

Curso optativo de la MAPI UNC - pp. 1-13

<http://www.famaf.unc.edu.ar/~valente>

ISBN (no registrado)

© 2012 Mauro Valente.

# **CURSO OPTATIVO: MÉTODOS DETERMINÍSTICOS Y ESTOCÁSTICOS PARA MODELAR IMÁGENES RADIOLÓGICAS**

*Mauro Valente*<sup>†\*</sup>

Colaborador Lic. Francisco Malano<sup>†</sup>

<sup>†</sup> CONICET & Universidad Nacional de Córdoba; Argentina

Año académico 2013



**Maestría en Análisis y Procesamiento de Imágenes**  
Universidad Nacional de Córdoba

---

\* Contacto e-mail: [valente@famaf.unc.edu.ar](mailto:valente@famaf.unc.edu.ar)

## **PROGRAMA Y CONTENIDO**

### **MÓDULO I: Introducción al transporte de radiación**

1. Conceptos básicos del transporte de radiación.
2. Introducción a la teoría de Boltzmann.
3. Efectos primarios y de dispersión en radiodiagnóstico.
4. Descripción cualitativa de componentes de la ecuación de transporte.

### **MÓDULO II: Cálculo determinista para transporte de radiación**

1. El concepto de soluciones determinísticas.
2. Nociones básicas sobre condiciones de contorno y vínculo temporal del transporte de radiación.
3. Descripción de soluciones analíticas para la ecuación de transporte.
4. Ventajas y limitaciones del método determinístico para transporte de radiación.

### **MÓDULO III: Repaso de estadística y probabilidad**

1. Repaso de conceptos básicos de estadística.
2. Repaso de conceptos básicos de probabilidades.
3. Asociación de procesos físicos con probabilidades.

### **MÓDULO IV: Procesos estocásticos**

1. Aleatoriedad en la física.
2. Conceptos generales sobre procesos estocásticos.
3. El transporte de radiación como proceso estocástico.
4. Reformulación integral de la ecuación de transporte.

### **MÓDULO V: La técnica de simulación Monte Carlo**

1. Desarrollo histórico y bases del método Monte Carlo.
2. Relación entre el método Monte Carlo y procesos estocásticos en física.
3. Predicción de observables por medio de simulación Monte Carlo.

### **MÓDULO VI: Ejemplos de aplicación de la técnica de simulación Monte Carlo**

1. Cálculo de  $\pi$  usando simulación Monte Carlo.
2. Evaluación de integrales definidas utilizando simulación Monte Carlo.
3. El método Monte Carlo aplicado al transporte de radiación.

**MÓDULO VII: Descripción de configuraciones radiológicas en simulación Monte Carlo**

1. Parámetros involucrados en la simulación del transporte de radiación.
2. Definición de *setups* virtuales.
3. Los códigos PENELOPE v2008 y FLUKA v2001.

**MÓDULO VIII: Radiodiagnóstico anatómico estudiado con simulación Monte Carlo**

1. Imágenes morfológicas.
2. Radiodiagnóstico para estructuras anatómicas.
3. Aplicaciones en radiografía y mamografía.

**MÓDULO IX: Radiodiagnóstico metabólico estudiado con simulación Monte Carlo**

1. Imágenes funcionales.
2. Radiodiagnóstico para fisiología metabólica.
3. Aplicaciones en cámara Gamma.

**MÓDULO IX: Reconstrucción tomográfica en radiodiagnóstico**

1. Introducción a las técnicas matemáticas de reconstrucción tomográfica.
2. Efecto de las características del haz y los parámetros de adquisición.
3. Aplicaciones en radiodiagnóstico anatómico: Tomografía Axial Computada (CT).
4. Aplicaciones en radiodiagnóstico metabólico: *Positron Emission Tomography (PET)* y *Single Photon Emission Computed Tomography (SPECT)*.
5. Nociones sobre requerimientos de *matching* y fusión de imágenes anatómicas y metabólicas.

