

ESPECIALIDAD III: INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE IMÁGENES RADIOLÓGICAS EN ÁMBITO MÉDICO

Mauro Valente^{†*}

† CONICET & Universidad Nacional de Córdoba; Argentina

Segundo semestre año académico 2013



Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF)
Universidad Nacional de Córdoba

*Contacto e-mail: valente@famaf.unc.edu.ar

Prefacio

El presente trabajo *Notas para Especialidad III: Introducción al Procesamiento de Imágenes radiológicas en ámbito médico* es un compendio original de notas elaborado por Mauro Valente en 2013, para ser utilizado como material de estudio y referencia para el curso superior de especialidad *Introducción al Procesamiento de Imágenes radiológicas en ámbito médico* para el área de física médica en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba; Argentina.

El contenido del libro de notas está dedicado a formalismos y metodologías para el campo específico de física médica orientado a exponer conceptos básicos de diferentes áreas de vinculadas con la generación, formación y procesamiento de imágenes de radiología típicamente utilizadas en ámbito médico. El contenido se concentra en metodologías que utilizan radiación ionizante abarcando tanto técnicas morfológicas como funcionales.

Es un trabajo con exposición de fundamentos teóricos, métodos de cálculo analítico y numérico así como también trabajos prácticos y experimentales para aplicación destinados a ejercitar los contenidos formales en situaciones prácticas de interés para la física médica. El objetivo y contenido del curso apunta a la comprensión de los procesos físicos involucrados en la formación de imágenes radiológicas debido al uso de radiación ionizante, así como la caracterización del proceso integral de formación y adquisición por medio del estudio de las propiedades físicas de los sistemas de detección de radiación y registración de señales. Por último se estudian las técnicas matemáticas estadísticas de procesamiento de imágenes y la implementación asociada en algoritmos computacionales. No se contempla consideraciones algunas sobre interpretaciones clínicas de las imágenes radiológicas.

El trabajo proporciona teoría, técnicas determinísticas y estocásticas, herramientas de cálculo y experiencias de laboratorio para abordar de modo completo el estudio de los procesos de formación-adquisición-procesamiento de imágenes radiológicas de interés en ámbito médico.

Programa y contenido

MÓDULO I: Introducción al transporte de radiación

1. Conceptos básicos del transporte de radiación.
2. Introducción a la teoría de Boltzmann.
3. Efectos primarios y de dispersión en radiodiagnóstico.
4. Descripción cualitativa de componentes de la ecuación de transporte.

MÓDULO II: Fundamentos básicos del procesamiento de imágenes

1. Adquisición y representación digital. Métodos de almacenamiento y caracterización de imágenes.
2. Caracterización de imágenes por medio de histograma.
3. Operaciones elementales. Transformaciones.
4. Filtros de aclarado/oscurcimiento. Filtros selectivos.

MÓDULO III: Sistemas de detección de uso radiológico

1. Principios de detección de radiación.
2. Detectores de rayos X.
3. Películas radiográficas y detectores digitales.

MÓDULO IV: Experiencia de Laboratorio I: Adquisición de imágenes radiológicas

1. Configuración instrumental de irradiación.
2. Adquisición de imágenes de rayos X con detector digital.
3. Estudio del efecto de parámetros de adquisición e irradiación.

MÓDULO V: Introducción a operaciones orientadas y operaciones geométricas

1. Detectores de bordes en base a gradientes discretos y Laplaciano.
2. Conceptos de convolución para evidenciar bordes.
3. Filtros de suavizado y definición de medias.
4. Cambios de dimensiones. Ampliación y reducción por interpolación.
5. Operaciones rotacionales, de traslación y de reflexión.

MÓDULO VI: Procesos estocásticos

1. Aleatoriedad en la física.
2. Conceptos generales sobre procesos estocásticos.
3. El transporte de radiación como proceso estocástico.
4. Reformulación integral de la ecuación de transporte.

MÓDULO VII: Ejemplos de aplicación de la técnica de simulación Monte Carlo

1. Cálculo de π usando simulación Monte Carlo.
2. Evaluación de integrales definidas utilizando simulación Monte Carlo.
3. El método Monte Carlo aplicado al transporte de radiación.

MÓDULO VIII: Descripción de configuraciones radiológicas en simulación Monte Carlo

1. Parámetros involucrados en la simulación del transporte de radiación.
2. Definición de *setups* virtuales.
3. Los códigos PENELOPE v2008 y FLUKA v2001.

MÓDULO IX: Radiodiagnóstico anatómico estudiado con simulación Monte Carlo

1. Imágenes morfológicas.
2. Radiodiagnóstico para estructuras anatómicas.
3. Aplicaciones en radiografía y mamografía.

MÓDULO X: Radiodiagnóstico metabólico estudiado con simulación Monte Carlo

1. Imágenes funcionales.
2. Radiodiagnóstico para fisiología metabólica.
3. Aplicaciones en cámara Gamma.

MÓDULO XI: Reconstrucción tomográfica en radiodiagnóstico

1. Introducción a las técnicas matemáticas de reconstrucción tomográfica.
2. Efecto de las características del haz y los parámetros de adquisición.
3. Aplicaciones en radiodiagnóstico anatómico: Tomografía Axial Computada (CT).
4. Aplicaciones en radiodiagnóstico metabólico: *Positron Emission Tomography (PET)* y *Single Photon Emission Computed Tomography (SPECT)*.
5. Nociones sobre requerimientos de *matching* y fusión de imágenes anatómicas y metabólicas.

MÓDULO XII: Experiencia de Laboratorio II: Realización de tomografía computada

1. Configuración instrumental de irradiación.
2. Determinación de muestras de interés biológico para tomografía.
3. Estudio del efecto de parámetros de adquisición e irradiación.
4. Estudio del efecto de parámetros de reconstrucción tomográfica.
5. Estudio de la formación de artefactos: interpretación física y matemática.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA SUGERIDA

1. Awcock, G., and R. Thomas. *Applied Image Processing* McGraw Hill, New York, 1996.
2. Baxes, G., *Digital Image Processing* Wiley, New York, 1994.
3. F. Salvat et al. *PENELOPE, an algorithm and computing code for Monte Carlo simulation of electron photon showers* Ed. NEA, 2003.
4. Battistoni G. et al. *The FLUKA code: Description and benchmarking* Proceedings of the Hadronic Shower Simulation Workshop Fermilab 6-8 Sept AIP Conference Proceeding 896, 31-49, (2007)
5. Gonzalez, R.C.[Rafael C.], Woods, R.E. *Digital Image Processing* Third Edition, Prentice Hall, 2008.
6. M. Valente *Física Médica* Notas del curso de especialidad en FaMAF 2013. (disponible en: <http://www.famaf.unc.edu.ar/valente>)

Índice

1.. Módulo I: Introducción al transporte de radiación	10
1.1.. Transporte de radiación e interacciones	10
1.2.. Estado de fase en transporte de radiación	11
1.3.. Bases para el cálculo de observables a partir de la ecuación de transporte de radiación	12
1.3.1.. Densidad de fluencia energética	12
1.4.. Modelos de interacción de partículas con la materia a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann	13
1.4.1.. Périda energéticas en interacciones de partículas cargadas	14
1.4.2.. Efectos angulares por interacciones de partículas cargadas	14
1.4.3.. Determinación de distancias de interacción	14
1.5.. Aproximaciones para el transporte de fotones (radiación indirectamente ionizante) en medios materiales	15
2.. Módulo II: Fundamentos básicos del procesamiento de imágenes	18
2.1.. Introducción al procesamiento de imágenes	18
2.2.. Formato de imagen y representación digital	18
2.2.1.. Bandas para imágenes digitales	19
2.2.2.. Representación digital: mapa de bits (Bitmaps)	19
2.2.3.. Representación digital: imágenes vectoriales	20
2.2.4.. Modificación de colores en imágenes	20
2.2.5.. Histograma de una imagen	22
2.2.6.. Resolución de una imagen	23
2.2.7.. Resolución, tamaño de imagen y tamaño de archivo	23
2.2.8.. Contraste en una imagen	23
2.3.. Vínculo físico del origen de imágenes	24
2.4.. Modificación de una imagen	25
2.4.1.. Modificación de colores o tonalidades: Corrección γ	25
2.4.2.. Modificación de imagen: inversión (<i>flip</i>)	25
2.4.3.. Modificación de imagen: reflexión (<i>mirror</i>)	26
2.4.4.. Modificación de imagen: interpolación	26
2.4.5.. Comparación cualitativa de performance de algoritmos de interpolación	27
2.5.. Ejercitación 1 del capítulo II	27
2.6.. Relaciones básicas entre pixels	28
2.7.. Operadores sobre imágenes	29
2.7.1.. Adición y diferencia de imágenes	30
2.8.. Operaciones sobre pixels	30
2.9.. Transformadas discretas: La transformada de Fourier	31
2.10.. Filtros	33
2.10.1.. Filtros de paso de banda	38
2.10.2.. Filtros de suavizado	39
2.10.3.. Máscaras para filtrado	40
2.11.. Ejercitación 2 del capítulo II	41
3.. Módulo III: Sistemas de detección de uso radiológico	43
3.1.. Procesos para la detección de radiación electromagnética	44
3.2.. Procesos para la detección de neutrones	45
3.3.. Procesos para la detección de electrones	46
3.4.. Procesos para la detección de partículas cargadas pesadas	46
3.5.. Detectores gaseosos	47

	7
3.5.1.. Cámaras de ionización	47
3.5.2.. Contador proporcional	48
3.5.3.. Contador Geiger-Müller	49
3.6.. Detectores de estado líquido y sólido	49
3.6.1.. Detectores centelladores	50
3.6.2.. Films radiográficos	53
3.7.. Adaptación de sistemas de detección al radiodiagnóstico médico	54
4.. Módulo IV: Experiencia de Laboratorio I - Adquisición de imágenes radiológicas	56
5.. Módulo V: Procesamiento de imágenes con derivadas - Detección de esquinas y bordes	58
5.1.. Detección de bordes utilizando derivadas	58
5.2.. Gradiente de una imagen	58
5.2.1.. Detección de bordes: El operador de Sobel	59
5.2.2.. Detección de bordes: El operador de Prewitt	60
5.2.3.. Detección de bordes: El operador de Roberts	60
5.2.4.. Detección de bordes: Operador de Kirsch	60
5.2.5.. Detección de bordes: Operadores de Robinson y Frei-Chen	61
5.3.. Extensión de los operadores	62
5.4.. El método de Canny: Algoritmo	62
5.5.. Ejercitación 1 del capítulo V	63
6.. Módulo VI: Procesos estocásticos	66
6.1.. Introducción y definiciones de procesos estocásticos	66
6.1.1.. Procesos de estado discreto y cadenas de Markov	67
6.1.2.. Procesos de saltos puros	68
6.1.3.. Procesos de estados continuos y series temporales	68
6.2.. Características y medidas de procesos estocásticos	69
6.3.. Procesos estocásticos estacionarios	69
6.3.1.. Procesos de ruido blanco	69
6.4.. Ejercitación 1 del capítulo VI	70
6.5.. El transporte de radiación como proceso estocástico	70
6.6.. Reformulación integral de la ecuación de transporte	70
6.7.. Ejercitación 2 del capítulo VI	71
7.. Módulo VII: Aplicación de la técnica de simulación Monte Carlo	73
7.1.. Introducción	73
7.2.. Eficiencia del método Monte Carlo	75
7.3.. Cálculo-estimación del número π por medio de técnicas Monte Carlo	75
7.4.. Ejemplos de cálculo de integrales definidas por medio del método Monte Carlo	77
7.4.1.. Método de éxito-fracaso con técnica Monte Carlo	77
7.4.2.. Método de la media muestral con técnica Monte Carlo	77
7.4.3.. Evaluación de integrales definidas	78
7.5.. Ejercitación 1 del capítulo VII	78
7.6.. El método Monte Carlo aplicado al transporte de radiación	79
7.6.1.. Tracking de partículas con el método Monte Carlo	80
7.6.2.. Modelado de colisiones e interacciones con el método Monte Carlo	82
7.6.3.. Ejemplo básico artificial de transporte con el método Monte Carlo	83
7.6.4.. Ejemplo sencillo de transporte con el método Monte Carlo: Columna de neutrones	83
7.7.. Ejercitación 2 del capítulo VII	84

8.. Módulo VIII: Descripción de configuraciones radiológicas en simulación Monte Carlo	86
8.1.. Introducción y parámetros en la simulación del transporte de radiación	86
8.2.. Setups virtuales	86
8.3.. Ejemplos de códigos de simulación Monte Carlo para transporte de radiación . . .	87
8.3.1.. El código PENELOPE v. 2008	87
8.3.2.. El código FLUKA v. 2011	88
8.4.. Ejercitación del capítulo VIII	89
9.. Módulo IX: Radiodiagnóstico anatómico estudiado con simulación Monte Carlo	92
9.1.. Consideraciones para la simulación de imágenes morfológicas	92
9.2.. Radiodiagnóstico para estructuras anatómicas	92
9.3.. Simulación Monte Carlo de prácticas de radiografía y mamografía	93
9.4.. Ejercitación del capítulo IX	94
10..Módulo X: Radiodiagnóstico metabólico estudiado con simulación Monte Carlo	96
10.1..Imágenes funcionales para fisiología metabólica	96
10.2..Aplicaciones en cámara Gamma	97
10.3..Ejercitación del capítulo X	98

MÓDULO I

1.. Módulo I: Introducción al transporte de radiación

El *Capítulo 1.* es un breve resumen dedicado a presentar el formalismo básico y común a las áreas de transporte de radiación. Los modelos que describen los procesos de transporte y colisión están fundamentados en teorías de transporte, entre las cuales la de Boltzmann es la más aceptada y utilizada.

1.1.. Transporte de radiación e interacciones

En términos generales, la ecuación de transporte de Boltzmann es la representación de la distribución estadística de partícula en un entorno fuera del equilibrio. Se aplica al estudiar de varios fenómenos físicos como flujo de calor o carga eléctrica en medios materiales pudiendo determinar cantidades como conductividades térmica y eléctrica.

Como primer paso se hace referencia al transporte de fotones, lo que luego puede generalizarse por medio de desarrollos análogos que incluyan propiedades específicas del tipo de radiación de interés.

La transferencia, absorción y dispersión de energía por parte de la radiación hacia un medio material se determinan por medio de la ecuación de transporte de Boltzmann y modelos específicos de interacción. Existen diferentes expresiones y aproximaciones para la ecuación de transporte de Boltzmann, pudiendo describirse análogamente tanto en forma diferencial como integral.

El objetivo es determinar el flujo total de radiación Φ_T o bien la radiancia de partículas R emitida por una fuente y transportada en un determinado medio material. Bajo ciertas aproximaciones, las cantidades escalares Φ_T y R satisfacen:

$$R(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{d^2 \Phi_T}{dA d\Omega \cos(\theta)} \approx \frac{\Phi_T}{A \Omega \cos(\theta)} \quad (1)$$

donde \vec{r} y $\vec{\Omega}$ son los vectores posición y dirección de movimiento de la partícula que atraviesa el área A formando un ángulo θ con el versor normal a la superficie de A .

Desde un punto de vista matemático, la ecuación de transporte de radiación de Boltzmann es expresada como una ecuación difusiva integro-diferencial, cuya formulación clásica para observables caracterizados por función de distribución Θ dependientes de la posición \vec{r} es:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} \Big|_{int} - \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial \vec{r}} \frac{\vec{p}}{m} + \frac{\partial \Theta}{\partial \vec{p}} \cdot \vec{V} \quad (2)$$

donde \vec{p} y m son momento y masa de la partícula, t indica el tiempo, \vec{V} es el campo de fuerzas y el subíndice *int* hace referencia al modelo específico de interacción/colisión entre las partículas del sistema.

En este sentido, hay diferentes modos de interacción entre el flujo de partículas y el medio material. A este propósito es útil introducir la probabilidad de de ocurrencia de una cierta interacción (i), definida físicamente por la sección eficaz σ_i , referida al i -ésimo mecanismo de interacción. Por tanto, la probabilidad total σ_T de ocurrencia de una interacción, de cualquier tipo, se obtiene por medio de la suma de todas las contribuciones por parte de cada uno de los procesos de interacción. A nivel macroscópico, la sección eficaz total macroscópica Σ_T se define mediante:

$$\Sigma_T \equiv N \sigma_T \quad (3)$$

donde N es la densidad de centros de dispersión por unidad de volumen, *i.e.* $[N] = cm^{-3}$.

Los procesos de interacción incluyen absorción y dispersión o *scattering*, por tanto:

$$\Sigma_T = \Sigma_{abs} + \Sigma_{sca} \quad (4)$$

donde Σ_{abs} y Σ_{sca} indican componentes de absorción y *scattering*, respectivamente.

La distribución de la cantidad de colisiones n a lo largo de la trayectoria recorrida (*path*) así como la distanciamedia entre colisiones sucesivas λ se obtienen de:

$$\frac{dn}{ds} = -\Sigma n \Rightarrow n(s) = n(0) e^{-\Sigma s} \Rightarrow \lambda \equiv \frac{\int_0^\infty s e^{-\Sigma s} ds}{\int_0^\infty e^{-\Sigma s} ds} = \frac{1}{\Sigma_T} \quad (5)$$

La distancia media entre colisiones sucesivas obtenida a partir de esta distribución λ es el camino libre medio o *mean free path* y queda determinado por medio de la sección eficaz total.

1.2.. Estado de fase en transporte de radiación

1

Una partícula de momento p con longitud de onda $\frac{h}{p}$ transportada en un medio material de espesor x tal que $x \ll \frac{h}{p}$ estará completamente determinada (en su espacio de fase) por la posición \vec{r} , la dirección de movimiento $\vec{\Omega}$, la energía E y el tiempo t .

Sea $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ la densidad angular de partículas en estados de fase (7D) $[(x, y, z); (\theta, \phi); E; t]$, que representa la densidad de partículas en el volumen $d\vec{r}$ alrededor de \vec{r} , viajando en direcciones $d\vec{\Omega}$ entorno a $\vec{\Omega}$ con energía E a tiempo t .

El flujo vectorial angular de partículas $\vec{\Psi}$ puede obtenerse a partir de la densidad angular y la velocidad \vec{v} de las partículas:

$$\vec{\Psi} \equiv \vec{v} N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \quad (6)$$

El flujo angular escalar (o simplemente flujo angular) Ψ se obtiene a partir de la expresión 6, y sus unidades son $cm^{-2} s^{-1} str^{-1}$.

Integrando el flujo angular Ψ en todas direcciones para valores dados de E , \vec{r} y t se obtiene una cantidad proporcional a la tasa de población-ocupación del estado (\vec{r}, R, t) , a veces denominado tasa de “reacción” o “creación”. A partir de esto, puede determinarse el flujo escalar (o simplemente flujo) Φ_T dado por:

$$\Phi_T \equiv \int_{4\pi} \Psi d\Omega \quad (7)$$

La tasa de ocurrencia de eventos (por unidad de volumen), en términos de la probabilidad de cada j-ésimo tipo de interacción Λ queda determinada por:

$$\Lambda \equiv \Sigma_j \Phi_T \quad (8)$$

La fluencia angular se obtiene a partir de la integral en el tiempo del flujo, y representa el número total de partículas por unidad de área por unidad de energía atravesando el punto \vec{r} con dirección $d\Omega$ entorno a Ω .

Así mismo, puede calcularse la fluencia escalar (o fluencia total) $J(\vec{r}, E, t)$ que resulta de integrar la fluencia angular para todas las direcciones posibles:

$$J = |\vec{J}(\vec{r}, E, t)| = \int_{4\pi} \vec{v} N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega} \cdot \hat{n} \quad (9)$$

¹Tomado de “Notas de Física Médica” M. Valente 2013.

donde $|\vec{J}|$ es la corriente de partículas y \hat{n} representa un versor en dirección arbitraria para el cálculo de la fluencia escalar J .

A partir de esto, puede plantearse la ecuación de transporte de radiación de Boltzmann, dada por:

$$\frac{1}{|\vec{v}|} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi - S = \iint_{4\pi} \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) dE' d\vec{\Omega}' \quad (10)$$

donde S es la fuente de radiación y $K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$ es el operador del kernel que cambia el estado de fase de las “coordenadas” primadas $(\vec{\Omega}', E')$ a las sin primar $(\vec{\Omega}, E)$ debido a los procesos de *scattering* en la posición \vec{r} .²

1.3.. Bases para el cálculo de observables a partir de la ecuación de transporte de radiación

Para un sistema estacionario *steady state* puede aplicarse el teorema de Liouville³ en una aproximación clásica⁴ para mostrar que un sistema de partículas evoluciona según la mecánica clásica cuya la densidad de estados se representa en un espacio de las fases constante $\mathfrak{R}^3 \wp^3$, donde \mathfrak{R} y \wp refieren a los espacios de posición \vec{r} y de momento \vec{p} , respectivamente.

En estado de equilibrio térmico la probabilidad de ocurrencia de un estado se determina por medio de la estadística de Fermi-Dirac para la cual la función de distribución del sistema homogéneo depende únicamente de la energía E .

La expresión 2 de la ecuación de Boltzmann puede simplificarse para situaciones en que el término de interacciones $\frac{\partial \Theta}{\partial t}|_{int}$ sea proporcional a la diferencia entre la función de distribución Θ en presencia de efectos externos \vec{V} y la función de distribución en equilibrio térmico. Esta condición es equivalente a asumir que una vez cesen los efectos externos, el sistema retorna al equilibrio, debido a las interacciones, con velocidad determinada (proporcional específicamente) por la desviación inicial respecto de la condición de equilibrio. Como se mencionó, a partir de estas consideraciones puede calcularse cantidades como tiempo de relajación (inclusive pesado por energía de sistema), conductividad térmica/eléctrica y difusividad, entre otros.

1.3.1.. Densidad de fluencia energética

Como ejemplo de la aplicación del formalismo para el estudio de observables, se considera el caso de la energía E , que es típicamente la cantidad más importante a fines dosimétricos ya que determina la dosis absorbida.

Sea \bar{E} el valor de expectación de la energía E , sin considerar la componente de energía en reposo, portada por todos los *quanta* que constituyen el haz N_q . La fluencia energética Ψ se define por:

$$\Psi \equiv \frac{d\bar{E}}{dA} \quad (11)$$

Entonces, para un haz monocromático se tiene $\bar{E} = E_0 N_q$, como se espera. Y, por tanto, $\Psi = E_0 \Phi$.

²Nótese que el efecto de la interacción es un cambio en la energía y en la dirección de movimiento!

³Aplicado a sistemas conservativos.

⁴válido también para mecánica Hamiltoniana.

Para el estudio de la evolución de sistemas debido a perturbaciones externas, es conveniente considerar el tiempo t_0 en ausencia de fluencia energética $\Psi(t_0) = 0$ y el tiempo t_{max} que se corresponde con el máximo de fluencia energética $\Psi(t_{max}) = \Psi_{max}$.

La tasa de fluencia energética Υ puede calcularse para cualquier tiempo t en el intervalo (t_0, t_{max}) se calcula a partir de:

$$\Upsilon = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{E}}{dA} \right) \Rightarrow \Psi(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Upsilon(t') dt' \quad (12)$$

Por tanto, manteniendo constante la tasa de fluencia energética $\Psi(t_0, t) = \Upsilon(t - t_0)$ resulta que la tasa de fluencia energética, también denominada densidad de flujo energético, Υ es proporcional a la densidad de flujo Φ si el haz es monocromático $\Upsilon = E_0\Phi$.

De modo que para determinar observables, experimentalmente, por medio de mediciones a tiempo t en la posición \vec{r} , en términos de la energía (cinética) E y la dirección de movimiento $\vec{\Omega}$ dado por los ángulos polar y azimutal (θ, ϕ) , resulta que la densidad de flujo diferencial es $\dot{\Upsilon}(E, \theta, \phi)$ y la densidad de flujo se obtiene de:

$$\Upsilon = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^E \Upsilon(E', \theta', \phi') \sin(\theta') d\theta' d\phi' dE' \quad (13)$$

En unidades de inversa de área y tiempo, $cm^{-2}s^{-1}$, típicamente.

1.4.. Modelos de interacción de partículas con la materia a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann

Esta sección presenta, de modo extramamente escueto, los resultados principales para los fenómenos de interacción debido al paso de partículas atravesando un medio material.

Cada uno de los modelos se obtiene de la aplicación de la ecuación de transporte, sujeto a las consideraciones necesarias en cada caso⁵. En particular, para cada tipo de radiación y material con el que se interactúa, el problema consiste en describir las propiedades de la fuente de radiación (el término S en la expresión 11) e introducir los modelos físicos que determinan el operador *kernel* $K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$ a partir de las funciones de distribución de probabilidades asociadas a cada tipo de proceso de interacción posible. Para el caso de radiación primaria, el término S representa completamente la fuente, mientras que para la radiación secundaria, *scattering* en general, la producción misma de partículas debido a las interacciones de radiación primaria.

