CONFERENCIA RIO GRANDE

JORGE A. VARGAS

En esta conferencia presentamos algunos problemas y hechos que consideramos pueden ser de utilidad para el docente de escuelas medias.

Combinatoria Fijemos n objetos distintos $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Deseamos construir una matríz de n filas y n columnas cuyos elementos pertenecen al conjunto $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ de modo que tanto en cada fila o en cada columna no se repita ningún elemento.

Para el caso de dos objetos distintos a, b la respuesta es muy fácil, a saber:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

Para el caso de tres objetos distintos a, b, c tenemos varias respuestas, entre ellas,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c & b & a \\ b & a & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

y otras que dejamos al lector como ejercicio completar. Notar que en algunas respuestas aparecen matrices simétricas con respecto a la diagonal y en otras no.

Cuando tenemos 4 objetos una respuesta es

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

Para el caso de n objetos $a_1, a_2, \cdots, a_n$. una respuesta es la matríz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_n & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 & a_6 & \cdots & a_1 & a_2 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Este problema tiene de interesante que no tiene respuesta única (en el sentido de que varias matrices distintas lo resuelven), por ende, el alumno debe revisar sus resultados y confiar en su lógica y no simplemente decir, está bien porque obtuve el mismo resultado que mi profesora o compañeros. Una pregunta que queda para responder es: ¿cuantas matrices $n \times n$ resultan al resolver el problema para n objetos? Una generalización del problema es: Supongamos tener n^2 conjuntos de n elementos cada uno, denotemos dichos conjuntos por

$$L_{(1,1)}, L_{(1,2)}, \ldots, L_{(1,n)}, L_{(2,1)}, L_{(2,2)}, \ldots, L_{(2,n)} \ldots$$
$$\ldots L_{(i,j)}, \ldots, L_{(n,1)}, L_{(n,2)} \ldots, L_{(n,n)}.$$

¿Es posible escoger $c_{(i,j)} \in L_{(i,j)}$ de modo que tanto en cada fila o columna de la matríz $c_{(i,j)}$ no se repitan dos elementos? La respuesta a esta pregunta es positiva y fue obtenida por Fred Galvin en el año 1995.

Métodos para calcular raíces de polinomios

Para calcular las raíces del polinomio $x^2 - bx + c$ usamos la fórmula (ya conocida por los babilónicos) $\frac{b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$. Para calcular las raíces de un polinomio de grado cuatro del tipo $x^4 + cx^2 + h$ hacemos $x^2 = y$ de donde resulta que x es solución de la ecuación sí y sólo sí y satisface la ecuación $y^2 + cy + h = 0$. Por la fórmula clásica y lo calculmos operando con los coeficientes c, h lo que requiere el uso de: suma, producto, cociente y el cálculo de raíces cuadradas. Por ende, por este método, para calcular las raíces del polinomio $x^4 + cx^2 + h$ nos es suficiente utilizar suma, producto, cociente y calcular raíces. El lector diligente, consultará el libro de Rey Pastor, Análisis Matemático, Vol. 1, pág. 259-262 y comprabará que lo mismo sucede tanto para un polinomio generico de grado tres o cuatro. Surge la pregunta, podemos hacer lo mismo al intentar calcular las raíces de un un polinomio de grado cinco, seis, etc. Para casos muy particulares como $x^n - N$ la respuesta es positiva, si permitimos el uso de raícies $n-$simas de un número. ¿Pero para otros? La respuesta a esta pregunta, más o menos se completó a principios del siglo pasado por Galois, Abel. La respuesta es:

No es posible calcular en un número finito de pasos, las raíces de un polinomio genérico de grado cinco, seis, etc por medio de las operaciones de suma, producto, cociente y radicación llevadas a cabo en los coeficientes del polinomio y en los números que resultan de aplicar estas operaciones.

En los libros de Teoria de Galois de E. Gentile encontramos el enunciado preciso a lo expuesto y una demostración. Nos queda la inquietud, ¿como calcular las raíces? Francois Vieta (1540-1603) ideó por allí por el año 1600 un método para calcular raíces de polinomios dígito a dígito. Para esto, si $f(x) := d_n x^n + \cdots + d_1 x$ y buscamos una raíz r de $f(x) = A$, propone para la raíz una expresión decimal del tipo:

$$r = a_0 10^k + a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \cdots + a_{k-1} 10 + a_k + a_{k+1} 10^{-1} + a_{k+2} 10^{-2} + \cdots$$

y proclamó, elijamos a_0, k de algún modo, para calcular a_1 usemos la receta

$$a_1 = Parte\,entera\,de \left| \frac{(f(a_0 10^k + 10^{k-1}) + f(a_0 10^k))/2 - A}{f(a_0 10^k + 10^{k-1}) - f(a_0 10^k) - 10^{(k-1)n}} \right|$$

una vez calculado a_1 calculamos a_2 por medio de la fórmula

$$a_2 = Parte\,entera\,de$$
$$\left| \frac{(f(a_0 10^k + a_1 10^{k-1}) - A}{f(a_0 10^k + a_1 10^{k-1} + 10^{k-1-1}) - f(a_0 10^k + a_1 10^{k-1}) - 10^{(k-1-1)n}} \right|$$

¡Notar el cambio de numerador!

Una vez calculado a_s, para calcular a_{s+1} definimos

$$x_s := a_0 10^k + a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \cdots + a_s 10^{k-s}$$

De esto, $x_0 = a_0 10^k$ y $x_{r+1} = x_r + a_{r+1} 10^{k-r-1}$. Luego calculamos a_{s+1} por medio de:

$$a_{s+1} = Parte\,entera\,de \left| \frac{(f(x_s + 10^{k-s-1}) + f(x_s))/2 - A}{f(x_s + 10^{k-s-1}) - f(x_s) - 10^{(k-s-1)n}} \right|$$

o por la fórmula

$$a_{s+1} = Parte\,entera\,de \left| \frac{f(x_s) - A}{f(x_s + 10^{k-s-1}) - f(x_s) - 10^{(k-s-1)n}} \right|$$

según que $s + 1$ es impar o par respectivamente.

