1} str^{-1}$.

Integrando el flujo angular Ψ en todas direcciones para valores dados de E , \vec{r} y t se obtiene una cantidad proporcional a la tasa de población-ocupación del estado (\vec{r}, R, t) , a veces denominado tasa de “reacción” o “creación”. A partir de esto, puede determinarse el flujo escalar (o simplemente flujo) Φ_T dado por:

$$\Phi_T \equiv \int_{4\pi} \Psi d\Omega \quad (7)$$

La tasa de ocurrencia de eventos (por unidad de volumen), en términos de la probabilidad de cada j-ésimo tipo de interacción Λ queda determinada por:

$$\Lambda \equiv \Sigma_j \Phi_T \quad (8)$$

La fluencia angular se obtiene a partir de la integral en el tiempo del flujo, y representa el número total de partículas por unidad de área por unidad de energía atravesando el punto \vec{r} con dirección $d\Omega$ entorno a Ω .

Así mismo, puede calcularse la fluencia escalar (o fluencia total) $J(\vec{r}, E, t)$ que resulta de integrar la fluencia angular para todas las direcciones posibles:

$$J = |\vec{J}(\vec{r}, E, t)| = \int_{4\pi} \vec{v} N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega} \cdot \hat{n} \quad (9)$$

¹Tomado de “Notas de Física Médica” M. Valente 2013.

donde $|\vec{J}|$ es la corriente de partículas y \hat{n} representa un versor en dirección arbitraria para el cálculo de la fluencia escalar J .

A partir de esto, puede plantearse la ecuación de transporte de radiación de Boltzmann, dada por:

$$\frac{1}{|\vec{v}|} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi - S = \iint_{4\pi} \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) dE' d\vec{\Omega}' \quad (10)$$

donde S es la fuente de radiación y $K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$ es el operador del kernel que cambia el estado de fase de las “coordenadas” primadas $(\vec{\Omega}', E')$ a las sin primar $(\vec{\Omega}, E)$ debido a los procesos de *scattering* en la posición \vec{r} .²

1.3. Bases para el cálculo de observables a partir de la ecuación de transporte de radiación

Para un sistema estacionario *steady state* puede aplicarse el teorema de Liouville³ en una aproximación clásica⁴ para mostrar que un sistema de partículas evoluciona según la mecánica clásica cuya la densidad de estados se representa en un espacio de las fases constante $\mathfrak{R}^3 \wp^3$, donde \mathfrak{R} y \wp refieren a los espacios de posición \vec{r} y de momento \vec{p} , respectivamente.

En estado de equilibrio térmico la probabilidad de ocurrencia de un estado se determina por medio de la estadística de Fermi-Dirac para la cual la función de distribución del sistema homogéneo depende únicamente de la energía E .

La expresión ?? de la ecuación de Boltzmann puede simplificarse para situaciones en que el término de interacciones $\frac{\partial \Theta}{\partial t}|_{int}$ sea proporcional a la diferencia entre la función de distribución Θ en presencia de efectos externos \vec{V} y la función de distribución en equilibrio térmico. Esta condición es equivalente a asumir que una vez cesen los efectos externos, el sistema retorna al equilibrio, debido a las interacciones, con velocidad determinada (proporcional específicamente) por la desviación inicial respecto de la condición de equilibrio. Como se mencionó, a partir de estas consideraciones puede calcularse cantidades como tiempo de relajación (inclusive pesado por energía de sistema), conductividad térmica/eléctrica y difusividad, entre otros.

1.3.1. Densidad de fluencia energética

Como ejemplo de la aplicación del formalismo para el estudio de observables, se considera el caso de la energía E , que es típicamente la cantidad más importante a fines dosimétricos ya que determina la dosis absorbida.

Sea \bar{E} el valor de expectación de la energía E , sin considerar la componente de energía en reposo, portada por todos los *quanta* que constituyen el haz N_q . La fluencia energética Ψ se define por:

$$\Psi \equiv \frac{d\bar{E}}{dA} \quad (11)$$

Entonces, para un haz monocromático se tiene $\bar{E} = E_0 N_q$, como se espera. Y, por tanto, $\Psi = E_0 \Phi$.

²Nótese que el efecto de la interacción es un cambio en la energía y en la dirección de movimiento!

³Aplicado a sistemas conservativos.

⁴válido también para mecánica Hamiltoniana.

Para el estudio de la evolución de sistemas debido a perturbaciones externas, es conveniente considerar el tiempo t_0 en ausencia de fluencia energética $\Psi(t_0) = 0$ y el tiempo t_{max} que se corresponde con el máximo de fluencia energética $\Psi(t_{max}) = \Psi_{max}$.

La tasa de fluencia energética Υ puede calcularse para cualquier tiempo t en el intervalo (t_0, t_{max}) se calcula a partir de:

$$\Upsilon = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{E}}{dA} \right) \Rightarrow \Psi(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Upsilon(t') dt' \quad (12)$$

Por tanto, manteniendo constante la tasa de fluencia energética $\Psi(t_0, t) = \Upsilon(t - t_0)$ resulta que la tasa de fluencia energética, también denominada densidad de flujo energético, Υ es proporcional a la densidad de flujo Φ si el haz es monocromático $\Upsilon = E_0\Phi$.

De modo que para determinar observables, experimentalmente, por medio de mediciones a tiempo t en la posición \vec{r} , en términos de la energía (cinética) E y la dirección de movimiento $\vec{\Omega}$ dado por los ángulos polar y azimutal (θ, ϕ) , resulta que la densidad de flujo diferencial es $\dot{\Upsilon}(E, \theta, \phi)$ y la densidad de flujo se obtiene de:

$$\Upsilon = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^E \Upsilon(E', \theta', \phi') \sin(\theta') d\theta' d\phi' dE' \quad (13)$$

En unidades de inversa de área y tiempo, $cm^{-2}s^{-1}$, típicamente.

1.4.. Interacción partículas-materia a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann

Esta sección presenta, de modo extramamente escueto, los resultados principales para los fenómenos de interacción debido al paso de partículas atravesando un medio material.

Cada uno de los modelos se obtiene de la aplicación de la ecuación de transporte, sujeto a las consideraciones necesarias en cada caso⁵. En particular, para cada tipo de radiación y material con el que se interactúa, el problema consiste en describir las propiedades de la fuente de radiación (el término S en la expresión ??) e introducir los modelos físicos que determinan el operador *kernel* $K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$ a partir de las funciones de distribución de probabilidades asociadas a cada tipo de proceso de interacción posible. Para el caso de radiación primaria, el término S representa completamente la fuente, mientras que para la radiación secundaria, *scattering* en general, la producción misma de partículas debido a las interacciones de radiación primaria.

Como resultado de las interacciones de partículas cargadas de velocidad $v = \beta c$ se producen pérdidas energéticas en cada colisión ΔE , y correspondiente pérdida de energía por unidad de camino recorrido $\frac{dE}{dy}$, donde y es la dirección a lo largo del *track*.

Una vez se realizan los modelos de interacción, se determinan las funciones de distribución de probabilidades que dan cuenta de las características estadísticas de los procesos físicos, que quedan determinados por las secciones eficaces σ .

A partir de las expresiones ?? y ?? puede calcularse el número medio de colisiones con pérdida energética entre E_{loss} y $E_{loss} + \Delta E_{loss}$ al recorrer la distancia δy :

$$\frac{dE}{dy} = \rho_e \delta y \frac{d\sigma}{dE} dE \quad (14)$$

donde ρ_e es la densidad electrónica.

La determinación del operador *kernel* $K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$ requiere del conocimiento de los mecanismos por los cuales se produce en cambio de energía y las deflexiones angulares.

⁵No se presentan las derivaciones específicas a partir de la ecuación de transporte, ya que está fuera del alcance de este curso.

1.4.1.. Périda energéticas en interacciones de partículas cargadas

Cuando las interacciones ocurren con los electrones orbitales de los átomos blanco, se producen en general ionizaciones, excitación atómica o bien excitación colectiva. En medios absorbentes delgados las colisiones que se producen presentan varianzas grandes.

Para partículas cargadas pesadas (de carga Z_p y masa molar M_p) interactuando con un material homogéneo constituido por átomos de número atómico Z_A y masa molar M_A , la pérdida de energía por colisiones pueden obtenerse a partir de la teoría de Bethe-Bloch, que permite determinar el *stopping power* a lo largo del *track* ($\frac{dE}{dy}$):

$$\frac{dE}{dy} = 4r_e^2 \rho m_e c^2 \frac{Z_A}{M_A} \frac{Z_p^2}{\beta^2} \times \left[\frac{1}{2} \ln(2m_e c^2 \beta^2 W_{max} \gamma^2) - \beta^2 - \ln(I) - \frac{C}{Z_A} - \frac{\delta}{2} \right] \quad (15)$$

donde r_e y m_e son el radio clásico y masa de electrón en reposo, respectivamente.

Los últimos tres términos entre corchetes representan los efectos de potencial medio de ionización I , coeficiente de apantallamiento nuclear C y efecto de densidad δ .

1.4.2.. Efectos angulares por interacciones de partículas cargadas

Las partículas cargadas sufren deflexiones angulares al atravesar e interactuar con un medio material. Existen desviaciones pequeñas debidas a interacciones de tipo Coulombianas en el *scattering* con el campo nuclear.⁶

El efecto de dispersión angular por efecto Coulombiano es representado por la teoría de Molière, produciendo distribuciones de deflexiones prácticamente Gaussianas $P(\theta)$, de acuerdo con:

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi\theta^{*2}} e^{-\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^2\right]} d\Omega$$

$$P(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta^*} e^{-\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_{plano}}{\theta^*}\right)^2\right]} d\theta_{plano} \quad (16)$$

donde θ^* es la media de la distribución Gaussiana y θ_{plano} representa la proyección planar del ángulo polar que forma el ángulo sólido $d\Omega$ y se trabaja en la aproximación a bajo ángulo, de modo que $\theta^2 \approx \theta_x^2 + \theta_y^2$, para las proyecciones planares en los ejes x e y , siendo θ_x^2 y θ_y^2 independientes pero respetando la misma distribución.