Como resultado de las interacciones de partículas cargadas de velocidad $v = \beta c$ se producen pérdidas energéticas en cada colisión ΔE , y correspondiente pérdida de energía por unidad de camino recorrido $\frac{dE}{dy}$, donde y es la dirección a lo largo del *track*.

Una vez se realizan los modelos de interacción, se determinan las funciones de distribución de probabilidades que dan cuenta de las características estadísticas de los procesos físicos, que quedan determinados por las secciones eficaces σ .

A partir de las expresiones 5 y 11 puede calcularse el número medio de colisiones con pérdida energética entre E_{loss} y $E_{loss} + \Delta E_{loss}$ al recorrer la distancia δy :

$$\frac{dE}{dy} = \rho_e \delta y \frac{d\sigma}{dE} dE \quad (14)$$

donde ρ_e es la densidad electrónica.

La determinación del operador *kernel* $K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$ requiere del conocimiento de los mecanismos por los cuales se produce en cambio de energía y las deflexiones angulares.

⁵No se presentan las derivaciones específicas a partir de la ecuación de transporte, ya que está fuera del alcance de este curso.

1.4.1.. Périda energéticas en interacciones de partículas cargadas

Cuando las interacciones ocurren con los electrones orbitales de los átomos blanco, se producen en general ionizaciones, excitación atómica o bien excitación colectiva. En medios absorbentes delgados las colisiones que se producen presentan varianzas grandes.

Para partículas cargadas pesadas (de carga Z_p y masa molar M_p) interactuando con un material homogéneo constituido por átomos de número atómico Z_A y masa molar M_A , la pérdida de energía por colisiones pueden obtenerse a partir de la teoría de Bethe-Bloch, que permite determinar el *stopping power* a lo largo del *track* ($\frac{dE}{dy}$):

$$\frac{dE}{dy} = 4r_e^2 \rho m_e c^2 \frac{Z_A}{M_A} \frac{Z_p^2}{\beta^2} \times \left[\frac{1}{2} \ln(2m_e c^2 \beta^2 W_{max} \gamma^2) - \beta^2 - \ln(I) - \frac{C}{Z_A} - \frac{\delta}{2} \right] \quad (15)$$

donde r_e y m_e son el radio clásico y masa de electrón en reposo, respectivamente.

Los últimos tres términos entre corchetes representan los efectos de potencial medio de ionización I , coeficiente de apantallamiento nuclear C y efecto de densidad δ .

1.4.2.. Efectos angulares por interacciones de partículas cargadas

Las partículas cargadas sufren deflexiones angulares al atravesar e interactuar con un medio material. Existen desviaciones pequeñas debidas a interacciones de tipo Coulombianas en el *scattering* con el campo nuclear.⁶

El efecto de dispersión angular por efecto Coulombiano es representado por la teoría de Molière, produciendo distribuciones de deflexiones prácticamente Gaussianas $P(\theta)$, de acuerdo con:

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi\theta^{*2}} e^{-\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^2\right]} d\Omega$$

$$P(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta^*} e^{-\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_{plano}}{\theta^*}\right)^2\right]} d\theta_{plano} \quad (16)$$

donde θ^* es la media de la distribución Gaussiana y θ_{plano} representa la proyección planar del ángulo polar que forma el ángulo sólido $d\Omega$ y se trabaja en la aproximación a bajo ángulo, de modo que $\theta^2 \approx \theta_x^2 + \theta_y^2$, para las proyecciones planares en los ejes x e y , siendo θ_x^2 y θ_y^2 independientes pero respetando la misma distribución.

1.4.3.. Determinación de distancias de interacción

La distancia atravesada dentro del medio material se denomina *radiation length* X , típicamente medida en gcm^{-2} .

A modo de ejemplo, para el caso particular de electrones de energías altas, la pérdida de energía dominante es por medio de radiación de Bremsstrahlung y producción de pares. En este caso, la *radiation length* para estos dos procesos se denomina X_0 y se calcula a partir de la teoría de Tsai:

$$X_0 = \frac{B}{4\alpha r_e^2 N_{Av}} \frac{1}{Z^2 [L_{rad} - f(Z)] + ZL'_{rad}} \quad (17)$$

⁶Para el caso particular de haces de hadrones, las interacciones fuertes contribuyen también a los efectos de dispersión múltiple (*multiple scattering*.)

Los parámetros L_{rad} y L'_{rad} son coeficientes que pueden determinarse para cada tipo de átomo. Por otro lado, la función parametrizada $f(Z)$ se obtiene de:

$$f(Z) = (\alpha Z)^2 \quad (18)$$

$$\left[[1 + (\alpha Z)^2]^{-1} + 0,202 - 0,0369(\alpha Z)^2 + 0,008(\alpha Z)^4 - 0,002(\alpha Z)^6 \right]$$

Para el caso de moléculas, se utilizan modelos de composición efectiva, y la *radiation length* $X_{0,mol}$ de compuestos formados por componentes con pesos relativos q_k , puede calcularse de modo aproximado utilizando:

$$\frac{1}{X_{0,mol}} = \sum_k \frac{q_k}{X_k} \quad (19)$$

1.5.. Aproximaciones para el transporte de fotones (radiación indirectamente ionizante) en medios materiales

En el caso particular que se estudiará en el presente curso, el interés está en los procesos físicos involucrados en la interacción de rayos X de radiodiagnóstico, con medios materiales de interés biológico.

Si se consideran las configuraciones típicas, y los procesos más probables en las geometrías usuales en radiodiagnóstico, resulta que la radiación primaria proviene de la fuente S que en este caso se trata del haz de rayos X utilizado.

Los procesos de interacción suceden dentro del paciente y el haz emergente, determinado por la ecuación de transporte de Boltzmann, formado tanto por radiación primaria (proveniente de la fuente S) y radiación de *scattering* generada por interacciones dentro del paciente, llega en definitiva al sistema de detección para formar la imagenradiológica.

Según la energía del haz de la fuente S , y las propiedades de absorción/dispersión, así como de las dimensiones físicas del paciente, resultará que la mayor parte del flujo emergente se corresponderá con la componente primaria o de *scattering*.

Incorporando los modelos de interacción radiación-materia que corresponden a fotones con energías de kilovoltaje, típicas de radiodiagnóstico, tejidos biológicos y para dimensiones típicas de pacientes, resulta que en el flujo emergente la componente de radiación primaria es prácticamente todo el flujo, existiendo contribuciones del orden del 2% por parte del *scattering*. Por tanto, la descripción del transporte de la componente primaria del flujo emergente proporciona una buena aproximación del flujo de radiación que alcanzará el detector para dar lugar a la formación de la imagen.

Para modelar el transporte de radiación primaria, utilizando la ecuación de transporte de Boltzmann en la expresión 11, se introducen algunas aproximaciones a fin de facilitar la resolución del problema aplicable a las condiciones propias del proceso radiológico típico.

La primera condición es considerar el problema en estado estacionario, ya que se admite el equilibrio del flujo incidente/interactuante/emergente. De este modo, se tiene que se anula el primer término de la expresión 11, ya que $\frac{\partial}{\partial t} \Psi = 0$.

Suponiendo que el transporte se realiza, principalmente, en una dirección, denominada z , el segundo término en la expresión 11 resulta $\Omega \cdot \vec{\nabla} = \frac{d}{dz}$.

El problema así planteado presenta simetría azimutal, por tanto: $\iint_{4\pi} dE' d\vec{\Omega}' = \int dE' 2\pi \int \sin(\theta) d\theta$.

Si el haz emergente está compuesto, casi exclusivamente por radiación primaria, ésta debe haber atravesado el material (paciente) prácticamente sin colisiones, es decir, que la integral aplicada al operador del *kernel* $\int dE' 2\pi \int \sin(\theta) d\theta K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \sim \mathbf{0}$ (operador nulidad).

Por lo tanto, la ecuación de transporte de Boltzmann se reduce a:

$$\frac{d}{dz}\Psi^* - S = 0 \quad (20)$$

Para Ψ^* a lo largo del eje z .

además, la fuente de radiación S es el flujo emitido por una fuente de modo tal que emergen rayos *quasi* paralelos con distribución *quasi* uniforme del frente onda, considerado plano y homogéneo. Es decir, $S = \Psi_{source}(z) = \Psi^*$.

A partir de la expresión 20 es inmediato que $\Psi^*(z) = \Psi(z=0)e^{-cz}$, conocida como ecuación de Lambert-Beer y describe la conocida relación de atenuación exponencial por parte de la radiación al atravesar un medio material. El análogo de este proceso a nivel microscópico es la penetración cuántica de la barrera de potencial, cuya solución coincide, como es de esperar.

De este modo, se obtiene a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann una expresión significativamente útil para describir, de modo aproximado, el comportamiento de los procesos de interacción en el ámbito de radiología. Bajo estas aproximaciones, se asume que las contribuciones de *scattering* son despreciables, que el haz de radiación proviene de una fuente que emite luz en un frente de onda plano paralelo uniforme y en fase, así como que el medio irradiado es homogéneo e isotrópico.

En definitiva, la relación encontrada, gracias a las relaciones unívocas descritas al inicio del capítulo, permite cuantificar flujo, fluencia (si se conocen las características energéticas del haz) y demás cantidades vinculadas. Por ejemplo, la intensidad del haz transmitido I satisface:

$$I(z) = I(z=0) e^{-\int dE dz \mu} = I(0) e^{-\int dE \mu(E) \Delta z} = I(0) e^{-\mu(E_0) \Delta z} \quad (21)$$

donde la última igualdad es válida para haces monocromáticos y μ se denomina coeficiente de absorción lineal.

MÓDULO II

2.. Módulo II: Fundamentos básicos del procesamiento de imágenes

Habiendo formalizado las bases físicas de la formación de imágenes radiológicas en el módulo de 1., el presente *Capítulo 2.* introduce los primeros conceptos básicos sobre definiciones, representación y operaciones elementales del procesamiento digital de imágenes.

2.1.. Introducción al procesamiento de imágenes

En términos generales, los procesamientos digitales de imágenes son realizados por medio de computadores. Por tanto, los avances tecnológicos y la proliferación de equipamiento propiciaron que actualmente el fenómeno del procesamiento digital de imágenes constituya un campo muy amplio y variado, que está al alcance incluso de cualquier tecnología doméstica como cámaras digitales, *scanners*, etc.

En términos históricos, las técnicas de procesamiento digital de imágenes surgieron de modo relativamente tardío dentro de las áreas de aplicaciones informáticas. El motivo principal de la demora son los requerimientos de *hardware* y sistemas gráficos de alta *performance*. En modo paralelo, las metodologías teóricas y algoritmos de procesamiento digital son relativamente elaborados y con alto grado de sofisticación. Actualmente se cuenta con tecnología de *hardware* avanzada y se dispone de una muy amplia variedad de *software* para el procesamiento digital de imágenes. Se aprovechan técnicas desarrolladas originalmente, principalmente los conceptos fundacionales, en los primeros intentos de sustentar métodos analíticos e implementación en algoritmos de cómputo que permitieron establecer los primeros pasos en el campo del procesamiento digital de imágenes. Se incorporan continuamente nuevas técnicas, muchas de las cuales se basan en el uso de nuevos conceptos o bien la aplicación de conceptos conocidos a este área específica. Por ejemplo, muchas metodologías de teoría de información son volcadas, adaptadas e implementadas para el desarrollo de métodos de procesamiento digital de imágenes, incluso conceptos propios de la matemática y física, como por ejemplo medidas o métricas y entropía.

Algunos de los métodos elementales, que figuran entre las técnicas desarrolladas al inicio, son:

- Lectura y representación digital de imágenes.
- Modificación de la imagen.
- Transformaciones en el color de la imagen.
- Generación de efectos dentro de la imagen.

2.2.. Formato de imagen y representación digital

Actualmente, para la cultura social las imágenes constituyen un importante lenguaje en si. De hecho, los mensajes de contenido visual y simbólico son común-

mente empleados para transmitir diferentes tipos de información. Por lo tanto, surge la necesidad de contar con un soporte para la representación digital de imágenes que permita luego modificar el mismo a fin de modificar el contenido visual y simbólico de las imágenes.

2.2.1.. Bandas para imágenes digitales

Al identificar los elementos que componen una imagen, es de gran relevancia, especialmente para las aplicaciones físicas, considerar que la imagen ha sido formada por algún tipo fuente de radiación ondulatoria, como electromagnética o acústica, o bien por algún tipo de radiación corpuscular como neutrones, electrones, positrones, etc.

En configuraciones instrumentales-experimentales que utilizan rayos X (radiografía) o columnas de neutrones (neutrografía), la radiación incidente puede atravesar la escena bajo estudio, de acuerdo con la expresión 21. La radiación emitida por la fuente interúa con elementos físico presentes en la escena, lo que se denomina “campo instantáneo de vista (CIV)”.

Como se estudiará en los capítulos posteriores, la manera particular en que ocurrirán los procesos de interacción depende de los procesos físicos involucrados en cada caso. También hay dependencia según la geometría de la disposición instrumental-experimental y de los detalles técnicos del arreglo experimental en consideración.

Desde un punto de vista general, el CIV es una subregión de la escena que forma parte del sistema físico. De acuerdo con la teoría desarrollada en el capítulo 1., como consecuencia de los procesos de interacción/colisión descritos por la ecuación de transporte de Boltzmann, se llega al resultado de que la interacción de la radiación con este elemento físico es también radiación, cuya energía (o longitud de onda que es frecuentemente utilizada para muchas aplicaciones, como luz visible o radares) no necesariamente es igual a la que incide originalmente.

En términos instrumentales, la radiación detectada es conducida hasta un grupo de detectores, frente a los cuales se encuentra un conjunto de filtros o un espectroradiómetro, cuya función es seleccionar un conjunto de intervalos de energía ($\Delta E_1, \Delta E_2, \dots, \Delta E_j$) o bien de longitudes de onda ($\Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2, \dots, \Delta \lambda_j$) que requieren de diseños ópticos especialmente adaptados y calibrados en su conjunto.

2.2.2.. Representación digital: mapa de bits (Bitmaps)

Un Bitmap es un modo elemental para representar imágenes digitales como información en el *hardware*, específicamente la memoria, de un computador. Consiste, básicamente, en formar arreglos de elementos (vectores, matrices, tensores) ordenados de modos específicos. En general, para el caso típico de imágenes 2D, se realiza un ordenamiento por filas de elementos de matriz (*pixels*) asignando a cada uno un valor que determina “el color” en esa posición de la imagen.

En el caso de imágenes en tonalidades de grises, el valor del elemento de matriz es un escalar; mientras que para el caso de imágenes a color el valor de cada elemento de matriz es un vector de tres coordenadas, cada una de las cuales especifica “el grado de influencia” de los colores rojo (Red “R”), verde (Green “G”) y azul (Blue “B”), de modo que se denomina representación RGB). Existen otros modos de representación a color, como por ejemplo CMYK (cián, magenta, amarillo y negro).

Típicamente se emplean escalas (que determinan “rangos dinámicos”) en 2^N bits, y se denomina N - bits. Es decir, para el caso más común de 8-bits, la escala es $[0, 255]$, ya que por costumbre se define el rango como $[0, 2^N - 1]$.

El uso típico de 8-bits está basado, principalmente, en dos motivos. En primer lugar, estudios biométricos muestran que el ojo humano no es suficientemente sensible para diferenciar más de 256 niveles de intensidad para un dado color. Además, el rango de valores para los elementos de matriz determinan las necesidades en cuanto a la capacidad de almacenamiento en el computador.

Entonces, para imágenes en tonalidades de grises, conocidas como “de una banda” el rango para los valores de los elementos de matriz (escalares) es $[0, 255]$, mientras que para imágenes a color, los valores de elementos de matriz (vectores de 3 coordenadas) asumen valores en $([0, 255], [0, 255], [0, 255])$. Si embargo, también es frecuente encontrar representaciones normalizadas para imágenes a color, es decir, elementos de matriz en $([0, 1], [0, 1], [0, 1])$ para determinar los colores RGB.

Todos los colores en el rango visible pueden representarse como combinaciones RGB, variando desde el negro $(0, 0, 0)$ al blanco $(255, 255, 255)$. Por lo tanto, una imagen RGB es representada por un arreglo bidimensional de *pixels*, cada uno codificado en 3 bytes pudiendo asumir 256^3 diferentes valores de combinaciones vectoriales, es decir 16.8 millones de diferentes colores, aproximadamente.

2.2.3.. Representación digital: imágenes vectoriales

Las imágenes vectoriales están constituidas por contornos y rellenos definidos matemáticamente, vectorialmente, por medio de ecuaciones que describen perfectamente cada ilustración. De este modo, es posible implementar *scaling* sin pérdida de calidad. El proceso de *scaling* es típico en la formación, producción o reproducción en dispositivos. Por ello, la importancia de mantener la invariabilidad. Esta característica resulta de particular relevancia en casos que las ilustraciones contengan marcadas zonas con contornos curvados, ya que el pixelado implicaría una pérdida de resolución, como indica la figura .

2.2.4.. Modificación de colores en imágenes

Es posible cuantificar la diferencia entre dos colores (en representación digital, valores del trio vectorial RGB) calculando la distancia, según algún tipo de métrica, Euclídea por ejemplo, entre los vectores que los representan.

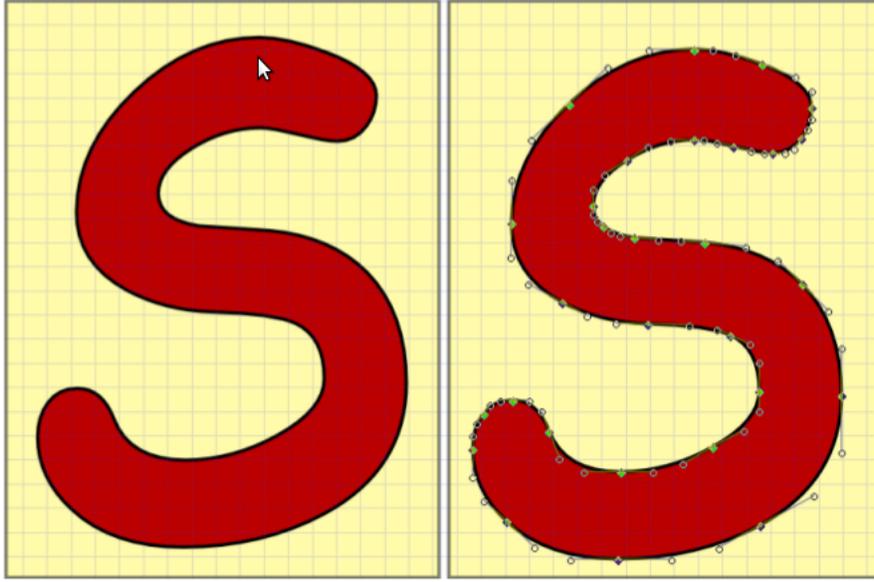


Figura 1. Imagen en representación vectorial (izquierda) y en pixelado bitmap (derecha).

Se el color C_1 representado por el vector (R_1, G_1, B_1) y el color C_2 representado por (R_2, G_2, B_2) . Entonces, en el espacio vectorial, la distancia $D(C_1, C_2)$ entre éstos está dada por:

$$D(C_1, C_2) = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + (G_1 - G_2)^2 + (B_1 - B_2)^2} \quad (22)$$

Para el caso particular de imágenes de una banda (tonalidades de grises) puede aplicar la misma metodología descrita para imágenes RGB con la simplificación asociada al hecho de que en el espacio de colores, los vectores en la dirección del vector $(1, 1, 1)$ representan las diferentes tonalidades de gris.

Por tanto, existe la equivalencia de que para cualquier *pixel* de tipo RGB (R, G, B) si se lo proyecta sobre $(1, 1, 1)$ se obtiene la contribución de cada tonalidad de gris. Entonces, se tiene:

$$Proy \equiv (R, G, B) \cdot (1, 1, 1) = R + G + B = |\vec{V}| |\hat{n}| \cos(\phi) \quad (23)$$

donde *Proy* es la proyección, \vec{V} es el vector que forma el punto (R, G, B) en el espacio de coordenadas del trío (representación vectorial), \hat{n} es el versor de proyección $(1, 1, 1)$ y ϕ es el ángulo que forma \vec{V} con \hat{n} .

De aquí puede verse que $Proy = \frac{R+G+B}{\sqrt{3}}$ y debe atenderse de que este valor no exceda 255, de modo que es usual renormalizar para obtener $Proy = \frac{R+G+B}{3}$

Ejemplo de modificación de colores: Por detección de bordes

A modo de ilustración de los conceptos generales expuestos sobre representaciones vectoriales-bitmap, se propone un caso de aplicación muy sencillo. Si el objetivo en la detección de bordes (orillas) de las formas en una imagen para obtener el bitmap resultante que resalte los bordes en blanco-negro, puede procederse del siguiente modo: Desplazarse dentro de la imagen *pixel a pixel* comparando el color de cada uno con su vecino de la derecha y su vecino de abajo. Luego, se efectúa el siguiente control (criterio): si al comparar resulta en una diferencia muy grande (“muy grande” es un parámetro⁷ o conjunto de parámetros pre-definidos por el usuario, o bien automatizados en casos más elaborados) el *pixel* en consideración forma parte del borde y se le asigna el color blanco, de otro modo se asigna el color negro.

2.2.5.. Histograma de una imagen

Dada la representación digital de una imagen por medio del arreglo de N filas por M columnas se determina una matriz $M \times N$, en la cual la representación digital de bitmap estará dada por la función distribución $f(m, n)$, para $n \in [0, N - 1]$ y $m \in [0, M - 1]$, típicamente N y M son potencias de 2, como ya se enunció.

El histograma de una imagen $h(i)$, comúnmente denominado “*image enhancement*” o “*image characterization*” es un vector que da cuenta de la cantidad de *pixels* dentro de la imagen con un cierto valor de elemento. Es decir, para una imagen de α -bits, se tiene:

$$h(i) \equiv \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(f(n, m) - i) \quad \forall i \in [0, 2^\alpha - 1] \quad (24)$$

Una de las técnicas genéricas, que luego se diversifica a una cantidad muy variada de metodologías específicas de procesamiento, es el método de convolución. Sea $w(k, l)$ un arreglo $2 \times K + 1, 2 \times L + 1$, centrado en el “origen” $(0, 0)$ que coincide con el *pixel* central de la imagen. Puede considerarse a $w(k, l)$ como un *kernel* de convolución de modo que aplicado a la imagen $f(n, m)$ resulte:

$$g(m, n) \equiv w(k, l) * f(m, n) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L w(k, l) \cdot f(m - k, n - l) \quad (25)$$

A partir de esta definición, pueden introducirse una gran cantidad de métodos específicos, entre los que se destacan las transformadas, como Fourier, Laplace, Radon, etc.

⁷Este parámetro es denominado “umbral” y su valor condiciona la *performance* de la técnica.

2.2.6.. Resolución de una imagen

A priori, este concepto tiene diferentes acepciones según el contexto en el que se utilice y se podría definir, de modo genérico, como la capacidad para representar o percibir los detalles de una imagen. Se trata de un concepto presente en todo el proceso digital, desde la captura o generación hasta la representación, y afecta (condiciona) el procesamiento posterior.

Una definición útil es: la resolución de una imagen es la cantidad de *pixels* que la describen. Y una medida típica es en términos de “*pixels* por pulgada” (ppi). Por tanto, la calidad de la representación así como el tamaño de la imagen dependen de la resolución, que determina a su vez los requerimientos de memoria para el archivo gráfico a generar.

2.2.7.. Resolución, tamaño de imagen y tamaño de archivo

Los tres conceptos están estrechamente relacionados y dependen mutuamente, aunque se refieren a características diferenciadas y debe evitarse la confusión.

El tamaño de una imagen son sus dimensiones reales en términos de anchura y altura una vez impresa, mientras que el tamaño del archivo se refiere a la cantidad de memoria física necesaria para almacenar la información de la imagen digitalizada en cualquier soporte informático de almacenamiento.

Ciertamente, la resolución de la imagen condiciona fuertemente estos dos conceptos, ya que la cantidad de *pixels* de la imagen digitalizada es fijo y por tanto al aumentar el tamaño de la imagen se reduce la resolución y viceversa.

A modo de ejemplo: duplicando la resolución de una imagen digitalizada, de 50 ppi a 100 ppi, el tamaño de la imagen se reduce a la cuarta parte del original mientras que dividir la resolución por 2. Es decir, se pasa de 300 ppi a 150 ppi obteniendo una imagen con el doble de las dimensiones originales que representan cuatro veces su superficie.