En cualquiera de los dos casos, la fórmula parece trabajar del modo siguiente, uno calcula la fracción, esto puede dar un número positivo o negativo, si es negativa tomamos su valor absoluto, finalmente calculamos la parte entera. Sí el valor absoluto es mayor que 10 no se que hacer, quizás, ¡nunca lo es!. Se invita, a algún interesado a verificar esta fórmula o modificarla de modo que resulte verdadera y escribir un artículo para la revista de educación. Tampoco tengo claro si es buena desde el punto de vista de Análisis Numérico. Lo importante de la fórmula es que enseña procesos iterativos y es muy fácil de programar en Basic, Pascal, Derive, Mathematica. Esta fórmula la encontré en el libro de Goldstine, A history of numerical analysis from the 16th century through the 19th century. Springer Verlag.
Por ejemplo, Vieta realizó el cálculo para $x^2 - 240x = 484$ cuyas soluciones son 242 y -2 comenzando por proponer

$$r := a_0 10^2 + a_1 10 + a_2 + a_3(1/10) + \cdots, y \;\; a_0 = 1.$$

De esto

$$\begin{aligned} a_1 = |Parte\,entera\,de \frac{(f(10^2 + 10^{2-1}) + f(10^2))/2 - 484}{f(10^2 + 10^{2-1}) - f(10^2) - 10^{(2-1)2}}| \\ = |\frac{-7634}{1600}| = 4 \end{aligned}$$

y así tenemos $x_1 = 200 + 4 \times 10 = 240$ Ahora calculamos a_2 de acuerdo a la fórmula propuesta, obteniendo:

$$\begin{aligned} a_2 = Parte\,entera\,de \\ |\frac{f(x_1) - A}{f(x_1 + 10^{2-1-1}) - f(x_1) - 10^{(2-1-1)2}}| \\ = |\frac{f(240) - 484}{f(241) - f(240) - 1}| = 2 \end{aligned}$$

De esto, $x_2 = 242$. Luego Vieta verificó $f(242) = 484$.
Newton aplicó esta fórmula para el polinomio $x^3 + 30x = 14356197$ comenzando con $x_0 = 200$
Sobre el método de Vieta, en 1670, alguien opinó: "Es un trabajo denigrante para un Cristiano y propio de alguien convencido de que es capaz de mover los Alpes Italianos a Inglaterra"

Hoy en día tenemos teoremas que nos dicen por donde comenzar a buscar las raíces, uno de ellos dice:

Teorema Sea $p(x) := d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_1 x + d_0$ con $d_n \neq 0$, y sea

$$C = 1 + \frac{1}{|a_n|} maximo\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$$

Entonces, para cada raíz r de p se tiene que $|r| \leq C$.

Para el caso de del polinomio $x^3 + 15x^2 + 7x - 5$ se tiene $C = 1 + 1/1 maximo\{15, 7, 5\} = 15$. De modo que sus raíces reales pertenecen al intervalo $[-15, 15]$

Otro método para el cálculo de las raíces de un polinomio p es debido a Isaac Newton (1642, 1727) funciona así. Con el teorema enunciado se estima el valor absoluto de sus raíces, luego se elige un número en el disco donde se encuentran las raíces, digamos x_0. A partir de este número se construye una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ del modo siguiente:

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)},\ x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)},\ x_3 = x_2 - \frac{p(x_2)}{p'(x_2)},$$

$$x_{r+1} = x_r - \frac{p(x_r)}{p'(x_r)}.$$

Para el caso de un lector que tenga el soft Derive a su disposición, los primeros n términos de la sucesión se calculan por medio del comando

Iterates(x - p(x)/dif(p, x), x, x_0, n)

Si lo aplicamos al polinomio x^3+15x^2+7x-5, hacemos tres elecciones de x_0, a saber $0.38, -0.89, -14.4$ y escogemos $n = 10$ llegaremos a que las tres sucesiones que se obtienen, se aproximan respectivamente a los números, $0,386291, -0,893079, -14,4332$ El lector notará que si hace otras elecciones de x_0 la sucesión que obtiene se aproxima a uno de los tres números indicados.

Pregunta ¿cuál es una diferencia entre el método de Newton y el de Vieta?, una es que el método de Newton calcula todos los decimales del número a la vez, mientras que el de Vieta calcula de un decimal por vez.

Triángulos (tetraedros) de lados naturales y área (volúmen) natural

De modo más preciso, se busca triángulos (tetraedros) cuyos lados miden un número natural y su área (volúmen) es un número natural. En un artículo de la Revista Educación Vol. 14 número 2, M. Pacheco ha descripto propiedades de los mismos, entre ellas:

Teorema *El área de tales triángulos es un múltiplo de seis.*

El volúmen de un tal tetraedro es un múltiplo de tres.

Los tetreaedros cuyos lados tiene por longitud un número natural y cuyo volúmen es 3, tienen una altura de a lo sumo 0.006. Ejemplos de tetraedros de volúmen tres son los de lados

35	33	32	76	44	70
47	32	21	58	56	76

En el mismo artículo se encuentra un programa en Mathematica para calcular ejemplos de tales tetraedros. Este teorema tiene la bondad que podemos presentarlo a los alumnos preguntando si existen tales objetos, hacerles construir ejemplos y observar la descomposición en números primos del área (volúmen), los alumnos que se anoticien que el área es múltiplo de dos y tres (el volúmen es múltiplo de tres) habrán conjeturado el teorema. El artículo está escrito de modo de que quien sepa Derive puede escribir el programa desarrollado en Mathematica.

Problemas de máximos

Un problema clásico de máximos es el siguiente: Fijemos un natural $n \geq 3$. Entre todos los polígonos de n lados inscriptos en una circunferencia dada, cuál es el de mayor área. La respuesta a este problema es: Dada una circunferencia, un polígono regular de n lados inscripto en dicha circunferencia es el de mayor área entre todos los polígonos de n lados inscriptos en la misma. Una demostración de este hecho se encuentra en el libro de Courant y Robins ¿ Que es la Matemática? o en un artículo de Cuenya Bastan publicado en Vol. 4 (1989) de la revista de educación matemática. Un problema similar describimos a continuación. Para comenzar recordemos el concepto de diámetro de un polígono.*El diámetro de un polígono es el mayor número que se obtiene al calcular la distancia de los distintos puntos del polígono.* Si P es un cuadrado de lado r su diámetro es la longitud de una de sus diagonales, por tanto su diámetro es $\sqrt{2}r$. Para un rectángulo de lados r, R su diámetro es la longitud de sus diagonales que es $\sqrt{r^2 + R^2}$. En el caso de un triángulo, su diámetro es la longitud del lado de mayor longitud. Si un polígono está inscripto en una circunferencia de radio r su diámetro es menor o igual a r pero puede ser menor, como sucede para el pentágono regular inscripto en la circunferencia. Para un rombo, su diámetro es la longitud de la diagonal mayor.

Problema: Fijemos un número natural $n \geq 3$. Entre todos los polígonos de n lados y diámetro uno, encontrar (el) los de área máxima.

Para el caso de triángulos, veamos que el triángulo equilátero de lado 1 tiene área mayor que cualquier triángulo no equilátero de diámetro 1. Denotemos por a, b, c la longitud de los lados de un triángulo arbitrario de diámetro 1, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = 1$. De esto, $b \leq 1, c \leq 1$. Pensemos a b fijo y permitamos variar a c entre cero y uno, de un dibujo se obserba que el triángulo de lados $a = c = 1$ tiene mayor área. Por ende, nuestro triángulo es isósceles de lados $1, 1, b$. Por el teorema del coseno, $b^2 = 2 - 2cos\theta$, siendo θ el ángulo opuesto a la base b. Como, $b \leq 1$ el grafo de la función $2 - 2cos\theta$ nos dice que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$. Ahora $2-2cos\theta$ alcanza un máximo en el intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ para $\theta = \frac{\pi}{3}$. De modo que el área es máxima para el tríangulo equilátero.

