Pitágoras, álgebra y teoría de números

En esta nota nos proponemos presentar algunas relaciones entre objetos del título. Para esto consideramos triángulos rectángulos de catetos de longitud x, y, e hipotenusa de longitud z. Por lo tanto se satisface

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Esta igualdad no refleja que hacer pero si la rescribimos como

$$x^2 = z^2 - y^2$$

en el lado derecho podemos aplicar diferencia de cuadrados y así obtenemos

$$x^2 = (z - y)(z + y)$$

Ahora un duende nos dice: llama $s = z - y$, $t = z + y$, entonces una cuenta sencilla nos lleva a:

$$x^2 = s\,t \qquad z = \frac{s+t}{2} \qquad y = \frac{t-s}{2}$$

de esto $\quad x = \sqrt{s\,t} \qquad y = \frac{t-s}{2} \qquad z = \frac{t+s}{2}$

de modo que si damos valores a s y t tal que $t > s > 0$, obtenemos ejemplos de triángulos rectángulos. Esta fórmula tiene un "inconveniente" requiere dividir por dos y calcular raíz cuadrada, nos preguntamos, ¿podemos evitar estas operaciones si hacemos algún álgebra?. El duende nos contesta: muy fácil, escribimos $t = 2\,r$, $s = 2\,q$ con $r > q > 0$ y tenemos que

$$x = 2\sqrt{r\,q} \qquad y = r - q \qquad z = r + q$$

Ahora escribimos $r = u^2$, $q = v^2$, con $u > v > 0$ y finalmente obtenemos

$$x = 2u\,v \qquad y = u^2 - v^2 \qquad z = u^2 + v^2$$

De manera que hemos encontrado una "máquina" que nos produce triángulos rectángulos a partir de dos números $u > v > 0$. Enunciamos esto de modo más formal.

> *Proposición: Si* $u > v > 0$ *entonces*
>
> $x = 2\,u\,v$, $y = u^2 - v^2$, $z = = u^2 + v^2$
>
> *representan las longitudes de los catetos e hipotenusa de un triangulo rectángulo. Recíprocamente dados* (x , y , z) *longitudes de los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces existen* $u > v > 0$ *de modo que vale la igualdad del primer párrafo.*

La verificación de la recíproca es la primera parte de este texto si recordamos que todo número real es divisible por dos y que cualquier número real positivo admite raíz cuadrada. La afirmación directa de la proposición sigue de verificar la igualdad

$$(2u\,v)^2 + (u^2 - v^2)^2 = (u^2 + v^2)^2$$

y recordar que si tres números positivos a , b , c verifican que $a^2 + b^2 = c^2$ entonces a, b , representan los catetos, respectivamente, c la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Una pregunta que surge es: ¿Cómo deben ser $u > v > 0$, $m > n > 0$ de modo que

$$2u\,v = 2m\,n \qquad u^2 - v^2 = m^2 - n^2 \qquad u^2 + v^2 = m^2 + n^2\,?$$

Respuesta: ejercicio para el lector.

Ejemplo: Si $u = 2$, $v = 1$ obtenemos el triángulo $(4 , 3 , 5)$; si $u = 3$, $v = 2$ obtenemos $(12 , 5 , 13)$.

Notar: Si $u > v > 0$ son ambos números naturales resultan $(2uv\,,\ u^2 - v^2\,,\ u^2 + v^2)$ números naturales. Esto motiva la pregunta: ¿Si x , y , z son números naturales y representan las longitudes de un triángulo rectángulo, es posible encontrar u , v naturales de modo que vale $x = 2\,u\,v$, $y = u^2 - v^2$, $z = = u^2 + v^2$?
Respuesta no. Pues si $m > n > 0$ son naturales y $d > 0$ natural que no es cuadrado de un natural entonces:

$$2\,d\,m\,n \quad , \qquad d(m^2 - n^2) \quad , \qquad d(m^2 + n^2)$$

representan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, un fácil ejercicio permite verificar que no siempre existen u , v naturales de modo que $x = 2\,u\,v$, $y = u^2 - v^2$, $z = = u^2 + v^2$. Un modo de hacer este ejercicio es construir una tabla.

d	*m*	*n*	*2 d m*	*d (m² – n²)*	*d (m² + n²)*	*u*	*v*
3	2	1	12	9	15	$\sqrt{1{,}5}$	$\sqrt{13{,}5}$

Ahora damos valores en los naturales para d , $m > n > 0$ calculamos la cuenta, quinta y sexta columna y finalmente siguiendo el esquema del comienzo calculamos u , v para cada terna $2\,d\,m\,n$, $d(m^2 - n^2)$, $d(m^2 + n^2)$ y así encontramos ejemplos donde u o v no son números naturales.