La reducción de la resolución de la imagen, manteniendo su tamaño, provoca eliminación de *pixels*. Entonces, se obtiene una representación (descripción) menos precisa de la imagen, así como transiciones de color más bruscas. El tamaño del archivo que genera una imagen digitalizada es proporcional, como se espera, a la resolución, por lo tanto, variarla implica modificar en el mismo sentido el tamaño del archivo.

2.2.8.. Contraste en una imagen

Conceptualmente, aumentar o disminuir el contraste en una imagen consiste, básicamente y visualmente, en aumentar o disminuir la pendiente de la línea recta con pendiente a 45 grados que representa los grises (con la precaución de no exceder los límites 0-255) entre *input* y *output*, como indica la figura 2.

La transformación correspondiente al cambio de contraste es:

$$V_O(m,n) = (V_I(m,n) - 2^{Y-1}) \tan \phi + 2^{Y-1} \quad (26)$$

donde Y es la escala en bits, V_I y V_O son los valores de *input* y *output*, respectivamente valuados en el pixel (m,n) ; y el ángulo ϕ cooresponde a las propiedades de la transformación lineal de contrastes, específicamente la pendiente (figura 2).

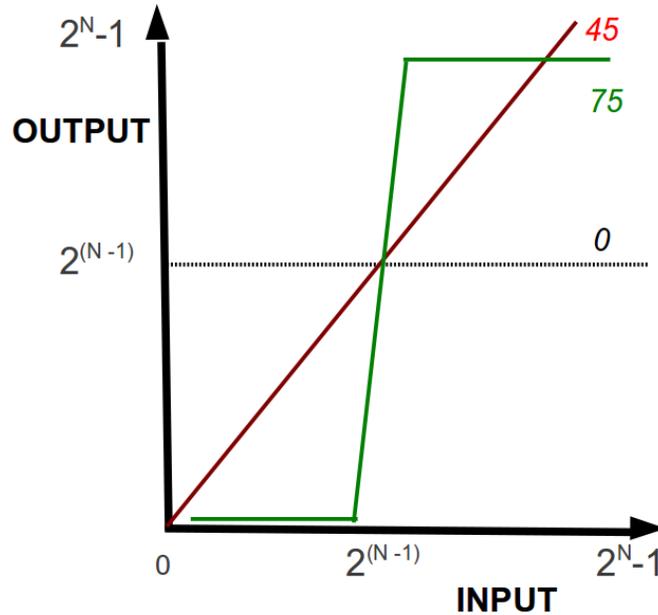


Figura 2. Representación del cambio de contraste entre *input* y *output*.

2.3.. Vínculo físico del origen de imágenes

Las imágenes generadas por radiación electromagnética pueden clasificarse en modo genérico según el ordenamiento de mayor a menor frecuencia.

Rayos γ medicina nuclear, observaciones de astronomía.

Rayos X diagnóstico médico e industria (control de calidad).

Banda ultravioleta Inspección industrial y microscopía biológica.

Banda visible e infrarroja Aplicaciones varias, fotografía.

Microondas radar.

Ondas de radio medicina (MRI) y algunas aplicaciones en astronomía.

2.4.. Modificación de una imagen

Una imagen *input* puede ser modificada por medio de diferentes maneras, según la/s propiedad/es que se modifica/n.

En particular, se consideran a continuación algunas de las modificaciones más frecuentes.

2.4.1.. Modificación de colores o tonalidades: Corrección γ

Existe una amplia variedad de técnicas y criterios para modificar los colores de una imagen. Una de las metodologías más empleada, y sencilla, es la corrección γ , definida a partir de:

$$V_O(m, n) = (2^N - 1) \left(\frac{V_I(m, n)}{2^N - 1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (27)$$

donde el índice γ asume valores $\in \mathfrak{R}$.

Por lo tanto, resulta:

- Para $\gamma = 1$ no hay ninguna corrección.
- Para valores de $\gamma > 1$ hay una gran corrección en el contraste para valores pequeños del color de *input* mientras que una pequeña corrección en el contraste para valores altos. El brillo aumenta más para valores intermedios del color de *input*.
- Para valores de $\gamma < 1$ hay una pequeña corrección en el contraste para valores bajos del color de *input*, mientras que una gran corrección en el contraste para valores altos. El brillo disminuye más para valores intermedios del color de *input*.

2.4.2.. Modificación de imagen: inversión (*flip*)

Básicamente, esta modificación consiste en una transformación que produce un “movimiento” de la columna m , fila n a la columna m y fila $(n_{max} - n) + 1$, para n_{max} como la dimensión en la dirección de n .

Es decir,

$$V_{flip}(m, n) = V_I(m, (n_{max} - n) + 1) \quad (28)$$

donde V_{flip} es la matriz de output que corresponde a la transformación de inversión.

2.4.3.. Modificación de imagen: reflexión (*mirror*)

Básicamente, esta modificación consiste en una transformación que produce un “movimiento” de la fila n , columna m a la fila n y columna $(m_{max} - m) + 1$, para m_{max} como la dimensión en la dirección de m .

Es decir,

$$V_{mirror}(m, n) = V_I((m_{max} - m) + 1, n) \quad (29)$$

donde V_{mirror} es la matriz de output que corresponde a la transformación de reflexión.

2.4.4.. Modificación de imagen: interpolación

A partir de de un muestreo *input* pueden estimarse los valores de la intensidad en puntos diferentes a aquellos puntos donde si se conoce el valor. Entre otras técnicas, se destacan los métodos de *re-sampling*.

De este modo, se emplean diferentes criterios para determinar los valores $V_O(k, l)$ para *pixels* (k, l) donde el *input* V_I no es conocido:

- Interpolación al vecino más cercano.
- Interpolación bilineal.
- Interpolación bicúbica.

La técnica de interpolación al vecino más cercano (*Nearest neighbor interpolation*) está basada en superponer el arreglo 2D *output* al arreglo 2D *input* calculando el valor para los *pixels* (k, l) según los valores conocidos $V_I(i, j)$, utilizando un promedio (que puede cuantificarse de diferentes maneras) de los vecinos más cercanos equidistantes. Sin embargo, puede verse que esta técnica presenta algunos efectos indeseables.

La técnica de interpolación lineal considera los 4 *pixels* más cercanos a $V(k, l)$ para la interpolación. Se realiza un promedio entre estos 4 valores para determinar el valor desconocido del *pixel* (k, l) . La imagen *output* resulta más “suave” que para el caso de la técnica *Nearest neighbor interpolation*. Pero, puede causar que la imagen se vea algo “difusa”.

Entonces, los valores de *pixels* (k, l) , para los cuales no se conoce $V_I(k, l)$ se obtienen a partir de:

$$V_O(k, l) = (1 - \alpha)(1 - \beta)V_I(i, j) + \alpha(1 - \beta)V_I(i + 1, j) + (\alpha - 1)V_I(i, j + 1) + \alpha\beta V_I(i + 1, j + 1) \quad (30)$$

donde $\alpha \equiv k - i$, $\beta \equiv l - j$, $i \equiv \text{floor}(k)$ y $j \equiv \text{floor}(l)$ ⁸.

⁸Aquí la función *floor* se define por medio de asignar al argumento el número entero más grande que sea menor que el argumento.

Por su parte, la técnica de interpolación bicúbica Es el algoritmo de interpolación más utilizado. Considera los 16 *pixels* más cercanos a cada *pixel* (k, l) cuyo valor debe determinarse por interpolación. Se aproxima localmente al valor (el nivel de gris) en la imagen original mediante una superficie polinómica de tipo bicúbica. Resulta ser, de las técnicas aquí descritas, el óptimo al considerar el balance entre tiempo de cómputo y *performance*.

La implementación de este método puede llevarse a cabo por medio de procesar el bloque $B(k, l)$, centraado en el *pixel* (k, l) , cuyas dimensiones se corresponden con las dimensiones de la máscara (16 *pixels* en un arreglo 5×5):

$$B(k, l) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 q_{i,j}^{(k,l)} (k - k')^i (l - l')^j \quad (31)$$

$$k', \in [k - 2, k + 2] \ \& \ l' \in [l - 2, l + 2]$$

donde los coeficientes $q_{i,j}$ deben ser determinados. O bien,

$$V_O(k, l) = h(k) h(l) \quad (32)$$

donde la función de interpolación h se define, a trozos, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} h(p) &\equiv 1 - |p|^2 + |p|^3 \quad \forall |p| < 1 \\ h(p) &\equiv 4 - 8|p|^2 + 5|p|^3 - |p|^3 \quad \forall 1 \leq |p| < 2 \\ h(p) &\equiv 0 \quad \forall p \geq 2 \end{aligned} \quad (33)$$

2.4.5.. Comparación cualitativa de performance de algoritmos de interpolación

- Interpolación de vecino más cercano: El error de posición resulta, a los sumo, medio *pixel*, que es perceptible en objetos con fronteras rectas en las que aparece un efecto de salto después de de esta transformación.
- Interpolación Lineal: Genera una leve disminución de resolución debido al borrono (*blurring*) intrínseco al modo de cálculo del valor promedio, pero disminuye el efecto de salto que presenta el algoritmo de vecino más cercano.
- Interpolación Bicúbica: No presenta el problema del efecto de salto a la vez que genera un menor *blurring*.

2.5.. Ejercitación 1 del capítulo II

1. Implementar un algoritmo basado en el método de umbralamiento para detección de bordes externos (contornos) en una imagen médica.
2. Calcular y graficar el histograma de una imagen médica en de 1 banda.

3. Definir y aplicar un algoritmo de modificación de contraste a una imagen médica en de 1 banda.
4. Definir y aplicar un algoritmo de modificación de color a una imagen médica en de 1 banda. Estudiar el efecto del parámetro γ .
5. Aplicar un algoritmo que simultáneamente produzca un *flip* y un *mirror* a una imagen médica en de 1 banda.
6. Realizar una comparación cuantitativa de la *performance* de los métodos de interpolación por vecino más cercano, lineal y bicúbica.
7. Resaltar los bordes de una imagen médica de 1 banda utilizando los *kernels*

$$w_1(k, l) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } w_2(k, l) \equiv \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

2.6.. Relaciones básicas entre pixels

La relación básica más inmediata entre *pixels* es la distancia D entre dos *pixels* (m, n) y (m', n') .

Los axiomas para definir una métrica o función de distancia entre *pixels* D requieren de los siguientes criterios:

- $D(k, l) \geq 0$ con $D(k, l) = 0 \Leftrightarrow k = l$
- $D(k, l) = D(l, k)$
- $D(k, l) \leq D(k, s) + D(s, l)$

A partir de estas condiciones pueden definirse diferentes métricas. Entre ellas:

Distancia Euclidea

$$D(k, l) \equiv \sqrt{(k - k')^2 + (l - l')^2} \quad (34)$$

Distancia D_4

$$D_4(k, l) \equiv |k - k'| + |l - l'| \quad (35)$$

Distancia D_8

$$D_8(k, l) \equiv \max(|k - k'|, |l - l'|) \quad (36)$$

Las definiciones Euclidea, D_4 y D_8 para la distancia entre *pixels* no depende de adyacencias sino exclusivamente de las coordenadas espaciales (k, l) .

Puede verse, a partir de las definiciones de las métricas que la condición $D(k, l) \leq R$ determina un círculo centrado en (k, l) para la métrica Euclidea, un rombo para la métrica D_4 y un cuadrado para la métrica D_8 .

2.7.. Operadores sobre imágenes

Para operar sobre imágenes pueden utilizarse herramientas basadas en operaciones matriciales de álgebra lineal y operaciones “de array” orientadas *pixel a pixels*. \mathbf{H} es un operador arbitrario sobre una imagen cuya representación matricial es $f(m,n)$ si satisface:

$$\mathbf{H}[f(m,n)] = g(m,n) \quad (37)$$

Además, \mathbf{H} es un operador lineal si:

$$\mathbf{H} \left[\sum_j \alpha_j f_j(m,n) \right] = \sum_j \alpha_j \mathbf{H} [f_j(m,n)] \quad (38)$$

Una aplicación importante de las propiedades de linealidad de operadores sobre imágenes es la descripción de imágenes $g(m,n)$ como contribución “original” ($f(m,n)$) y ruido *random* ($r(m,n)$):

$$g(m,n) = f(m,n) + r(m,n) \quad (39)$$

La imagen de ruido es de tipo *random* si los valores de *pixels* de $r(m,n)$ son aleatorios no correlacionados y con esperanza 0.

Promediando N_{Tot} imágenes con ruido *random* se obtiene la imagen promedio $\langle g \rangle$ dada por:

$$\langle g \rangle(m,n) = \frac{1}{N_{Tot}} \sum_{j=1}^{N_{Tot}} g_j(m,n) \quad (40)$$

La aplicación del teorema del límite central establece que la imagen promedio $\langle g \rangle(m,n) \rightarrow f(m,n)$ (imagen “original”) para $N_{Tot} \rightarrow \infty$.

Otra aplicación útil de los operadores lineales es la substracción de una máscara⁹ $M(m,n)$ a la imagen original $f(m,n)$:

$$g(m,n) = f(m,n) - M(m,n) \quad (41)$$

⁹Un ejemplo típico son las imágenes médicas por contraste, como angiografías.

2.7.1.. Adición y diferencia de imágenes

Para ejemplificar las operaciones, se utilizan imágenes 8-bits.

Por tanto, los valores de la imagen resultado de la adición de dos imágenes varían en $[0, 510]$. Mientras que los valores de la imagen resultado de la diferencia de dos imágenes varían en $[-255, 255]$.

La adecuación (f_A) de los valores de la imagen resultado de adición/diferencia de dos imágenes se realiza del siguiente modo:

$$f_A(m, n) = \mathbf{round}[(2^N - 1) \frac{f(m, n) - \mathbf{mín}[f(m, n)]}{\mathbf{máx}[f(m, n) - \mathbf{mín} f(m, n)]}] \quad (42)$$

Para imágenes de tipo N -bits.

2.8.. Operaciones sobre pixels

La introducción de operaciones espaciales que se llevan a cabo sobre los valores de *pixels* de la imagen permiten:

- Operaciones de un *pixel*.
- Operaciones de vecindad.
- Transformaciones geométricas.

Operaciones de un *pixel*

Se modifica el valor de un *pixel* de modo individual en la imagen original $f(m, n)$, dando como resultado $g(m, n)$ dado por:

$$g(m, n) = \mathbf{T}(f(m, n)) \quad (43)$$

de manera que el valor de imagen es modificado por la transformación \mathbf{T} . Este concepto se aplica, por ejemplo, para determinar “el negativo” de la imagen original.

Operaciones de vecindad

Sea $C(M, N)$ un conjunto de *pixels* ($M := [m_{min}, m_{max}]$ y $N := [n_{min}, n_{max}]$) entorno (vecinos) al *pixel* (m, n) .

A partir de este tipo de operaciones de vecinos puede calcularse, por ejemplo, el valor medio en un entorno rectangular ($M \times N$) de un *pixel* de interés¹⁰. Resulta:

$$g(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{(i, j) \in C(M, N)} f(i, j) \quad (44)$$

¹⁰Este método resulta de utilidad para suprimir detalles o realzar regiones.

Transformaciones geométricas.

Las transformaciones geométricas \mathbf{T} de una image $f(m,n)$ puede obtenerse a partir de una transformación de índole geométrico de coordenadas espaciales: al valor del *pixel* (m,n) se asigna el valor de un *pixel* (i,j) .

Debido a la naturaleza discreta de la representación de imágenes, debe considerarse el proceso de interpolación para obtener los valores de *pixels* como resultado de aplicar l transformación \mathbf{T} .

Una de las categorías principales de los operadores de transformación son las transformaciones denominadas afines, que incluyen translaciones, rotaciones, escalados, reflexiones y proyecciones, entre otros.

Algunos ejemplos de operadores de transformación son:

- Rotación: $\mathbf{T}_{\text{Rot}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- Escaleo: $\mathbf{T}_{\text{Esc}} = \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & e_j \end{pmatrix}$
- Traslación: $\mathbf{T}_{\text{Tra}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_i & t_j & 0 \end{pmatrix}$

2.9.. Transformadas dicretas: La transformada de Fourier

Desde un punto de vista general, las transformadas constituyen operaciones espaciales sobre una imagen original $f(m,n)$, representada en el dominio espacial (que se refiere a las coordenadas (m,n)) y una imagen resultado $F(m,n)$ que procesan los valores de *pixels* en el plano geométrico.

Existen diferentes modos de representar de la imagen, en términos del espacio ce representación:

1. Dominio Espacial: la imagen $f(m,n)$ es representada por una matriz $M \times N$ de *pixels* (m,n) discretos.
2. Dominio Transformado o de frecuencias: la imagen $F(m^*,n^*)$ es representada por una matriz $M \times N$ de variables transformadas (m^*,n^*) .

Como se introdujo de modo cualitativo (26 y 27), una transformación lineal de una imagen original $f(m,n)$ significa:

$$F(m^*,n^*) = \sum_m \sum_n f(m,n) k(m m^*,n n^*) \tag{45}$$

donde k es el *kernel* de la transformación.

La transformada directa (*fordward*) de $f(m,n)$ deviene en $F(m^*,n^*)$, y la transformada inversa (*inverse*) de $F(m^*,n^*)$ deviene en $f(m,n)$. Por tanto, el equivalente a la expresión (45) es:

$$f(m, n) = \sum_{m^*} \sum_{n^*} F(m^*, n^*) k(m^* m, n^* n) \quad (46)$$

donde $k(m^* m, n^* n)$ es el *kernel* de la transformación inversa.

De este modo, se habilita la posibilidad de operar en el espacio de la transformada. Es decir:

$$f(m, n) \xrightarrow{\mathbf{T}} F(m^*, n^*) \xrightarrow{\mathbf{O}} G(m^*, n^*) \xrightarrow{\mathbf{T}^{-1}} g(m, n) \quad (47)$$

donde \mathbf{T} y \mathbf{T}^{-1} representan la transformada directa e inversa, respectivamente. \mathbf{O} es un operador arbitrario.

Resulta de particular importancia la propiedad de los *kernels* de ser separable en variables. Es decir:

$$k(m^* m, n^* n) = k_{(m, n)}(m, n) k_{(m^*, n^*)}(m^*, n^*) \quad (48)$$

La transformada discreta de Fourier bidimensional 2D se define a partir de los *kernels* de transformación:

$$\begin{aligned} k_{TF}(m^* m, n^* n) &= e^{-2\pi i \left(\frac{m m^*}{M} + \frac{n n^*}{N} \right)} \\ k_{(TF)^{-1}}(m^* m, n^* n) &= \frac{1}{MN} e^{2\pi i \left(\frac{m m^*}{M} + \frac{n n^*}{N} \right)} \end{aligned} \quad (49)$$

Por tanto, la operación de transformadas discretas directa (\mathbf{TF}) e inversa ($(\mathbf{TF})^{-1}$) resultan:

$$\begin{aligned} F(m^*, n^*) &= \sum_m \sum_n^{M-1, N-1} f(m, n) e^{-2\pi i \left(\frac{m m^*}{M} + \frac{n n^*}{N} \right)} \\ f(m, n) &= \frac{1}{MN} \sum_{m^*} \sum_{n^*}^{M-1, N-1} F(m^*, n^*) e^{2\pi i \left(\frac{m m^*}{M} + \frac{n n^*}{N} \right)} \end{aligned} \quad (50)$$

Cuyo análogo en espacios continuos es:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \mathbf{TF}[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (ux + vy)} dx dy \\ f(x, y) &= (\mathbf{TF})^{-1}[F(u, v)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i (ux + vy)} du dv \end{aligned} \quad (51)$$

La expresión (??) para la transformada de Fourier puede interpretarse, dejando de lado momentaneamente problemas de existencia y unicidad, como una suma de

exponenciales complejas con pesos para los términos, donde las variables m^* y n^* representan las frecuencias en el dominio de la transformada.

El valor de la transformada en (m^*, n^*) ($F(m^*, n^*)$) contribuye a través de $F(m^*, n^*) e^{2\pi i(ux+vy)}$ y puede verse, ya que $f(m, n)$ es una función real, que $F(m^*, n^*) = F'(m^*, n^*)$, donde $'$ indica el complejo conjugado.

A modo de ejemplo, la figuras 3, 4 y 5 presentan resultados de aplicar la transformada de Fourier de la imagen original $f(m, n)$ para diferentes casos.

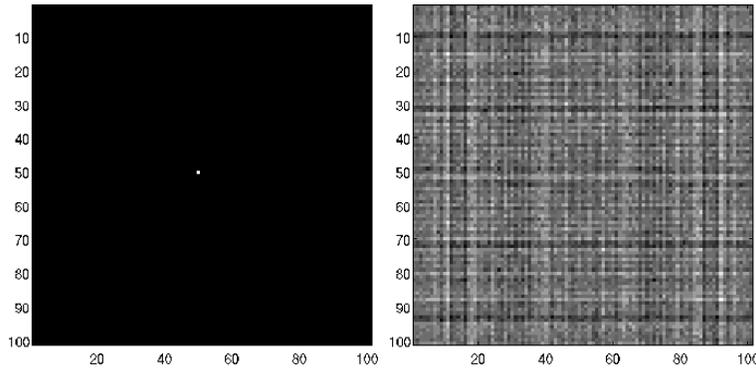


Figura 3. Ejemplo de transformada de Fourier: $f(m, n) = 0 \quad \forall (m, n) \neq (51, 51) \quad m, n \in [1, 101]$ obtenido con plataforma MatLab[®] oficial license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.

2.10.. Filtros

A partir de las definiciones introducidas por las expresiones (??) y (51) resulta posible realizar procesos de filtrado tanto en el dominio espacial de la imagen original $f(m, n)$ como en el dominio de las frecuencias de la transformada $F(m^*, n^*)$.

Una característica significativa, que representa de hecho una de las principales ventajas de los espacios de transformadas, es que la operación de filtrado se realiza por medio de una multiplicación de transformadas; mientras que la operación en el

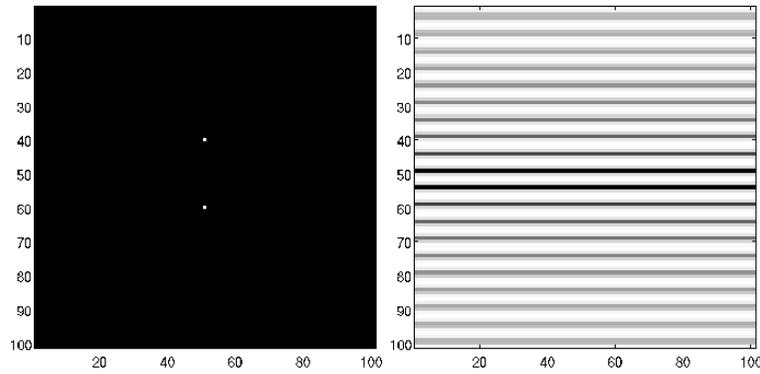


Figura 4. Ejemplo de transformada de Fourier: $f(m,n) = 0 \quad \forall (m,n) \neq (40,51) \vee \neq (60,51)$ $m, n \in [1, 101]$ obtenido con plataforma MatLab[®] oficial license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.

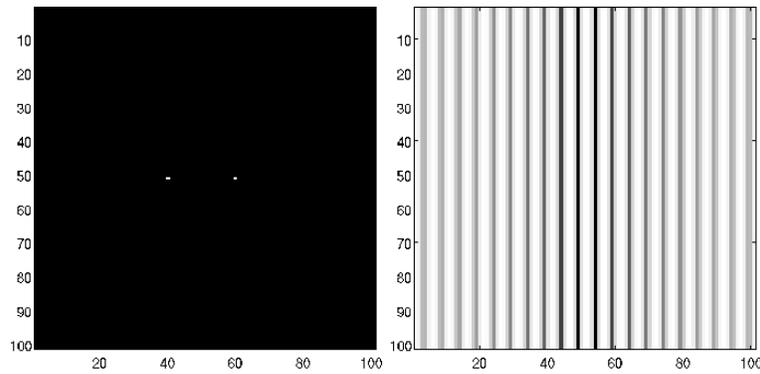


Figura 5. Ejemplo de transformada de Fourier: $f(m,n) = 0 \quad \forall (m,n) \neq (51,40) \vee \neq (51,60)$ $m, n \in [1, 101]$ obtenido con plataforma MatLab[®] oficial license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.

espacio de coordenadas significa una convolución denotada por el símbolo \otimes . En virtud del teorema de convolución, se tiene:

$$f(m,n) \otimes g(m,n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(m,n) g(m-k, n-l) dk dl \quad (52)$$

Aplicando la definición de transformada de Fourier, se obtiene:

$$\begin{aligned} F_{f,g}(m^*,n^*) &\equiv \mathbf{TF}[f(m,n) \otimes g(m,n)] = \\ \mathbf{TF}[f(m,n)] \mathbf{TF}[g(m,n)] &= F(m^*,n^*) G(m^*,n^*) \end{aligned} \quad (53)$$

Para una dada función original $f(m,n)$ y su correspondiente transformada de Fourier $F(m^*,n^*)$, en referencia a la expresión (53) el operador $G(m^*,n^*)$ se define como un *filtro espacial lineal* o *función de transferencia* de filtro.