Para el caso de cuadriláteros convexos, la respuesta es muy distinta, hay infinitos cuadriláteros convexos de diámetro uno y área máxima. Estos son, el cuadrado de lado uno y todos los rombos cuya diagonal mayor y diagonal menor miden 1. Notar que de todos estos rombos sólo uno es inscriptible en una circunferencia, el cuadrado.
Para el caso de polígonos de un número impar, $2k + 1$, de lados el problema ha sido resuelto por Renihardt en: Extremale polygone mit gegebenen Durchmessers, Jber. Deutsh Math. Verein, 31 (1972), 251-270 quien demostró que el polígono regular de $2k + 1$ lados y diámetro uno, tiene área mayor que cualquier otro polígono no regular de $2k + 1$ lados y diámetro uno. Se invita a escribir un artículo para la revista de educación sobre este tema.
Para el caso de polígonos de seis lados, el problema ha sido resuelto por Graham, The largest small exagon. Journal of Combinatory Theory, Ser. A. 18 -1975, pag. 165-170. Graham demuestra que existe un único polígono de seis lados y diámetro uno, de área máxima. Este polígono tiene área 0.674981 que es un cuatro por ciento mayor que el área del exágono regular de diámetro uno.
Para el caso de polígonos de $8, 10, 12, ...$ parece que no se conoce la respuesta a la pregunta.

Problemas de colorear grafos

A continuación estudiamos el problema de colorear un grafo con tres colores, con la condición de que vértices adyacentes nunca poseen el mismo color. De ahora en más fijamos los colores on rojo, verde y amarillo (patito), para colorear los vértices.

Por lo tanto, el grafo

no está permitido y sí el grafo

Francois Vieta (1540-1603) escribió, aproximadamente en el año 1591, un libro titulado *Introduction to the analitical art,* lo dedicó a un descediente contemporáneo del "Ada Melusina", ¿ Quien fue el Ada Melusina?, en el prólogo encontramos:

"Finalmente el arte analítico, ha sido redactado de modo preciso y con profundidad de manera que puede ser aplicado al problema de los problemas, a saber, NO DEJAR PROBLEMAS SIN RESOLVER".

Esta expresión de Vieta la hemos aplicado a problemas que resolvemos con ecuaciones lineales o de segundo grado, la filosofía es: a un problema le asociamos una ecuación (o sistema de ecuaciones) de modo que el problema tiene solución sii la ecuación (el sistema) tiene solución. Por ende, esto nos sugiere que hacer con nuestro problema, debemos algebrizarlo y allí encontraremos su solución. D. Bayer en su tesis doctoral en matemática aprobada en la Universidad de Harvard em 1982, entre otros resultados que obtuvo, describió un modo algebraico para resolver nuestro problema. Para esto suponemos que nuestro grafo tiene

n vértices. Fijemos variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, denotemos por $C[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomos a coeficientes complejos en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La idea de Bayer es: a cada grafo asociarle un ideal $\mathcal{I}$ en el anillo $C[x_1, \ldots, x_n]$ y luego probar un teorema del tenor, el grafo $\mathcal{R}$ es coloreable sii el ideal $\mathcal{I}$ tiene cierta propiedad fácilmente verificable. Para construir el ideal $\mathcal{I}$ lo hacemos por medio de generadores , los mismos son:

$$x_1^3 - 1, x_2^3 - 1, \ldots, x_n^3 - 1, x_i^2 + x_i x_j + x_j^2$$

De estos últimos polinomios escribimos tantos como aristas tiene el grafo.
Se tiene:
Teorema El grafo es coloreable con tres colores sii el polinomio constante 1 NO pertenece al ideal $\mathcal{I}$.

¿Como hacemos para verificar esta propiedad algebraica?, muy fácil, si usted tiene el soft Mathematica a su disposición. Para el grafo
simplemente escribe:

$$\begin{aligned} &GroebnerBasis[\{x_1^3-1, x_2^3-1, x_3^3-1, x_4^3-1, x_5^3-1, x_6^3-1, x_7^3-1, x_8^3-1,\\ &\quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2, x_1^2 + x_1x_5 + x_5^2, x_1^2 + x_1x_6 + x_6^2, x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2,\\ &\quad x_2^2 + x_2x_4 + x_4^2, x_2^2 + x_2x_8 + x_8^2, x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2, x_3^2 + x_3x_8 + x_8^2,\\ &\quad x_4^2 + x_4x_5 + x_5^2, x_4^2 + x_4x_7 + x_7^2, x_5^2 + x_5x_6 + x_6^2, x_5^2 + x_5x_7 + x_7^2,\\ &\qquad x_6^2 + x_6x_7 + x_7^2, x_7^2 + x_7x_8 + x_8^2\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}] \end{aligned}$$

Esto le dá como resultado

$$\{x_1-x_7, x_2+x_7+x_8, x_3-x_7, x_4-x_8, x_5+x_7+x_8, x_6-x_8, x_7^2+x_7x_8+x_8^2, x_8^3-1\}$$

Como 1 no está en el resultado el grafo ES coloreable con tres colores.

Para el grafo no coloreable que presentamos en la página anterior, escribe:

$$\begin{aligned} &GroebnerBasis[\{r^3 - 1, v^3 - 1, a^3 - 1, x^3 - 1,\\ &\qquad r^2 + r * v + v^2, r^2 + r * x + x^2, r^2 + r * a + a^2,\\ &\qquad\qquad a^2 + a * v + v^2, x^2 + x * v + v^2\}, \{r, v, a, x\}] \end{aligned}$$

y la máquina le responde con

$$\{1\}$$

por ende el grafo no es coloreable.

Para el grafo que coloreamos en la página anterior, escribe:

$$\begin{aligned}&GroebnerBasis[\{r^3-1, s^3-1, t^3-1, p^3-1,\\ &\qquad q^3-1, v^3-1, x^3-1, y^3-1, z^3-1, u^3-1,\\ &\qquad x^2+x*y+y^2, x^2+x*q+q^2, x^2+x*u+u^2,\\ &\qquad u^2+u*y+y^2, z^2+z*u+u^2, v^2+v*u+u^2,\\ &\qquad z^2+z*y+y^2, z^2+z*v+v^2, z^2+z*r+r^2,\\ &\qquad z^2+z*s+s^2, z^2+z*t+t^2, z^2+z*q+q^2,\\ &\qquad\qquad z^2+z*p+p^2\}, \{r, s, t, p, q, x, y, z, u, v\}]\end{aligned}$$

y obtiene,

$$\begin{aligned}&\{Null, -1^3+v^2, u-(-u-v)v, u+v+z,\\ &\qquad -v+y, u+v+x, q^2-qu-qv+uv,\\ &\qquad p^2-pu-pv+uv, t^2-tu-tv+uv,\\ &\qquad\qquad s^2-su-sv+uv, r^2-ru-rv+uv\}\end{aligned}$$

Como 1 no pertenece al conjunto respuesta, el grafo es coloreable.