## Índice

<b>1.. Módulo I: Introducción al transporte de radiación</b>	<b>6</b>
1.1.. Radiación electromagnética . . . . .	6
1.2.. Descripción del transporte de radiación . . . . .	6
1.3.. Aproximaciones para el transporte de fotones en medios materiales . . . . .	7
1.4.. Interpretación de la interacción de fotones con la materia . . . . .	8
1.5.. Breve descripción de interacciones entre rayos X y materia . . . . .	9
1.6.. Breve descripción de interacciones entre partículas cargadas y materia . . . . .	11
1.6.1.. Penetración y alcance de partículas cargadas en la materia . . . . .	12

---

# MÓDULO I

---

## 1.. Módulo I: Introducción al transporte de radiación

El *Capítulo 1.* presenta una breve introducción a los conceptos básicos de radiación, sus propiedades físicas y la manera en que interactúa con la materia. Se enfoca la descripción en la radiación electromagnética, ya que es este el tipo de radiación más comúnmente empleado para radiodiagnóstico en ámbito médico.

### 1.1.. Radiación electromagnética

En términos generales puede definirse a la radiación como la propagación de energía en forma de partículas u ondas (electromagnética por ejemplo) a través de un dado medio material, o bien directamente en el vacío. En los casos en que la radiación transporta energía suficiente para provocar ionizaciones (“extracción” de electrones ligados a los átomos que constituyen el material irradiado) en el medio que atraviesa, entonces se denomina radiación ionizante, a diferencia de aquellas radiaciones que no son capaces de ionizar, y por tanto se denominan radiaciones no ionizantes. Ya sea que se trate de radiación ionizante o no ionizante, ésta presenta siempre naturaleza corpuscular y/u ondulatoria.

Desde un punto de vista genérico y extremadamente simplificado, puede decirse que la radiación electromagnética es básicamente combinaciones de campos eléctricos y campos magnéticos de carácter oscilatorio propagándose en el espacio y transportando energía de un punto a otro durante la propagación.

Existen una enorme variedad de fenómenos físicos debidos a la radiación electromagnética, todos presentan las mismas características esenciales a pesar que aparenten ser diferentes. Por tanto, todos los fenómenos físicos asociados con radiación electromagnética son descritos de manera genérica y unificada, incluyendo interacciones de las ondas electromagnéticas y los constituyentes del medio irradiado. Algunos de los fenómenos físicos debidos a radiación electromagnética que experimentamos de manera cotidiana son, por ejemplo, la luz visible, ondas de radio y tv, calor radiado, radioactividad.

Según la energía cinética  $E$  (o frecuencia  $\nu$ , ya que son proporcionales  $E = h\nu$ ,  $h$  es la constante de Planck  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  J·s) las ondas electromagnéticas podrán atravesar medios conductores. Por este motivo, por ejemplo, no es posible lograr transmisiones de radio bajo el mar o bien los teléfonos celulares no captan señal si se colocan en una jaula metálica. Pero, como se sabe la energía debe ser conservada, por tanto cuando una onda electromagnética interactúa con un medio conductor pueden suceder dos cosas: se transforma en calor (como el caso de hornos de microondas) o se refleja en la superficie (como el caso de un espejo).

En resumen, cuando la radiación incide en un material puede producirse una serie de fenómenos que dependen de tipo de radiación (fotones, electrones, neutrones, etc), de la energía con la que incide, del tipo de material y de su estado (densidad, estado físico, etc.)

### 1.2.. Descripción del transporte de radiación

Una partícula de momento  $p$  ( $p = mv$ , donde  $m$  es la masa y  $v$  es la velocidad) con longitud de onda  $\frac{h}{p}$  transportada en un medio material de espesor  $x$  tal que  $x \ll \frac{h}{p}$  estará completamente determinada (en su espacio de fase) por la posición  $\vec{r}$ , la dirección de movimiento  $\vec{\Omega}$ , la energía  $E$  y el tiempo  $t$ .