1.4.3.. Determinación de distancias de interacción

La distancia atravesada dentro del medio material se denomina *radiation length* X , típicamente medida en gcm^{-2} .

A modo de ejemplo, para el caso particular de electrones de energías altas, la pérdida de energía dominante es por medio de radiación de Bremsstrahlung y producción de pares. En este caso, la *radiation length* para estos dos procesos se denomina X_0 y se calcula a partir de la teoría de Tsai:

$$X_0 = \frac{B}{4\alpha r_e^2 N_{Av}} \frac{1}{Z^2 [L_{rad} - f(Z)] + ZL'_{rad}} \quad (17)$$

⁶Para el caso particular de haces de hadrones, las interacciones fuertes contribuyen también a los efectos de dispersión múltiple (*multiple scattering*.)

Los parámetros L_{rad} y L'_{rad} son coeficientes que pueden determinarse para cada tipo de átomo. Por otro lado, la función parametrizada $f(Z)$ se obtiene de:

$$f(Z) = (\alpha Z)^2 \quad (18)$$

$$\left[[1 + (\alpha Z)^2]^{-1} + 0,202 - 0,0369(\alpha Z)^2 + 0,008(\alpha Z)^4 - 0,002(\alpha Z)^6 \right]$$

Para el caso de moléculas, se utilizan modelos de composición efectiva, y la *radiation length* $X_{0,mol}$ de compuestos formados por componentes con pesos relativos q_k , puede calcularse de modo aproximado utilizando:

$$\frac{1}{X_{0,mol}} = \sum_k \frac{q_k}{X_k} \quad (19)$$

1.5.. Interpretación de la interacción de fotones con la materia

Los fotones al atravesar la materia interactúan tanto con los electrones como con los núcleos de los átomos de modo tal que se el la cantidad de fotones que arriba a una dada distancia de penetración z (flujo en la posición z) se atenúa exponencialmente, disminuyendo la intensidad de la radiación a medida que aumenta el espesor atravesado. Sin embargo, en la descripción de atenuación exponencial nunca llega a anularse el flujo. La atenuación por unidad de espesor depende de la energía de los fotones y de las propiedades del material irradiado (peso atómico, densidad electrónica (número de electrones por unidad de volumen), densidad másica, etc).

La figura 1 muestra un esquema gráfico simplificado del efecto de interacción de fotones con medios materiales.

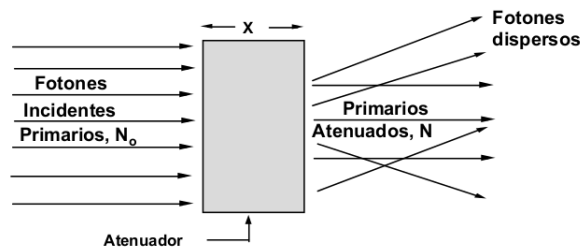


Figura 1. Esquema de atenuación/transmisión de fotones en medios materiales.

1.6.. Breve descripción de interacciones entre rayos X y materia

Dependiendo del tipo de material y de la energía de los fotones incidentes se producirán unos procesos u otros. Para la radiación ionizante estos procesos son, básicamente:

- **Dispersión coherente o Thomson-Rayleigh:**

El fotón sólo se dispersa sin provocar ionización ni excitación. La probabilidad de ocurrencia (sección eficaz) es de importancia para energías bajas.

- Efecto fotoeléctrico:
El fotón es absorbido completamente, transmitiendo toda su energía cinética al material. No se produce radiación dispersa. Para aplicaciones radiológicas, se caracteriza por provocar un alto contraste en la imagen.
- Dispersión Compton:
El fotón se dispersa pero cede parte de su energía. Se produce un “deterioro” del contraste radiológico (ruido de fondo) debido a este efecto. Como consecuencia se produce radiación dispersa.
- Producción de pares:
El fotón cede (y “desaparece”) toda su energía. El efecto neto es la producción dos fotones secundarios, consecuencia de la aniquilación electrón-positrón, que es en sí el efecto primario. Este efecto puede ocurrir para valores de energía cinética altos, típicamente fuera del interés para aplicaciones en radiología.
- Reacciones nucleares:
Los fotones con energía cinética alta (superiores a 10 MeV) pueden inducir reacciones nucleares en la materia. A efectos prácticos implica que para energías altas deben considerarse efectos de los neutrones secundarios originados en dichas reacciones.

En la figura 2 se muestra un diagrama resumiendo las probabilidades de ocurrencia de los diferentes efectos de interacción entre la radiación electromagnética ionizante y la materia.

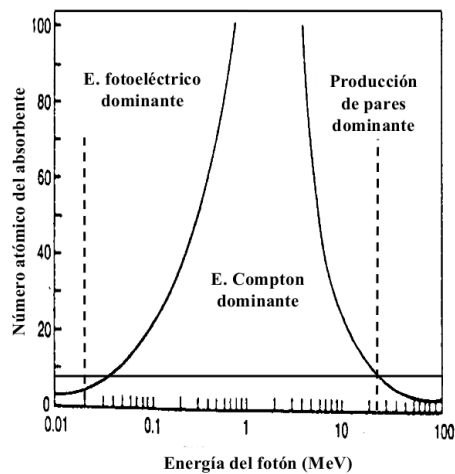


Figura 2. Efectos de interacción entre fotones y medio irradiado.

Por último, la figura 3 resume esquemáticamente los procesos de ocurrencia durante la interacción de rayos X con la materia.

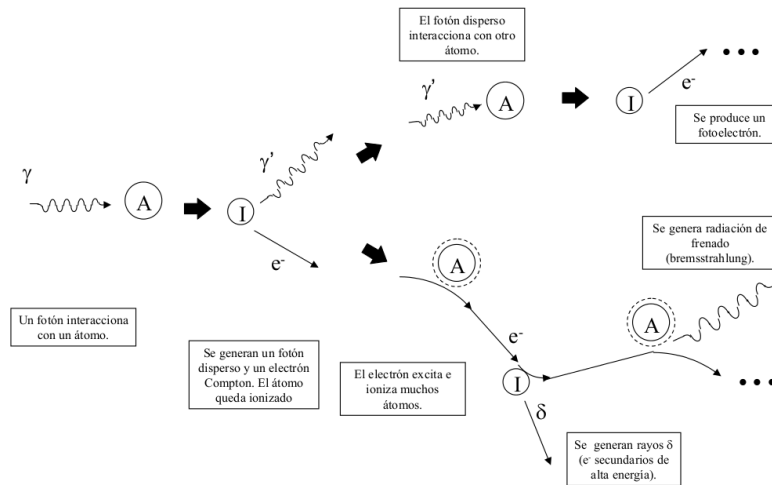


Figura 3. Resumen esquemático de los procesos de interacción.

1.7.. Breve descripción de interacciones entre partículas cargadas y materia

Las partículas cargadas, específicamente los electrones en particular, interactúan de una forma mucho más “intensa” con la materia que los fotones debido a su masa y a su carga eléctrica, dando lugar a interacciones Coulombianas con los electrones y los núcleos del material.

Cuando los electrones inciden contra un medio material pierden progresivamente su energía cinética a lo largo de la trayectoria debido a las sucesivas interacciones que van sufriendo con las partículas cargadas del medio (electrones y núcleos). Análisis similares aplican a todo tipo de radiación constituida por partículas cargadas.

La interacción de un electrón en el medio material se denomina colisión y supone una transferencia de energía a la materia. Este es el origen último de todos los efectos producidos por las radiaciones ionizantes sobre la materia. Las colisiones se clasifican en elásticas, inelásticas y radiativas.

- Colisión elástica:

Sólo se produce una desviación de la trayectoria del electrón incidente y una pequeña (despreciable) cesión de energía al medio material.

- Colisión inelástica:

El electrón invierte parte de su energía en “arrancar” un electrón del átomo, ionizándolo, y cederle parte o toda su energía cinética al electrón “ejectado”. Puede ocurrir que el electrón incidente no ceda suficiente energía para provocar ionización pero si para excitar el átomo. Posteriormente el átomo se desexcitará. Tanto el electrón primario (incidente) como el secundario (“impactado”/ejectado) podrán seguir ionizando y excitando otros átomos.

- Colisión radiativa:

Si el electrón incidente pasa lo suficientemente cerca de otro electrón de las capas atómicas o del núcleo atómico, sufrirá una gran pérdida de energía cinética que se emite en forma de radiación electromagnética (fotones) que se denomina radiación de frenado *Bremsstrahlung*. Como el electrón incidente podrá tener diferente energía cinética, ya que podrá “provenir” de otras colisiones, y además la energía que pierda en esta colisión dependerá de la distancia a

la que pase del núcleo, los fotones emitidos tendrán diferentes energías, constituyendo lo que se denomina “espectro de *Bremsstrahlung*”.

De hecho, este fenómeno es la base física de la producción de rayos X donde se hace incidir un haz de electrones sobre un material de alto número atómico *Z*.

1.8.. Penetración y alcance de partículas cargadas en la materia

La energía cinética de una partícula cargada que incide contra un medio material va disminuyendo progresivamente debido a las sucesivas interacciones que va sufriendo, hasta que prácticamente se anula y la partícula es absorbida. La trayectoria muy probablemente no será rectilínea. Cuando se considera un haz de electrones se puede definir el alcance como la profundidad máxima (en línea recta) que alcanzan. Existen otras definiciones como alcance terapéutico y alcance efectivo.