Una pregunta que surge es como adaptar esta álgebra al problema de colorear un grafo con cuatro, cinco, ... colores distintos de modo que vértices adjacentes nunca tengan el mismo color, es muy fácil, las potencias cúbicas las reemplaza por potencia cuartas, quintas,...., los polinomos correspondientes a los lados del grafo surgen de aplicar como en el caso de tres colores factorización a $x_i^4 - x_k^4 = (x_i - x_j)$.....

Números irracionales

En clase enseñamos que un número es irracional si su expresión decimal no es períodica como ejemplo mostramos que $\sqrt{2}$ es irracional, lo cual usualmente lo hacemos mostrando que $\sqrt{2}$ no es una fracción. Aqui presentamos ejemplos de números irracionales, descubiertos por Liouville allá por los 1850's. Estos son

$$0.1010010001000010000010000001000000\ldots\ldots.$$

$$0.21211211121111211111211111121111111\ldots\ldots$$

Ejemplos en fórmula son,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2^n}}$$

Estos números son irracionales puesto que si fueran racionales, serían períodicos, digamos con un período de longitud N, si nos alejamos mucho de la coma, aparece una laguna de ceros de largo $4N$, por consiguiente todos los coeficientes del período serían igual a cero, imposible.

El triángulo de Calabi

Calabi es un matemático italiano que vive en USA desde mediados de la década del cincuenta, trabaja en la Universidad de Pensilvania. El triángulo que lleva su nombre surge de la observación siguiente: En un triángulo equilátero se inscriben tres cuadrados como lo indica la figura, obteniendose que los tres cuadrados son congruentes. Sobre cada lado de un triángulo cuyos ángulos son agudos se inscriben cuadrados como lo indica la figura .... Pregunta: Existe un triángulo de modo que los tres cuadrados son congruentes ? La respuesta es si, y está dada por el triángulo isósceles de base 1 y altura x=1.55138752455... que es solución de la ecuación $2x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$. Las otras dos raíces de la ecuación son complejas no reales.

Areas de triángulos, segunda parada

Aqui presentamos demostraciones de algunos hechos relacionados con triángulos rectángulos y algunas sugerencias para su clase.

Un problema planteado por los árabes en el siglo X es el de determinar los números naturales que se obtienen como área de algún triángulo rectángulo de lados enteros positivos. Aún hoy en día no se conoce una respuesta a este problema, sin embargo, recientemente se han realizados progresos positivos tanto en resultados como en conjeturas. En estas notas trataremos de describir parte de este conocimiento matemático y de una técnica para resolver problemas, la de *trasladar un problema de un área de la matemática a otra y allí resolverlo.* De ahora en adelante (x, y, z) indica, salvo especificación contraria, los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo.

(1) Salvo congruencia, el número de triángulos rectángulos de lados enteros positivos y área fija igual a un entero positivo n es finito.

    En efecto, la ecuación $xy = 2n$ tiene un número finito de soluciones enteras positivas, como se deduce del Teorema Fundamental de la Aritmética. Ahora recordemos que dos triángulos rectángulos son congruentes si sus catetos lo son.

(2) No existen triángulos rectángulos de lados enteros positivos y área 1, 2, 3, 4, 5, 7.

En efecto, sea (x,y,z) las medidas de un triángulo rectángulo de lados enteros positivos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \leq y$. Supongamos que existe un triángulo rectángulo cuya área es igual a uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, o 7. Entonces tendríamos que:

(a) $xy = 2$ con $x^2 + y^2 = z^2$ lo cual implica $x = 1$, $y = 2$, $z = \sqrt{5}$, absurdo pués x, y, z, son enteros positivos,
(b) $xy = 4$ implica $x = y = 2$, $z = \sqrt{8}$ absurdo, o $x = 1, y = 4, z = \sqrt{5}$, absurdo.
(c) $xy = 6$ implica $x = 2$, $y = 3, z = \sqrt{13}$, absurdo, o $x = 1, y = 6, z = \sqrt{37}$, absurdo, o....
(d) $xy = 8$ implica $x = 2$, $y = 4$, $z = \sqrt{20}$, absurdo, o....
(e) $xy = 10$ implica $x = 2$, $y = 5$, $z = \sqrt{29}$ absurdo, o....
(f) $xy = 14$ implica $x = 2$, $y = 7$ $z = \sqrt{53}$ absurdo.

(3) Salvo congruencia existe un único triángulo rectángulo de lados enteros positivos y área 6. Este es dado por el trío $(3,4,5)$. Puesto que $xy = 12$, $x < y$, $x^2 + y^2 = z^2$ implican $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ o $x = 2$, $y = 6$, $z = \sqrt{14}$, o $x = 1, y = 6, z = \sqrt{37}$, el tercer criterio de congruencia concluye la afirmación.

Se daja como ejercicio al lector probar que no existen triángulos rectángulos de lados enteros positivos y área 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, o p, con p un número primo. Otro ejercicio es mostrar que para un triángulo cuyos lados miden números naturales siempre vale que $1 < x$. De lo contrario, tendriamos que $1 + y^2 = z^2$, de esto, $1 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y)$ lo cual implicaria que $z - y = z + y = 1$. Por consiguiente, $z = \frac{1}{2}$.

Es claro que si queremos obtener resultados de importancia debemos cambiar el modo de trabajo, una primera cosa que podemos intentar es encontrar una máquina que nos ayude a producir ternas pitagóricas. Recordemos que

(1) Se llama terna pitagórica a una terna de números que son las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.
(2) Matemáticamente una máquina que nos produzca ternas pitagóricas significa encontrar un conjunto X y una función calculable de X en el conjunto de las ternas pitagóricas.

Lema 1 Una terna de números reales x, y, z, satisface $x^2 + y^2 = z^2$ si y sólo si es posible encontrar números reales m, n, con $m > n$ tal que $x = 2mn$, $y = m - n$, $z = m + n$.

En otras palabras cada vez que se nos ocurran un par de números $m > n$ podemos construir una terna pitagórica usando las fórmulas escritas allí, y de esta manera obtenemos todas las ternas.