Entonces, la imagen resultado del proceso de filtrado $h(m, n)$ se obtiene aplicando la transformada inversa:

$$h(m, n) = \mathbf{TF}^{-1}[F_{f,g}(m^*, n^*)] \quad (54)$$

El filtro queda determinado por medio de la función de transferencia o bien por la *respuesta de impulso* $j(m, n)$ definida a partir de:

$$j(m, n) = F_{f,g}(m, n) = \delta(m, n) \otimes j(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(m, n) j(k-m, l-n) dk dl \quad (55)$$

Resulta que $j(m, n)$ es un filtrado intenso en términos de la función δ de Dirac. A fines de cómputo, la transformada discreta de Fourier puede obtenerse, en modo análogo a la expresión (50) operando:

$$\begin{aligned} F(m^*, n^*) &= \mathbf{TF}[f(m, n)] = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \\ &\left[\cos\left(2\pi\left(\frac{m^* m}{M} + \frac{n^* n}{N}\right)\right) + i \sin\left(2\pi\left(\frac{m^* m}{M} + \frac{n^* n}{N}\right)\right) \right] \\ f(m, n) &= \mathbf{TF}^{-1}[F(m^*, n^*)] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(m^*, n^*) \\ &\left[\cos\left(-2\pi\left(\frac{m^* m}{M} + \frac{n^* n}{N}\right)\right) - i \sin\left(2\pi\left(\frac{m^* m}{M} + \frac{n^* n}{N}\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (56)$$

Debido a la naturaleza discreta del espacio de muestreo intrínseco al procesamiento digital de imágenes, se determina la relación entre dominios espaciales y de frecuencias por medio de:

$$\Delta m^* = \frac{1}{M \Delta m} \quad (57)$$

$$\Delta n^* = \frac{1}{N \Delta n} \quad (58)$$

Cabe destacar que, por conveniencia de procesamiento, para el caso de imágenes “cuadradas” para las que $N = M$, se redefine la expresión para la transformada de Fourier, multiplicando la expresión (56) por N , es decir:

$$\begin{aligned}
F(m^*, n^*) &= \mathbf{TF}[f(m, n)] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-2\pi i \left(\frac{m^* m + n^* n}{N} \right)} \\
f(m, n) &= \mathbf{TF}^{-1}[F(m^*, n^*)] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(m^*, n^*) e^{2\pi i \left(\frac{m^* m + n^* n}{N} \right)}
\end{aligned} \tag{59}$$

La componente espectral compleja de $F(m^*, n^*)$ determina módulo y fase, respectivamente, dados por:

$$\begin{aligned}
|F(m^*, n^*)| &= \sqrt{[\Re(F(m^*, n^*))]^2 + [\Im(F(m^*, n^*))]^2} \\
\phi(m^*, n^*) &= \arctan \left[\frac{\Im(F(m^*, n^*))}{\Re(F(m^*, n^*))} \right]
\end{aligned} \tag{60}$$

donde \Im y \Re representan las componentes imaginaria y real, respectivamente. Al filtrar una imagen original cuadrada $f(m, n)$ de dimensiones $N \times N$ mediante un filtro $j(m, n)$ de dimensiones $L \times L$ se obtendrá una imagen resultado $g(m, n)$ de dimensiones $N + L - 1 \times N + L - 1$.

Las propiedades de la transformada de Fourier permiten identificar de modo sencillo los operadores más relevantes del procesamiento digital, como:

Operador de Traslación

$$\begin{aligned}
f(m, n) e^{2\pi i \left(\frac{m_0^* m + n_0^* n}{N} \right)} &\leftrightarrow F(m^* - m_0^*, n^* - n_0^*) \\
f(m - m_0, n - n_0) &\leftrightarrow F(m^*, n^*) e^{-2\pi i \left(\frac{m^* m_0 + n^* n_0}{N} \right)}
\end{aligned} \tag{61}$$

Es decir, una traslación al punto (m_0, n_0) se identifica con con el corrimiento del origen del plano del dominio de frecuencias al punto (m_0^*, n_0^*) .

Operador de Rotación

En coordenadas polares $m = \rho \cos \theta$ $n = \rho \sin \theta$ $m^* = \omega \cos \phi$ $n^* = \omega \sin \phi$, las imágenes original $f(m, n)$ y transformada $F(m^*, n^*)$ son expresadas como $f(\rho, \theta)$ y $F(\omega, \phi)$.

Aplicando la definición de transformada de Fourier, resulta:

$$f(\rho, \theta + \theta_0) \leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0) \quad (62)$$

Es decir, la rotación de la imagen original $f(\rho, \theta)$ (o $f(m, n)$) por un ángulo θ_0 se vincula con una rotación del mismo ángulo en la imagen resultante $F(\omega, \phi)$ (o $F(m^*, n^*)$).

Las figuras 6 y 7 muestran ejemplos de aplicación de operadores de rotación, en dominio de coordenadas y de frecuencias, respectivamente.

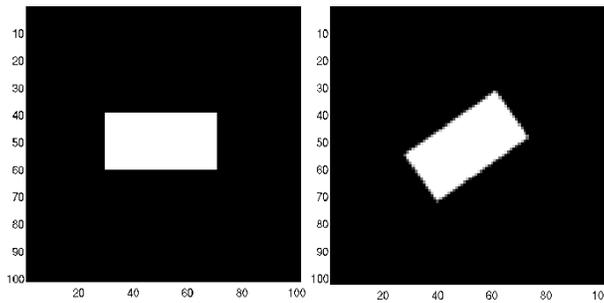


Figura 6. Rotación de 35° de una imagen original $f(m, n)$ (o $f(\rho, \theta)$) obtenido con plataforma MatLab[®] oficial license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.

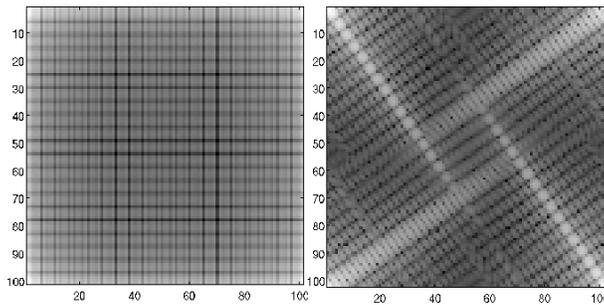


Figura 7. Rotación de 35° de una imagen en dominio de transformada $F(m^*, n^*)$ (o $F(\omega, \phi)$) obtenido con plataforma MatLab[®] oficial license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.

Operador de Escaleo

La definición de transformada de Fourier implica que $\mathbf{TF}[f_A(m, n) + f_B(m, n)] = \mathbf{TF}[f_A(m, n)] + \mathbf{TF}[f_B(m, n)]$ pero $\mathbf{TF}[f_A(m, n) \cdot f_B(m, n)] \neq \mathbf{TF}[f_A(m, n)] \cdot \mathbf{TF}[f_B(m, n)]$.

Sin embargo, para escalares α y β se tiene:

$$\alpha f(m, n) \leftrightarrow \alpha F(m^*, n^*) \quad (63)$$

$$f(\alpha m, \beta n) = \frac{1}{|\alpha\beta|} F(\alpha m^*, \beta n^*) \quad (64)$$

Cálculo de promedios

El valor medio $\langle f \rangle$ se obtiene a partir de:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \quad (65)$$

En particular, tomando $F(m^* = 0, n^* = 0)$ en la expresión (60 (59)) se obtiene $F(0, 0) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)$. Por lo tanto, el valor promedio puede calcularse directamente a partir de:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} F(m^* = 0, n^* = 0) \quad (66)$$

Cálculo de operadores de derivadas: OPERADOR de Laplace

La laplaciana ∇^2 de una imagen original $f(m, n)$ está dada por:

$$\nabla^2 f(m, n) \equiv \frac{\partial^2}{\partial m^2} + \frac{\partial^2}{\partial n^2} \quad (67)$$

Aplicando la definición de transformada de Fourier, se obtiene una expresión útil para el cálculo de la Laplaciana:

$$\mathbf{TF}[\nabla^2 f(m, n)] = -(2\pi)^2 [(m^*)^2 + (n^*)^2] F(m^*, n^*) \quad (68)$$

2.10.1.. Filtros de paso de banda

Las transiciones abruptas, como bordes y contornos, en una imagen original $f(m, n)$ se corresponden con altas frecuencias en el dominio de la transformada.

2.10.2.. Filtros de suavizado

Puede aprovecharse esta característica para implementar métodos de filtrado para suavizar operando en el dominio de frecuencias.

Es posible suprimir frecuencias por debajo o por encima de valores pre determinados de manera que se produzcan efectos de suavizado según requerimientos.

Filtros ideal de paso alto

Consiste en la utilización de la expresión (53) con la función de transferencia $G_{PA}(m^*, n^*)$ definida por:

$$G_{PA}(m^*, n^*) = \begin{cases} 0 & D(m^*, n^*) \leq D_{max} \\ 1 & D(m^*, n^*) > D_{max}. \end{cases} \quad (69)$$

Para un valor máximo de distancia D_{max} como umbral para la distancia (independientemente de la métrica), $D(m^*, n^*)$ es la distancia al origen de frecuencias ($m^* = 0, n^* = 0$).

En el caso de la métrica Euclídea $D(m^*, n^*) = \sqrt{(m^*)^2 + (n^*)^2}$, el filtro se representa por un círculo de radio D_{max} como muestra la figura 8.

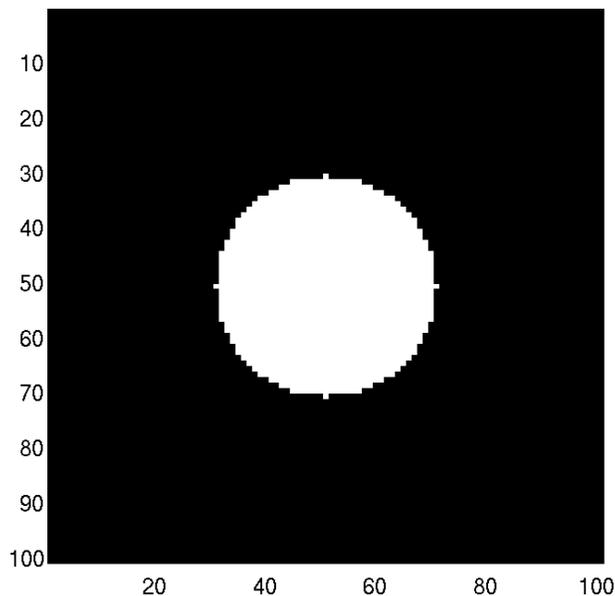


Figura 8. Matriz de transferencia G_{PA} para un filtro ideal de paso alto obtenida con plataforma MatLab[®] official license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.

Filtros ideal de paso bajo

De modo análogo, para el caso del filtro de paso bajo se define a partir de la matriz de transferencia G_{PB} dada por:

$$G_{PB}(m^*, n^*) = \begin{cases} 1 & D(m^*, n^*) \leq D_{max} \\ 0 & D(m^*, n^*) > D_{max}. \end{cases} \quad (70)$$

La figura 9 muestra la matriz de transferencia de paso bajo G_{PB} .

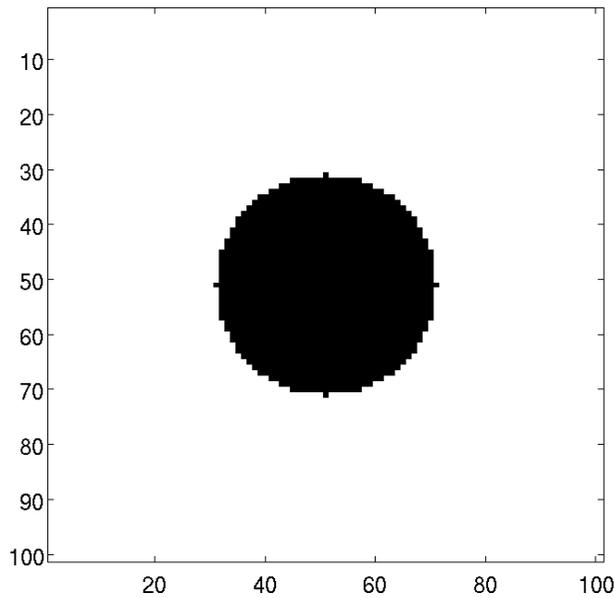


Figura 9. Matriz de transferencia G_{PB} para un filtro ideal de paso alto obtenida con plataforma MatLab[®] oficial license MathWorks 3407-8985-4332-9223-7918.

2.10.3.. Máscaras para filtrado

Una máscara de filtrado $h(m, n)$ se denomina máscara de convolución espacial si se define pormedio de:

$$F(m^*, n^*) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} h(m, n) e^{-2\pi i \left(\frac{m^* m + n^* n}{N} \right)} \quad (71)$$

Si la máscara se restringe a una región específica, tal que $h(m, n) = 0$ para $m \wedge n \geq N_{max} < N$ de modo que la máscara restringida sea designada por \hat{h} , se obtiene:

$$\hat{H}(m^*, n^*) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N_{max}-1} \sum_{m=0}^{N_{max}-1} \hat{h}(m, n) e^{-2\pi i \left(\frac{m^* m + n^* n}{N} \right)} \quad (72)$$

De modo que puedan determinarse los coeficientes de la expansión en (72) que de minimizar la cantidad:

$$\chi^2 \equiv \sum_{m^*=0}^{N-1} \sum_{n^*=0}^{N-1} |\hat{H}(m^*, n^*) - H(m^*, n^*)|^2 \quad (73)$$

La expresión anterior (73) puede resolverse por medio de una representación algebraica lineal $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{h}}$ con $\hat{\mathbf{H}}$ representado por un vector de dimensión N^2 cuyos elementos son los de \hat{H} ordenados de algún modo arbitrario, $\hat{\mathbf{h}}$ es un vector columna de dimensiones N_{max}^2 conteniendo los elementos de \hat{h} y \mathbf{Q} es una matriz de dimensiones $N^2 \times N_{max}^2$ de términos exponenciales de acuerdo con la expresión (71) dados por:

$$\mathbf{Q}(k, l) = q(k, l) = \frac{1}{N} e^{-2\pi i \left(\frac{m^* m + n^* n}{N} \right)} \quad (74)$$

para $k = m^*N + n^*$ con $m^* \wedge n^* \in [0, N - 1]$ y $l = mN_{max} + n$ con $m \wedge n \in [0, N_{max} - 1]$.

2.11.. Ejercitación 2 del capítulo II

1. Estudiar el algoritmo de *Fast Fourier Transform - FFT* implementado en MatLab[®] para utilizar la versión 2D *fft2* para calcular la transformada de Fourier de una imagen médica (MRI de corte craneal, por ejemplo).
2. Implementar un algoritmo para calcular las diferentes métricas para la distancia entre *pixels* en una imagen médica. Comparar y analizar los resultados obtenidos.
3. Implementar un algoritmo para calcular valores medios en diferentes bloques de una imagen médica.
4. Implementar un algoritmo para operar sobre una imagen médica a fin de aplicar una rotación de 45 grados.
5. Implementar un algoritmo para operar sobre una imagen médica a fin de aplicar una traslación horizontal de $\frac{M}{4}$ y vertical de $\frac{N}{4}$ siendo $M \times N$ la dimensión de la imagen.
6. Implementar un algoritmo para realizar un suavizado de una imagen médica por medio de aplicación de filtros de paso alto/bajo.

MÓDULO III

3.. Módulo III: Sistemas de detección de uso radiológico

El *Capítulo 3*, presenta descripciones breves respecto de los principios de funcionamiento y detalles técnicos de los sistemas de detección de radiación más comúnmente empleados en el ámbito de radiodiagnóstico.

En líneas generales, los detectores de radiación presentan similitudes en cuanto a su comportamiento.

Los efectos de interacción entre la radiación y la materia son la base que determina de modo unívoco las propiedades de los sistemas de detección. En particular, el tipo de material del detector depende propiamente de la clase de radiación así como de la información que es necesario recavar.

La operatividad de los sistemas de detección deben contar con las siguientes etapas:

- Ingreso de la radiación al sistema de detección.
- Interacción de la radiación con el “material sensible” que constituye el sistema de detección.
- Efectos por interacción de la radiación con el material sensible: pérdida de toda o parte de su energía cinética por medio de transferencias a los electrones de los átomos del material sensible.
- Producción de corrientes de electrones (de energías relativamente bajas).
- Recolección de la corriente de electrones.
- Análisis mediante circuito electrónico.
- Procesamiento con dispositivos digitales (opcional).

En términos del tipo de radiación a detectar, puede mencionarse, esquemáticamente:

Determinación del tipo de partícula Identificar el tipo de partícula (que resulta crítico en el caso de un campo mixto, como ocurre en procesos nucleares) es necesario utilizar materiales sensibles en los que ya sea la carga o la masa de cada tipo de partícula pueda generar efectos distintivos.

Tiempo de emisión de radiación Medir el tiempo en el que la radiación fue emitida requiere de materiales sensibles en los que sea posible una rápida recolección de los pulsos de corriente de electrones producidas por las interacciones.

Energía de la radiación Determinar la energía de la radiación implica utilizar detectores en los que la amplitud de los pulso detectados resulte proporcional a la energía de la radiación que provocó el pulso. El material sensible debe ser de alto número de electrones disponibles de modo que se minimicen pérdidas y fluctuaciones.

Polarización de la radiación La medición del spin o la polarización requiere de detector capaces de separar los diferentes estados de polarización de la radiación. En general, no alcanza solo con materiales sensibles, sino que debe acudir al diseño de arreglos específicos para detección.

Tasa de conteo de flujo Para determinaciones de alta tasa de conteo, es necesario emplear detectores de rápida recuperación capaces de reiniciar el conteo de eventos sucesivos. Contrariamente, para mediciones de tasas de conteo muy bajas, lo más importante es la minimización del ruido de fondo.

3.1.. Procesos para la detección de radiación electromagnética

Los fotones (restringiendo al campo de aplicación en radiodiagnóstico, refiere a rayos X y γ) interactúan con la materia por medio de diferentes tipos de procesos: *scattering* Compton, creación de pares y absorción fotoeléctrica.

A continuación se incluye Una descripción brevísima estos procesos:

Scattering Compton

El *scattering* Compton es el proceso por el cual un fotón incidente cambia el estado de fase, modificando potencialmente dirección de movimiento $\vec{\Omega}$ y energía cinética E por interacciones con electrones de los orbitales atómicos, los que inicialmente pueden considerarse prácticamente libres¹¹ adquieren casi toda la energía cinética liberada por el fotón incidente. En este sentido, aproximando por electrón en reposo y libre se aplica la conservación de momento y energía para describir los cambios de fase.

Producción de pares

Este proceso refiere a la interacción de un fotón incidente energético con la materia de modo de producir pares electrón-positrón como consecuencia de acoplamiento con el campo atómico. La energía cinética es cedida para el equivalente en masa de par partícula-antipartícula, y eventual sobrante es transferido como energía cinética a las partículas creadas.

Por lo tanto, existe un valor umbral para la energía por encima del cual es posible el efecto: $E_{umbral} = 2m_e c^2 = 1,022 MeV$.

Absorción fotoeléctrica

El fotón incidente es absorbido por parte del átomo de modo que uno de los electrones atómicos, denominado fotoelectrón es liberado a expensas de la energía cinética adquirida. Los electrones libres no pueden absorber fotones para cumplir simultáneamente con la conservación de la energía y el momento, motivo por el cual no se produce este efecto para electrones libres. La energía cinética del electrón de

¹¹Las energías de ligadura típicas son mucho menores a las del fotón incidente

ionización (liberado) equivale a la energía del fotón incidente menos la energía de ligadura del electrón eyectado.

La determinación de la probabilidad de absorción de un fotón por efecto fotoeléctrico muestra algunas características específicas, como que es mayor para energías bajas¹², aumenta significativamente según el número atómico Z y disminuye según aumente la energía del fotón incidente E .

A partir de los procesos mencionados, se propone una cantidad para integrar los efectos netos denominada coeficiente de atenuación másico, el cual se describe del siguiente modo: Se considera un haz perfectamente colimado de fotones de energía E producidos por una fuente S e incidiendo sobre un material de número atómico Z y espesor d (a lo largo del *path*). Por lo tanto, en los procesos de interacción, los fotones del haz incidente pueden sufrir absorción fotoeléctrica, *scattering* Compton o producción de pares. De modo que, solo parte de los fotones incidentes alcanzarán el detector ubicado detrás¹³ del blanco irradiado. En particular, alcanzarán el detector los fotones que no hayan interactuado.

La probabilidad total por unidad de longitud ds de que un fotón incidente no alcance al detector, se denomina coeficiente de atenuación lineal total y representa la integración de todas las probabilidades correspondientes a cada uno de los posibles procesos de interacción involucrados.

3.2.. Procesos para la detección de neutrones

La detección de neutrones presenta algunas características similares al caso de los fotones, debido a la propiedad de no poseer carga. Sin embargo, por su naturaleza intrínseca, los procesos involucrados son radicalmente diferentes.

Los neutrones no interactúan eléctricamente con los átomos, pero sí presentan interacciones fuerte con los núcleos por medio de una amplia variedad de procesos, entre ellos:

- Colisiones elásticas, que son relevantes para energías $\approx 1MeV$, denominados neutrones rápidos).
- Colisiones inelásticas que son relevantes para valores de energía superiores al umbral de excitación nuclear.
- Captura de neutrones, proceso por el cual el núcleo captura neutrones incidentes constituyendo un nuevo núcleo, que eventualmente puede sufrir transiciones para desexcitarse. Este efecto varía según la velocidad de los neutrones, aproximadamente inversamente proporcional a ésta.
- Otras reacciones nucleares de tipo (n, p) , (n, d) , etc que representan captura de un neutrón y emisión de partículas cargadas. Este proceso ocurre en el rango de algunos eV a keV.

¹²Energías menores a 100keV, aproximadamente.

¹³En el sentido del haz incidente.

- Fisión: A energías “térmicas” (del orden del eV), los neutrones se denominan neutrones térmicos o lentos. Este proceso da lugar a la fragmentación nuclear.
- Producción de una *hadronic shower*, efecto que ocurre en el rango de energías por arriba de unos cientos de keV, provocando la emisión de partículas cargadas.

Los mecanismos de interacción de los neutrones hacen que su detección resulte particularmente compleja.

Sin embargo, existen algunas técnicas y sistemas de detección capaces de brindar información a cerca del campo de neutrones. Aunque, el mayor desafío refiere a las dificultades asociadas a determinaciones en campo mixto.

3.3.. Procesos para la detección de electrones

Los electrones y los positrones interactúan por medio de *scattering* con los electrones orbitales atómicos con las siguientes características:

- Algunos electrones, particularmente los emitidos en las desintegraciones β , viajan con velocidades relativistas.
- Los electrones sufrirán cambios significativos en la dirección de movimiento como consecuencia de las colisiones con otros electrones. Por tanto, describen trayectorias erráticas (*track*).
- En colisiones frontales con electrones atómicos se transfiere una fracción muy importante de la energía cinética inicial que es adquirida por el electrón impactado. Además, debe destacarse que en estos casos, resulta indistinguible el electrón incidente del eyectado.
- Debido a cambios abruptos en dirección de movimiento y módulo de la velocidad (energía cinética), el electrón sufre grandes aceleraciones. Como consecuencia, se emite radiación electromagnética conocida como *Bremsstrahlung*.

3.4.. Procesos para la detección de partículas cargadas pesadas

Debido a que los núcleos del material del detector ocupan solamente en torno a 10-15 del volumen de sus átomos, resulta unos tres órdenes más probable para una partícula el colisionar con un electrón que con un núcleo. Por tanto, el mecanismo de pérdida de energía dominante para las partículas cargadas es el *scattering* Coulombiano por los electrones atómicos del material sensible que compone el detector.

Si bien el *scattering* Coulombiano de partículas cargadas por los núcleos, denominado *scattering* Rutherford, es un proceso importante en física nuclear, tiene poca influencia en la pérdida de energía de las partículas cargadas a lo largo de su trayectoria dentro del detector.