Las propiedades del transporte de la partícula (u onda de radiación) pueden describirse a partir de la ecuación de transporte de radiación de Boltzmann, dada por:

$$\frac{1}{|\vec{v}|} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi - S = \iint_{4\pi} \Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) dE' d\vec{\Omega}' \quad (1)$$

donde  $\Psi$  es alguna de las cantidades observables como flujo de partículas,  $S$  es la fuente de radiación, y  $K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$  es el operador del kernel que cambia el estado de fase de las “co-ordenadas” primadas ( $\vec{\Omega}', E'$ ) a las sin primar ( $\vec{\Omega}, E$ ) debido a los procesos de dispersión (*scattering*) en la posición  $\vec{r}$ .

### 1.3.. Aproximaciones para el transporte de fotones en medios materiales

En el caso particular que se estudiará en el presente curso, el interés está en los procesos físicos involucrados en la interacción de rayos X de radiodiagnóstico, con medios materiales de interés biológico.

Si se consideran las configuraciones típicas, y los procesos más probables en las geometrías usuales en radiodiagnóstico, resulta que la radiación primaria proviene de la fuente  $S$  que en este caso se trata del haz de rayos X utilizado.

Los procesos de interacción suceden dentro del paciente y el haz emergente, determinado por la ecuación de transporte de Boltzmann, formado tanto por radiación primaria (proveniente de la fuente  $S$ ) y radiación de *scattering* generada por interacciones dentro del paciente, llega en definitiva al sistema de detección para formar la imagenradiológica.

Según la energía del haz de la fuente  $S$ , y las propiedades de absorción/dispersión, así como de las dimensiones físicas del paciente, resultará que la mayor parte del flujo emergente se corresponderá con la componente primaria o de *scattering*.

Incorporando los modelos de interacción radiación-materia que corresponden a fotones con energías de kilovoltaje, típicas de radiodiagnóstico, tejidos biológicos y para dimensiones típicas de pacientes, resulta que en el flujo emergente la componente de radiación primaria es prácticamente todo el flujo, existiendo contribuciones del orden del 2% por parte del *scattering*. Por tanto, la descripción del transporte de la componente primaria del flujo emergente proporciona una buena aproximación del flujo de radiación que alcanzará el detector para dar lugar a la formación de la imagen.

Para modelar el transporte de radiación primaria, utilizando la ecuación de transporte de Boltzmann en la expresión 2, se introducen algunas aproximaciones a fin de facilitar la resolución del problema aplicable a las condiciones propias del proceso radiológico típico.

La primera condición es considerar el problema en estado estacionario, ya que se admite el equilibrio del flujo incidente/interactuante/emergente. De este modo, se tiene que se anula el primer término de la expresión 2, ya que  $\frac{\partial}{\partial t} \Psi = 0$ .

Suponiendo que el transporte se realiza, principalmente, en una dirección, denominada  $z$ , el segundo término en la expresión 2 resulta  $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} = \frac{d}{dz}$ .

El problema así planteado presenta simetría azimutal, por tanto:  $\iint_{4\pi} dE' d\vec{\Omega}' = \int dE' 2\pi \int \sin(\theta) d\theta$ .

Si el haz emergente está compuesto, casi exclusivamente por radiación primaria, ésta debe haber atravesado el material (paciente) prácticamente sin colisiones, es decir, que la integral aplicada al operador del *kernel*  $\int dE' 2\pi \int \sin(\theta) d\theta K(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \sim \mathbf{0}$  (operador nulidad).

Por lo tanto, la ecuación de transporte de Boltzmann se reduce a:

$$\frac{d}{dz}\Psi^* - S = 0 \quad (2)$$

Para  $\Psi^*$  a lo largo del eje  $z$ .

además, la fuente de radiación  $S$  es el flujo emitido por una fuente de modo tal que emergen rayos *quasi* paralelos con distribución *quasi* uniforme del frente onda, considerado plano y homogéneo. Es decir,  $S = \Psi_{source}(z) = \Psi^*$ .

