En esta nota se recopila la conferencia y lo expuesto en la mesa redonda por Jorge Vargas.

Antes de comenzar, el abajo firmante, desea expresar su gratitud a las autoridades de la SOAREM por la invitacion a participar de tan magnifica conferencia en educacion matematica.

Una relación entre álgebra de tercer año y geometría.

Si x, y, z son números positivos, entonces vale que

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}) \geq 9$$

Una manera de demostrar esto es usar la igualdad

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right)=9+\left(\sqrt{\frac{y}{z}}-\sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{z}{x}}-\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$$

Notar que la desigualdad es igualdad sí y sólo sí x = y = z como se deduce de la identidad anterior.
Consideremos ahora un triángulo de lados a, b, c. Denotemos por S su superficie, p su perímetro, s su semiperímetro, R el radio de la circunferencia circunscripta, r el radio de la circunferencia inscripta, d la distancia entre el centro de la circunferencia inscripta y el centro de la circunferencia circunscripta. Se sabe que

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad R=\frac{abc}{4S} \qquad r=\frac{S}{s} \qquad d=\sqrt{R^2-2Rr}$$

Como el lector recordará la primera fórmula se debe a Heron de Alejandría (Siglo III antes de Cristo), la última Euler a (1707-1783).
Lo que deseamos puntualizar es como usando las información previa, se demuestra:

Teorema (Euler) R $\geq$2r y la igualdad sólo vale para triángulos equiláteros.

En realidad la última afirmación de la información presentada verifica la desigualdad de Euler, sin embargo se la puede demostrar en forma muy sencilla, por ejemplo así:

$$\frac{R}{r}=\frac{sabc}{4S^2}=\frac{abc}{4s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

ahora escribimos s - a = x, s - b = y, s - c = z , por consiguiente,

$$\frac{R}{r} = \frac{(y+z)(y+x)(z+x)}{4xyz},$$

en consecuencia la desigualdad de Euler equivale a demostrar que

$$\frac{(y+z)(y+x)(z+x)}{4xyz} \geq 2,$$

el numerador de la última fracción es

$$(y+z)(y+x)(z+x) = (x+y+z)(xy+xz+yx) - xyz.$$

Por tanto, la desigualdad de Euler equivale a verificar

$$\frac{(x+y+z)(xy+xz+yx) - xyz}{4xyz} \geq 2,$$

pero esta última fracción es igual a

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \geq \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Ahora, estudiamos la igualdad en el teorema de Euler. Si el triángulo es equilátero, entonces a = b = c álgebra elemental nos dice que vale la igualdad. (También se lo demuestra usando el hecho de que en un triángulo equilátero las medianas, mediatrices, alturas coinciden). Por otro lado, si vale la igualdad, entonces d = 0 y por lo tanto las mediatices coinciden con las alturas, bisectrices etc, en consecuencia es equilátero. Otra demostración (sugerida por D. Penazzi es: si vale la igualdad entonces x = y = z, por consiguiente a = b = c).

Propuesta para el aula

Etapas sugeridas para ayudar a descubrir el teorema de Euler.1) Hacer dibujar varios triángulos equiláteros. 2) Hacer dibujar el centro de la circunferencia inscripta y de la circunscripta. 3) Hacer notar que ambos centros coinciden, hacer medir los radios de ambas circunferencias. 4) Hacer dibujar varios triángulos isósceles. 5) Hacer dibujar los centros de la circunferencia inscripta y circunscripta para cada uno de estos triángulos. 6) Para cada triángulo dibujado hacer medir con regla los radios R, r 7) Hacer una tabla con los valores obtenidos 8) Preguntar ¿notan alguna relación entre estos números? (Probablemente algunos alumnos se den cuenta que R >r). 9) Preguntar ¿Cuán lejos están R y r?, surge entonces la pregunta, que significa ¿Cuan lejos? una respuesta es calcular R - r o

R/r. 10) Hacer calcular ambos valores R - r, R/r. 11) Preguntar, se observa algo en común, algún alumno quizás responda que R/r > 2. Los que contestaron esto descubrieron la desigualdad de Euler por observación. Ahora hay que demostrar la desigualdad de Euler.