Se aplican los principios de conservación de la energía y momento en colisiones frontal elásticas entre partículas pesadas incidentes de masa M y electrones de masa m_e , supuestos en reposo, para determinar así las probabilidades de los efectos de interacción que dan lugar a las secciones eficaces.

La gran cantidad de eventos de colisión entre partícula cargada masiva y electrones del medio material origina, entre otras consecuencias:

- Una gran cantidad de colisiones antes de que la partícula ceda toda su energía cinética. Colisiones frontales generan la máxima transferencia posible de energía. En el resto de las colisiones, la transferencia en general será mucho menor.
- En colisiones entre una partícula cargada pesada y un electrón, la partícula cargada pesada es desviada un ángulo despreciable, por lo que ésta sigue una trayectoria prácticamente rectilínea.
- Dado que la fuerza Coulombiana es de alcance infinito, la partícula cargada masiva interactúa de modo simultáneo con muchos electrones a la vez, de modo que pierde energía continua y gradualmente durante la trayectoria. Habiendo recorrido cierta distancia, denominada rango, perderá toda la energía cinética.

3.5.. Detectores gaseosos

Existen diferentes tipos de sistemas de detección gaseosos. Esta denominación proviene del hecho de que el material sensible utilizado para la detección es un gas.

3.5.1.. Cámaras de ionización

Los detectores basados en ionización están formados esencialmente por un recinto donde se encuentra un gas a presión controlada, allí se colocan dos electrodos separados una cierta distancia, a los que se aplica una tensión de polarización.

El gas dentro del recinto no es conductor eléctrico en condiciones normales, por lo tanto no circula corriente eléctrica entre los electrodos. Cuando una partícula del haz ionizante interactúa con el gas pueden generarse efectos de ionización produciendo pares ión-electrón. El campo eléctrico someterá a las cargas liberadas de modo que se muevan hacia el electrodo de signo contrario; los electrones hacia el ánodo y los iones hacia el cátodo.

La colección de estas cargas se logra utilizando un dispositivo eléctrico asociado al detector, sea midiendo la corriente media que se genera en el detector debido a la interacción de varias partículas (cámaras que operan en modo corriente) o bien formando un pulso con cada golpe de carga que recogen los electrodos (cámaras que operan en modo impulso).

Para aplicaciones dosimétricas, la cámara de ionización es un dosímetro denominado *standard primario*, ya que además de ser el sistema más difundido y utilizado universalmente con buena *performance*, sus propiedades permiten obtener

mediciones confiables y estables en base a un sistema relativamente simple lo que, sumado a teorías sólidas respecto de sus principios de funcionamiento, representa una importante ventaja en términos de estabilidad y confiabilidad. En este sentido, visto que el funcionamiento del sistema dosimétrico está sustentado por teoría de cavidad, como Bragg-Gray, resulta que una de las principales características es el volumen sensible requiere ser determinado de manera particularmente precisa.

En términos de su uso práctico, la cámara de ionización se utiliza colocándola expuesta al haz de radiación o bien introducida en un medio material, fantoma, para determinar exposición en aire o bien dosis absorbida en el medio material, típicamente agua o medios similares en cuanto a las propiedades de absorción/dispersión de radiación ionizante en los rangos de interés. Este tipo de medios materiales se denomina “tejido-equivalentes”. Por tanto, resulta importante también conocer las propiedades del medio material gaseoso en el que se producen los procesos que permiten determinar la dosis absorbida en la cavidad gaseosa.

Existen distintos tipos de cámaras de ionización. Las más utilizadas son la cámara tipo dedal, comúnmente denominada cámara de tipo *Farmer* y, aunque en menor medida, también la cámara de ionización de tipo plano-paralela.

De hecho, las cámaras de ionización pueden clasificarse, según su diseño, o más específicamente según la forma de los electrodos: existen configuraciones planas o cilíndricas, según la disposición de los electrodos, que pueden ser planos-paralelos (cámara plano-paralela usualmente denominada Markus), o bien cilíndricos, constituidos por un electrodo hueco de forma de cilíndrica y otro interior en forma de alambre o varilla en dispuesto coaxialmente (cámara de tipo dedal usualmente llamada *Farmer*).

El volumen sensible de las cámaras de ionización se rellenan típicamente con una variedad de gases que puede ser aire a presión atmosférica o bien gases nobles, especialmente argón.

El rendimiento de detección, definido como la fracción de radiación detectada respecto del total que atraviesa el volumen sensible del detector, es muy próxima al 100% para la cámara de ionización para el caso de la detección de partículas α (núcleos de helio) y β (electrones y positrones), mientras que para fotones el rendimiento ronda solo el 1%, debido a las propiedades intrínsecas de los mecanismos de interacción de cada tipo de radiación.

La cámara de ionización forma parte de una categoría de detectores denominados gaseosos normalmente llamados también “detectores de ionización”, debido a que este tipo de dispositivos responden a la radiación por medio de corrientes inducidas por ionización.

Además de la cámara de ionización, cabe destacar otros dos tipos de detectores gaseosos, histórica y aún frecuentemente utilizados.

3.5.2.. Contador proporcional

En el caso de la cámara de ionización, el voltaje aplicado resulta ser aquel suficiente para coleccionar solo las cargas liberadas por acción directa de la radiación in-

cidente. Sin embargo, si se aumenta aún más el voltaje aplicado, los iones atraídos ganan tanta energía que podrían generar ionizaciones adicionales durante el recorrido hacia los electrodos, y los electrones producidos por estas ionizaciones pueden, a su vez, generar otros, constituyendo un efecto en cascada, lo que se conoce como *efecto de amplificación de la carga por el gas*. El factor por el cual la ionización original es “multiplicada” se denomina *factor de amplificación del gas*. El valor de este factor aumenta rápidamente al aumentar el voltaje aplicado y puede llegar a valores cercanos a 10^6 . Los detectores que operan en este régimen se conocen como contadores proporcionales, y la carga neta puede obtenerse de $Q = W * f$, donde f es el factor de amplificación del gas. Por lo tanto la carga total producida resulta proporcional a la energía depositada por la radiación ionizante incidente. En general, los contadores proporcionales utilizan gases que permiten la migración los iones producidos con muy alta eficiencia, como los gases nobles, entre los cuales Ar y Xe son los más comúnmente empleados.

3.5.3.. Contador Geiger-Müller

Los detectores Geiger-Müller son detectores gaseosos diseñados para obtener la máxima amplificación posible.

El ánodo central es mantenido a muy alto potencial en relación al cilindro exterior (cátodo). Al producirse ionizaciones dentro de la cavidad de gas por interacción de la radiación incidente, los electrones son acelerados hacia el ánodo central y los iones positivos al cátodo exterior. En este proceso ocurre la amplificación del gas. Pero, debido a que el voltaje aplicado es tan alto, los electrones colectados pueden causar excitaciones de las moléculas del gas. Estas moléculas se desexcitan rápidamente ($\approx 10^{-9}$ s) emitiendo fotones visibles o UV. Si alguno de estos fotones UV interactúa con el gas o en el cátodo, puede ocurrir fotoabsorción, lo cual genera otro electrón para contribuir en el efecto cascada.

En el caso de los dispositivos de Geiger Müller se presenta el problema de que durante la trayectoria de los iones, éstos pueden ser acelerados y alcanzar el ánodo con la suficiente energía para liberar electrones y empezar el proceso de nuevo. Esto se debe a la naturaleza del proceso de avalancha múltiple en el tubo Geiger, basta con un electrón para crear un pulso de salida. Para evitar este efecto, se acostumbra a agregar un segundo gas denominado *quenching gas*, o gas de extinción, compuesto por moléculas orgánicas complejas¹⁴. Se utilizan concentraciones típicas de 90% de gas primario y 10% de gas de extinción.

3.6.. Detectores de estado líquido y sólido

Estudiados los detectores gaseosos, resulta que presentan algunas desventajas, principalmente asociadas a baja eficiencia para muchos tipos de radiaciones, por ejemplo rayos γ de 1 MeV, ya que en aire recorre unos 100 m.

¹⁴El gas de material sensible, gas primario, es típicamente aire o un gas noble como argón

Los detectores de estado sólido, que presentan densidades mucho mayores, cuentan con la probabilidad de absorción en dimensiones razonables de tamaño de detección.

La principal característica de los detectores de estado sólido es el uso de materiales sólidos para el sensor, es decir material sensible. Desde un punto de vista general, la utilización de materiales sensibles de mayor densidad, prové *a priori* mayor eficiencia en la detección en cuanto mayor resulta la cantidad de eventos de interacción, relativamente al caso de materiales gaseosos. Sin embargo, debido a los requerimientos específicos para producir efectos secundarios mensurables capaces de ser directa y unívocamente correlacionados con la energía absorbida por el material, resulta que solo algunos pocos materiales de estado sólido son útiles como material sensible.

Para crear un detector de estado sólido debe estudiarse el compromiso entre:

1. El material debe ser capaz de soportar un campo eléctrico grande, de manera que los electrones y los iones puedan ser recogidos para formar un pulso electrónico. Además en ausencia de radiación el flujo de corriente debe ser mínimo o nulo para que el ruido de fondo sea bajo.
2. Los electrones deben ser fácilmente extraídos de los átomos del material sensible y en gran número. Electrones e iones deben ser capaces de viajar fácilmente en el material.

La primera condición parece exigir un material aislante, mientras que la segunda sugiere usar un conductor. El compromiso, en definitiva, es un semiconductor. Materiales semiconductores de tamaño suficientemente grande para construir detectores de radiación (de algunas decenas de cm^3) recién estuvieron disponibles a partir de la década de 1960.

3.6.1.. Detectores centelladores

Durante la década de 1950, debido a la imposibilidad de disponer de materiales semiconductores de dimensiones apropiadas para detección de radiación, se desarrollaron los detectores basados en materiales centellantes para aplicaciones en dispositivos de espectroscopía nuclear logrando razonable alta eficiencia resolución.

Detectores semiconductores

Los detectores semiconductores son, esencialmente, análogos a los detectores gaseosos. Sin embargo, los materiales sólidos de los semiconductores ofrecen importantes ventajas comparativas, ya que cuentan con densidad muy superior a la de los gases¹⁵. Por lo tanto, presenta valores mucho mas altos para el *stopping power*, resultando materiales mucho mas eficientes para la detección de radiación.

¹⁵entre 2 y 5 mil veces mayor, aproximadamente. Por ejemplo: $\rho_{Si(Li)} = 2,33gcm^{-3}$, $\rho_{Ge(Li)} = 5,32gcm^{-3}$, $\rho_{Cd(Te)} = 6,06gcm^{-3}$ y $\rho_{Aire} = 0,001297gcm^{-3}$

Los semiconductores son, en general, pobres conductores de corriente eléctrica, sin embargo cuando están ionizados por acción de la radiación incidente, por ejemplo, la carga eléctrica producida puede colectarse por medio de la aplicación de un voltaje externo. Los materiales más comunes para construir detectores semiconductores son silicio y germanio, aunque más recientemente se está estableciendo también el telurio de cadmio. Para estos materiales, una ionización ocurre cada 3 a 5 eV de energía absorbida de la radiación incidente, aproximadamente, lo cual constituye otra importante ventaja comparativa respecto de los detectores gaseosos. Además, la amplitud de la señal eléctrica detectada está relacionado proporcionalmente con la energía absorbida, y por ello pueden ser utilizados para discriminar en energía.

Algunas desventajas o inconvenientes de estos dispositivos son: generan corrientes no despreciables a temperatura ambiente, lo cual genera un ruido tipo *background* en la señal medida, y por tanto deben ser operados a bajas temperaturas. Otro inconveniente es la presencia de impurezas en la matriz del material, lo cual arruina la configuración cristalina pura. Estas impurezas crean “trampas” electrónicas que pueden atrapar electrones generados en ionizaciones, evitando que sean colectados por los electrodos. Este efecto puede resultar en una apreciable disminución en la señal eléctrica medida y limita el espesor práctico del material sensible a tamaños no mayores a 1cm, aproximadamente. Y, debido al bajo número atómico de Si y Ge, este hecho limita la posibilidad de emplearlos para detectar fotones, o incluso partículas cargadas, de alta energía.

El paso de la radiación ionizante a través de los materiales genera ionizaciones y/o excitaciones. En el caso particular en que las especies producidas, o residuos, (ionizadas o excitadas) sufran procesos de recombinación, se obtiene como resultado la liberación de energía. En general, la mayor parte de esta energía es disipada en el medio como energía térmica, por medio de vibraciones moleculares, en el caso de gases y líquidos, o vibraciones de red en el caso de sólidos cristalinos. Sin embargo, existen materiales en los que parte de esta energía es transferida a emisión de luz visible. Estos materiales particulares se denominan centelladores y los detectores de radiación que los utilizan son llamados detectores centelladores.

Los materiales más comúnmente utilizados para detectores de aplicación en medicina son de tipo orgánico (sustancias orgánicas diluidas en solución líquida) o inorgánicos (sustancias inorgánicas en forma de sólido cristalino). Si bien los mecanismos precisos de centelleo son diferentes para estos dos tipos de materiales, comparten características comunes. La cantidad de luz producida como consecuencia de la interacción con un único rayo incidente (RX, γ , β , etc.) resulta proporcional a la energía depositada por la partícula incidente en el material centellador. La cantidad de luz neta producida es pequeña, típicamente unos pocos cientos (a lo sumo miles) de fotones por cada interacción de partícula incidiendo con energía de entre 70 y 511 keV.

Originalmente, se utilizaban cuartos oscuros para observar la luz emitida por este tipo de materiales¹⁶ y contabilizar así la producción de ionizaciones. Esta metodología presenta insalvables limitaciones y fue posteriormente reemplazada por tecnologías de dispositivos electrónicos ultrasensibles a la luz, como los fotomultiplicadores.

Los detectores por centelleo, generalmente requieren de dispositivos extra para mejorar la eficiencia de lectura. Comúnmente se utilizan técnicas electrónicas basadas en arreglo de tubos fotomultiplicadores. Básicamente, un tubo fotomultiplicador es un dispositivo electrónico, en forma de tubo, que produce un pulso de corriente eléctrica al ser estimulado por señales muy débiles, como el centelleo producido por RX, γ o β , etc. en un detector centellador.

Se coloca una película de material fotoemisor en la ventana de vidrio de entrada, esta sustancia¹⁷ eyecta electrones cuando son alcanzados por fotones visibles. La superficie de fotoemisión se denomina fotocátodo, y los electrones eyectados son fotoelectrones.

La eficiencia de conversión de luz visible en electrones liberados se denomina eficiencia cuántica, y es típicamente de entre 1 a 3 fotoelectrones por cada 10 fotones visibles que interactúan con el fotocátodo. Claramente, la eficiencia cuántica depende de la energía de la luz incidente.

Los dínodos son mantenidos a diferentes valores de potencial (creciente) para atraer a los electrones producidos, y los secundarios que éstos generan, de modo de producir el efecto de multiplicación. Este proceso se repite usualmente unas 10 veces antes de que la corriente de electrones resultante sea colectada por el ánodo. Los factores de multiplicación que se obtienen son significativos por dínodo, resultando en un factor global típico de 10^7 , aproximadamente. Los tubos fotomultiplicadores se sellan herméticamente y se mantienen en vacío; y se construyen en diferentes formas y tamaño.

Existen también detectores de centelleo denominados “centelladores inorgánicos”, ya que consisten en sólidos cristalinos que centellean debido a características específicas de la estructura cristalina. Por ello, átomos o moléculas individuales de estas sustancias no centellean, se requiere el arreglo cristalino.

Algunos cristales inorgánicos, como el NaI a temperaturas de N líquido, son centelladores en su estado puro, aunque la mayoría son “activados con impurezas”, y por ello los átomos de impurezas¹⁸ en la matriz cristalina, responsables del centelleo, se denominan “centros de activación”.

A diferencia del caso de materiales inorgánicos, los detectores basados en materia les centelladores orgánicos, producen el efecto de centelleo debido a propiedad inherente de la molécula de la sustancia. El centelleo es un mecanismo de excitación molecular/desexcitación al interactuar con la radiación. Este tipo de sustancias producen centelleo en estado gaseoso, líquido o sólido, aunque se uti-

¹⁶Por entonces típicamente centelladores de sulfuro.

¹⁷ejemplo típico es el CsSb antimonio de cesio o materiales alcalinos.

¹⁸Indicado como el elemento entre paréntesis en la notación del compuesto.

lizan normalmente líquidos¹⁹. En los centelladores orgánicos líquidos se disuelve el material centellador en un solvente dentro de un contenedor típicamente de vidrio o plástico y se agrega también la sustancia radioactiva a esta mezcla. Se coloca el contenedor entre un par de tubos fotomultiplicadores y de este modo se detecta la luz emitida que guarda correlación con la energía impartida por el material radioactivo.

Las soluciones de centelladores orgánicos líquidos consisten de 4 componentes:

1. Solvente orgánico, que compone la mayor parte de la solución. Debe disolver el material centellador y también la muestra radioactiva.
2. Soluto primario, que absorbe energía del solvente y emite luz. Algunos materiales centelladores típicamente utilizados son difenil-oxazol y metilestireno-benceno.
3. A veces la emisión del soluto primario no es la más adecuada para ser detectada por los fototubos, y entonces se utiliza un soluto secundario, cuya función es absorber la emisión del soluto primario y re-emitir fotones, de mayor longitud de onda que los del soluto primario, beneficiando la detectabilidad de la luz por parte de los fototubos.
4. Frecuentemente se incorporan aditivos a la mezcla para mejorar ciertas propiedades como la eficiencia de transferencia de energía.

El caso particular del detector de NaI(Tl), frecuentemente diseñado en forma de campana está formado por el cristal de NaI(Tl) ahuecado en un extremo para la inserción de la muestra.

La transferencia de luz entre el cristal de NaI(Tl) y el fotomultiplicador resulta ser muy eficiente, aunque existen algunas pérdidas debido a dispersión dentro del detector.

La eficiencia de detección D de un contador de NaI(Tl) en forma de campana para un amplio rango de energías, principalmente debido a que la disposición geométrica adoptada implica una eficiencia geométrica g muy buena. Entonces, la combinación con una alta eficiencia de detección y un bajo nivel de *background* en el conteo, generan un detector muy eficiente, que puede utilizarse para muestras conteniendo cantidades chicas (Bq-kBq) de actividad de emisores γ . La eficiencia geométrica g para muestra de alrededor de 1ml es del 93 %, aproximadamente.

3.6.2.. Films radiográficos

Los films, originalmente radiográficos, en términos dosimétricos de pobre capacidad, actualmente son reemplazados por films de tipo radiocrómico que son detectores básicamente del tipo químico. El diseño consiste en el depósito de una delgada capa de material sensible sobre una película inactiva típicamente plástica que proporciona sostén. El material sensible consiste en una dilución de sales, usualmente se emplea haluros de plata.

¹⁹Más recientemente han cobrado importancia los centelladores plástico

El principio de funcionamiento se basa en reacciones químicas catalizadas por la energía absorbida por el material. Los residuos de reacción, que son sustancias con propiedades químicas diferentes al material sensible en su estado no reactivo, poseen la particular característica de presentar afinidad química con otros compuestos con los que el material sensible no reactivo no tiene esa afinidad.

Se utiliza entonces procesos posteriores a la irradiación en los que se induce la reacción entre los residuos de formación a partir del material sensible -debido a la absorción de energía- y compuestos con afinidad que una vez unidos producen diferencias en absorción/transmisión de luz visible, es decir presentan diferente opacidad allí donde se produce la combinación entre los productos de reacción por absorción de radiación y los solutos con afinidad. Este proceso se denomina usualmente revelado radiográfico.

Una vez realizado el proceso de revelado es necesario implementar un método de lectura. Para este fin se aprovecha la manifestación evidente en la diferencia de propiedades de absorción/transmisión de luz visible y resulta posible cuantificar estas diferencias empleando técnicas de densitometría óptica.

La respuesta del sistema es, en definitiva, la lectura densitométrica. Y es ésta la que debe correlacionarse con la dosis absorbida, lo cual se realiza típicamente mediante métodos empíricos de calibración.

En el caso de los films radiográficos, la capacidad dosimétrica es muy pobre al punto que este tipo de detectores se emplean reservándolos casi exclusivamente para determinaciones espaciales de absorción de radiación; mientras que los films radiocrómicos -más modernos- permiten una cuantificación confiable en términos dosimétricos proveyendo también información espacial.

Cabe mencionar que la tejido-equivalencia de los films radiográficos es muy mala, mientras que esta propiedad mejora para el caso de los films radiocrómicos.

A partir de análisis cuantitativos y determinaciones empíricas, resulta que la dependencia típica de la lectura L de un film (densidad óptica) presenta una dependencia polinomial (usualmente aproximada por orden 3) respecto de la dosis absorbida. De manera que, en condiciones de requerir linealidad es necesario acotar el intervalo (rango de valores de dosis) y determinar un ajuste lineal para la zona de interés.

En cualquier caso, ambos tipos de films presentan dificultades en cuanto a la dependencia de la calidad del haz y de la dirección de incidencia, aunque debe destacarse que estos problemas son menores para el film radiocrómico.

3.7.. Adaptación de sistemas de detección al radiodiagnóstico médico

MÓDULO IV

4.. Módulo IV: Experiencia de Laboratorio I - Adquisición de imágenes radiológicas

Actividad práctica de laboratorio.

Objetivos

1. Descripción de instrumental de laboratorio.
2. Configuración instrumental de irradiación para procedimientos de *imaging*.
3. Adquisición de imágenes de rayos X con detector digital.
4. Estudio del efecto de parámetros de adquisición e irradiación.
5. Caracterización y descripción cualitativa y cuantitativa de las imágenes radiográficas.

MÓDULO V

5.. Módulo V: Procesamiento de imágenes con derivadas - Detección de esquinas y bordes

El *Capítulo 5.* está dedicado a introducir algunos conceptos genéricos, acompañados por métodos específicos, para detectar, evidenciar y resaltar puntos de particular importancia en una imagen: puntos de bordes, aristas, contornos.

Existe interés y gran practicidad en varios campos de aplicación, en referencia a la detección de puntos de bordes, eventualmente la conexión entre éstos que dan lugar a contornos, permitiendo así evidenciar la presencia de objetos delimitados que podrán luego ser oportunamente caracterizados.

5.1.. Detección de bordes utilizando derivadas

Es posible introducir conceptos análogos a la derivación de cálculo continuo de orden 1, 2, etc. a fin de realizar procesamientos específicos sobre imágenes de interés.

Para regiones con valores de *pixel* constantes, se anulará la derivada primera, de modo que puede establecerse precisamente este criterio para asociar propiedades de la región con la derivada.

Por otro lado, si existe cambio en los valores de *pixel*, se generará una variación en la derivada, permitiendo nuevamente establecer una asociación entre las propiedades de la región (entorno al punto de interés) y su derivada.

Así mismo, se aplica el concepto de derivada segunda, cuyo signo indicará la dirección (positiva o negativa, según se defina el sistema de coordenadas) del gradiente del punto de interés.

5.2.. Gradiente de una imagen

El operador gradiente $\vec{\nabla}$ aplicado a la imagen $f(m, n)$ se define por medio de:

$$\vec{\nabla}[f(m, n)] \equiv \begin{bmatrix} \nabla_m [f(m, n)] \\ \nabla_n [f(m, n)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f(m+\Delta m, n) - f(m-\Delta m, n)}{2\Delta m} \\ \frac{f(m, n+\Delta n) - f(m, n-\Delta n)}{2\Delta n} \end{bmatrix} \quad (75)$$

De modo que la expresión vectorial del gradiente $\vec{\nabla}$ resulta:

$$|\vec{\nabla}[f(m, n)]| = \sqrt{\nabla_m^2 + \nabla_n^2} \quad (76)$$

$$\theta(m, n) = \arctan\left(\frac{\nabla_m}{\nabla_n}\right)$$

Nótese que, para propósitos de aplicación dado que se implementarán métodos basados en umbralamiento -y por tanto, solo tienen relevancia las diferencias

relativas- conviene introducir una aproximación para el módulo del gradiente dada por:

$$|\vec{\nabla}[f(m,n)]| \approx |\vec{\nabla}_m[f(m,n)]| + |\vec{\nabla}_n[f(m,n)]| \quad (77)$$

5.2.1.. Detección de bordes: El operador de Sobel

Utilizando la expresión 75 es posible practicar una convolución de la imagen original $f(m,n)$ utilizando una máscara \mathbf{M} de 3×3 siguiendo la definición:

$$\mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix} \quad (78)$$

En particular, para el operador de Sobel M_{Sobel} es habitual utilizar las expresiones:

$$\mathbf{M}_{Sobel} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (79)$$

donde el primer arreglo se utiliza para obtener ∇_m y el segundo ∇_n .