A partir de la expresión 2 es inmediato que  $\Psi^*(z) = \Psi(z=0)e^{-cz}$ , conocida como ecuación de Lambert-Beer y describe la conocida relación de atenuación exponencial por parte de la radiación al atravesar un medio material. El análogo de este proceso a nivel microscópico es la penetración cuántica de la barrera de potencial, cuya solución coincide, como es de esperar.

De este modo, se obtiene a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann una expresión significativamente útil para describir, de modo aproximado, el comportamiento de los procesos de interacción en el ámbito de radiología. Bajo estas aproximaciones, se asume que las contribuciones de *scattering* son despreciables, que el haz de radiación proviene de una fuente que emite luz en un frente de onda plano paralelo uniforme y en fase, así como que el medio irradiado es homogéneo e isotrópico.

En definitiva, la relación encontrada, gracias a las relaciones unívocas descritas al inicio del capítulo, permite cuantificar flujo, fluencia (si se conocen las características energéticas del haz) y demás cantidades vinculadas. Por ejemplo, la intensidad del haz transmitido  $I$  satisface:

$$I(z) = I(z=0) e^{-\int dE dz \mu} = I(0) e^{-\int dE \mu(E) \Delta z} = I(0) e^{-\mu(E_0) \Delta z} \quad (3)$$

donde la última igualdad es válida para haces monocromáticos y  $\mu$  se denomina coeficiente de absorción lineal.

#### 1.4.. Interpretación de la interacción de fotones con la materia

Los fotones al atravesar la materia interactúan tanto con los electrones como con los núcleos de los átomos de modo tal que se el la cantidad de fotones que arriba a una dada distancia de penetración  $z$  (flujo en la posición  $z$ ) se atenúa exponencialmente, disminuyendo la intensidad de la radiación a medida que aumenta el espesor atravesado. Sin embargo, en la descripción de atenuación exponencial nunca llega a anularse el flujo. La atenuación por unidad de espesor depende de la energía de los fotones y de las propiedades del material irradiado (peso atómico, densidad electrónica (número de electrones por unidad de volumen), densidad másica, etc).

La figura 1 muestra un esquema gráfico simplificado del efecto de interacción de fotones con medios materiales.

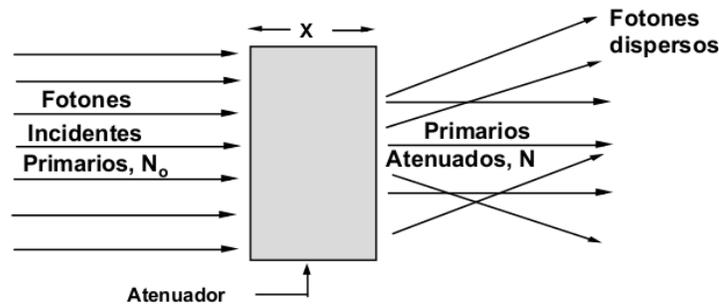


Figura 1. Esquema de atenuación/transmisión de fotones en medios materiales.

### 1.5. Breve descripción de interacciones entre rayos X y materia

Dependiendo del tipo de material y de la energía de los fotones incidentes se producirán unos procesos u otros. Para la radiación ionizante estos procesos son, básicamente:

- **Dispersión coherente o Thomson-Rayleigh:**  
El fotón sólo se dispersa sin provocar ionización ni excitación. La probabilidad de ocurrencia (sección eficaz) es de importancia para energías bajas.
- **Efecto fotoeléctrico:**  
El fotón es absorbido completamente, transmitiendo toda su energía cinética al material. No se produce radiación dispersa. Para aplicaciones radiológicas, se caracteriza por provocar un alto contraste en la imagen.
- **Dispersión Compton:**  
El fotón se dispersa pero cede parte de su energía. Se produce un “deterioro” del contraste radiológico (ruido de fondo) debido a este efecto. Como consecuencia se produce radiación dispersa.
- **Producción de pares:**  
El fotón cede (y “desaparece”) toda su energía. El efecto neto es la producción dos fotones secundarios, consecuencia de la aniquilación electrón-positrón, que es en sí el efecto primario. Este efecto puede ocurrir para valores de energía cinética altos, típicamente fuera del interés para aplicaciones en radiología.
- **Reacciones nucleares:**  
Los fotones con energía cinética alta (superiores a 10 MeV) pueden inducir reacciones nucleares en la materia. A efectos prácticos implica que para energías altas deben considerarse efectos de los neutrones secundarios originados en dichas reacciones.

En la figura 2 se muestra un diagrama resumiendo las probabilidades de ocurrencia de los diferentes efectos de interacción entre la radiación electromagnética ionizante y la materia.

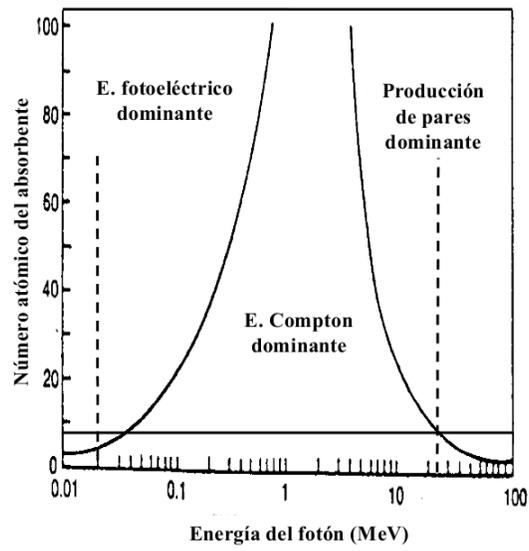


Figura 2. Efectos de interacción entre fotones y medio irradiado.

Por último, la figura 3 resume esquemáticamente los procesos que ocurren durante la interacción de rayos X con la materia.

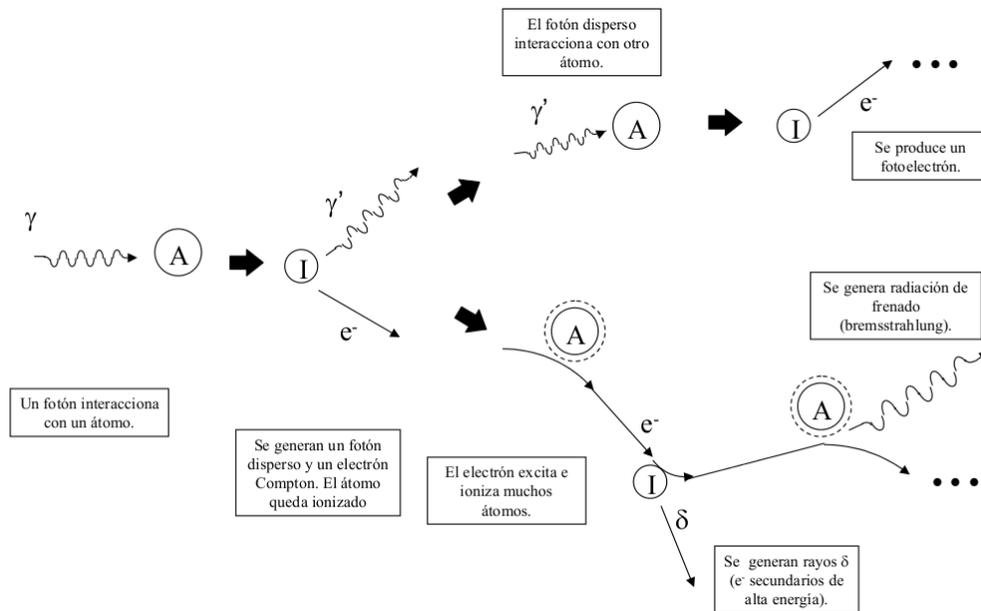


Figura 3. Resumen esquemático de los procesos de interacción.