La figura 4 muestra un esquema de las trayectorias de electrones al penetrar un material.

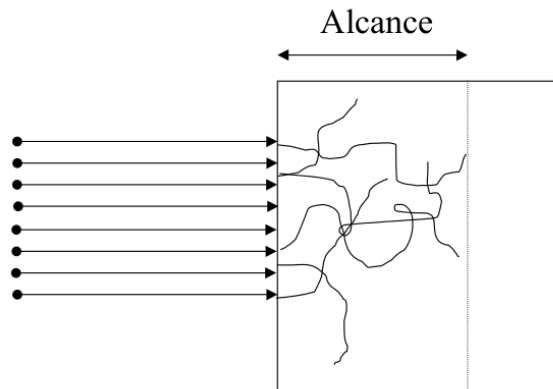


Figura 4. Penetración de electrones (partículas cargadas) en un medio material.

Programa *tracking* @ LIIFAMIR[ⓧ]
GRÁFICA

DOWNLOAD FROM: <http://www.famaf.unc.edu.ar/valente/Teaching.html>

SEEMI 2013
MÓDULO II

2.. Modelado computacional para transporte de radiación

El Capítulo 2. es una brevísima exposición sobre los principales mecanismos de interacción entre la radiación y la materia. La presentación se focaliza en radiación ionizante de uso médico en radiología. A partir del conocimiento de los mecanismos de interacción, se indica cómo es posible introducir técnicas de modelado computacional.

Existen diferentes metodologías para describir y plantear el problema del transporte de radiación en casos específicos.

En particular, se concentrará la atención en exponer muy brevemente sólo los métodos más comúnmente empleados, que se basan en la ecuación radiativa de transporte, de modo directo (1), implementan conceptos de modelos regidos por ecuaciones difusivas y la descripción de Fokker-Plank, basada en un enfoque de carácter cuántico.

2.1.. Técnicas de modelado computacional para transporte de radiación

En el caso particular que se estudiará en el presente curso, el interés está en los procesos físicos involucrados en la interacción de rayos X de radiodiagnóstico, con medios materiales de interés biológico.

Si se consideran las configuraciones típicas, y los procesos más probables en las geometrías usuales en radiodiagnóstico, resulta que la radiación primaria proviene de la fuente S que en este caso se trata del haz de rayos X utilizado.

Los procesos de interacción suceden dentro del paciente y el haz emergente, determinado por la ecuación de transporte de Boltzmann, formado tanto por radiación primaria (proveniente de la fuente S) y radiación de *scattering* generada por interacciones dentro del paciente, llega en definitiva al sistema de detección para formar la imagen radiológica.

Según la energía del haz de la fuente S , y las propiedades de absorción/dispersión, así como de las dimensiones físicas del paciente, resultará que la mayor parte del flujo emergente se corresponderá con la componente primaria o de *scattering*.

Incorporando los modelos de interacción radiación-materia que corresponden a fotones con energías de kilovoltaje, típicas de radiodiagnóstico, tejidos biológicos y para dimensiones típicas de pacientes, resulta que en el flujo emergente la componente de radiación primaria es prácticamente todo el flujo, existiendo contribuciones del orden del 2% por parte del *scattering*. Por tanto, la descripción del transporte de la componente primaria del flujo emergente proporciona una buena aproximación del flujo de radiación que alcanzará el detector para dar lugar a la formación de la imagen.

Para modelar el transporte de radiación primaria, utilizando la ecuación de transporte de Boltzmann en la expresión ??, se introducen algunas aproximaciones a fin de facilitar la resolución del problema aplicable a las condiciones propias del proceso radiológico típico.

La primera condición es considerar el problema en estado estacionario, ya que se admite el equilibrio del flujo incidente/interactuante/emergente. De este modo, se tiene que se anula el primer término de la expresión ??, ya que $\frac{\partial}{\partial t} \Psi = 0$.

Suponiendo que el transporte se realiza, principalmente, en una dirección, denominada z , el segundo término en la expresión ?? resulta $\Omega \cdot \vec{\nabla} = \frac{d}{dz}$.

El problema así planteado presenta simetría azimutal, por tanto: $\iint_{4\pi} dE' d\vec{\Omega}' = \int dE' 2\pi \int \sin(\theta) d\theta$.

Si el haz emergente está compuesto, casi exclusivamente por radiación primaria, ésta debe haber atravesado el material (paciente) prácticamente sin colisiones, es decir, que la integral aplicada al operador del *kernel* $\int dE' 2\pi \int \sin(\theta) d\theta K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \sim \mathbf{0}$ (operador nulidad).

Por lo tanto, la ecuación de transporte de Boltzmann se reduce a:

$$\frac{d}{dz} \Psi^* - S = 0 \tag{20}$$

Para Ψ^* a lo largo del eje z .

además, la fuente de radiación S es el flujo emitido por una fuente de modo tal que emergen rayos *quasi* paralelos con distribución *quasi* uniforme del frente onda, considerado plano y homogéneo. Es decir, $S = \Psi_{source}(z) = \Psi^*$.

A partir de la expresión anterior es inmediato que $\Psi^*(z) = \Psi(z=0)e^{-cz}$, conocida como ecuación de Lambert-Beer y describe la conocida relación de atenuación exponencial por parte de la radiación al atravesar un medio material. El análogo de este proceso a nivel microscópico es la penetración cuántica de la barrera de potencial, cuya solución coincide, como es de esperar.

De este modo, se obtiene a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann una expresión significativamente útil para describir, de modo aproximado, el comportamiento de los procesos de interacción en el ámbito de radiología. Bajo estas aproximaciones, se asume que las contribuciones de *scattering* son despreciables, que el haz de radiación proviene de una fuente que emite luz en un frente de onda plano paralelo uniforme y en fase, así como que el medio irradiado es homogéneo e isotrópico.

En definitiva, la relación encontrada, gracias a las relaciones unívocas descritas al inicio del capítulo, permite cuantificar flujo, fluencia (si se conocen las características energéticas del haz) y demás cantidades vinculadas. Por ejemplo, la intensidad del haz transmitido I satisface:

$$I(z) = I(z=0) e^{-\int dE dz \mu} = I(0) e^{-\int dE \mu(E) \Delta z} = I(0) e^{-\mu(E_0) \Delta z} \tag{21}$$

donde la última igualdad es válida para haces monocromáticos y μ se denomina coeficiente de absorción lineal.

2.2.. Cálculo determinista de transporte de radiación e interpretación

La interpretación conceptual se realiza en términos esquemáticos de la figura 5.

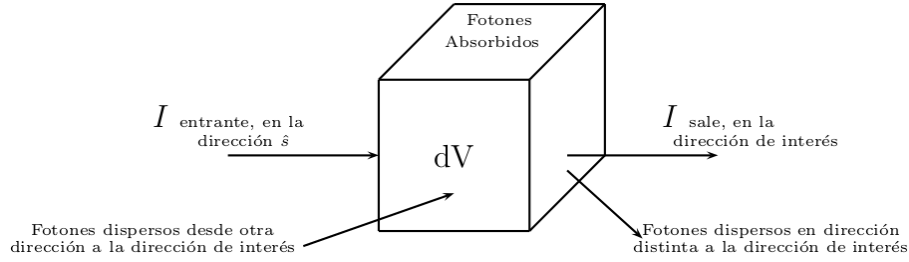


Figura 5. Esquema general de las contribuciones al transporte de radiación.

De manera común a todos los modelos de descripción, se considera un dominio compacto y convexo $\Delta \in \mathcal{R}^2$ con frontera diferenciable $\partial\Omega$, un intervalo de temporal $[0, T]$ y \mathbf{E}^2 es la esfera unidad.

En este esquema, puede establecerse una interpretación de los términos en la ecuación 1:

- $\frac{1}{|\vec{v}|} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ representa la diferencia entre el número de fotones que entran y salen del volumen por unidad de tiempo en la dirección $\hat{\Omega}$.
- $S = S(\vec{r}, \hat{\Omega}, t)$ representa la fuente local, es decir el número de fotones por unidad de tiempo emitidos en la posición \vec{r} con dirección $\hat{\Omega}$ en el tiempo t .
- El operador de kernel $\iint_{4\pi} \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) dE' d\vec{\Omega}'$ puede comprenderse en términos de las contribuciones al balance energético, que da lugar a separarlo en componentes dadas por $(\mu_{abs} + \mu_{sca}) \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t)$, que representa la atenuación de la luz en la dirección $\hat{\Omega}$ debido a la absorción (modelada por el coeficiente de absorción μ_{abs}) y la dispersión (modelada por el coeficiente de dispersión μ_{sca}). Por otro lado, el otro componente es $\mu_{sca} \int P(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}'$ que representa el incremento de la energía en la dirección $\hat{\Omega}$ debido a la dispersión de la radiación entrante desde otras direcciones.

2.3.. Interpretación en marco estricto de transporte radiativo

El comportamiento de los fotones que viajan a través de Ω a tiempo $t \in [0, T]$ con una dirección $\hat{\Omega} \in \mathbf{E}^2$ y que parten de un punto $\vec{r}^* \in \partial\Omega$ se puede modelar de la siguiente manera, para la intensidad de fotones I :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\vec{v}|} \frac{\partial}{\partial t} I(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} I(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = \quad (22) \\ & -(\mu_{abs} + \mu_{sca}) I(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) + \mu_{sca} \int P(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') I(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' + S(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) \end{aligned}$$

Para la fase $\in \Omega, \mathbf{E}^2, [0, T]$.