Demostración. Si $x^2 + y^2 = z^2$ entonces $z^2 - y^2 = x^2$, en consecuencia $x^2 = (z - y)(z + y)$. Sean $p = z - y$, $q = z + y$, de esto $y = (q - p)/2$, $z = (p + q)/2$, y $x^2 = pq$. Escribamos $p = 2n^2$, $q = 2m^2$, (como p y q son positivos y todo número real positivo tiene raíz cuadrada, m y n existen). Por tanto $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$. La implicación recíproca es trivial.

En la terminología de funciones el lema se reinterpreta así: Sea X el conjunto de pares de números reales (m, n), con $m > n$. Fijemos en el plano un sistema de ejes coordenados ortogonales de orígen p. Sea ϕ la función que asocia a (m, n) el triángulo rectángulo con hipotenusa contenida en el primer cuadrante y vértice opuesto p, con catetos contenidos en los ejes y de medida $2mn$, $m^2 - n^2$, respectivamente. El Lema 1 y los criterios de congruencia implican que todo triángulo rectángulo es congruente al menos a uno de la forma $\phi(m, n)$, con m y n convenientes. El lector diligente podrá concluir que: salvo congruencia hemos construido una máquina para producir triángulos rectángulos.

Ejercicio. Denotemos por Y el conjunto cociente del conjunto de triángulos rectángulos dividido por la relación de congruencia. Sea $\psi : X \to Y$ la función definida por $\psi(m, n)$ =clase de congruencia de $\phi(m, n)$. Analizar si ψ es inyectiva o sobreyectiva.

Después de varias intentos (2500 años aproximadamente) Kronecker en el siglo pasado probó (ver [D], página 222) ,

Proposición Una terna $x, y < z$ de números enteros psoitivos, con x par y con máximo común divisor de x, y, z igual a 1 satisface la ecuación $x^2+y^2 = z^2$ si y sólo si $x = 2mn$, $y = m^2-n^2$, $z = m^2+n^2$, $m > n$, con m, n enteros positivos, $\text{mcd}(m, n) = 1$, y m de distinta paridad a n.

Demostración. Probemos primero que si $x = 2mn$, entonces $x^2 + y^2 = z^2$, $\text{mcd}(x, y, z) = 1$ y los números x, y, z son enteros positivos. Estos son enteros positivos, puesto que resultan de operar con números enteros positivos. La ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ resulta de un cálculo directo. Si d divide a $\text{mcd}(x, y, z)$ entonces $d/(x + z)^2 = (m + n)^2$, como m es par y n impar o viceversa resulta $m + n$ impar por lo tanto d es impar. Por tanto como $d/2m^2 = y + z$, $d/2n^2 = z - y$

resulta que d/n^2 y d/m^2. Si d fuera mayor que 1, cada factor primo de d dividiría m y n, lo cual implicaría que $\mathrm{mcd}(m,n) > 1$, absurdo. Para verificar la recíproca notemos que:

a) x es par e y impar o x es impar e y par. Puesto que si ambos fueran pares 2 dividiría a z^2, por tanto 2 dividiría a $\mathrm{mcd}(x,y,z) = 1$. Si ambos fueran impares tendríamos $x = 2k+1$, $y = 2r+1$, reemplazando en la igualdad $x^2+y^2 = z^2$ se obtendría $2(2s+1) = z^2$ con s entero positivo, lo que contradice el Teorema Fundamental de la Aritmética.

b) z es impar, puesto que x^2+y^2 es impar por a). Sín pérdida de generalidad podemos suponer que x es par e y impar (si fuera al revés hacer $x = y$ e $y = x$). Por el Lema 1, podemos escribir $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$, $m > n$ con m, n reales. Necesitamos probar que m y n son enteros positivos, $\mathrm{mcd}(m,n) = 1$, m, n tienen distinta paridad. Como x es entero positivo y par resulta que mn es entero positivo, como $y + z = 2m^2$, $z - y = 2n^2$, $y \pm z$ es par (ambos son impares) resulta que m^2 y n^2 son enteros positivos. $\mathrm{mcd}(m^2, n^2) = 1$, de lo contrario si un primo p dividiera a m^2 y a n^2 entonces p dividiría a y y a $,z$ la ecuación pitagórica implica que p dividiría a x, de esto $\mathrm{mcd}(x,y,z) > 1$, absurdo. Por lo tanto cada factor primo de n^2 no aparece en m^2 y viceversa, como mn es entero positivo, y como la raíz cuadrada de $(mn)^2$ se calcula por medio de la factorización en primos de $(mn)^2$ y $\mathrm{mcd}(m^2, n^2) = 1$, resulta que m y n son enteros positivos. Son coprimos ya que de lo contrario resultaría $\mathrm{mcd}(x,y,z) = 1$ como x es par e y impar resulta m par y n impar o viceversa.

Esta proposición tiene varias consecuencias interesantes, a saber:

1) (x,y,z) es una terna pitagórica de enteros positivos, con $mcd(x,y,z) = d$ si y sólo si existen enteros positivos m, n, con $x = 2mnd$, $y = d(m^2 - n^2)$, $z = d(m^2 + n^2)$, $m > n$, $\mathrm{mcd}(m,n) = 1$, m y n de distinta paridad.

2) Si (x,y,z) es una terna pitagórica de enteros positivos, entonces xyz es un múltiplo de 60.

En efecto, $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ por tanto debemos probar que $3/xyz$, $4/xyz$, $5/xyz$, luego $xyz = d^3 2mn(m^2 - n^2)(m^2 + n^2) = d^3 2mn(m - n)(m+n)(m^2 + n^2)$. Como m o n es par resulta $2mn$ múltiplo de 4. Si m y n son múltiplos de 3 entonces $(m^2 - n^2)$ es múltiplo de 3. Si ni n ni m son múltiplos de 3 entonces $m = 3k + r$ $(r = 1, 2)$ y

$n = 3s + t$ $(t = 1, 2)$. Por lo tanto $m^2 - n^2$ es igual a 3 por entero positivo más $r^2 - s^2$. Dando los valores posibles a r y s resulta que $r^2 \pm s^2$ es igual a cero o ± 3 por lo tanto divisible por 3. Si alguno de los números $n, m, m + n$ es múltiplo de 5 completamos que xyz es múltiplo de 60, Si no, entonces $m = 5k + r$, $n = 5s + t$ con r, t en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Por tanto $m^4 - n^4 = 5$ por un entero positivo $+$ $(r^4 - s^4)$, reemplazando r, s por sus valores resulta que xyz es múltiplo de 60.

3) Consecuencia espectacular y bella. El área de un triángulo rectángulo de lados enteros positivos es un entero positivo y múltiplo de 6.

En efecto, el área es igual a $mn(m^2 - n^2)$ por lo tanto entero positivo. De las cuentas hechas en 2) resulta múltiplo de 6.

Ejercicio. Probar que siempre un cateto de un triángulo rectángulo de lados enteros positivos es par. Deducir otra demostración de que el área es entero positivo.