El lector diligente, ayudándose de aritmética elemental verificará el siguiente:

Teorema: Si (x , y , z) son tres números naturales tal que $x^2 + y^2 = z^2$, entonces existen $d > o$, $m > n > 0$, tres números naturales de manera que $x = 2\,d\,m\,n$, $y = d(m^2 - n^2)$, $z = d(m^2 + n^2)$.

Ayuda: d es el máximo común divisor de x , y , z.

Aplicación 1: Para todo triángulo rectángulo cuyos lados tienen por longitud números naturales, su área es un múltiplo de seis.

Denotemos por x , y , z , las longitudes de los catetos e hipotenusa de dicho triángulo. Por ser el triángulo rectángulo, su área es el semiproducto de las longitudes de los catetos. De esto

$$\text{Área} = \frac{x\,y}{2}$$

Ahora $x = 2\,d\,m\,n$, $y = d\,(\,m^2 - n^2\,)$ con $d > 0$, $m > n > 0$ números naturales convenientes. De manera que

$$Area = \frac{2}{2} d^2 (m^2 - n^2)\,m\,n = d^2 m\,n\,(m^2 - n^2)\,.$$

Queremos mostrar que $6\ /\ \text{Área} = d^2\ m\ n\ (\,m^2 - n^2\,)$. Un modo de proceder es mostrando que $2\ /\ \text{Área}$ y $3\ /\ \text{Área}$.
Para $2\ /\ \text{Área}$ es fácil, debemos considerar dos casos: 1) d , m o n es par entonces $2\ /\ d^2\ m\ n$ y tenemos que $2\ /\ \text{Área}$. 2) Si d , m , n , son los tres impares entonces $m = 2\,k + 1$, $n = 2\,p + 1$ y $m^2 - n^2 = 2\,(\,2\,k^2 + 2\,p^2 + 2\,k + 2\,p)$, por ende el área es múltiplo de dos. Para mostrar que 3 / Área procedemos de un modo semejante, si 3 divide a d , m o n entonces 3 divide al producto y logramos que 3 / Área. Si 3 no divide a ninguno

de d, m, n, entonces $m = 3k + r \quad n = 3p + s$ con $r, s \in \{1, 2\}$ De modo que

$$m^2 - n^2 = 3(3k^2 + 2k + 3p^2 + 2p) + r^2 - s^2.$$

Los valores posibles, para $r, s \in \{1, 2\}$, de $r^2 - s^2$ son $0, \pm 3$. Por consiguiente $m^2 - n^2$ es un múltiplo de tres.

Aplicación 2. Para todo triángulo rectángulo cuyos lados tienen por longitud números naturales, el producto de las longitudes de los tres lados es un múltiplo de 60.

Verificación: $x\,y\,z = 2\,d^3\,m\,n\,(m^2 - n^2)\,(m^2 + n^2) = 2\,d^3\,m\,n\,(m^4 - n^4)$.
Por otra parte $60 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5$. En Aplicación 1 hemos verificado que $2 \,.\, 3 / d^2\,m\,n\,(m^2 - n^2)$. Por consiguiente $4 \,.\, 3 = 12 / 2\,d^3\,m\,n\,(m^2 - n^2)$. Resta mostrar que $5 / x\,y\,z$. Para esto escribimos $m = 5k + r$, $n = 5p + s$ con $r, s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ahora se procede como cuando mostramos que $3 / (m^2 - n^2)$ para mostrar que $5 / (m^4 - n^4)$.
Nota: La verificación de Aplicación 2 es lo que en Didáctica se denomina una evaluación de procesos de la Aplicación 1.
Ultima pregunta. El triángulo $(3, 4, 5)$ tiene área 6. ¿Existe algún triángulo rectángulo (x, y, z) con x, y, z naturales cuya área es 12?. Respuesta no, puesto que las ecuaciones

$$\frac{x\,y}{2} = 12 \qquad x^2 + y^2 = z^2$$

implican $x\,y = 24$. Como x, y son números naturales se tiene para x, y las posibilidades: $x = 1,\ y = 24$; $x = 2,\ y = 12$; $x = 3,\ y = 8$; $x = 4,\ y = 16$; $x = 6,\ y = 4$; $x = 12,\ y = 2$; $x = 24,\ y = 1$. Para cada caso z resulta un número irracional, por ejemplo para $x = 1,\ y = 24,\ z = \sqrt{24^2 - 1^2} = \sqrt{575} = 5\sqrt{23}$.
Para evaluar procesos se sugiere proponer la misma pregunta para área 18.

Bibliografía

Vargas, J., Área de triángulos rectángulos. REM – UMA.

Autor

Jorge Vargas
FAMAF
Ciudad Universitaria
5000 Córdoba
vargas@famaf.unc.edu.ar