Las condiciones iniciales son: $I(\vec{r}, \hat{\Omega}, t = 0) = 0$ en $\Omega \times \mathbf{E}^2$

Y condiciones de frontera: $I(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) = 0$ en Γ^- , donde $\Gamma^\pm = \{(\vec{r}^*, \hat{\Omega}, t) \in \partial\Omega \times \mathbf{E}^2 \times [0, T] \pm \hat{n}(\vec{r}^*) \cdot \hat{\Omega} > 0\}$

donde $\hat{n}(\vec{r}^*)$ es el versor normal exterior a $\partial\Omega$ en el punto \vec{r}^* .

Los parámetros más importantes son: μ_{abs} , μ_{sca} , $\mu_{Tot} \equiv \mu_{abs} + \mu_{sca}$, de atenuación y $\lambda = \mu_{Tot}^{-1}$ que es el camino libre medio de los fotones.

Además, las soluciones físicamente aceptables deben estar sujetas a que todos estos coeficientes sean reales y estrictamente positivos.

Por su parte, La función de dispersión $P(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}')$ describe la probabilidad de que un fotón con una dirección inicial $\hat{\Omega}'$ adquiriera la dirección $\hat{\Omega}$ después de un evento de dispersión. Por lo tanto, debido a que $P(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}')$ es la función de densidad de probabilidad, debe satisfacerse:

$$\int_{\mathbf{E}^2} P(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' = 1 \quad (23)$$

2.4.. Transporte estocástico: reformulación integral de la ecuación de transporte

A partir de la expresión íntegro-diferencial de la ecuación de transporte de Boltzmann, es posible reformular los términos para arribar a una ecuación completamente integral, lo cual resulta de particular utilidad para el manejo de soluciones de tipo numéricas, necesarias para situaciones realistas, ya que -como se sabe- las soluciones analíticas directas sólo son posibles en una cantidad miuy limitada de configuraciones.

Operando y reordenando los términos en la ecuación de Boltzmann, resulta:

$$\begin{aligned} t &= t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + s\vec{\Omega} \end{aligned} \quad (24)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\frac{d}{ds} \Psi \left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) + \Sigma \Psi \left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) = \quad (25)$$

$$\Gamma \left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) \quad (26)$$

donde se ha definido $\Gamma\left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|}\right)$ como sigue:

$$\Gamma \equiv S + \iint \Sigma_s\left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, (\vec{\Omega}', E') \rightarrow (\vec{\Omega}, E)\right) \Psi\left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}', E', t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|}\right) d\vec{\Omega}' dE' \quad (27)$$

Puede verse⁷

$$\Psi\left(\vec{r}_0, \vec{\Omega}, E, t_0\right) = \int_{-\infty}^0 ds \left[e^{\int_0^s \Sigma(\vec{r}_0 - s'\vec{\Omega}, E) ds'} \Gamma\left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|}\right) \right] \quad (28)$$

Considerando que las variables \vec{r}_0 y t_0 son arbitrarias, se obtiene:

$$\Psi\left(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t\right) = \int_0^\infty e^{\int_0^s \Sigma(\vec{r}_0 - s'\vec{\Omega}, E) ds'} \cdot \left[\iint \Sigma_s\left(\vec{r} - s\vec{\Omega}, (\vec{\Omega}', E') \rightarrow (\vec{\Omega}, E)\right) \Psi\left(\vec{r} - s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t - \frac{s}{|\vec{v}|}\right) + S\left(\vec{r} - s'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t\right) \right] \quad (29)$$

Es decir, se obtuvo una forma integral para la ecuación de Boltzmann, que puede escribirse en término de operadores⁸:

$$\Psi = \mathbf{K} \Psi + S' \quad (30)$$

Se obtiene la solución para el flujo:

$$\Psi = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \quad (31)$$

Donde los términos son:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \mathbf{K} \Psi_{i-1} \\ \Psi_0 &= S' \end{aligned} \quad (32)$$

Matemáticamente, la solución obtenida se denomina serie de von Neuman. La interpretación física del formalismo desarrollado es particularmente apropiada en el vínculo entre los términos de la serie y los procesos físicos involucrados. El término de orden 0 se refiere al flujo primario estrictamente proveniente de la fuente de emisión S , mientras que los términos Ψ_i son las contribuciones de *scattering* a orden i obtenidas a partir del operador del *kernel de scattering* \mathbf{K} .

⁷Hint: Introdúzcase $e^{\int_0^s \Sigma(\vec{r}_0 + s'\vec{\Omega}, E) ds'}$ y calcúlese $\frac{d}{ds} \Psi$.

⁸Resulta conveniente expresar la ecuación de este modo para la resolución numérica de la misma, por ejemplo utilizando métodos estadísticos como Monte Carlo.

2.5.. El método Monte Carlo: estimadores y eficiencia en transporte de radiación

Tal como se enunció en secciones precedentes, existe una amplia variedad de problemas asociados al modelado del transporte de radiación, y que de hecho se presentan en la práctica en muy diversos ámbitos, que carecen de solución dentro del campo analítico, limitando el uso de “matemática pura” para la resolución de los mismos.

Este es el caso, por ejemplo, de la resolución de algunas ecuaciones íntegro-diferenciales. En particular, existen varios teoremas que demuestran la gran limitación de los métodos analíticos para la resolución directa de la ecuación de transporte de Boltzmann, representada por la expresión de Boltzmann para el transporte de radiación. De hecho, se conoce como resultado de teoremas que sólo puede resolverse la ecuación de transporte de Boltzmann para una cantidad muy acotada de situaciones, involucrando condiciones iniciales y de contorno que resultan muy poco realistas en casos de aplicación concreto de problemas físicos.

Por tanto, se propone un método alternativo para encontrar soluciones a la ecuación ??, para lo cual se considerará la re-escritura del problema en modo particular para posteriormente aplicar un procedimiento que consiste, básicamente, en el cálculo del valor de una integral definida. De manera tal, que una vez replanteado (re-ordenado) el problema éste se reducirá a la resolución de una ecuación que contiene integrales definidas, y por tanto podría salvarse la imposibilidad o inconveniencia de la aplicación de los métodos tradicionales (analíticos) para la solución de diferentes tipos de problemas, en los cuales se ven limitados debido, fundamentalmente, a:

- Desconocimiento de una función primitiva de aquella que se desea integrar.
- Si bien se conoce una función primitiva, resulta excesivamente compleja o extensa su aplicación.

La evaluación de estimadores, como por ejemplo para integrales definidas, por medio el método de Monte Carlo se realiza aplicando el siguiente teorema:

Teorema: Sean x_1, x_2, \dots, x_N N variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con función de densidad $f(x)$. Si g_i son funciones de x_i , entonces:

$$G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i(x_i) \tag{33}$$

es una variable aleatoria que verifica, el valor medio cumple con:

$$\langle G \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle g_i(x_i) \rangle \tag{34}$$

y la varianza resulta:

$$\sigma^2[G] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2[g_i(x_i)] \tag{35}$$

En particular, cuando todas las $g(x_i)$ son idénticas, e iguales a $g(x)$, se tiene que:

$$\langle G \rangle = \langle g(x) \rangle \quad (36)$$

y también:

$$\sigma^2[G] = \frac{1}{N} \sigma^2[g(x)] \quad (37)$$

Por lo tanto, en virtud de la definición de valor medio (o esperanza matemática) de $g(x)$, puede escribirse en la forma:

$$\langle G \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i(x_i) \right\rangle \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx = \langle g(x) \rangle \quad (38)$$

Este resultado justifica la siguiente forma de estimar una integral definida: Muestrear una serie de números aleatorios x_i con función de densidad $f(x)$ y evaluar $g(x)$ para cada x . La media de los valores obtenidos para $g(x)$ es una estimación de la integral. De acuerdo con el teorema de límite central la varianza de esta estimación decrece con el número de términos, según se deduce de la expresión ?? para $\sigma^2[G]$:

$$\sigma = \frac{\sigma[g]}{\sqrt{N}} \quad (39)$$

Conviene tener presente la desigualdad de Tchebycheff, de modo que se tiene:

$$P \left[|G - \langle G \rangle| \geq \sqrt{\frac{\sigma^2[g]}{N c}} \right] \leq c \quad (40)$$

De modo que se cuenta con argumento para tener una cota para la probabilidad de obtener un error mayor que el propuesto en la estimación del valor de la integral, pudiéndose siempre disminuir este error sin más que aumentar el valor de N . // Se define la *eficiencia del método Monte Carlo* (ε) como:

$$\varepsilon \equiv \sigma^2 T \quad (41)$$

donde T es el tiempo de cálculo. Como el valor de T está fuertemente relacionado con el número de puntos usados en la computación, se suele dar también esta otra definición para la eficiencia:

$$\varepsilon \equiv N \sigma^2 \quad (42)$$

Y, a partir de ésta, la eficiencia relativa (ϵ_{rel}):

$$\epsilon_{rel} \equiv \frac{\epsilon[N]}{\epsilon[N']} = \frac{N}{N'} \frac{\sigma^2}{(\sigma')^2} \quad (43)$$

Si $\epsilon_{rel} < 1$, entonces el método que corresponde a N' , $(\sigma')^2$ es “mejor” que el método con N , σ^2 . Si el número de puntos utilizados es el mismo, la eficiencia relativa queda reducida al cociente de las varianzas.

2.6.. Aplicación de de simulación Monte Carlo

2.6.1.. Cálculo-estimación del número π por medio de técnicas Monte Carlo

Uno de los métodos más antiguos utilizados para estimar el valor de π es el método de Buffon, que emplea una serie de líneas paralelas y una vara, cuya longitud guarda correlación con la separación entre líneas, para ser arrojada y determinar el ángulo que forma éstas con las líneas, así como la línea que atraviesa.

El método propuesto a continuación, representa una analogía al método de Buffon.