4) Sin embargo, no todo múltiplo de 6 es área de un triángulo rectángulo de lados enteros positivos, por ejemplo probar que 12 no es área de un triángulo rectángulo de lados enteros positivos.

Ejercicio. Pruebe que no existen triángulos rectángulos de lados enteros positivos y área igual a un cuadrado, por ejemplo 25, 36, 81. Ayuda que no ayuda: Si área= r^2, una homotecia de razón r lleva el conjunto de triángulos de área 1 sobre el conjunto de triángulos de área r.

5) Fibonacci (aprox. 1500 DC) descubrió un triángulo rectángulo de lados racionales y área un entero positivo. Este es dado por el trío $(9/6, 40/6, 41/6)$ que tiene área igual a 5.

6) Usando la notación de l) es claro que resolver el problema de encontrar los enteros positivos s que son áreas de triángulos rectángulos de lados enteros positivos es equivalente a resolver el siguiente problema algebraico: Determinar los enteros positivos s para los cuales es posible encontrar enteros positivos m, n, d con $\text{mcd}(m, n) = 1$, m y n de distinta paridad, $m > n$, tal que $s = mn(m^2 - n^2)d$.

Con esta reformulación algebraica del problema es muy fácil escribir un programa en BASIC para calcular los triángulos rectángulos de lados enteros positivos y área menor o igual a 100.

Números primos largos??

Para cualquier número primo, un teorema de teoría de números que se encuentra como ejercicio en los libros de E. Gentile, dice que cuando calculamos el desarrollo decimal de $\frac{1}{p}$ resulta que el período es de longitud menor o igual a $p-1$. Por ejemplo,

$$1/11 = 0.0909090....$$

(período igual a 2) y $1/7 = .142857142857142857142857....$ (período igual a 6). Decimos que un número primo es largo, si cuando calculamos el desarrollo decimal de $\frac{1}{p}$ el período tiene longuitud igual a $p-1$. Con una calculadora es fácil verificar que

$$7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167$$

son números primos largos. Una propuesta es hacer que el alumno calcule el desarrollo decimal de $1/p$ para varios primos, y alli preguntar que observan, algun alumno debería conjeturar el teorema antes enunciado. Una estadística a observar por parte de los alumos es que de un conjunto de N números primos, aproximadamente el treinta por ciento es largo. Esta última afirmación es una obserbación de Emil Artin.

Una relación entre álgebra de tercer año y geometría

Sí x, y, z son números positivos, entonces vale que

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}) \geq 9$$

Una manera de demostrar esto es usar la igualdad

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right) = 9+\left(\sqrt{\frac{y}{z}}-\sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{z}{x}}-\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$$

Notar que la desigualdad es igualdad sí y sólo sí $x = y = z$ como se deduce de la identidad anterior.

Consideremos ahora un triángulo de lados a, b, c. Denotemos por S su superficie, p su perímetro, s su semiperímetro, R el radio de la circunferencia circunscripta, r el radio de la circunferencia inscripta, d la distancia entre el centro de la circunferencia inscripta y el centro de la circunferencia circunscripta. Se sabe que

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad R = \frac{abc}{4S} \qquad r = \frac{S}{s} \qquad d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

Como el lector recordará la primera fórmula se debe a Heron de Alejandría (Siglo III antes de Cristo), la última Euler a (1707-1783).

Lo que deseamos puntualizar es como usando las información previa, se demuestra:

Teorema (Euler) $R \geq 2r$ y la igualdad sólo vale para triángulos equiláteros.

En realidad la última afirmación de la información presentada verifica la desigualdad de Euler, sin embargo se la puede demostrar en forma muy sencilla, por ejemplo así:

$$\frac{R}{r} = \frac{sabc}{4S^2} = \frac{abc}{4s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

ahora escribimos $s - a = x$, $s - b = y$, $s - c = z$, por consiguiente,

$$\frac{R}{r} = \frac{(y+z)(y+x)(z+x)}{4xyz},$$

en consecuencia la desigualdad de Euler equivale a demostrar que

$$\frac{(y+z)(y+x)(z+x)}{4xyz} \geq 2,$$

el numerador de la última fracción es

$$(y+z)(y+x)(z+x) = (x+y+z)(xy+xz+yx) - xyz.$$

Por tanto, la desigualdad de Euler equivale a verificar

$$\frac{(x+y+z)(xy+xz+yx) - xyz}{4xyz} \geq 2,$$

pero esta última fracción es igual a

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \geq \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Ahora, estudiamos la igualdad en el teorema de Euler. Sí el triángulo es equilátero, entonces $a = b = c$ álgebra elemental nos dice que vale la igualdad. (Tambien se lo demuestra usando el hecho de que en un triángulo equilátero las medianas, mediatrices, alturas coinciden). Por otro lado, si vale la igualdad, entonces $d = 0$ y por lo tanto las mediatrices coinciden con las alturas, bisectrices etc, en consecuencia es equilátero. Otra demostración (sugerida por D. Penazzi es: si vale la igualdad entonces $x = y = z$, por consiguiente $a = b = c$).

Propuesta para el aula

Etapas sugeridas para ayudar a descubrir el teorema de Euler.1) Hacer dibujar un triángulo equilátero. 2) Hacer dibujar el centro de la circunferencia inscripta y de la circunscripta. 3) Hacer notar que ambos centros coinciden. 4) Hacer dibujar varios triángulos isósceles. 5) Hacer dibujar los centros de la circunferencia inscripta y circunscripta para cada uno de estos triángulos. 6) Para cada triángulo dibujado hacer medir con regla los radios R, r 7) Hacer una tabla con los valores obtenidos 8) Preguntar ¿notan alguna relación entre estos números? (Probablemente algunos alumnos se den cuenta que $R \geq r$). 9) Preguntar ¿Cuan lejos estan R y r?, surge entonces la pregunta, que significa ¿Cuan lejos? una respuesta es calcular $R - r$ o R/r. 10) Hacer calcular ambos valores $R - r$, R/r. 11) Preguntar, se observa algo en común, algún alumno quizás responta que $R/r \geq 2$. Los que contestaron esto descubrieron la desigualdad de Euler por observación. Ahora hay que demostrar la desigualdad de Euler.

Otra aplicacion algebraica de las fórmulas para calcular R, r.

Para motivarnos recordemos:
Para el caso de triángulos rectángulos cuyos lados tienen por longitud números naturales, sabemos que sus lados se describen por las fórmulas,

$$a = 2mnh, \quad b = h(m^2 - n^2), \quad c = h(m^2 + n^2)$$

donde a, b son los catetos, n, m, h naturales, n, m son coprimos y de distinta paridad, además $m > n$. Para una prueba, consultar Vargas, Areas de Triángulos rectángulos, REM, 1991.Vol 6 o Boletín de SOAREM, Número 2, 2001, estas fórmulas tienen por consecuencia:
Ejercicio: Para un triángulo rectángulo de lados naturales, el radio de la circunferencia r inscripta es un número natural, el radio de la circunferencia circunscripta R es un número natural o un racional cuyo denominador es dos.