Si el bloque de la imagen original $f(m,n)$, para la dimensión de la máscara (3×3) es $B(k,l)$ con $k \in [m - \Delta m, m + \Delta m]$ y $l \in [n - \Delta n, n + \Delta n]$

$$\nabla_m = (B_{1,3} + 2B_{2,3} + B_{3,3}) - (B_{1,1} + 2B_{2,1} + B_{3,1}) \quad (80)$$

$$\nabla_n = (B_{3,1} + 2B_{3,2} + B_{3,3}) - (B_{1,1} + 2B_{1,2} + B_{1,3})$$

La aplicación de la técnica de detección y resaltado de bordes, esquinas y contornos por medio del método de sobel consiste en realizar la convolución utilizando la expresión 81, y luego al resultado aplicar un criterio de umbralamiento por medio de un parámetro P_{Sobel} de modo que:

$$\mathbf{M}_{Sobel} \otimes f(m,n) = \begin{cases} 1 & |\vec{\nabla}[f(m,n)]| > P_{Sobel} \\ 0 & |\vec{\nabla}[f(m,n)]| \leq P_{Sobel} \end{cases} \quad (81)$$

5.2.2.. Detección de bordes: El operador de Prewitt

Este operador también está definido a partir de la aplicación de derivadas primeras. De hecho, conceptualmente es similar al operador de Sobel, excepto por los valores específicos de los elementos de matriz de la máscara de convolución $M_{Prewitt}$, dada por:

$$\mathbf{M}_{Prewitt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

donde el primer arreglo se utiliza para obtener ∇_m y el segundo ∇_n .

5.2.3.. Detección de bordes: El operador de Roberts

La particularidad de este operador es que, diferenciándose de los operadores de Sobel y Prewitt, posee la capacidad de evidenciar puntos de borde pero no así la orientación de éstos.

El operador de Roberts se implementa utilizando las diagonales correspondientes al *pixel* de interés, a izquierda D_{Iz} y a derecha D_{De} , definidas según:

$$\begin{aligned} D_{Iz} &\equiv f(m, n) - f(m - 1, n - 1) \\ D_{De} &\equiv f(m, n) - f(m - 1, n + 1) \end{aligned} \quad (82)$$

De modo que el operador de Roberts $M_{Roberts}$ consiste en determinar para cada *pixel* la cantidad:

$$M_{Roberts} \equiv \sqrt{D_{Iz}^2 + D_{De}^2} \rightarrow M_{Roberts} \approx |D_{Iz}| + |D_{De}| \quad (83)$$

5.2.4.. Detección de bordes: Operador de Kirsch

El método de Kirsch consiste en introducir máscaras M_{Kirsch} que representan 8 rotaciones en las direcciones principales, es decir 4 direcciones en filas y columnas (rotaciones de $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3\pi}{2}$), y otras 4 rotaciones respecto de las diagonales principales (rotaciones de $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$).

Las máscaras de Kirsch se definen como sigue:

$$\mathbf{M}_{\text{Kirsch}} \equiv \left\{ \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{3\pi}{4} \\ \frac{7\pi}{4} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

5.2.5.. Detección de bordes: Operadores de Robinson y Frei-Chen

El *set* de máscaras de Robinson es similar al de Kirsch, con la diferencia en los valores de máscara para cada uno de los ángulos. En particular, para ángulo 0°, el operador de máscara de Robinson es:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{84}$$

El *set* de máscaras de Frei-Chen constituye una autobase, por lo que las 9 componentes del *set* permiten expandir, con los pesos correspondientes, cualquier matriz 3 × 3. Por lo tanto, las máscaras de Fri-Chen, representan una generalización de los métodos de *image mask*. Las expresiones de las máscaras de Fri-Chen (\mathbf{FC}_k $k \in [1,9]$) son:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{FC}_1 & \mathbf{FC}_2 & \mathbf{FC}_3 = \\ \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\ & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{FC}_4 & \mathbf{FC}_5 & \mathbf{FC}_6 = \\ \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\ & \frac{1}{6} \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{FC}_7 & \mathbf{FC}_8 = \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\ & \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{FC}_9 = \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \tag{85} \end{aligned}$$

El modo de aplicar la M a la Imagen I , que provee el resultado R , se obtiene operando del siguiente modo:

$$R = \sum_{j=1}^9 M_j I_j = |M| |I| \cos(\theta) = V_M^T V_I \quad (86)$$

donde T indica la transpuesta y los vectores V_M y V_I (de dimensión 1×9) se corresponden con el reordenamiento de la matriz en manera vectorial.

El *set* de máscaras de Frei-Chen pueden utilizarse para la detección de bordes, identificando que, en virtud de constituir una autobase, un subespacio arbitrario se asocia con “proyecciones” de la imagen (o bloque) en el subespacio de interés.

5.3.. Extensión de los operadores

Puede verse que uno de los problemas usuales en los métodos de detección de bordes, como en general en cualquier técnica de procesamiento, es que la presencia de señal espúrea como ruido, perjudica y limita significativamente la capacidad y *performance* de los métodos de procesamiento.

Un intento para reducir los efectos limitantes de la presencia de ruido se basa en el concepto de “extensión de operadores”, que consiste en implementar un procedimiento previo a aplicar operadores de detección de bordes con el objeto conseguir una reducción del ruido en la señal. Pero, en lugar de realizar procesos típicos de filtrado de ruido, como alguno de los descritos en el Capítulo 2., se propone una “expansión” de los operadores de detección de bordes, que consiste básicamente en aumentar la dimensión de la máscara correspondiente sin alterar las propiedades de simetría y operación de dicha máscara.

A modo de ejemplo, la extensión o expansión del operador de Sobel sería:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (87)$$

El cálculo del gradiente por fila G_x o por columna G_y se obtienen por correspondencia de rotaciones $\frac{\pi}{2}$ del operador, en el ejemplo el de Sobel.

La extensión de los operadores, originalmente de 3×3 puede realizarse hacia cualquiera dimensión, aunque típicamente se realiza para 11×11 , 9×9 y 7×7 .

5.4.. El método de Canny: Algoritmo

El operador de detección de bordes de Canny desarrollado durante los '80 se basa en un algoritmo de múltiples fases capaz de detectar bordes de diferentes características. Representa, de hecho, el operador más utilizado en la detección de bordes.

El objetivo ideal del método propuesto por Canny consistía en hallar un algoritmo óptimo para detectar bordes.²⁰ El concepto básico es que un buen mecanismo de detección óptimo es aquel algoritmo capaz de marcar tantos bordes reales como sea posible, una buena localización, y los bordes marcados deben estar lo más cerca posible del borde en la imagen real. Además, procurar que un borde dado debe ser marcado sólo una vez y donde sea posible el ruido presente en la imagen no debería crear falsos bordes.

La implementación del método de Canny permite optimizar la detección de bordes diferenciales y consta de tres etapas principales: filtrado, decisión inicial, e histéresis.

La primera etapa consiste en un filtrado de convolución de la derivada primera de una función Gaussiana normalizada discreta sobre la imagen, realizada en dos direcciones: horizontal y vertical. La función Gaussiana posee dos parámetros fundamentales, valor medio M y desviación típica σ . En este caso, el valor medio es nulo, por lo tanto la ecuación que define el filtro Gaussiano $G(x)$ es:

$$G(x) = k e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (88)$$

donde el parámetro k se determina de manera que el máximo de $G(x)$ sea la unidad en su versión discreta.

Para la realización del filtro utilizado en la primera etapa, se deriva la expresión 88, obteniéndose:

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{k}{\sigma^2} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (89)$$

La versión discreta del filtro se define de modo análogo y se considera que x asume valores en $[-5\sigma, 5\sigma]$ con diferencias de 1 pixel entre muestras consecutivas.

obviamente, por razones de eficiencia de cómputo, es preferible derivar directamente la versión discreta de 88, con el fin de obtener el valor de k .

5.5.. Ejercitación 1 del capítulo V

1. Calcular la derivada primera de una imagen médica.
2. Interpretar y aplicar el método de Sobel a una imagen médica. Obtener las componentes ∇_m y ∇_n del operador gradiente.
3. Aplicar el operador de Sobel utilizando como parámetro de umbralamiento el valor medio de la imagen médica a fin de calcular y graficar la imagen binarizada resultante, la imagen de gradiente $|\vec{\nabla}|$ y la imagen de ángulo θ .
4. Aplicar el método de Prewitt a una imagen médica. Comparar con el resultado obtenido con el método de Sobel. Interpretar.

²⁰Véase, por ejemplo *Mammography image detection processing for automatic micro-calcification recognition* Quintana et al. y *Mammography image quality optimisation: a Monte Carlo study* Tirao et al. donde se encuentran ejemplos del cálculo y uso de operadores de Canny por medio de gradientes por fila y columna.

5. Calcular las diagonal D_{I_z} y D_{D_e} de una imagen médica. Aplicar el operador de Roberts a una imagen médica. Determinar bordes utilizando diferentes valores de umbralamiento.

MÓDULO VI

6.. Módulo VI: Procesos estocásticos

El *Capítulo 6.* está dedicado a los elementos básicos sobre procesos estocásticos. Se introducen conceptos generales, consideraciones estadísticas y fenómenos físicos de carácter intrínsecamente aleatorio. Se dedica especial atención al transporte de radiación en su característica estocástica.

6.1.. Introducción y definiciones de procesos estocásticos

En los procesos estocásticos se representan todos y cada uno de los pasos necesarios para la realización de un cierto evento así como también las maneras en que cada uno de los pasos puede ser realizado en términos de las respectivas probabilidades. Por tanto, cualquier proceso en el que se vean involucradas probabilidades de ocurrencia resulta ser un proceso estocástico.

Al describir variables de carácter aleatorio, vinculadas a fenómenos de tipo probabilísticos como lo es el transporte de radiación, es asumido, como premisa implícita por defecto, el hecho de que las características aleatorias permanecen constantes durante el intervalo de tiempo de interés, aunque desde una perspectiva genérica podría no satisfacerse esta asunción.

En efecto, al incorporar la dependencia (o evolución) de variables consideradas determinísticas, éstas describirán un proceso evolutivo de tipo analítico, mientras que para el caso de variables aleatorias mostrarán una evolución condicionada por el vínculo al fenómeno probabilístico asociado. Entonces, toda función definida a partir de variables aleatorias, como por ejemplo funciones de distribución o funciones de densidad, presentarán dependencia temporal determinada por su carácter aleatorio, dando lugar a la naturaleza estocástica del fenómeno físico involucrado.

Una definición más formal de un proceso estocástico es la siguiente:

El proceso estocástico consiste en el conjunto (o familia) de variables aleatorias $\{X_t \in [t_{ini}, t_{fin}]\}$ que se ordenan de acuerdo con el índice t , por lo general identificando al tiempo.

En consecuencia, se tiene que para cada valor de t (instante) existe la variable aleatoria representada por X_t , de modo que el proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables aleatorias, las que pueden variar (evolucionar) en sus características.

Los *estados de variables aleatorias* son los posibles valores que éstas pueden asumir. Por lo tanto, existe un *espacio de estados* asociados a las variables aleatorias. En particular, la variable temporal t puede ser de tipo discreto o bien de tipo continuo. La modificación de la variable t , por ejemplo, daría lugar a cambios de estado que ocurren en el instante t .

Por tanto, de acuerdo con el conjunto de índices²¹ $t \in T = [t_{ini}, t_{fin}]$, la variable aleatoria X_t puede clasificarse según los siguientes criterios para procesos estocásticos:

- Si el conjunto T es continuo (por ejemplo \mathfrak{R}^+), resulta que X_t describe un proceso estocástico de parámetro continuo.
- Si el conjunto T es dicreto, X_t describe un proceso estocástico de parámetro discreto.

²¹ Estrictamente, subíndices.

- Si para cada valor (instante) t la variable aleatoria X_t es de tipo continuo, resulta que proceso estocástico es de estado continuo.
- Si para cada valor (instante) t la variable aleatoria X_t es de tipo discreto, resulta que proceso estocástico es de estado discreto.

Una *cadena* es un proceso estocástico para el cual el tiempo evoluciona de manera discreta y la variable aleatoria sólo puede tomar valores discretos en el espacio de estados correspondiente.

Un *proceso de saltos puros* es un proceso estocástico para el cual los cambios de estados suceden de forma aislada y aleatoria pero la variable aleatoria sólo asume valores discretos en el espacio de estados correspondiente. Diversamente, un *proceso continuo* se refiere al caso en que los cambios de estado se producen para cualquier valor de t (instante) y hacia cualquier estado dentro de un espacio continuo de estados correspondiente.

6.1.1.. Procesos de estado discreto y cadenas de Markov

En el caso de procesos estocásticos con espacio de estados discreto, una secuencia de variables que indique el valor del proceso en instantes sucesivos²² puede representarse del siguiente modo:

$$\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} \quad (90)$$

donde cada variable X_j $j \in [1, n]$ presenta una distribución de probabilidades tal que, en general, es diferente de las otras variables aunque podría haber características comunes.

Uno de los principales objetivos del estudio del caso discreto es el cálculo de probabilidades de ocupación de cada estado a partir de las probabilidades de cambio de estado. Si para el valor t_{j1} (instante) el sistema está en el estado x_{j1} , la probabilidad de que al instante siguiente t_j se encuentre en el estado x_j se obtiene a partir de la probabilidad de transición o cambio de estado de x_{j1} a x_j (o probabilidad condicionada) denotada por $P(X_j = x_j / X_{j-1} = x_{j-1}) = P_{j,j-1}$, donde $P_{j,j-1}$ es el valor que asume la probabilidad para el caso específico en consideración.

Las probabilidades del tipo $P(X_j = x_j)$ se denominan probabilidades de ocupación de estado.

De modo similar, otro tipo de probabilidad de interés es la de ocupar un cierto estado en un instante t_j , dado que en todos los instantes anteriores, desde t_{ini} a t_{j-1} se conoce en qué estados estuvo el proceso. En este caso, la probabilidad condicionada es $P(X_j = x_j / X_{ini} = x_{ini}, \dots, X_{j-1} = x_{j-1}) = P_{ini, \dots, j-1, j}$

Por tanto, la probabilidad $P_{ini, \dots, j-1, j}$ depende de toda la “historia pasada del proceso”, mientras que la probabilidad de transición depende únicamente del estado actual que ocupe el proceso.

²²Se asume que la variable t refiere al tiempo.

Propiedad de Markov:

Se dice que un proceso cumple la propiedad de Markov cuando toda la historia pasada del proceso se puede resumir en la posición actual que ocupa el proceso para poder calcular la probabilidad de cambiar a otro estado. Es decir, se cumple:

$$P(X_j = x_j / X_{ini} = x_{ini}, \dots, X_{j-1} = x_{j-1}) = P(X_j = x_j / X_{j-1} = x_{j-1}) \quad (91)$$

Además, una propiedad importante que puede tener una cadena es que los valores $p_{mn}(j)$ no dependen del valor de j . Entonces, se tiene que las probabilidades de cambiar de estado son las mismas en cualquier instante. Por lo tanto, esta propiedad indica que las probabilidades de transición son estacionarias.

6.1.2.. Procesos de saltos puros

En este caso, el proceso sigue siendo discreto en estados pero la gran diferencia es que los cambios de estado ocurren en cualquier instante en el tiempo (tiempo continuo).

Un proceso estocástico en tiempo continuo $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ se denomina *proceso de conteo* si representa el número de veces que ocurre un suceso hasta el instante de tiempo t .

En particular, se tiene $N(t) \in \mathbf{N}$ y $N(t^*) \leq N(t) \quad \forall t^* < t$.

Un proceso de conteo es un *proceso de Poisson homogéneo* de tasa λ si satisface:

1. $N(0) = 0$
2. $N(t_k) - N(t_{k-1})$ es una variable aleatoria independiente (proceso de incrementos independientes) $\forall k$.
3. $N(t + t^*) - N(t^*)$, que denota la cantidad de eventos que ocurren entre el instante t^* y t , sigue una distribución de Poisson de parámetro λt .

6.1.3.. Procesos de estados continuos y series temporales

Un concepto importante en procesos estocásticos es la *realización*, o bien una realización de una experiencia aleatoria, que es el resultado de una repetición de esa experiencia. Por tanto, en la experiencia aleatoria de “lanzar una vez un dado” una realización posible sería obtener el número 2, en el único lanzamiento hecho. En ese caso, la realización se reduce a un único número $\{X\}$. Si se repite la experiencia, podrían obtener otras realizaciones (cualquiera de los números 1, 3, 4, 5 y 6).

En una experiencia M -dimensional, una realización es el resultado obtenido de los M parámetros, denotado por $\{X_1, \dots, X_M\}$.

Una *serie temporal* es una realización parcial de un proceso estocástico de parámetro tiempo discreto. De aquí que la teoría de los procesos estocásticos es de aplicación a las series temporales. Sin embargo, existe una fuerte restricción que radica en el hecho de que en muchas series temporales, ellas son la única realización observable del proceso estocástico asociado.

6.2.. Características y medidas de procesos estocásticos

Para un espacio de estados M -dimensional, pueden calcularse cantidades y medidas estadísticamente representativas para los estados descritos por las variables M -dimensionales. En particular, se definen -entre tantos- medidas como tensores de valor medio y de covarianzas, que permiten obtener características representativas de los procesos estocástico.

Capítulo 1 Manual PENELOPE v. 2008

6.3.. Procesos estocásticos estacionarios

En primera aproximación, se considerarán estacionarios a los procesos estocásticos que tengan un comportamiento constante a lo largo del tiempo.

Un *proceso estocástico estacionario en sentido estricto* requiere que al realizar un mismo desplazamiento en el tiempo de todas las variables de cualquier distribución conjunta finita se obtenga que esta distribución no varía. Es decir:

$$F(X_{i_1}, \dots, X_{i_M}) = F(X_{i_1+j}, \dots, X_{i_M+j}) \quad \forall i_k, j \quad (92)$$

En cambio, un *proceso estocástico estacionario en sentido débil* requiere que se mantengan constantes todas sus características lo largo del tiempo. Es decir, que $\forall t$:

1. $\langle X_t \rangle = \langle X \rangle \quad \forall t$ donde $\langle X \rangle$ denota el valor medio o de expectación.
2. $\sigma_{X_t} = \sigma_X \quad \forall t$ donde σ_X denota la varianza.
3. $Cov(t, t+j) = Cov(t^*, t^*+j) = C_j \quad \forall j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ donde Cov denota la covarianza y C es una constante.

6.3.1.. Procesos de ruido blanco

Un proceso estocástico utilizado frecuentemente es el de “ruido blanco”, dado por el proceso estacionario RB_t que satisface:

- $\langle RB_t \rangle = \langle RB \rangle = 0 \quad \forall t$
- $Var(RB_t) = \sigma^2$
- $Cov(RB_t, RB_{t^*}) = 0 \quad t^* \neq t$

En este sentido, puede interpretarse al ruido blanco como una sucesión de valores sin relación alguna entre ellos, oscilando en torno al cero dentro de un margen constante. En este tipo de procesos, conocer valores pasados no proporciona ninguna información sobre el futuro ya que el proceso es “puramente aleatorio”, y por consiguiente “carece de memoria”.

6.4.. Ejercitación 1 del capítulo VI

1. Determinar la distribución de probabilidades de las realizaciones del lanzamiento de un dado en función del muestreo (número de repeticiones de la experiencia). Graficar, determinar valor medio y varianza. Analizar los resultados.
2. Determinar la distribución de probabilidades de las realizaciones del lanzamiento de tres dados de 10 caras cada uno en función del muestreo (número de repeticiones de la experiencia). Graficar, determinar valor medio y varianza. Analizar los resultados.

6.5.. El transporte de radiación como proceso estocástico

[Introducción via secciones eficaces explicando analogía pdf-DCS y explicar pag 6-15 Manual PENELOPE v. 2008](#)

6.6.. Reformulación integral de la ecuación de transporte

A partir de la expresión íntegro-diferencial de la ecuación de transporte de Boltzmann (11), es posible reformular los términos para arribar a una ecuación completamente integral, lo cual resulta de particular utilidad para el manejo de soluciones de tipo numéricas, necesarias para situaciones realistas, ya que -como se sabe- las soluciones analíticas directas sólo son posibles en una cantidad muy limitada de configuraciones.

Operando y reordenando los términos en la ecuación de Boltzmann 11, resulta:

$$\begin{aligned} t &= t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + s\vec{\Omega} \end{aligned} \quad (93)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\frac{d}{ds} \Psi \left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) + \Sigma \Psi \left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) = \quad (94)$$

$$\Gamma \left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) \quad (95)$$

donde se ha definido $\Gamma \left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right)$ como sigue:

$$\Gamma \equiv S + \iint \Sigma_s \left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, (\vec{\Omega}', E') \rightarrow (\vec{\Omega}, E) \right) \Psi \left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}', E', t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) d\vec{\Omega}' dE' \quad (96)$$

Puede verse²³

$$\Psi \left(\vec{r}_0, \vec{\Omega}, E, t_0 \right) = \int_{-\infty}^0 ds \left[e^{\int_0^s \Sigma(\vec{r}_0 - s'\vec{\Omega}, E) ds'} \Gamma \left(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t_0 + \frac{s}{|\vec{v}|} \right) \right] \quad (97)$$

²³Hint: Introdúzcase $e^{\int_{-\infty}^s \Sigma(\vec{r}_0 + s'\vec{\Omega}, E) ds'}$ y calcúlese $\frac{d}{ds} \Psi$.

Considerando que las variables \vec{r}_0 y t_0 son arbitrarias, se obtiene:

$$\Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = \int_0^\infty e^{\int_0^s \Sigma(\vec{r}_0 - s'\vec{\Omega}, E) ds'} \left[\iint \Sigma_s(\vec{r} - s\vec{\Omega}, (\vec{\Omega}', E') \rightarrow (\vec{\Omega}, E)) \Psi\left(\vec{r} - s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t - \frac{s}{|\vec{v}|}\right) + S\left(\vec{r} - s'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, E, t\right) \right] \quad (98)$$

Es decir, se obtuvo una forma integral para la ecuación de Boltzmann, que puede escribirse en término de operadores²⁴:

$$\Psi = \mathbf{K} \Psi + S' \quad (99)$$

Se obtiene la solución para el flujo:

$$\Psi = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \quad (100)$$

Donde los términos son:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \mathbf{K} \Psi_{i-1} \\ \Psi_0 &= S' \end{aligned} \quad (101)$$

Matemáticamente, la solución obtenida se denomina serie de von Neuman. La interpretación física del formalismo desarrollado es particularmente apropiada en el vínculo entre los términos de la serie y los procesos físicos involucrados. El término de orden 0 se refiere al flujo primario estrictamente proveniente de la fuente de emisión S , mientras que los términos Ψ_i son las contribuciones de *scattering* a orden i obtenidas a partir del operador del *kernel de scattering* \mathbf{K} .

6.7.. Ejercitación 2 del capítulo VI

1. Plantear un método para resolver el flujo de energía o partículas en un sistema constituido por una fuente puntual monoenergética de emisión a tasa constante y unidireccional (usualmente denominado *kernel* de haz) localizada en un medio homogéneo e isotrópico cuyas propiedades de absorción/*scattering* son conocidas.
2. Aplicar la situación del ítem precedente en el caso en que el medio irradiado consiste de una *slab* (trozo) de material de espesor D a lo largo del eje de incidencia y de dimensiones infinitas a fines prácticos en las direcciones transversales. Asumiendo, que en primera aproximación los efectos de interacción pueden reducirse a eventos de tipo elásticos con desviaciones angulares están determinadas por la función $f(\cos(\theta))$, obtener una expresión a partir de la cual podría calcularse el flujo de energía o partículas.

²⁴Resulta conveniente expresar la ecuación de este modo para la resolución numérica de la misma, por ejemplo utilizando métodos estadísticos como Monte Carlo.

MÓDULO VII

7.. Módulo VII: Aplicación de la técnica de simulación Monte Carlo

El *Capítulo 7*. presenta algunos ejemplos sencillos, pero ilustrativos del modo en que puede aplicarse y aprovecharse la técnica Monte Carlo con fines de cómputo numérico. se muestran algunas aplicaciones genéricas, como estimación de números y cálculo de integrales definidas. Por último se realiza un ejemplo de aplicación simple respecto de cómo emplear el método Monte Carlo para modelar el transporte de radiación.

7.1.. Introducción

Tal como se enunció en secciones precedentes, existe una amplia variedad de problemas asociados al modelado del transporte de radiación, y que de hecho se presentan en la práctica en muy diversos ámbitos, que carecen de solución dentro del campo analítico, limitando el uso de “matemática pura” para la resolución de los mismos.