Se considera un círculo de radio unidad centrado en el origen. El área del círculo en el primer cuadrantes será $\pi/4$. Un modo de resolver este problema usando el método Monte Carlo con técnica éxito-fracaso, también denominado método de rechazo, es el siguiente:

1. Generar un par de números aleatorios ζ_1 y ζ_2 uniformemente distribuidos en $[0,1]$.
2. Determinar un punto en el primer cuadrante, de coordenadas (x,y) a partir de ζ_1 y ζ_2 .
3. Determinar la distancia D del punto (x,y) al origen, $D = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. Examinar si la distancia D es mayor o menor al radio R ($R = 1$).
5. Considerar con “éxito” los procesos que den lugar a puntos en el plano dentro de círculo y como “fracaso” los que estén fuera.
6. Calcular las proporciones de éxito y de fracaso.

A continuación, se muestra una propuesta⁹ para un código de cómputo:

⁹El código es sólo para propósitos ilustrativos. No se encuentra preparado de modo eficiente ni optimizado.

2.6.2.. Integrales definidas por medio del método Monte Carlo

Se considera diferentes procedimientos para calcular integrales definidas por medio del método Monte Carlo. El primero se llama “Método Monte Carlo de éxito-fracaso”, basado en la interpretación de una integral como un área. El segundo se llama “método Monte Carlo de la media muestral” y está basado en la definición de valor medio de una variable aleatoria continua. Considérese el problema de calcular una integral unidimensional, donde se asume que el integrando $g(x)$ es una función acotada:

$$0 \leq g(x) \leq c \quad \forall x \in [a, b]$$

Y sea Ω el rectángulo:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ y } y \in [0, c]\}$$

Y sea (X, Y) una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre Ω con función de densidad:

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{c} (b-a) & (x, y) \in \Omega \\ 0 & (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

Método de la media muestral con técnica Monte Carlo

Otra forma de calcular la integral, es representarla como el valor esperado de una variable aleatoria. Se reescribe la integral definida I en la forma:

$$I = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx \quad (44)$$

Donde $f(x)$ una función de densidad correspondiente a la variable aleatoria x .
Entonces:

$$I = \left\langle \frac{g(x)}{f(x)} \right\rangle \quad (45)$$

Suponiendo que la variable aleatoria se distribuye según la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

donde x uniformemente distribuida en $[a, b]$.
Entonces:

$$I = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} g(x) (b-a) dx = (b-a) \langle g(x) \rangle \quad (46)$$

Por lo tanto, una estimación muestral de I es:

$$I \approx (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) \quad (47)$$

Mientras que el estimador para la varianza σ^2 es:

$$\sigma^2[I] \approx \frac{1}{N-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^N (g(x_i))^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^N g(x_i)}{N} \right)^2 \right] \quad (48)$$

Evaluación de integrales definidas

A modo de ejemplo, puede calcularse $I = \int_0^5 \frac{dx}{1+x^2}$.

Para ello, se recurre, por ejemplo, al método de muestreo, por lo tanto:

$$I = \int_0^5 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{(5-0)}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{1+(x_i)^2} \quad (49)$$

μ CT @ LIIFAMIR[ⓧ]
VIDEOS

DOWNLOAD FROM: <http://www.famaf.unc.edu.ar/valente/Teaching.html>

SEEMI 2013
MÓDULO III

2.7.. Modelado de procedimientos médicos con radiación ionizante

El Capítulo 2.7. muestra algunos mecanismos, lineamientos generales, sobre cómo modelar el transporte y colisiones de radiación ionizante en prácticas del ámbito médico, si bien se aplican los mismos conceptos generales a cualquier situación. Se presentan brevemente *approaches* de tipo determinístico así como estocástico.

2.8.. El método Monte Carlo aplicado al transporte de radiación

En la actualidad, prácticamente todas las áreas recurren al uso de computadores para resolver problemas importantes, tanto de índole social, económica, de ingeniería, de ciencia básica, aplicada, etc. Con un manejo adecuado de programas de cómputo e información pueden realizarse cálculos y simulaciones de modelos reales, para estudiarlos y resolver problemas teóricos o de aplicación. Los procesos que contienen variables aleatorias son susceptibles de abordarse con el método Monte Carlo, que siendo método numérico capaz de explotar la capacidad de los procesadores en computadores, puede aplicarse en muchas tareas más de lo que se hacía en los principios de su aplicación práctica (a principios de la década de 1950).

La simulación Monte Carlo es la mejor alternativa disponible en la actualidad para resolver el problema del transporte de la radiación en la materia cuando se trata con geometrías complejas, tales como las que se encuentran en las diversas aplicaciones médicas que utilizan radiaciones ionizantes.

En esta sección se aborda la aplicación del método Monte Carlo específicamente en la simulación de la interacción de la radiación con la materia, para investigar aspectos dosimétricos y de radiodiagnóstico, de algunos problemas que existen en el área de física médica.

En términos genéricos, puede decirse que la simulación es un experimento teórico en el que se reproduce el comportamiento de un sistema complejo, que consiste de una forma de “realizar” un experimento en el cual la realidad es sustituida por un modelo matemático.

Puede considerarse como un híbrido entre experimentación pura y teórica y es una herramienta muy útil en la investigación científica. En definitiva, lo que se hacen los métodos de simulación Monte Carlo aplicados al transporte de radiación es resolver la ecuación de transporte de las partículas de una forma puramente estadística, lo cual representa ventaja sobre los métodos analíticos complejos que resuelven la ecuación de forma aproximada y sólo para problemas sencillos.

La simulación Monte Carlo en física médica se utiliza para resolver problemas diversos, como estudiar y reconstruir imágenes de pacientes tomadas con equipos digitales, realizar cálculos de carcinogénesis, obtener espectros de salida de unidades de terapia, caracterizar detectores de radiación y fuentes de radiación ionizante de todo tipo.

2.8.1.. Tracking de partículas con el método Monte Carlo

La historia o trayectoria de una partícula es vista como una secuencia aleatoria de desplazamientos libres que terminan con un evento de interacción donde la partícula cambia su dirección de movimiento, eventualmente modifica el estado de fase (pierde energía o

cambia dirección de movimiento, por ejemplo) y puede generar partículas secundarias. Todo ello se realiza aplicando las leyes de la física, atendiendo las funciones de probabilidad determinadas por las secciones eficaces adecuadas y dependiendo del medio, la energía de la partícula y la disposición geométrica del sistema.

A modo de ejemplo, se pueden simular condiciones extremas de un reactor nuclear, sin hacerlo en una instalación real; o bien simular la aplicación de un tratamiento de radioterapia a un paciente, sin llevarlo a cabo hasta que se obtengan las dosis adecuadas en los sitios convenientes en el simulador.

Se han desarrollado varios códigos de simulación Monte Carlo del transporte de radiación que contienen modelos de interacción para definir las funciones de distribución de probabilidad para las distintas variables aleatorias que intervienen en cada proceso o suceso, y que permiten obtener valores medios de observables de interés como pueden ser la posición de las partículas después de cada interacción, el momento y pérdidas de energía de las partículas primarias o las secundarias generadas en algunas interacciones.

En forma genérica, el objetivo de los códigos de simulación es modelar el camino seguido por partículas que atraviesan medios materiales, atendiendo las leyes de la física y las probabilidades, a partir de ciertas condiciones iniciales del estado de fase. El medio en el que se lleve a cabo la simulación puede ser de estado sólido (generalmente amorfo), líquido o gaseoso y el modelo geométrico del sistema se define utilizando la geometría analítica.

Los códigos Monte Carlo de transporte tienen modelos de interacción para las partículas que se van a simular, es decir, conjuntos de secciones diferenciales transversales para los mecanismos de interacción relevantes. Se definen funciones de distribución de probabilidad para el camino libre entre interacciones, el tipo de interacción que ocurre y el cambio del estado de fase, como pérdida de energía y deflexión angular de las partículas.

Algunos de los códigos de simulación Monte Carlo más reconocidos para el transporte de partículas en medios materiales son EGS4, EGSnrc, PENELOPE, NOREC, MCNP, GEANT4 y FLUKA. Cada código tiene sus particularidades puede resultar más conveniente para aplicaciones distintas, por lo que se debe analizar cuál es el más adecuado al tipo de problema, escogiendo el más sencillo de acuerdo con las habilidades y capacidad de cómputo con que se cuente, y que contenga las secciones eficaces o teorías físicas de respaldo más modernas para el tipo de partícula a simular.

Para varias aplicaciones en radiodiagnóstico y radioterapia, la utilización de simulación Monte Carlo del transporte de la radiación resulta fundamental e incluso necesaria.

Para ejemplificar, en el caso de aplicaciones en radiodiagnóstico, cuando un fotón o un electrón de energía elevada penetra en un medio material origina una cascada de partículas secundarias, cuyo número va en aumento al mismo tiempo que su energía media decrece. El inicio de las simulaciones de estas cascadas electromagnéticas, inicia con el trabajo de Berger en 1963, quien estableció las bases para realizar estos cálculos de forma efectiva y sobre las que todavía se trabaja hoy en día. Durante las décadas de 1970 y 1980 aparecieron los primeros programas de propósito general capaces de simular el transporte acoplado de fotones y electrones.

Generación de trayectorias

El proceso de simulación asume que las partículas siguen trayectorias rectilíneas a velocidad constante entre dos interacciones sucesivas con el medio. El modelado de su “vida”

puede representarse como una sucesión de estados determinados por la posición del n-ésimo suceso en la posición \vec{r}_n , la dirección de movimiento $\vec{\Omega}_n$ y energía E_n inmediatamente después de producirse dicho suceso.

Dada una posición inicial, el primer punto a resolver es determinar a qué distancia se producirá el siguiente suceso y, luego, de qué tipo será. La primera cuestión se resuelve teniendo en cuenta el hecho de que el viaje de una partícula constituye un proceso de Poisson; la segunda, considerando la relación entre las secciones eficaces de las diversas interacciones posibles.