Para hacer descubrir estos resultados presentar las fórmulas para S, s, R, r que los calcula a partir de a, b, c. Ahora, usar las fórmulas para a, b, c descriptas mas arriba, hacer calcular y sale.

Algunos problemas útiles para programar en computadoras.

1)Euclides fue el primer matemático en demostrar que existen infinitos números primos. Su demostración es por reducción al absurdo. Esto es, suponemos que sólo hay un número finito de primos $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots, p_n$. Ahora formamos el número $Q_n = 1 + 2.3.5.7.11.13.\ldots.p_n$. Q_n es número natural mayor que uno, por consiguiente es divisible por un primo p. Por otro lado, p está en la lista que define Q_n (allí están todos los primos), por consiguiente p divide a $1 = Q_n - (Q_n - 1)$, absurdo.

Esta demostración sugiere un problema: ¿Para que n es Q_n un número primo? Por ejemplo $Q_2 = 2.3 + 1 = 7$, $Q_3 = 2.3.5 + 1 = 31$ son primos, mientras que $Q_7 = 2{*}3{*}5{*}7{*}11{*}13{*}17{+}1 = 19{*}97{*}277$. Se sabe que, y sugerimos verificarlo con una computadora, que el Q_n correspondiente al $n = 13649-$primo es un número primo de 5862 dígitos.

2)Fijemos un primo q, nos planteamos encontrar un natural d de modo que todos los términos de la progresión aritmética

$$q,\, q + d,\, q + 2d,\, \ldots, q + (q - 1)d$$

son números primos. Notar que $q + qd$ es compuesto.
Para $q = 3$, una respuesta es $d = 2$, la progresión es: $3, 3 + 2 = 5$,
Para $q = 5$ una respuesta es $d = 6$, pues 5, $5 + 6 = 11$, $5 + 2.6 = 17$, $5 + 3.6 = 23$, $5 + 4.6 = 29$ son primos.
Para $q = 7$ el primer d de modo que los números $7, 7{+}d, 7{+}2d, ..., 7{+}6d$ resultan números primos es $d = 150$
Para $q = 11$ el primer d es $d = 1536160080$
Para $q = 13$ el primer d es $d = 9918821194590$.

3) Para cada natural n denotemos por $\pi(n)$ el número de primos menores o iguales a n. De esto, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 3$, $\pi(6) = 3$, $\pi(8) = 4$, $\pi(9) = 4$, $\pi(10) = 4$, $\pi(12) = 5$. Notar que $\pi(2) = 1$ divide a 2, $\pi(4) = 2$ divide a 4, $\pi(6) = 3$ divide a 6. Esto sugiere: Problema, encontrar los naturales n tal que $\pi(n)$ divide a n. Entre tales naturales estan, $\{2, 4, 6, 8, 30, 33, 100, \ldots\}$

Notar que el problema 1) se lo puede presentar haciendo calcular una tabla a dos columnas, en la primera columna n, en la segunda Q_n, para luego preguntar ¿Que observa?
Notar que el problema 3) se lo puede presentar haciendo calcular una tabla a tres columnas, en la primera columna n, en la segunda $\pi(n)$, en la tercera columna $n/\pi(n)$ para luego preguntar ¿Que observa?

Un problema de combinatoria

Este problema, es un ejemplo de un problema que transformado convenientemente en otro problema, resulta muy fácil de resolver.
Decimos que un subconjunto $A \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ es *alternante* si al enumerar sus elementos en forma creciente, el primero es impar, el segundo es par, el tercero es impar, etc. Decimos que un subconjunto $A \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ es *robusto* si cada elemento A es mayor o igual al cardinal de A. Por ejemplo, $\{13, 24, 57, 62\}$ es alternante y robusto. Problema, determinar los subconjuntos de $\{1, 2, \cdots, n\}$ alternantes y robustos. Conviene pensar que el conjunto vacío es la vez alternante

y robusto. Una manera de resolver este problema, es transformarlo en otro equivalente fácil de resolver. Para esto, a cada subconjunto $A = \{a_1, \cdots, a_k\}$ de $\{1, 2, \cdots, n\}$ con k elementos le asociamos un subconjunto $B = \{b_1, \cdots, b_k\}$ de $\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$, donde $b_i = a_i + i - 1$. Es fácil verificar que los $k-$subconjuntos alternantes A estan en correspondencia bijectiva con los $k-$subconjuntos $B \subset \{1, 2, \cdots, 2n-1\}$ que satisfacen: cada elemento de B es impar y el mayor elemento B es menor que $n + k$. Por otro lado, los $k-$subconjuntos robustos de $\{1, 2, \cdots, n\}$ estan en correspondencia bijectiva con los $k-$subconjuntos $B = \{b_1 < \cdots < b_k\}$ de $\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$ tal que $b_i \geq k + i - 1 \, \forall \, i$. En consecuencia, los $k-$subconjuntos alternantes y robustos estan en correspondencia bijectiva con los $k-$subconjuntos de $\{k, k+1, \cdots, n+k-1\}$ tal que todos sus elementos son impares. El resultado es $\begin{pmatrix} n/2 \\ k \end{pmatrix}$ si n es par, $\begin{pmatrix} \frac{n+1}{2} \\ k \end{pmatrix}$ sí ambos son impares y $\begin{pmatrix} \frac{n-1}{2} \\ k \end{pmatrix}$ si n es impar y k es par.

Por tanto, el número de subconjuntos alternantes y robustos es

$$\sum_{k=0}^{k=n/2} \begin{pmatrix} n/2 \\ k \end{pmatrix} = 2^{\frac{n}{2}} \qquad \text{n par}$$

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{4}]} \begin{pmatrix} \frac{n-1}{2} \\ 2k \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{4}]} \begin{pmatrix} \frac{n+1}{2} \\ k \end{pmatrix} \qquad \text{n impar}$$

Para $n > 1$ esto es igual a $2^{\frac{n-1}{3}} + 2^{\frac{n-1}{3}} = 3.2^{\frac{n-3}{3}}$
para $n = 1$ es 2

Ejercicio: el número de subconjuntos alternantes de $\{1, 2, \cdots, n\}$ es igual al número de subconjuntos robustos de $\{1, 2, \cdots, n\}$. Este número es igual a F_{n+2}, donde $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n+1}$ para $n \geq 2$. (Los números de Fibonacci.)