Este es el caso, por ejemplo, de la resolución de algunas ecuaciones íntegro-diferenciales. En particular, existen varios teoremas que demuestran la gran limitación de los métodos analíticos para la resolución directa de la ecuación de transporte de Boltzmann, representada por la expresión 11. De hecho, se conoce como resultado de teoremas que sólo puede resolverse la ecuación de transporte de Boltzmann para una cantidad muy acotada de situaciones, involucrando condiciones iniciales y de contorno que resultan muy poco realistas en casos de aplicación concreto de problemas físicos.

Por tanto, se propone un método alternativo para encontrar soluciones a la ecuación 11, para lo cual se considerará la re-escritura del problema en modo particular para posteriormente aplicar un procedimiento que consiste, básicamente, en el cálculo del valor de una integral definida. De manera tal, que una vez replanteado (re-ordenado) el problema éste se reducirá a la resolución de una ecuación que contiene integrales definidas, y por tanto podría salvarse la imposibilidad o inconveniencia de la aplicación de los métodos tradicionales (analíticos) para la solución de diferentes tipos de problemas, en los cuales se ven limitados debido, fundamentalmente, a:

- Desconocimiento de una función primitiva de aquella que se desea integrar.
- Si bien se conoce una función primitiva, resulta excesivamente compleja o extensa su aplicación.

La evaluación de estimadores, como por ejemplo para integrales definidas, por medio el método de Monte Carlo se realiza aplicando el siguiente teorema:

Teorema: Sean x_1, x_2, \dots, x_N N variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con función de densidad $f(x)$. Si g_i son funciones de x_i , entonces:

$$G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i(x_i) \quad (102)$$

es una variable aleatoria que verifica, el valor medio cumple con:

$$\langle G \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle g_i(x_i) \rangle \quad (103)$$

y la varianza resulta:

$$\sigma^2[G] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2[g_i(x_i)] \quad (104)$$

En particular, cuando todas las $g(x_i)$ son idénticas, e iguales a $g(x)$, se tiene que:

$$\langle G \rangle = \langle g(x) \rangle \quad (105)$$

y también:

$$\sigma^2[G] = \frac{1}{N} \sigma^2[g(x)] \quad (106)$$

Por lo tanto, en virtud de la definición de valor medio (o esperanza matemática) de $g(x)$, puede escribirse en la forma:

$$\langle G \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i(x_i) \right\rangle \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx = \langle g(x) \rangle \quad (107)$$

Este resultado justifica la siguiente forma de estimar una integral definida: Muestrear una serie de números aleatorios x_i con función de densidad $f(x)$ y evaluar $g(x)$ para cada x . La media de los valores obtenidos para $g(x)$ es una estimación de la integral. De acuerdo con el teorema de límite central la varianza de esta estimación decrece con el número de términos, según se deduce de la expresión 106 para $\sigma^2[G]$:

$$\sigma = \frac{\sigma[g]}{\sqrt{N}} \quad (108)$$

Conviene tener presente la desigualdad de Tchebycheff, de modo que se tiene:

$$P \left[|G - \langle G \rangle| \geq \sqrt{\frac{\sigma^2[g]}{N c}} \right] \leq c \quad (109)$$

De modo que se cuenta con argumento para tener una cota para la probabilidad de obtener un error mayor que el propuesto en la estimación del valor de la integral, pudiéndose siempre disminuir este error sin más que aumentar el valor de N .

7.2.. Eficiencia del método Monte Carlo

Se define la *eficiencia del método Monte Carlo* (ϵ) como:

$$\epsilon \equiv \sigma^2 T \quad (110)$$

donde T es el tiempo de cálculo. Como el valor de T está fuertemente relacionado con el número de puntos usados en la computación, se suele dar también esta otra definición para la eficiencia:

$$\epsilon \equiv N \sigma^2 \quad (111)$$

Y, a partir de ésta, la eficiencia relativa (ϵ_{rel}):

$$\epsilon_{rel} \equiv \frac{\epsilon[N]}{\epsilon[N']} = \frac{N \sigma^2}{N' (\sigma')^2} \quad (112)$$

Si $\epsilon_{rel} < 1$, entonces el método que corresponde a N' , $(\sigma')^2$ es “mejor” que el método con N , σ^2 . Si el número de puntos utilizados es el mismo, la eficiencia relativa queda reducida al cociente de las varianzas.

7.3.. Cálculo-estimación del número π por medio de técnicas Monte Carlo

Uno de los métodos más antiguos utilizados para estimar el valor de π es el método de Buffon, que emplea una serie de líneas paralelas y una vara, cuya longitud guarda correlación con la separación entre líneas, para ser arrojada y determinar el ángulo que forma éstas con las líneas, así como la línea que atraviesa.

El método propuesto a continuación, representa una analogía al método de Buffon.

Se considera un círculo de radio unidad centrado en el origen. El área del círculo en el primer cuadrante será $\pi/4$. Un modo de resolver este problema usando el método Monte Carlo con técnica éxito-fracaso, también denominado método de rechazo, es el siguiente:

1. Generar un par de números aleatorios ζ_1 y ζ_2 uniformemente distribuidos en $[0,1]$.
2. Determinar un punto en el primer cuadrante, de coordenadas (x,y) a partir de ζ_1 y ζ_2 .
3. Determinar la distancia D del punto (x,y) al origen, $D = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. Examinar si la distancia D es mayor o menor al radio R ($R = 1$).

5. Considerar con “éxito” los procesos que den lugar a puntos en el plano dentro de círculo y como “fracaso” los que estén fuera.
6. Calcular las proporciones de éxito y de fracaso.

A continuación, se muestra una propuesta²⁵ para un código de cómputo:

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCC
CCC          PROGRAMA PARA ESTIMAR EL VALOR DE pi          CCC
CCC
CCC          desarrollo de Mauro Valente, PhD 2012.-        CCC
CCC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

DOUBLE PRECISION rand, sumsq, pi, tries
OPEN(unit=6,file='EstimacionPI.dat')
notries=10000000          ! # de muestras
sumsq=0.0; np=0          ! inicializacion de scorings
DO 100 i=1,notries
  c1=rand(i)              ! rand generador # random
  c2=rand()
  c3=rand()
  !   x2=x/(x+1)
  !   y2=y/(y+1)
  ! write(*,*)x2,y2
  xx=c3**2
  yy=c2**2
  R=sqrt(xx+yy)
  ! write(*,*)R
  IF (R .LE. 1.0)THEN
    np = np + 1
    sumsq = sumsq +1.0
    !write(*,*)R,np
  ENDIF
  ! write(*,*)c2,c3,R,np
100 CONTINUE
tries=FLOAT(notries); pi=FLOAT(np)/tries
! write(*,*)pi
stdev = SQRT((sumsq/tries-pi**2)/tries)
WRITE(6,14)notries,pi*4.0d0,stdev*4.0d0
14 FORMAT (1x, 'notries : ',i10,' pi: ',f10.6,' std dev : ',f10.6)
STOP
END

```

Figura 10. Ejemplo sencillo de implementación en código para estimación del número π con técnica Monte Carlo.

²⁵El código es sólo para propósitos ilustrativos. No se encuentra preparado de modo eficiente ni optimizado.

7.4.. Ejemplos de cálculo de integrales definidas por medio del método Monte Carlo

Se considera diferentes procedimientos para calcular integrales definidas por medio del método Monte Carlo. El primero se llama “Método Monte Carlo de éxito-fracaso”, basado en la interpretación de una integral como un área. El segundo se llama “método Monte Carlo de la media muestral” y está basado en la definición de valor medio de una variable aleatoria continua.

7.4.1.. Método de éxito-fracaso con técnica Monte Carlo

Considérese el problema de calcular una integral unidimensional, donde se asume que el integrando $g(x)$ es una función acotada:

$$0 \leq g(x) \leq c \quad \forall x \in [a, b]$$

Y sea Ω el rectángulo:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ y } y \in [0, c]\}$$

Y sea (X, Y) una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre Ω con función de densidad:

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{c} (b-a) & (x, y) \in \Omega \\ 0 & (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

7.4.2.. Método de la media muestral con técnica Monte Carlo

Otra forma de calcular la integral, es representarla como el valor esperado de una variable aleatoria. Se reescribe la integral definida I en la forma:

$$I = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx \quad (113)$$

Donde $f(x)$ una función de densidad correspondiente a la variable aleatoria x .
Entonces:

$$I = \left\langle \frac{g(x)}{f(x)} \right\rangle \quad (114)$$

Suponiendo que la variable aleatoria se distribuye según la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

donde x uniformemente distribuida en $[a, b]$.

Entonces:

$$I = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} g(x) (b-a) dx = (b-a) \langle g(x) \rangle \quad (115)$$

Por lo tanto, una estimación muestral de I es:

$$I \approx (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) \quad (116)$$

Mientras que el estimador para la varianza σ^2 es:

$$\sigma^2[I] \approx \frac{1}{N-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^N (g(x_i))^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^N g(x_i)}{N} \right)^2 \right] \quad (117)$$

7.4.3.. Evaluación de integrales definidas

A modo de ejemplo, puede calcularse $I = \int_0^5 \frac{dx}{1+x^2}$.

Para ello, se recurre, por ejemplo, al método de muestreo según la expresión 116, por lo tanto:

$$I = \int_0^5 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{(5-0)}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{1+(x_i)^2} \quad (118)$$

A continuación, en la figura 11, se muestra una propuesta²⁶ para un código de cómputo para evaluar la integral $I = \int_0^5 \frac{dx}{1+x^2}$:

7.5.. Ejercitación 1 del capítulo VII

1. Implementar un método basado en Monte Carlo para determinar la probabilidad de obtener un “doble 6” lanzando dos dados.
2. Calcular con método Monte Carlo la semilongitud de onda de una onda sinusoidal.
3. Calcular con método Monte Carlo la semilongitud de onda de una onda cosenoidal.

²⁶El código es sólo para propósitos ilustrativos. No se encuentra preparado de modo eficiente ni optimizado.

```

:CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
:CC                                                                 CCC
:CC              PROGRAMA PARA EVALUAR INTEGRALES                    CCC
:CC                                                                 CCC
:CC              desarrollo de Mauro Valente, PhD 2012.-            CCC
:CC                                                                 CCC
:CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

: calcular la integral de f(x)=1/(1+x^2) en 0 <= x <= 5

      DOUBLE PRECISION rand, suma, sumasq, scr,numr1,numr2,numr3

suma=0.                !inicializacion variables
sumasq=0.
ntot=10
DO 100 i = 1,ntot
  numr1=rand()
  numr2=rand()
  numr3=rand()
  write(*,*) ' RANDOM: ', i,numr1,numr2,numr3
  scr=5./(1+(5*numr3)**2)
  suma = suma+scr
  sumasq = sumasq + (scr**2)