Si λ_i representa el recorrido libre medio (mfp) correspondiente a la interacción de tipo “i”, y λ el mfp total (cuyo inverso es la suma de inversos de los recorridos libres medios parciales), la distancia s recorrida por la partícula hasta el próximo suceso se determina mediante la expresión ??:

$$s = -\lambda \ln(\zeta) \quad (50)$$

donde ζ es un número aleatorio uniformemente en $[0, 1]$.

La probabilidad P_i de que la interacción sea del i-ésimo tipo es:

$$P_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} \quad (51)$$

Una vez sorteado el tipo de interacción a simular de acuerdo con las probabilidades expresadas por en la ecuación ??, es necesario simular el cambio de estado (típicamente dirección y energía) que haya podido producirse. Para ello se emplea la distribución de probabilidad asociada a la sección eficaz doble diferencial correspondiente.

Por tanto, el proceso transforma el estado $(\vec{r}_n, \vec{\Omega}_n, E_n)$ al $(\vec{r}_{n+1}, \vec{\Omega}_{n+1}, E_{n+1})$. El proceso se repite hasta que, o bien la partícula escapa del sistema material, o bien su energía cae por debajo de cierto valor, momento en el cual se supone que es localmente absorbida y su vida terminada. Tras simular la vida de una partícula debe hacerse lo propio con las partículas secundarias a las que haya dado lugar.

2.8.2.. Modelado de colisiones e interacciones con el método Monte Carlo

Los procesos de colisión se implementan en la técnica de simulación Monte Carlo por medio de modelos de interacción que determinan las secciones eficaces. Para ello, en las aplicaciones típicas de transporte de radiación ionizante, se requiere el conocimiento de las secciones eficaces doble diferencial en energía y ángulo sólido. Los valores de las secciones eficaces pueden ser introducidos en la simulación Monte Carlo por medio de modelos analíticos que son directamente evaluados para las variables de estado de cada caso; y también puede emplearse tablas de valores obtenidas de bases de datos, que requieren procesos posteriores para interpolar (asumiendo continuidad) permitiendo obtener el valor correspondiente a las variables de estado.

Técnicas de simulación condensada

En principio, el esquema de simulación anteriormente presentado es válido para cualquier tipo de partícula. En la práctica, sin embargo, no resulta adecuado cuando se consideran -por ejemplo- electrones de alta energía, dado que el número de interacciones a lo largo de su trayectoria antes de ser absorbidos resulta excesivamente elevado, del orden de algunas decenas de miles para electrones de 1 MeV, por ejemplo. Tal cantidad de colisiones requeriría un tiempo de simulación tan grande que convierte a la solución propuesta al problema en algo inviable.

El modo de resolver las dificultades derivadas de este inconveniente se recurre a una técnica denominada “simulación condensada”, cuyo fundamento se encuentra en las teorías de dispersión múltiple. La idea consiste, básicamente, en simular el efecto global neto de un número elevado de interacciones mediante un único suceso “artificial”. Exista una variante, propuesta por Berger, conocida como simulación mixta, que se combina la simulación detallada de los sucesos más “violentos” con la condensada de los restantes, resultando un algoritmo particularmente robusto y versátil.

Los diversos esquemas de simulación condensada constituyen quizás la principal característica que distingue los programas de uso más extendido. De hecho, la concepción de nuevos algoritmos más precisos y más rápidos es uno de los temas de investigación abiertos en el campo de la simulación Monte Carlo del transporte de la radiación.

Cantidades de interés en la simulación de partículas

Para obtener el valor medio de un observable Q ($\langle Q \rangle$) por medio de simulación Monte Carlo, en el transporte de radiación, conviene introducir el concepto de “historia” entendida como la “vida” de una partícula primaria y la de todas las secundarias generadas por ésta. A modo de ejemplo, podría tratarse de la dosis en un cierto volumen de interés.

Sea q_j a la contribución de la j -ésima historia, la estimación del valor medio del observable (en el ejemplo, la energía depositada por historia) tras simular un total de N historias provee el siguiente estimador para q para $\langle Q \rangle$:

$$\langle Q \rangle \sim q \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j \quad (52)$$

que coincide con la expresión presentada anteriormente.

2.8.3.. Ejemplo básico artificial de transporte con el método Monte Carlo

A modo de ejemplo extremadamente sencillo, se propone realizar el modelado por simulación Monte Carlo de una partícula libre moviéndose en un plano. El problema conocido como *random walk* consiste en mover una partícula con paso p con características

isotrópicas y homogéneas para el medio en que se transporta la partícula. Entonces, la distribución angular que corresponde al cambio en la dirección de movimiento es isotrópica, y se busca, en general, determinar la distancia neta recorrida al cabo de N movimientos.

2.9.. Introducción y parámetros en la simulación del transporte de radiación

Como se mencionó en las secciones precedentes, los métodos Monte Carlo son una forma genérica para denominar procedimiento matemáticos cuya característica común es el uso de números generados aleatoriamente y distribuciones de probabilidad. En la actualidad el método Monte Carlo es ampliamente aceptado y cada vez más extendido, como una herramienta para realizar investigación científica, específicamente para modelar el transporte de radiación en medios materiales.

En muchos casos de interés en el campo de radiodiagnóstico, como una situación particular del transporte de radiación, el método Monte Carlo es el más apropiado, ya que no se dispone de métodos alternativos de carácter experimental, analítico y/o instrumental.

2.10.. Setups virtuales

El método Monte Carlo puede resultar fácilmente aplicable a sistemas con geometrías complejas y diferentes medios materiales. De hecho, éste método permite simular el paso de la radiación a través de la materia tomando en cuenta todos los procesos físicos relevantes y todos los tipos de radiación involucrados, como tipo de partículas (electrones, positrones, fotones, neutrones, iones pesados y partículas como muones, kaones, etc) que pueden ser simulados hasta que se detengan.

En términos genéricos, el armado de la configuración de irradiación requiere de definir la fuente de radiación (en propiedades físicas y geométricas), la muestra que es irradiada (en geometría y propiedades físicas), los sistemas de detección, con las propiedades definidas por el usuario, así como determinar cuáles son los procesos, y bajo qué criterios, se consideran en la simulación.

A modo de fijar ideas, se presenta el diseño del *set up* de una situación típica en radiodiagnóstico, como es la simulación de un tubo de rayos X:

La geometría que debe simularse para el proceso de producción de rayos X se corresponde con el dispositivo típico de un tubo de rayos X. En primer lugar, se define la fuente de electrones mediante (por ejemplo mediante fuentes puntuales ubicadas a lo largo de una longitud de 2 mm). Los electrones viajan en línea recta hacia el ánodo de material (por ejemplo, tungsteno con espesor de 0.5 mm y ángulo de inclinación de unos 10 - 15 grados). Cuando los electrones ingresan en el material blanco el programa simula la trayectoria de los electrones hasta que éstos finalmente llegan al “reposo” o a una situación terminal. Durante los procesos de interacción se considera la producción de rayos X característicos y Bremsstrahlung. Los fotones que emergen del blanco atraviesan la envoltura de vidrio pirex de 0.5 mm de espesor, y finalmente el filtro adicional de aluminio de 1 mm de espesor.

El espectro calculado representa el número de fotones por intervalo de energía en función de la energía. Los resultados pueden ser obtenidos con los códigos PENELOPE o FLUKA, entre otros.

2.11.. Consideraciones para la simulación de imágenes morfológicas

Existen diferentes métodos que han sido aplicados e implementados rutinariamente para el *imaging* médico con la premisa de lograr técnicas no invasivas capaces de prevenir o diagnosticar patologías.

Para el estudio de las técnicas radiológicas son necesarios conocimientos avanzados de interacción de la radiación ionizante con la materia, específicamente materiales biológicos típicos en pacientes. Desde un punto de vista general, puede caracterizarse a las técnicas de *imaging* médico según dos categorías: la primera dedicada a extraer información estructural de tipo anatómica y la segunda de carácter funcional para determinar las propiedades metabólicas.

A continuación se presentan métodos numéricos y modelos analíticos, integrados en algoritmos, capaces de modelar los principales fenómenos físicos relacionados con el transporte de radiación y procesos de interacción con medios materiales de interés biológico.

A modo de ejemplo se presentan implementaciones de metodologías conjuntamente con pruebas preliminares para casos de aproximaciones de *imaging* por contraste de absorción, como radiografía y mamografía.

2.12.. Radiodiagnóstico para estructuras anatómicas

De acuerdo con los capítulos precedentes, los fotones interactúan con las partículas del material irradiado de diferentes maneras y a cada tipo de interacción corresponde funciones de densidad de probabilidad según los modelos de probabilidad para las secciones eficaces de cada tipo de evento.

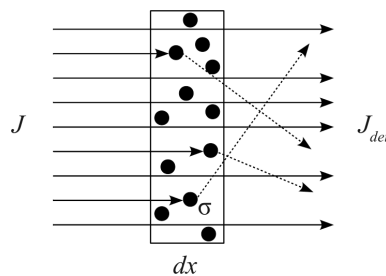


Figura 6. Esquema de irradiación típico.

Considerando un haz homogéneo de de partículas descrito por la cantidad de partículas por unidad de área por unidad de tiempo ($J = N / (S \cdot t)$) incidiendo en una muestra delgada de espesor dx de un cierto material, como muestra la figura 6.

Suponiendo un sistema de detección ideal, colocado para contabilizar sólo partículas que emergen de la muestra irradiada que no hayan interactuado con la muestra.

Resulta que la medición del detector será $J_{det} = J + dJ$, donde dJ indica el número de partículas que efectivamente interactúan con la muestra.

Nótese que dJ debe ser una cantidad negativa dado que toma en cuenta las partículas que emergen menos aquellas que inciden en la muestra.