Sugerencia didáctica:
Para presentar este problema se sugiere definir subconjunto alternante, hacer calcular los subconjuntos alternantes de $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, Ahora definir subconjunto robusto, para cada uno de estos conjuntos determinar los suconjuntos robustos, en cada caso hacer calcular el número de subconjuntos que son a la vez robustos y alternantes, hacer dibujar una tabla donde en la primera columna se coloca n el cardinal de $\{1, ..., n\}$ y en la segunda columna el número de subconjuntos de $\{1, ..., n\}$ que a la vez son robustos y alternantes, preguntar si se observa alguna ley de formación, algún

alumno quizás se de cuenta de las fórmulas en el párrafo anterior, una ayuda para enseñar a descubrir las fórmulas es indicar que las leyes de formación más básicas son $n \to kn, n \to k/n, n \to ck^n, n \to cn^k, n \to c/k^n, n \to c/n^k$ con $k > 0, c > 0$ conveniente (proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, directamente proporcional a una exponencial en n, directamente proporcional a una potencia de n, inversamente proporcional a una exponencial de n, inversamente proporcional a una potencia de n).

Pruebas del teorema de Pitágoras

Algunos autores han listado del orden de 400 pruebas distintas del teorema de Pitágoras. A continuación reproducimos una debida a el Presidente Garfield de Estados Unidos de Norteamérica descubierta en 1882, la segunda a Leonardo da Vinci(1451-1519), la tercera al matemático árabe An-Nairizi y la cuarta debida al inventor de la teoría de conjuntos George Cantor (1845-1918).
Prueba de Garfield
En la figura 1, tenemos un trapecio con base mayor b, base menor a (es trapecio porque el triángulo es rectángulo). El ángulo Z es recto porque su suplemento es la suma de los dos ángulos no rectos del triángulo. Ahora, como siempre calculamos el área del trapecio de las dos maneras que sugiere la figura, después de simplificar obtenemos la demostración del presidente.

Figura 1 Garfield
Prueba de Leonardo
Consideramos un triángulo rectángulo de vértices JIH, en la figura 2 los cuadriláteros ABCD, DEFA, GFHI y GEJI son congruentes. Por consiguiente los exágonos ABCDEF y GEJIHF tienen la misma área. Por tanto el cuadrado FEJH es suma de las áreas de los cuadrados ABGF, CDEG. Esta demostración tiene algo muy interesante, se visualiza que el área del cuadrado asentado sobre la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados asentados sobre los catetos.

Figura 2, Pitagoras
Prueba de An-Nairizi
Está basada en la figura 3, esta demostración tiene la bondad de puede usarse para hacer que los alumnos descubran el enunciado del teorema de Pitágoras, para esto, primero pedimos un triángulo rectángulo, luego dibujar cuadrados sobre cada lado del rectángulo, luego hacemos dividir y colorear cada cuadrado dibujado, por ultimo la pregunta, ¿Que se

observa?, se espera algún alumno responda: la superficie del cuadrado pegado a la hipotenusa es igual a la suma de las spuperficies de los cuadrados pegados sobre cada cateto, ahora hacemos escribir este hecho en fórmula y el alumno descubrió el enunciado del teorema.

Figura 3 Narisi

Prueba de Cantor

La prueba está basada en la figura 4, es quizás la más linda desde el punto de vista didáctico, puesto que obviamente se puede presentar como la de Nairizi. De paso si presenta el proceso descripto para Nairizi, despues para evaluarlo presenta el dibujo de Cantor y así evalúa si entendieron el proceso de Nairizi.

Figura 4, Cantor

Como es de esperarse, hay demostraciones aparentemente mucho más complicadas del teorema de Pitágoras, sin embargo, como la ley de conservación de energía es una verdad indiscutible, no la hemos contradecido para nada, pués estas *simples* demostraciones están basadas en la teoría de áreas, tema nada fácil de desarrollar. Otro punto a favor de las demostraciones aprentemente más complicadas de Pitágoras (por ejemplo, las que aparecen en los libros de Repeto, Cabrera y Médici, Tapia) es que se obtiene información extra sobre los triángulos rectángulos.

Análisis, trigonometría y decimales de π

En los textos de análisis encontramos, usando polinomios de Taylor, que un modo de aproximar los valores de $arctg(x)$ para x cualquier número real entre -1 y 1 es por medio de

$$p_k(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + ... + (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)$$

y el error que se comete es

$$|arctg(x) - p_k(x)| \leq x^{2k+3}/(2k+3)$$

Como $tg(\frac{\pi}{4}) = 1$ se tiene que $arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ Por tanto se obtiene la aproximación

$$|\frac{\pi}{4} - [1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ... + (-1)^k/(2k+1)]| \leq 1/(2k+3).$$

De modo que si $k = 500$ se obtiene

$$|\frac{\pi}{4} - [1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ... + (-1)^{500}/(1000+1)]| \leq 1/1003 \leq 1/1000.$$

Por consiguiente debemos calcular 500 sumas para determinar los dos primeros decimales de π.

Usando trigonometría se obtienen mejores aproximaciones de $\frac{\pi}{4}$. Para esto notemos la igualdad

$$\frac{\pi}{4} = 4arctg(\frac{1}{50}) - arctg(\frac{1}{239})$$

Un modo de demostrar esta igualdad es:

1) Verificar que $tg(\frac{\pi}{4}) = 1$

2) Verificar, usando los teoremas de adicion de la tangente y la identidad $tg(arctg(t)) = t, \forall\, t,$ la igualdad $tg[4arctg(1/50) - arctg(1/239)] = 1$

3) Recordar que tangente es una función inyectiva en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, esto es, si $tg(x) = tg(y), x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$ entonces $x = y$

4) Ahora utilizar $4p_k(1/50) - p_k(1/239)$ para aproximar a $\frac{\pi}{4}$.

7) El error cometido es a lo mas $4 * (1/50)^{2k+3} + 1/(239)^{2k+3}$

8) Notar que para $k = 7$ el error es a lo sumo $.5242880000 * 10^{-28} + .3691778905 * 10^{-40}$

Para evaluar procesos sugerimos usar la identidad

$$\frac{\pi}{4} = arctg(1/2) + arctg(1/3).$$

Seguridad

Cuantos guardias se requieren para vigilar el interior de una galería de arte con n paredes y sin obstáculos en el interior.

De acuerdo a dibujos, algunas requieren pocos guardias, otras muchos. Stephen Fisk demostró que como mínimo se requiere de $[n/3]$ guardias. Esto sugiere que los alumnos hagan ejemplos de galerias y determinen el numero minimo de guardias.

Si las paredes de la galeria sólo forman ángulos de 90 o 270 grados, más difícil de mostrar es: Una galería ortogonal, con $[n/4]$ guardias, la vigilamos. Una demostración se encuentra en: Vladimir Estivill-Castro, Una introducc'ón a la geometria computacional. Aportaciones matemáticas. Sociedad Mexicana de Matemática.

Córdoba, 6 de septiembre de 2004

FAMAF
Ciudad Universitaria
5000 Córdoba
e-mail: vargas@famaf.unc.edu.ar