Otra aplicación algebraica de las fórmulas para calcular R, r.
Para motivarnos recordemos:
Para el caso de triángulos rectángulos cuyos lados tienen por longitud números naturales, sabemos que sus lados se describen por las fórmulas,

$$a = 2mnh, \quad b = h(m^2 - n^2), \quad c = h(m^2 + n^2)$$

donde a, b son los catetos, n, m, h naturales, n, m son coprimos y de distinta paridad, además m > n. Para una prueba, consultar Vargas, Areas de Triángulos rectángulos, REM, 1991.Vol 6 o Boletín de SOAREM, Número 2, 2001, estas fórmulas tienen por consecuencia:
Ejercicio: Para un triángulo rectángulo de lados naturales, el radio de la circunferencia r inscripta es un número natural, el radio de la circunferencia circunscripta R es un número natural o un racional cuyo denominador es dos.
Para hacer descubrir estos resultados presentar las fórmulas para S, s, R, r que los calcula a partir de a, b, c. Ahora, usar las fórmulas para a, b, c descriptas mas arriba, hacer calcular y sale.

Algunos problemas útiles para programar en computadoras.

1)Euclides fue el primer matemático en demostrar que existen infinitos números primos. Su demostración es por reducción al absurdo. Esto es, suponemos que sólo hay un número finito de primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, . . . , pn. Ahora formamos el número $Q_n = 1 + 2.3.5.7.11.13. \ldots .p_n$. Q_n es número natural mayor que uno, por consiguiente es divisible por un primo p. Por otro lado, p est´ a en la lista que define Q_n (allí están todos los primos), por consiguiente p divide a $1 = Q_n - (Q_n - 1)$, absurdo. Esta demostración sugiere un problema: ¿Para que n es Q_n un número primo? Por ejemplo $Q_2 = 2.3 + 1 = 7$, $Q_3 = 2.3.5 + 1 = 31$ son primos, mientras que $Q_7 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 + 1 = 19 \times 97 \times 277$. Se sabe que, y sugerimos verificarlo con una computadora, que el Q_n correspondiente al n = 13649 - primo es un número primo de 5862 dígitos.
2)Fijemos un primo q, nos planteamos encontrar un natural d de modo que todos los términos de la progresión aritmética

$$q, q + d, q + 2d, \ldots, q + (q - 1)d$$

son números primos. Notar que q + qd es compuesto.
Para q = 3, una respuesta es d = 2, la progresion es: 3, 3 + 2 = 5,
Para q = 5 una respuesta es d = 6, pues 5, 5 + 6 = 11, 5 + 2.6 = 17, 5 + 3.6 = 23, 5 + 4.6 = 29 son primos.
Para q = 7 el primer d de modo que los números 7, 7 + d, 7 + 2d, ..., 7 + 6d resultan

Números primos es $d = 150$
Para $q = 11$ el primer d es $d = 1536160080$
Para $q = 13$ el primer d es $d = 9918821194590$.
3) Para cada natural n denotemos por $\pi(n)$ el número de primos menores o iguales a n. De esto, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 3$, $\pi(6) = 3$, $\pi(8) = 4$, $\pi(9) = 4$, $\pi(10) = 4$, $\pi(12) = 5$. Notar que $\pi(2) = 1$ divide a 2, $\pi(4) = 2$ divide a 4, $\pi(6) = 3$ divide a 6. Esto sugiere: Problema, encontrar los naturales n tal que $\pi(n)$ divide a n. Entre tales naturales están, $\{ 2, 4, 6, 8, 30, 33, 100, \dots \}$

Notar que el problema 1) se lo puede presentar haciendo calcular una tabla a dos columnas, en la primera columna n, en la segunda Q_n, para luego preguntar ¿Que observa?
Notar que el problema 3) se lo puede presentar haciendo calcular una tabla a tres columnas, en la primera columna n, en la segunda $\pi(n)$, en la tercera columna $n/\pi(n)$ para luego preguntar ¿Que observa?

Un problema de combinatoria

Este problema, es un ejemplo de un problema que transformado convenientemente en otro problema, resulta muy fácil de resolver.
Decimos que un subconjunto $A \subseteq \{ 1, 2, \cdots, n \}$ es alternante si al enumerar sus elementos en forma creciente, el primero es impar, el segundo es par, el tercero es impar, etc. Decimos que un subconjunto $A \subseteq \{ 1, 2, \cdots, n \}$ es robusto si cada elemento A es mayor o igual al cardinal de A. Por ejemplo, $\{ 13, 24, 57, 62 \}$ es alternante y robusto. Problema, determinar los subconjuntos de $\{ 1, 2, \cdots, n \}$ alternantes y robustos. Conviene pensar que el conjunto vacio es la vez alternante y robusto.
Una manera de resolver este problema, es transformarlo en otro equivalente f´ácil de resolver. Para esto, a cada subconjunto $A = \{ a_1, \cdots, a_k \}$ de $\{ 1, 2, \cdots, n \}$ con k elementos le asociamos un subconjunto $B = \{ b_1, \cdots, b_k \}$ de $\{ 1, 2, \cdots, 2n - 1 \}$, donde

$$b_i = a_i + i - 1.$$

Por ejemplo para $A=\{ 13, 24, 57, 62 \}$, resulta $B=\{13+1-1, 24+2-1, 57+3-1, 62+4-1\} = \{13, 25, 59, 65\}$.