Debido a que el haz es de distribución espacial uniforme en fluencia en el área de incidencia S y que la muestra delgada puede considerarse, en muy buena aproximación, de características diferenciales dx , la fracción de área cubierta por el *target* resulta que

$$\frac{dS}{S} = \frac{J - J_{det}}{J} = \frac{-dJ}{J}$$

donde dS es el área correspondiente a centros de *scattering* y S es el área total del haz de irradiación.

Si σ es la sección eficaz de un único centro de *scattering* y dn_c es el número total de centros de *scattering* en el volumen dV , entonces:

$$\frac{dS}{S} = \frac{dn_c \sigma}{S dx} dx = \frac{dn_c}{dV} \sigma dx = \eta \sigma dx \implies \frac{-dJ}{J} = \eta \sigma dx \quad (53)$$

donde $\eta \equiv dn_c/dV$ es el número de centros de *scattering* por unidad de volumen. En particular, en el caso de un material de densidad ρ y masa molar M , η se obtiene de:

$$\eta = \frac{N_{Av} \rho}{M} \quad (54)$$

donde $N_{Av} = 6,02214 \times 10^{23} mol^{-1}$ es el *Número de Avogadro*.

2.13.. Simulación Monte Carlo de radiografía, mamografía y tomografía

Los métodos de *imaging* médico generalmente emplean haces externos de rayos X realizando irradiaciones en diferentes modalidades para extraer información estructural. En este sentido, la anatomía de pacientes puede ser obtenida por medio de alguno de estos métodos. Desde un punto de vista general, las técnicas de *imaging* médico anatómicas consisten en el uso de haces externos de rayos X generados por Bremsstrahlung y efecto fotoeléctrico de electrones que colisionan con ánodos que constituyen el blanco del tubo de rayos X.

Una vez que la radiación emerge de la muestra después de hacer interactuado con el paciente (o la muestra), se produce la detección por medio de sistemas específicos de detección de radiación, originalmente películas radiográficas, y más recientemente dispositivos como detectores de estado sólido.

La detección de la radiación es luego sintetizada para conformar la imagen virtual que puede plasmarse en formato analógico o digital.

Por tanto, los principales aspectos y la información requerida para ser incluida en la realización de técnicas de *imaging* anatómico, son:

- Configuración de irradiación especificando la estructura y la disposición geométrica y experimental, así como los componentes instrumentales.
- Conocimiento preciso del espectro y características geométricas del haz de radiación incidente.
- Información sobre el sistema de detección, como respuesta a la radiación, diseño, calibración, etc.

- Anatomía de paciente (o muestra) cuyas propiedades materiales serán inferidas.
- Modelos de interacción radiación-materia, los cuales pueden ser obtenidos por medio de modelos teóricos con expresiones analíticas o parámetros tabulados.

2.14.. Información de estructuras internas: Tomografía por rayos X

Una tomografía, esencialmente es la reconstrucción de la imagen de una sección transversal de un objeto a partir de sus proyecciones. Por tanto, una tomografía puede ser considerada como un conjunto de proyecciones sobre las rectas que forman el plano de la placa tomográfica.

Los formalismos matemáticos para reconstruir una imagen tridimensional a partir de múltiples imágenes axiales planas fueron desarrolladas por el matemático Johann Radon. La transformada de Radon bidimensional, es una transformación integral que consiste en la integral de una función sobre un conjunto de rectas. En 1917 el matemático austriaco Johann Radon probó que es posible reconstruir un objeto bidimensional o tridimensional a partir de un conjunto de infinitas proyecciones, dicha reconstrucción se realiza, precisamente, mediante la transformada de Radon.

Las tomografías son comúnmente utilizadas en aplicaciones médicas que requieren una visualización óptima de un órgano en particular. Si en un algoritmo se incorporan los datos obtenidos en una tomografía con los modelos de restauración de imágenes, se obtiene una aproximación casi exacta de la morfología ídel órgano estudiado, motivo por el cual diversos modelos de reconstrucción de imágenes se han propuesto en los últimos años. Entre ellos, se destaca el método de retroproyección filtrada, el cual se planteó inicialmente como un algoritmo de inversión de la transformada de Radon que utiliza herramientas matemáticas propias del análisis de Fourier como el teorema de proyecciones y el producto convolución además de una elaborada construcción geométrica que permitirá reconstruir la imagen a partir de un conjunto de rectas.

Un método sencillo de explicar el principio planteado por Radon, y posteriormente mejorado por Cormark, consiste en: considerando que se tiene un cuerpo convexo el cual tiene una masa de densidad variable dada por una función f .

Si el cuerpo es atravesado por una radiación cualquiera, cuya trayectoria sea una recta y de la cual se puede medir su intensidad de entrada y de salida. Entonces, la diferencia entre estas intensidades es la absorción del rayo por la materia en el interior de K y depende de la recta S , por donde el rayo transita, es posible medir experimentalmente esta función del rayo, denotada por $F(S)$ y a partir de ésta reconstruir $f(x, y, z)$.

En términos prácticos, el procedimiento (aproximación discreta) consiste en dividir el objeto en secciones planas y resolver el problema sección por sección para después integrar a todo el cuerpo. Al dividir el objeto en secciones planas se logra que la función f dependiente inicialmente del vector posición (x, y, z) se reduce temporalmente sólo a (x, y) .

Luego, “se sobrepone” una cuadrícula imaginaria a cada sección planar quedando así hipotéticamente dividido en celdas, a cada celda le corresponde una masa de densidad promedio las cuales constituirán las incógnitas del problema.

Por tanto, las proyecciones se convierten en sumas de términos sobre las diferentes direcciones en la cuadrícula. Entonces, cada término en la sumatoria que corresponde a una proyección es el producto de un factor de peso por la densidad del pixel (desconocida).

Los correspondientes valores de peso para cada pixel son conocidos y están determinados por la geometría del caso:

- Tamaño de campo del haz de irradiación
- Ángulo de irradiación
- Tamaño de la cuadrícula

A partir de las proyecciones es posible establecer un conjunto de ecuaciones simultáneas cuya solución proveerá la reconstrucción tomográfica.

2.15.. Morfología por reconstrucción tomográfica

La figura 7 ilustra una malla sobrepuesta a una imagen desconocida con $N = n \times n$ celdas.

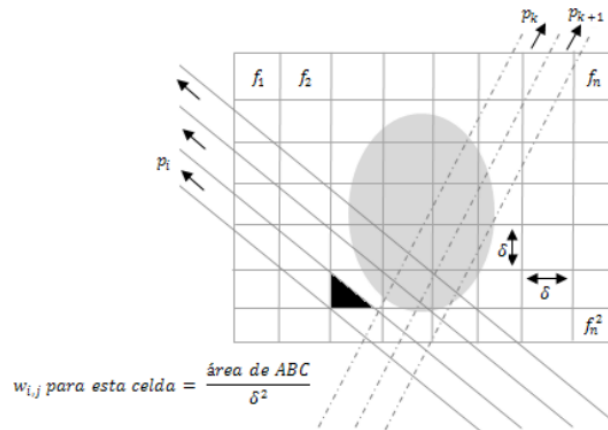


Figura 7. Esquema de reconstrucción tomográfica a partir de proyecciones planares.

Se realiza un barrido por un conjunto de rayos (paralelos), con dado ángulo de inclinación respecto a uno de los ejes de la cuadrícula imaginaria.

Entonces, el rayo j_i puede representarse como una delgada banda que cruza la cuadrícula, por tanto se introduce la siguiente definición para la proyección del rayo j_i :

$$\sum_{j=1}^N w_{i,j} f_j = p_i \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (55)$$

Donde M es la cantidad total de rayos y $w_{i,j}$ es el factor de peso que corresponde a la fracción de área correspondiente a cada celda interceptada por un rayo en particular.

El triángulo sombreado ABC en la figura 7 indica esta área para una celda en particular. Las cantidades f_j son las incógnitas del problema cuya solución presenta cierta complejidad

debido a que si se tiene N y por tanto se requiere de un número mínimo de rayos (M) que debe ser igual a N .

Ahora, haciendo a los segmentos (δ) infinitesimales (ds), el límite de la sumatoria de la expresión ?? se convierte en una integral de línea a lo largo de la trayectoria del rayo. Entonces:

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) ds \quad (56)$$

Esta función define, de hecho, la proyección del haz sobre una línea de proyección la cual coincide con la transformada bidimensional de Radon de la función $f(x,y)$.

Dado que en una aplicación de este tipo los detectores determinan los cambios de intensidad en los rayos emitidos (es decir las proyecciones ρ), el problema se restringe a la aproximación de la función $f(x,y)$, la cual se realiza mediante la transformada inversa bidimensional de Radon, definida a partir de:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial \hat{f}(\rho,\phi)}{\partial \rho}}{x \cos(\phi) + y \sin(\phi) - \rho} d\rho d\phi \quad (57)$$

La inversión de la transformada de Radon dada en la expresión ?? presenta algunos inconvenientes a nivel práctico ya que es imposible atravesar una sección transversal de un objeto con infinitos rayos o proyecciones.