### 1.6.. Breve descripción de interacciones entre partículas cargadas y materia

Las partículas cargadas, específicamente los electrones en particular, interactúan de una forma mucho más “intensa” con la materia que los fotones debido a su masa y a su carga eléctrica, dando lugar a interacciones Coulombianas con los electrones y los núcleos del material.

Cuando los electrones inciden contra un medio material pierden progresivamente su energía cinética a lo largo de la trayectoria debido a las sucesivas interacciones que van sufriendo con las partículas cargadas del medio (electrones y núcleos). Análisis similares aplican a todo tipo de radiación constituida por partículas cargadas.

La interacción de un electrón en el medio material se denomina colisión y supone una transferencia de energía a la materia. Este es el origen último de todos los efectos producidos por las radiaciones ionizantes sobre la materia. Las colisiones se clasifican en elásticas, inelásticas y radiativas.

- Colisión elástica:

Sólo se produce una desviación de la trayectoria del electrón incidente y una pequeña (despreciable) cesión de energía al medio material.

- Colisión inelástica:

El electrón invierte parte de su energía en “arrancar” un electrón del átomo, ionizándolo, y cederle parte o toda su energía cinética al electrón “ejectado”. Puede ocurrir que el electrón incidente no ceda suficiente energía para provocar ionización pero sí para excitar el átomo. Posteriormente el átomo se desexcitará. Tanto el electrón primario (incidente) como el secundario (“impactado”/ejectado) podrán seguir ionizando y excitando otros átomos.

- Colisión radiativa:

Si el electrón incidente pasa lo suficientemente cerca de otro electrón de las capas atómicas o del núcleo atómico, sufrirá una gran pérdida de energía cinética que se emite en forma de radiación electromagnética (fotones) que se denomina radiación de frenado *Bremsstrahlung*. Como el electrón incidente podrá tener diferente energía cinética, ya que podrá “provenir” de otras colisiones, y además la energía que pierda en esta colisión dependerá de la distancia a la que pase del núcleo, los fotones emitidos tendrán diferentes energías, constituyendo lo que se denomina “espectro de *Bremsstrahlung*”.

De hecho, este fenómeno es la base física de la producción de rayos X donde se hace incidir un haz de electrones sobre un material de alto número atómico Z.

### 1.6.1.. Penetración y alcance de partículas cargadas en la materia

La energía cinética de una partícula cargada que incide contra un medio material va disminuyendo progresivamente debido a las sucesivas interacciones que va sufriendo, hasta que prácticamente se anula y la partícula es absorbida. La trayectoria muy probablemente no será rectilínea. Cuando se considera un haz de electrones se puede definir el alcance como la profundidad máxima (en línea recta) que alcanzan. Existen otras definiciones como alcance terapéutico y alcance efectivo.

La figura 4 muestra un esquema de las trayectorias de electrones al penetrar un material.

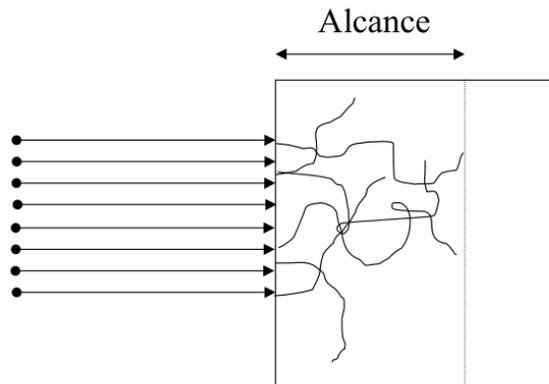


Figura 4. Penetración de electrones (partículas cargadas) en un medio material.

**Referencias**

[1] A. Author1. *Title1* Jour Year.