100 CONTINUE
suma=suma/(ntot); sumasq=sumasq/(ntot)
sig= sqrt((sumasq-suma**2)/100.)
WRITE(*,*) ' INTEGRAL =',suma,' , SIGMA =',sig
STOP
END

```

Figura 11. Ejemplo sencillo de implementación en código para estimación de la integral definida $I = \int_0^5 \frac{dx}{1+x^2}$ con técnica Monte Carlo.

4. Calcular con método Monte Carlo $I = \int_{-1}^1 (2 + u^3) du$.
5. Determinar la eficiencia de cómputo y realizar un estudio de convergencia para calcular con método Monte Carlo $I = \int_{\frac{1}{4}}^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Estimar la desviación standard en función del número de muestreo.
6. Modelar el experimento de Buffon para estimar el valor de π , asignando valores que correspondan a los parámetros del problema.

7.6.. El método Monte Carlo aplicado al transporte de radiación

En la actualidad, prácticamente todas las áreas recurren al uso de computadores para resolver problemas importantes, tanto de índole social, económica, de ingeniería, de ciencia básica, aplicada, etc. Con un manejo adecuado de programas de cómputo e información pueden realizarse cálculos y simulaciones de modelos reales, para estudiarlos y resolver problemas teóricos o de aplicación. Los procesos que contienen variables aleatorias son susceptibles de abordarse con el método Monte Carlo, que siendo método numérico capaz de explotar la capacidad de los procesadores en computadores, puede aplicarse en muchas tareas más de lo que se hacía en los principios de su aplicación práctica (a principios de la década de 1950).

La simulación Monte Carlo es la mejor alternativa disponible en la actualidad para resolver el problema del transporte de la radiación en la materia cuando se trata con geometrías

complejas, tales como las que se encuentran en las diversas aplicaciones médicas que utilizan radiaciones ionizantes.

En esta sección se aborda la aplicación del método Monte Carlo específicamente en la simulación de la interacción de la radiación con la materia, para investigar aspectos dosimétricos y de radiodiagnóstico, de algunos problemas que existen en el área de física médica.

En términos genéricos, puede decirse que la simulación es un experimento teórico en el que se reproduce el comportamiento de un sistema complejo, que consiste de una forma de “realizar” un experimento en el cual la realidad es sustituida por un modelo matemático.

Puede considerarse como un híbrido entre experimentación pura y teórica y es una herramienta muy útil en la investigación científica. En definitiva, lo que se hacen los métodos de simulación Monte Carlo aplicados al transporte de radiación es resolver la ecuación de transporte de las partículas de una forma puramente estadística, lo cual representa ventaja sobre los métodos analíticos complejos que resuelven la ecuación de forma aproximada y sólo para problemas sencillos.

La simulación Monte Carlo en física médica se utiliza para resolver problemas diversos, como estudiar y reconstruir imágenes de pacientes tomadas con equipos digitales, realizar cálculos de carcinogénesis, obtener espectros de salida de unidades de terapia, caracterizar detectores de radiación y fuentes de radiación ionizante de todo tipo.

7.6.1.. Tracking de partículas con el método Monte Carlo

La historia o trayectoria de una partícula es vista como una secuencia aleatoria de desplazamientos libres que terminan con un evento de interacción donde la partícula cambia su dirección de movimiento, eventualmente modifica el estado de fase (pierde energía o cambia dirección de movimiento, por ejemplo) y puede generar partículas secundarias. Todo ello se realiza aplicando las leyes de la física, atendiendo las funciones de probabilidad determinadas por las secciones eficaces adecuadas y dependiendo del medio, la energía de la partícula y la disposición geométrica del sistema.

A modo de ejemplo, se pueden simular condiciones extremas de un reactor nuclear, sin hacerlo en una instalación real; o bien simular la aplicación de un tratamiento de radioterapia a un paciente, sin llevarlo a cabo hasta que se obtengan las dosis adecuadas en los sitios convenientes en el simulador.

Se han desarrollado varios códigos de simulación Monte Carlo del transporte de radiación que contienen modelos de interacción para definir las funciones de distribución de probabilidad para las distintas variables aleatorias que intervienen en cada proceso o suceso, y que permiten obtener valores medios de observables de interés como pueden ser la posición de las partículas después de cada interacción, el momento y pérdidas de energía de las partículas primarias o las secundarias generadas en algunas interacciones.

En forma genérica, el objetivo de los códigos de simulación es modelar el camino seguido por partículas que atraviesan medios materiales, atendiendo las leyes de la física y las probabilidades, a partir de ciertas condiciones iniciales del estado de fase. El medio en el que se lleve a cabo la simulación puede ser de estado sólido (generalmente amorfo), líquido o gaseoso y el modelo geométrico del sistema se define utilizando la geometría analítica.

Los códigos Monte Carlo de transporte tienen modelos de interacción para las partículas que se van a simular, es decir, conjuntos de secciones diferenciales transversales para los mecanismos de interacción relevantes. Se definen funciones de distribución de probabilidad para el camino libre entre interacciones, el tipo de interacción que ocurre y el cambio del estado de fase, como pérdida de energía y deflexión angular de las partículas.

Algunos de los códigos de simulación Monte Carlo más reconocidos para el transporte de partículas en medios materiales son EGS4, EGSnrc, PENELOPE, NOREC, MCNP, GEANT4 y FLUKA. Cada código tiene sus particularidades puede resultar más conveniente para aplicaciones distintas, por lo que se debe analizar cuál es el más adecuado al tipo de problema, escogiendo el más sencillo de acuerdo con las habilidades y capacidad de cómputo con que se cuente, y que contenga las secciones eficaces o teorías físicas de respaldo más modernas para el tipo de partícula a simular.

Para varias aplicaciones en radiodiagnóstico y radioterapia, la utilización de simulación Monte Carlo del transporte de la radiación resulta fundamental e incluso necesaria.

Para ejemplificar, en el caso de aplicaciones en radiodiagnóstico, cuando un fotón o un electrón de energía elevada penetra en un medio material origina una cascada de partículas secundarias, cuyo número va en aumento al mismo tiempo que su energía media decrece. El inicio de las simulaciones de estas cascadas electromagnéticas, inicia con el trabajo de Berger en 1963, quien estableció las bases para realizar estos cálculos de forma efectiva y sobre las que todavía se trabaja hoy en día. Durante las décadas de 1970 y 1980 aparecieron los primeros programas de propósito general capaces de simular el transporte acoplado de fotones y electrones.

Generación de trayectorias

El proceso de simulación asume que las partículas siguen trayectorias rectilíneas a velocidad constante entre dos interacciones sucesivas con el medio. El modelado de su “vida” puede representarse como una sucesión de estados determinados por la posición del n -ésimo suceso en la posición \vec{r}_n , la dirección de movimiento $\vec{\Omega}_n$ y energía E_n inmediatamente después de producirse dicho suceso.

Dada una posición inicial, el primer punto a resolver es determinar a qué distancia se producirá el siguiente suceso y, luego, de qué tipo será. La primera cuestión se resuelve teniendo en cuenta el hecho de que el viaje de una partícula constituye un proceso de Poisson; la segunda, considerando la relación entre las secciones eficaces de las diversas interacciones posibles.

Si λ_i representa el recorrido libre medio (mfp) correspondiente a la interacción de tipo “i”, y λ el mfp total (cuyo inverso es la suma de inversos de los recorridos libres medios parciales), la distancia s recorrida por la partícula hasta el próximo suceso se determina mediante la expresión 119:

$$s = -\lambda \ln(\zeta) \tag{119}$$

donde ζ es un número aleatorio uniformemente en $[0, 1]$.
La probabilidad P_i de que la interacción sea del i -ésimo tipo es:

$$P_i = \frac{\lambda}{\lambda_i} \quad (120)$$

Una vez sorteado el tipo de interacción a simular de acuerdo con las probabilidades expresadas por en la ecuación 120, es necesario simular el cambio de estado (típicamente dirección y energía) que haya podido producirse. Para ello se emplea la distribución de probabilidad asociada a la sección eficaz doble diferencial correspondiente.

Por tanto, el proceso transforma el estado $(\vec{r}_n, \vec{\Omega}_n, E_n)$ al $(\vec{r}_{n+1}, \vec{\Omega}_{n+1}, E_{n+1})$. El proceso se repite hasta que, o bien la partícula escapa del sistema material, o bien su energía cae por debajo de cierto valor, momento en el cual se supone que es localmente absorbida y su vida terminada. Tras simular la vida de una partícula debe hacerse lo propio con las partículas secundarias a las que haya dado lugar.

7.6.2.. Modelado de colisiones e interacciones con el método Monte Carlo

Los procesos de colisión se implementan en la técnica de simulación Monte Carlo por medio de modelos de interacción que determinan las secciones eficaces. Para ello, en las aplicaciones típicas de transporte de radiación ionizante, se requiere el conocimiento de las secciones eficaces doble diferencial en energía y ángulo sólido. Los valores de las secciones eficaces pueden ser introducidos en la simulación Monte Carlo por medio de modelos analíticos que son directamente evaluados para las variables de estado de cada caso; y también puede emplearse tablas de valores obtenidas de bases de datos, que requieren procesos posteriores para interpolar (asumiendo continuidad) permitiendo obtener el valor correspondiente a las variables de estado.

Técnicas de simulación condensada

En principio, el esquema de simulación anteriormente presentado es válido para cualquier tipo de partícula. En la práctica, sin embargo, no resulta adecuado cuando se consideran -por ejemplo- electrones de alta energía, dado que el número de interacciones a lo largo de su trayectoria antes de ser absorbidos resulta excesivamente elevado, del orden de algunas decenas de miles para electrones de 1 MeV, por ejemplo. Tal cantidad de colisiones requeriría un tiempo de simulación tan grande que convierte a la solución propuesta al problema en algo inviable.

El modo de resolver las dificultades derivadas de este inconveniente se recurre a una técnica denominada “simulación condensada”, cuyo fundamento se encuentra en las teorías de dispersión múltiple. La idea consiste, básicamente, en simular el efecto global neto de un número elevado de interacciones mediante un único suceso “artificial”. Existe una variante, propuesta por Berger, conocida como simulación mixta, que se combina la simulación detallada de los sucesos más “violentos” con la condensada de los restantes, resultando un algoritmo particularmente robusto y versátil.

Los diversos esquemas de simulación condensada constituyen quizás la principal característica que distingue los programas de uso más extendido. De hecho, la concepción de nuevos

algoritmos más precisos y más rápidos es uno de los temas de investigación abiertos en el campo de la simulación Monte Carlo del transporte de la radiación.

Cantidades de interés en la simulación de partículas

Para obtener el valor medio de un observable Q ($\langle Q \rangle$) por medio de simulación Monte Carlo, en el transporte de radiación, conviene introducir el concepto de “historia” entendida como la “vida” de una partícula primaria y la de todas las secundarias generadas por ésta. A modo de ejemplo, podría tratarse de la dosis en un cierto volumen de interés.

Sea q_j a la contribución de la j -ésima historia, la estimación del valor medio del observable (en el ejemplo, la energía depositada por historia) tras simular un total de N historias provee el siguiente estimador para q para $\langle Q \rangle$:

$$\langle Q \rangle \sim q \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j \quad (121)$$

que coincide con la expresión 102.

7.6.3.. Ejemplo básico artificial de transporte con el método Monte Carlo

A modo de ejemplo extremadamente sencillo, se propone realizar el modelado por simulación Monte Carlo de una partícula libre moviéndose en un plano. El problema conocido como *random walk* consiste en mover una partícula con paso p con características isotrópicas y homogéneas para el medio en que se transporta la partícula.

Entonces, la distribución angular que corresponde al cambio en la dirección de movimiento es isotrópica, y se busca, en general, determinar la distancia neta recorrida al cabo de N movimientos.

7.6.4.. Ejemplo sencillo de transporte con el método Monte Carlo: Columna de neutrones

El transporte de neutrones, por ejemplo, puede implementarse siguiendo, a grandes líneas según el esquema:

- (a) Definición de la geometría del problema.
- (b) Definición de la fuente.
- (c) Selección del tipo de partícula para la fuente.
- (d) Determinación de la posición de colisión.

- (e) Determinación del tipo de interacción.
- (f) Determinación del resultado de la interacción.
- (g) Finalización de la historia de los secundarios.
- (h) Cálculo de los estimadores.

A modo de ejemplo, se considera una fuente puntual que emite un pulso, es decir una función δ , neutrones en la dirección z y está inmersa en un medio material homogéneo e isotrópico. Se considera como geometría una esfera de radio R y ausencia de absorción y el movimiento de las partículas es siempre en dirección z alejándose de la fuente. Estimar la cantidad de interacciones que ocurren dentro de la geometría, introduciendo el modelado y parámetros que sean necesarios.

7.7.. Ejercitación 2 del capítulo VII

1. Realizar una simulación Monte Carlo simple para determinar la distancia total D_T y distancia neta D (distancia al punto de partida) luego de 10, 100, 1000 y 10000 pasos de 1 unidad de una partícula moviéndose en un plano.
2. Repetir el ejercicio del item anterior para una partícula moviéndose en 3 dimensiones.
3. Realizar una simulación Monte Carlo del transporte de partículas en 2D que sólo pueden interactuar de dos modos: absorción o *scattering* caracterizados por secciones eficaces σ_A y σ_s , respectivamente. En particular, se tiene que la distribución angular de σ_s es isotrópica e independiente de la energía, mientras que $\sigma_a = \frac{C}{E}$, donde C es una constante que satisface la normalización. El problema consiste en calcular la transmisividad de una muestra de espesor L por parte de una haz puntual de partículas de energía inicial E_0 . Fijar valores de absorción (completo depósito local de la energía residual), de modo tal que no se extienda demasiado el tiempo de simulación.

MÓDULO VIII

8.. Módulo VIII: Descripción de configuraciones radiológicas en simulación Monte Carlo

El *Capítulo 8.* se trata sobre una breve introducción a códigos de simulación Monte Carlo dedicados al transporte de radiación. Se presentan las características genéricas de los códigos PENELOPE y FLUKA. La exposición se enfoca en la posibilidad de realizar aplicaciones en radiodiagnóstico.

8.1.. Introducción y parámetros en la simulación del transporte de radiación

Como se mencionó en las secciones precedentes, los métodos Monte Carlo son una forma genérica para denominar procedimiento matemáticos cuya característica común es el uso de números generados aleatoriamente y distribuciones de probabilidad. En la actualidad el método Monte Carlo es ampliamente aceptado y cada vez más extendido, como una herramienta para realizar investigación científica, específicamente para modelar el transporte de radiación en medios materiales.

En muchos casos de interés en el campo de radiodiagnóstico, como una situación particular del transporte de radiación, el método Monte Carlo es el más apropiado, ya que no se dispone de métodos alternativos de carácter experimental, analítico y/o instrumental.

8.2.. Setups virtuales

El método Monte Carlo puede resultar fácilmente aplicable a sistemas con geometrías complejas y diferentes medios materiales. De hecho, éste método permite simular el paso de la radiación a través de la materia tomando en cuenta todos los procesos físicos relevantes y todos los tipos de radiación involucrados, como tipo de partículas (electrones, positrones, fotones, neutrones, iones pesados y partículas como muones, kaones, etc) que pueden ser simulados hasta que se detengan.

En términos genéricos, el armado de la configuración de irradiación requiere de definir la fuente de radiación (en propiedades físicas y geométricas), la muestra que es irradiada (en geometría y propiedades físicas), los sistemas de detección, con las propiedades definidas por el usuario, así como determinar cuáles son los procesos, y bajo qué criterios, se consideran en la simulación.

A modo de fijar ideas, se presenta el diseño del *set up* de una situación típica en radiodiagnóstico, como es la simulación de un tubo de rayos X:

La geometría que debe simularse para el proceso de producción de rayos X se corresponde con el dispositivo típico de un tubo de rayos X. En primer lugar, se define la fuente de electrones mediante (por ejemplo mediante fuentes puntuales ubicadas a lo largo de una longitud de 2 mm). Los electrones viajan en línea recta hacia el ánodo de material (por ejemplo, tungsteno con espesor de 0.5 mm y ángulo de inclinación de unos 10 - 15 grados). Cuando los electrones ingresan en el material blanco el programa simula la trayectoria de los electrones hasta que éstos finalmente llegan al “reposo” o a una situación terminal. Durante los procesos de interacción se considera la producción de rayos X característicos y Bremsstrahlung. Los fotones que emergen del blanco atraviesan la envoltura de vidrio pirex de 0.5 mm de espesor, y finalmente el filtro adicional de aluminio de 1 mm de espesor.

El espectro calculado representa el número de fotones por intervalo de energía en función de la energía. Los resultados pueden ser obtenidos con los códigos PENELOPE o FLUKA, entre otros.

8.3.. Ejemplos de códigos de simulación Monte Carlo para transporte de radiación

Existen disponibles varios códigos de simulación dedicados a modelar el transporte de radiación. Algunos de los códigos más utilizados en aplicaciones de física médica son MCNP, EGS4, GEANT4, PENELOPE y FLUKA.

En general, los códigos de simulación Monte Carlo construyen un modelo estocástico en base a funciones de densidad de probabilidad modelando secuencialmente eventos individuales de una variable aleatoria. Es decir, teóricamente se siguen todos los eventos o interacciones que sufre cada partícula desde su origen hasta que alcanza una condición terminal (absorción, escape, energía de corte, etc).

Para cualquier evento, los códigos de simulación generan un número aleatorio fundamentándose en las funciones de densidad de probabilidad, que definen el tipo de interacción y otros parámetros. Posteriormente, se calcula el valor esperado de todos los eventos simulados.

Para realizar una simulación, debe crearse un archivo de entrada, típicamente denominado "input". Este archivo contiene de manera estructurada información sobre el problema en aspectos tales como la geometría del problema, materiales utilizados, secciones eficaces a utilizar, la localización y características de la fuente y los tipos de resultados que se desea obtener de la simulación.

8.3.1.. El código PENELOPE v. 2008

El código PENELOPE refiere a *PENetration and Energy LOss of Positrons and Electrons* (luego se incorporaron fotones).

Algunas de las principales características son:

- Cascadas acopladas de tipo "fotón-electrón".
- Transporte de fotones por medio de simulación detallada, que refiere a computar evento por evento.
- Transporte de electrones/positrones por medio de simulación mixta, *i.e.* en combinación entre simulación detallada y técnicas denominadas "simulación condensada", que consisten básicamente de implementar criterios para acumular una serie de eventos en único evento equivalente -estadísticamente-. Para ello, se cuenta con formalismos teóricos denominados *multiple scattering theory*.
- El rango de energía disponible en PENELOPE es 50 eV a 1 GeV.
- Las partículas secundarias que se generan son simuladas en orden cronológico.

Existen, cuatro estructuras o bloques principales:

Input : Se requiere de un archivo de inicialización para ingresar los datos de entrada.

Modelado de eventos de colisión : Simulación de interacciones.

Algoritmos internos de cómputo : Rutinas numéricas asociadas al proceso de cómputo.

Modelo de tracking : Transporte de la radiación

Al iniciar la simulación, PENELOPE lee el archivo de input, realiza la simulación y, como resultado, crea archivos nuevos de salida denominados “outputs”, que incluyen los resultados generados, estimaciones para los errores producidos y algunas tablas que resumen el proceso de simulación.

La figura 12 muestra esquemáticamente el diagrama de flujos del código PENELOPE.

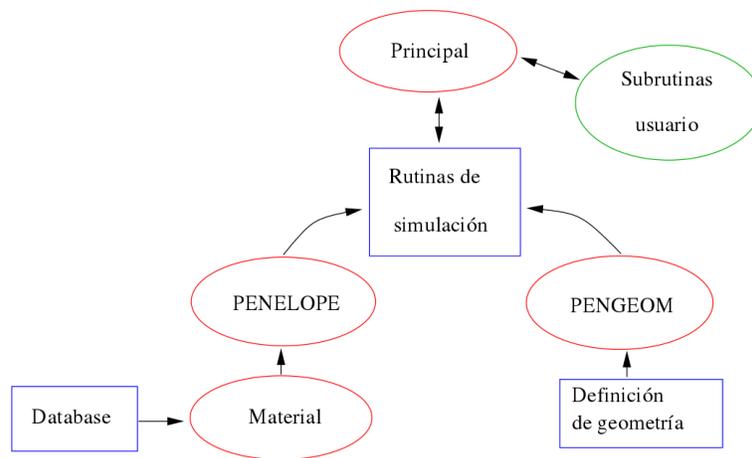


Figura 12. Diagrama esquemático de la estructura de PENELOPE.

La base de datos de PENELOPE cuenta con 279 materiales, entre elementos puros y compuestos.

8.3.2.. El código FLUKA v. 2011

El proyecto FLUKA pertenece al CERN, y es desarrollado para propósitos de física de partículas de alta energía, alcanzando valores de hasta varias decenas de TeV, o incluso mayores con *linking* a nuevas librerías restringidas.

En términos generales, FLUKA es un paquete integral de simulación de física de partículas. Cuenta con varios campos de aplicación que incluyen, entre otros, física teórica y experimental de alta energía, ingeniería, diseño de infraestructuras y protecciones (*shielding*), diseño de telescopios y detectores, estudios de rayos cósmicos, dosimetría, física médica y radiobiología.

En cuanto a su capacidad, brevemente FLUKA puede simular con gran precisión todos los

procesos de interacción y propagación de más de sesenta tipos de partículas, entre ellas fotones y electrones, neutrinos, muones de varias cantidades de energía, hadrones, así como de sus correspondientes antipartículas.

La figura 13 muestra esquemáticamente el contenido central del paquete FLUKA.

Main Library:		
libflukahp.a (object collection)		
Physics data files:	Basic Scripts: (in \$FLUPRO/flutil)	
sigmapi.bin	rfluka	
elasct.bin	lfluka	
brems_fin.bin	fff	
cohff.bin		
gxsect.bin	Random Number seed	
neuxsc-ind_260.bin	random.dat	
neuxsc-ind_72.bin	Important Directories	
nuclear.bin	flukapro/	all fluka commons
fluodt.dat	usermvax/	user routines
e6r1 nds3.fyi	flutil/	general utilities
jef2.fyi		
jendl3.fyi		
xnloan.dat		

7th FLUKA Course – Paris Sept.29-Oct.3 2008

6

Figura 13. Contenido básico de FLUKA.

8.4.. Ejercitación del capítulo VIII

1. Realizar una simulación Monte Carlo para determinar la energía absorbida a lo largo del eje de incidencia para un haz de fotones de 10 MeV incidiendo en un fantoma de agua cúbico de lado 20 cm. El haz es perfectamente colimado. Resolver el problema usando PENELOPE y FLUKA.
2. Repetir el ejercicio del item anterior para un haz de electrones de igual energía.
3. Analizar y discutir los resultados obtenidos.
4. Estudiar cómo puede simularse el problema de determinar la dosis absorbida a lo largo del eje central en un fantoma de músculo blando irradiado por un haz de ^1H de 400 MeV perfectamente colimado.

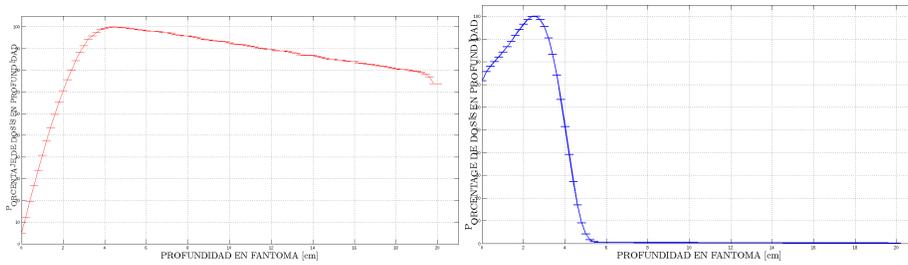
Ejemplos de simulaciones Monte Carlo

Figura 14. Porcentaje de dosis en profundidad en un fantoma cúbico de 20 cm de lado irradiado con un haz puntual de 10 MeV de fotones (izquierda) y electrones (derecha) obtenido con FLUKA - usuario con licencia FUID-2038.

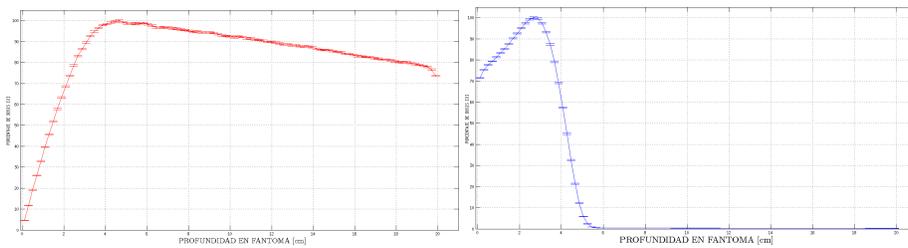


Figura 15. Porcentaje de dosis en profundidad en un fantoma cúbico de 20 cm de lado irradiado con un haz puntual de 10 MeV de fotones (izquierda) y electrones (derecha) obtenido con PENELOPE - usuario con licencia NEA-1525-008.

MÓDULO IX

9.. Módulo IX: Radiodiagnóstico anatómico estudiado con simulación Monte Carlo

El *Capítulo 9.* presenta algunos ejemplos simples del uso de técnicas de simulación Monte Carlo para caracterizar propiedades estructurales de anatomía. Se realizan aplicaciones típicas del ámbito de radiodiagnóstico.

9.1.. Consideraciones para la simulación de imágenes morfológicas

Existen diferentes métodos que han sido aplicados e implementados rutinariamente para el *imaging* médico con la premisa de lograr técnicas no invasivas capaces de prevenir o diagnosticar patologías.

Para el estudio de las técnicas radiológicas son necesarios conocimientos avanzados de interacción de la radiación ionizante con la materia, específicamente materiales biológicos típicos en pacientes. Desde un punto de vista general, puede caracterizarse a las técnicas de *imaging* médico según dos categorías: la primera dedicada a extraer información estructural de tipo anatómica y la segunda de carácter funcional para determinar las propiedades metabólicas.

A continuación se presentan métodos numéricos y modelos analíticos, integrados en algoritmos, capaces de modelar los principales fenómenos físicos relacionados con el transporte de radiación y procesos de interacción con medios materiales de interés biológico.

A modo de ejemplo se presentan implementaciones de metodologías conjuntamente con pruebas preliminares para casos de aproximaciones de *imaging* por contraste de absorción, como radiografía y mamografía.

9.2.. Radiodiagnóstico para estructuras anatómicas

De acuerdo con los capítulos precedentes, los fotones interactúan con las partículas del material irradiado de diferentes maneras y a cada tipo de interacción corresponde funciones de densidad de probabilidad según los modelos de probabilidad para las secciones eficaces de cada tipo de evento.

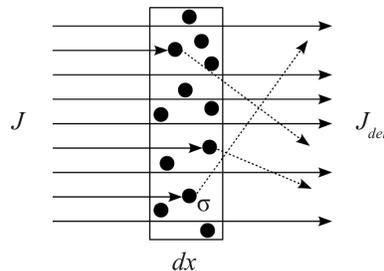


Figura 16. Esquema de irradiación típico.

Considerando un haz homogéneo de de partículas descrito por la cantidad de partículas por unidad de área por unidad de tiempo ($J = N / (S \cdot t)$) incidiendo en una muestra delgada de espesor dx de un cierto material, como muestra la figura 16.

Suponiendo un sistema de detección ideal, colocado para contabilizar sólo partículas que emergen de la muestra irradiada que no hayan interactuado con la muestra.

Resulta que la medición del detector será $J_{det} = J + dJ$, donde dJ indica el número de partículas que efectivamente interactúan con la muestra.

Nótese que dJ debe ser una cantidad negativa dado que toma en cuenta las partículas que emergen menos aquellas que inciden en la muestra.

Debido a que el haz es de distribución espacial uniforme en fluencia en el área de incidencia S y que la muestra delgada puede considerarse, en muy buena aproximación, de características diferenciales dx , la fracción de área cubierta por el *target* resulta que

$$\frac{dS}{S} = \frac{J - J_{det}}{J} = \frac{-dJ}{J}$$

donde dS es el área correspondiente a centros de *scattering* y S es el área total del haz de irradiación.

Si σ es la sección eficaz de un único centro de *scattering* y dn_c es el número total de centros de *scattering* en el volumen dV , entonces:

$$\frac{dS}{S} = \frac{dn_c \sigma}{S dx} dx = \frac{dn_c}{dV} \sigma dx = \eta \sigma dx \implies \frac{-dJ}{J} = \eta \sigma dx \quad (122)$$

donde $\eta \equiv dn_c/dV$ es el número de centros de *scattering* por unidad de volumen. En particular, en el caso de un material de densidad ρ y masa molar M , η se obtiene de:

$$\eta = \frac{N_{Av} \rho}{M} \quad (123)$$

donde $N_{Av} = 6,02214 \times 10^{23} mol^{-1}$ es el *Número de Avogadro*.

9.3.. Simulación Monte Carlo de prácticas de radiografía y mamografía

Los métodos de *imaging* médico generalmente emplean haces externos de rayos X realizando irradiaciones en diferentes modalidades para extraer información estructural. En este sentido, la anatomía de pacientes puede ser obtenida por medio de alguno de estos métodos. Desde un punto de vista general, las técnicas de *imaging* médico anatómicas consisten en el uso de haces externos de rayos X generados por Bremsstrahlung y efecto fotoeléctrico de electrones que colisionan con ánodos que constituyen el blanco del tubo de rayos X.

Una vez que la radiación emerge de la muestra después de hacer interactuado con el paciente (o la muestra), se produce la detección por medio de sistemas específicos de detección de radiación, originalmente películas radiográficas, y más recientemente dispositivos como detectores de estado sólido.

La detección de la radiación es luego sintetizada para conformar la imagen virtual que puede plasmarse en formato analógico o digital.

Por tanto, los principales aspectos y la información requerida para ser incluida en la realización de técnicas de *imaging* anatómico, son:

- Configuración de irradiación especificando la estructura y la disposición geométrica y experimental, así como los componentes instrumentales.
- Conocimiento preciso del espectro y características geométricas del haz de radiación incidente.
- Información sobre el sistema de detección, como respuesta a la radiación, diseño, calibración, etc.
- Anatomía de paciente (o muestra) cuyas propiedades materiales serán inferidas.
- Modelos de interacción radiación-materia, los cuales pueden ser obtenidos por medio de modelos teóricos con expresiones analíticas o parámetros tabulados.

9.4.. Ejercitación del capítulo IX

1. Realizar una simulación determinista de la formación de la imagen por contraste de absorción de un cilindro de agua de 10 cm de diámetro y altura irradiado con un haz paralelo de fotones de 50 keV y tamaño de campo de 10 cm × 10 cm. (Detección ideal). Graficar perfil central de la imagen e interpretarlo en términos de las propiedades físicas.
2. Repetir el ejercicio del ítem anterior para un haz incidente de 2 canales energéticos igualmente probables de 50 keV y 30 keV. Analizar y discutir los resultados obtenidos.
3. Realizar una simulación Monte Carlo análoga al primer ítem. Analizar los resultados.
4. Simular un *set up* experimental típico del instrumento de laboratorio.

MÓDULO X

10.. Módulo X: Radiodiagnóstico metabólico estudiado con simulación Monte Carlo

El *Capítulo 10.* está dedicado a presentar muy brevemente las características básicas de las técnicas de radiodiagnóstico de tipo funcional. Se describe cómo éstas permiten recavar información de carácter metabólico para complementar la información disponible en vista de realizar el diagnóstico en ámbito clínico. Se puntualizan los aspectos principales sobre cómo implementar técnicas de simulación Monte Carlo para estudiar este tipo de procesos de *imaging*.

10.1.. Imágenes funcionales para fisiología metabólica

Actualmente, la combinación de técnicas físicas sofisticadas y métodos de procesamiento digital de los datos obtenidos por las máquinas que adquieren las imágenes médicas es un campo que permite extraer una información que se sitúa más allá de la simple observación de las imágenes en las placas radiográficas o en los monitores diagnósticos. Las técnicas actuales permiten, por medio de métodos digitales, proveer información precisa de la anatomía del área estudiada y obtener, a la vez, información funcional. Para estudiar la funcionalidad subyacente se han utilizado técnicas como la tomografía por emisión de positrones (PET) o la tomografía por emisión simple de fotones (SPECT). Sin embargo, el dispositivo típico y más común para la detección de radiación en aplicaciones de medicina nuclear es la cámara gamma, en la modalidad indicada en la figura 17.

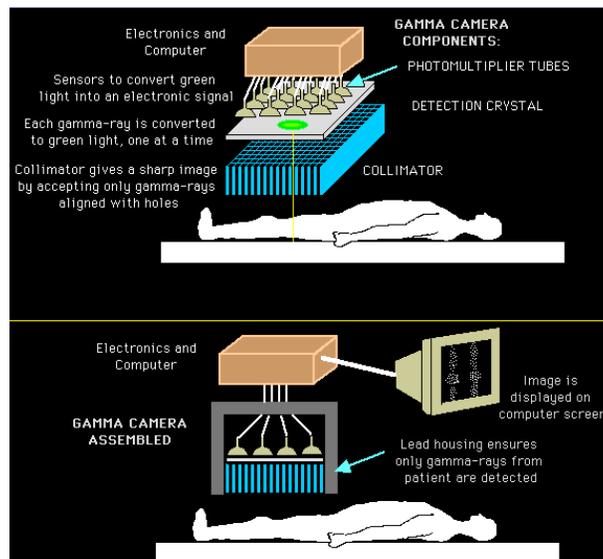


Figura 17. Configuración para estudios en medicina nuclear utilizando cámara gamma.

El principio básico de funcionamiento de la cámara gamma como equipamiento de imágenes de medicina nuclear es aprovechar la incorporación al paciente de moléculas

que contienen algún átomo radioactivo y que, dependiendo del metabolismo será su distribución en el tiempo. Puede ser usada para tratamiento, como en el caso del ^{131}I , que en dosis adecuadas se deposita en la tiroides y conformando un tejido de similar comportamiento (cáncer de tiroides) destruyendo sus células o puede usarse también para diagnóstico.

10.2.. Aplicaciones en cámara Gamma

En términos técnicas, la cámara gamma consiste en un colimador, o blindaje calibrado, para que la radiación del radioisótopo a evaluar sólo pueda alcanzar el detector si ha realizado una trayectoria perpendicular al mismo; un detector de radiación por centelleo, que es un cristal en el que al incidir radiación emite luz, luego ésta es captada por un arreglo de fotomultiplicadores (sistemas electrónicos que transforman la luz en una corriente eléctrica); después del arreglo de fotomultiplicadores, un sistema electrónico realiza la detección contando y catalogando estos eventos para armar un mapa de distribución plano de la radiación frente al detector. La intensidad de la radiación detectada depende tanto de la distribución como de la atenuación que sobre la radiación realiza la parte del cuerpo del paciente que se interpone entre el punto donde se produjo un determinado evento y el detector. La figura 18 muestra esquemáticamente la constitución de la cámara gamma y el osbozo del trazado de rayos.

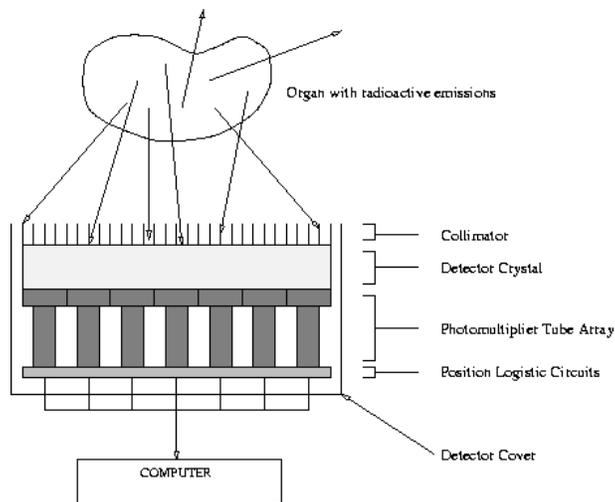


Figura 18. Esquema de los componentes básicos de un detector tipo cámara gamma.

Actualmente, estos sistemas además de permitir la adquisición de imágenes planas, pueden rotar alrededor del paciente obteniendo varias imágenes planares con las que, computadora por medio de un algoritmo matemático, genera cortes transversales, mejorando la relación señal a ruido, recuperando información perdida por atenuación y en general optimizando el diagnóstico.

Cada imagen de cámara gamma, así como una radiografía, brinda información bidimensional, pero pueden combinarse muchas imágenes tomadas desde distintas posiciones alrededor del paciente para obtener una imagen tridimensional, dando lugar a, por ejemplo, la técnica de *Single Photon Emission Computed Tomography -SPECT*. Esta imagen tridimensional puede después manipularse de manera digital para obtener secciones dimensionales del cuerpo en cualquier orientación requerida.

10.3.. Ejercitación del capítulo X

1. Realizar una simulación determinista de la formación de la imagen generada en un plano de detección por contraste de absorción de una esfera de radio R cuyo centro dista L del plano de detección y dentro de la misma existe un punto de emisión de fotones de 40keV en el centro de la esfera. Estudiar el efecto de los parámetros R y L . La fuente consta de 10mCi. Interpretar los resultados obtenidos de acuerdo con la figure 19.

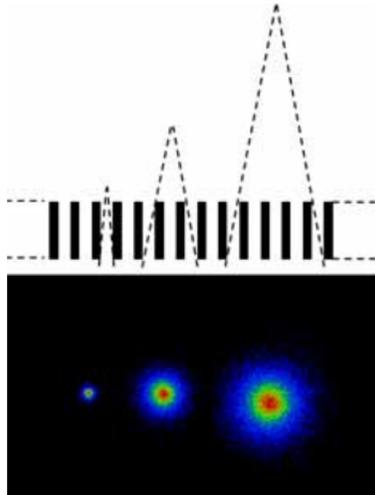


Figura 19. Respuesta del sistema a una fuente puntual colocada a distintas distancias del plano del colimador (colimador de agujeros paralelos).

2. Repetir el ejercicio del item anterior utilizando el código PENELOPE. Estudiar los sistemas de colimación que se requieren. Analizar y discutir los resultados obtenidos.
3. Realizar una simulación Monte Carlo análoga al item anterior pero colocando 3 fuentes puntuales dentro de la esfera.
4. Implementar el método de aceptación/rechazo para modelar la emisión de una fuente de ^{99m}Tc uniformemente distribuida en un cubo de 1 cm de lado inmerso en una esfera 10 cm de diámetro. Realizar simulaciones determinista y Monte Carlo de lo que representaría el *imaging* con cámara gamma.

Referencias

- [1] A. Author1. *Title1* Jour Year.