Se implementan aproximaciones de la sección a reconstruir, por medio de:

Entre los métodos de aproximación de la transformada inversa de Radon se encuentra el método de retroproyección filtrada, el cual parte de la aplicación del teorema de corte de Fourier el cual afirma que: *la transformada unidimensional de Fourier de la proyección de una imagen $f(x,y)$ obtenida a partir de rayos paralelos entre sí y formando un ángulo θ con el eje x , es el corte o muestreo de la transformada bidimensional de Fourier de la imagen $F(u,v)$ a lo largo de una línea que forma un ángulo θ con el eje u .*

Por consiguiente, si la cantidad de proyecciones aumenta $F(u,v)$ termina definida en casi todo punto y de este modo usando la transformada inversa bidimensional de Fourier se obtiene $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v) e^{2\pi i(ux+vy)} dv du \quad (58)$$

Y, en coordenadas polares ($u = \rho \cos(\theta)$ y $v = \rho \sin(\theta)$), resulta:

$$f(x,y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\rho,\theta) |\rho| e^{2\pi i \rho (ux+vy)} d\rho \right] d\theta \quad (59)$$

Usando el teorema de corte de Fourier y considerando $F(\rho,\theta)$ como la transformada unidimensional de la proyección S_θ :

$$f(x,y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_\theta(\rho) |\rho| e^{2\pi i \rho (ux+vy)} d\rho \right] d\theta \quad (60)$$

El resultado presentado en la expresión ?? se conoce como proyección filtrada, la suma de cada una de estas proyecciones permite estimar la imagen original $f(x,y)$.

2.16.. Aplicaciones en radiodiagnóstico anatómico y metabólico

La reconstrucción multiplanar en tomografía axial computada se realiza por medio del análisis de los cortes transversales generados por los estudios de tomografía en ocasiones es insuficiente para lograr la obtención de un correcto y eficiente diagnóstico o documentar algunos casos clínicos. Debido principalmente a que no permite la visualización de todos los detalles anatómicos al obtenerse una única vista de la región a analizar. Para satisfacer esta limitante, en la actualidad, algunos visores de imágenes médicas, a partir de estudios de CT crean imágenes bidimensionales no-axiales, utilizando algoritmos matemáticos muy veloces. Este proceso es conocido como Reconstrucción o Reformateo Multiplanar.

Inicialmente se obtienen las imágenes de los cortes transversales y luego, apilando visualmente los cortes, se pueden reconstruir imágenes en plano, sagital o coronal, bien en dirección perpendicular u oblicua, con respecto al eje del paciente. Esta técnica es particularmente útil para evaluar las estructuras óseas, ya que algunas fracturas y alineación de las articulaciones pueden no ser evidentes en cortes axiales.

La reconstrucción multiplanar permite adicionalmente seleccionar una posición anatómica en un plano y ver su correspondencia en los demás planos, dando una excelente percepción tridimensional de la estructura analizada. Cuando las dimensiones de los voxels (grosor del corte y la resolución en el plano) son iguales, el volumen de datos se denomina isotrópico; en otro caso anisotrópico. Las reconstrucciones deben ser calculadas a partir de voxels isotrópicos ya que si se calculan a partir de voxels anisotrópicos, la imagen final presentará una forma en diente de sierra, lo que puede dificultar en gran medida la exclusión de una fractura ósea.

Por otro lado, existe la reconstrucción por proyecciones, la cual extrae algún simple parámetro y produce una reconstrucción bidimensional, resaltando la estructura deseada, utilizando como base dicho parámetro. La proyección de intensidades permite obtener la visualización de la información más importante de varios cortes al mismo tiempo. Es una forma de proyectar los datos tridimensionales a una imagen bidimensional que simula una imagen 3D.

Respecto de técnicas metabólicas, las prácticas de tipo SPECT y PET son las más difundidas que utilizan métodos de reconstrucción tomográfica.

Las imágenes PET (similarmente SPECT) se generan mediante un algoritmo de reconstrucción, a partir de un conjunto de proyecciones adquiridas del objeto o paciente bajo examen. El procedimiento clásico de reconstrucción de imagen es la retroproyección filtrada (FBP). Este método es rápido y sencillo, pero no utiliza información estadística. Es un buen método para aplicaciones en las que el número de cuentas es alto (como tomografía de rayos X o CT), pero es peor cuando hay un bajo número de cuentas, como en imágenes de medicina nuclear.

Los métodos iterativos de reconstrucción de imagen se han propuesto como alternativas a FBP. Estas técnicas tienen un costo computacional más alto que FBP pero producen imágenes de mejor contraste y relación señal-ruido. Los métodos iterativos eliminan los artefactos de líneas presentes en las imágenes FBP, reduciendo los falsos positivos y los falsos negativos cuando las lesiones están en la proximidad de órganos calientes.

En las últimas dos décadas se han desarrollado varios algoritmos que se pueden considerar como métodos para aproximar la transformada de Radon inversa. Puede implementarse

para la reconstrucción en varias modalidades tomográficas, incluyendo técnicas metabólicas como SPECT y PET. Es importante mencionar aquí también que, debido a muchas razones (implementación computacional, aproximaciones numéricas, etc.), estos métodos no son todos equivalentes en su aplicación a un tipo de técnica u otra.

La figura 8 muestra la *performance* de algoritmos de reconstrucción tomográfica en PET.

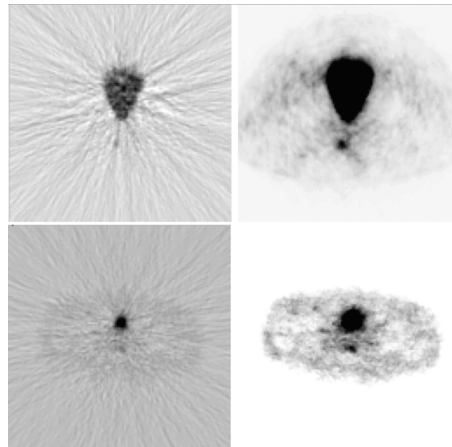


Figura 8. Corte (carcinoma). Izquierda: imagen FBP (frecuencia de corte 0.5, filtro de rampa). Derecha: imagen OSEM (4 subconjuntos, 3 iteraciones). Presencia de artefactos de línea claramente visibles en imágenes FBP

2.17.. Nociones sobre requerimientos de *matching* y fusión de imágenes anatómicas y metabólicas

La fusión de técnicas metabólicas (tipo SPECT o PET) debiera lograr resultados similares en sistemas híbridos (o dual) o separados, ya que comparten principios y algoritmos, y puede optimizarse con marcadores externos (ME) o internos (MI) al paciente.

Las ventajas y desventajas respectivas son discutidas en la literatura, principalmente atribuidas al alto costo y escasa disponibilidad de los híbridos y al consumo de tiempo en los separados. Sin embargo, consistentemente benefician a pacientes oncológicos, quienes en distintas etapas de su enfermedad requieren evaluación diagnóstica no invasiva que podrá modificar la terapia.

La alineación o registro de imágenes es el proceso de determinar punto por punto la correspondencia entre dos o más imágenes de una misma escena, tomadas generalmente en tiempos diferentes, desde distintas orientaciones y/o captadas por diversos tipos de equipos o sistemas. Esta es una operación realmente necesaria en muchas tareas de procesamiento y análisis de imágenes, haciendo lo posible para comparar la información de referencia, midiendo pixel por pixel las diferencias que fueron causadas por cambios en la escena.

La figura 9 muestra la relación de co-registración entre imágenes morfológicas y fisiológicas.

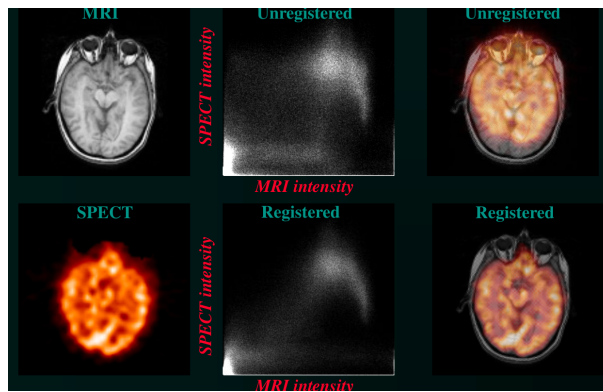


Figura 9. Corrección para fusiones entre imágenes de anatomía y metabolismo.

La figura 10 muestra esquemáticamente la conformación de imágenes SPECT a partir de la adquisición de proyecciones planares a diferentes ángulos.

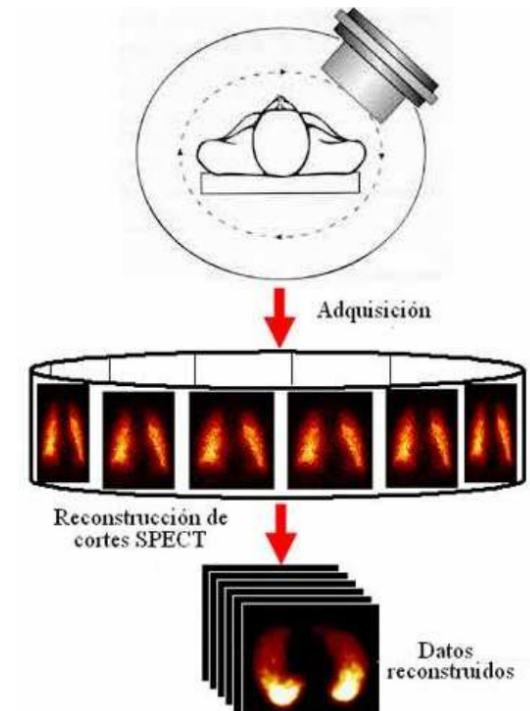


Figura 10. Esquema de adquisición de imágenes SPECT.

Es de especial importancia el registro de imágenes médicas, donde la información específica de cada tipo de imagen (modalidad) se combina y fusiona en una sola aumentando

así, la capacidad, por parte del clínico, de mejorar su diagnóstico. Por ejemplo, un buen registro y/o fusión de una imagen de CT con una imagen de PET o SPECT se traduce en un aporte de información adicional de una modalidad respecto a la otra, en este caso, a la información de tipo funcional que proporciona la imagen SPECT, se le añade la información anatómica detallada disponible en la imagen obtenida por CT. En el registro de imagen, la precisión de los resultados es cuantificada por una de la medida de similitud determinada.