Es fácil verificar que los k - subconjuntos alternantes A estan en correspondencia bijectiva con los k - subconjuntos $B \subseteq \{ 1, 2, \cdots, 2n - 1 \}$ que satisfacen:

cada elemento de B es impar y el mayor elemento B es menor que n+k.

Por otro lado, los k - subconjuntos robustos de $\{ 1, 2, \cdots, n \}$ están en correspondencia bijectiva con los k - subconjuntos $B = \{ b_1 < \cdots < b_k \}$ de $\{ 1, 2, \cdots, 2n - 1 \}$ tal que $b_i \geq k + i - 1$, para todo i entre 1 y k. En consecuencia,

los k - subconjuntos alternantes y robustos están en correspondencia bijectiva con los k - subconjuntos de { k, k + 1, · · · , n + k - 1 }.

Dicho numero es

si n es par,

$$\binom{n/2}{k}$$

$$\binom{n/2}{k}$$

tal que todos sus elementos son impares. El resultado es si n es par,
Sí ambos son impares y

$$\binom{\frac{n+1}{2}}{k}$$

Por tanto, el número de subconjuntos alternantes y robustos es

$$\sum_{k=0}^{k=n/2} \binom{n/2}{k} = 2^{\frac{n}{2}} \qquad \text{n par}$$

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{4}]} \binom{\frac{n-1}{2}}{2k} + \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{4}]} \binom{\frac{n+1}{2}}{k} \qquad \text{n impar}$$

Para $n > 1$ esto es igual a $2^{\frac{n-1}{3}} + 2^{\frac{n-1}{3}} = 3.2^{\frac{n-3}{3}}$
para $n = 1$ es 2

Ejercicio: el n´ umero de subconjuntos alternantes de { 1, 2, · · · , n } es igual al n´ umero de subconjuntos robustos de { 1, 2, · · · , n } . Este número es igual a F_(n+2), donde F_1 = F_2 = 1, F_(n+1) = F_n + F_(n-1) para n mayor o igual a 2. (Los números de Fibonacci.)

Sugerencia didáctica:
Para presentar este problema se sugiere definir subconjunto alternante, hacer calcular los subconjuntos alternantes de { 1, 2, 3 } , { 1, 2, 3, 4 } , { 1, 2, 3, 4, 5 } , { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }, { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } ,
Ahora definir subconjunto robusto, para cada uno de estos conjuntos determinar los suconjuntos robustos, en cada caso hacer calcular el número de subconjuntos que son a la vez robustos y alternantes, hacer dibujar una tabla donde en la primera columna se coloca n el cardinal de { 1, ..., n } y en la segunda columna el número de subconjuntos de { 1, ..., n } que a la vez son robustos y alternantes, preguntar si se observa alguna ley de formación, algún alumno quizás se de cuenta de las fórmulas en el párrafo anterior, una ayuda para enseñar

a descubrir las fórmulas es indicar que las leyes de formación mas básicas son

$$n \to kn, \quad n \to k/n, \quad n \to ck^{\wedge} n, \quad n \to cn^{\wedge} k,$$

$$n \to c/k^{\wedge} n, \quad n \to c/n^{\wedge}k \qquad \text{con } k > 0, c > 0$$

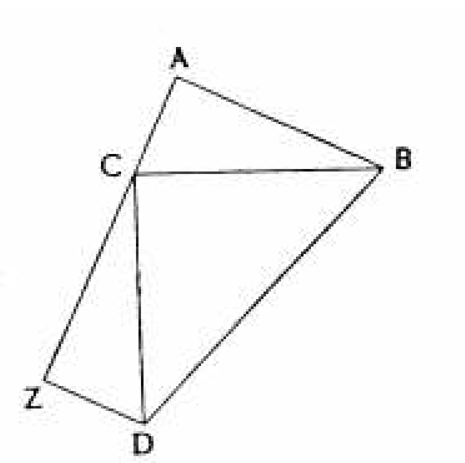
conveniente (proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, directamente proporcional a una exponencial en n, directamente proporcional a una potencia de n, inversamente proporcional a una exponencial de n, inversamente proporcional a una potencia de n).
Notacion: x^y significa x elevado a la y, x_y significa x con subindice y.

Pruebas del teorema de Pitágoras

Algunos autores han listado del orden de 400 pruebas distintas del teorema de Pitágoras. A continuación reproducimos una debida a el Presidente Garfield de Estados Unidos de Norteamérica descubierta en 1882, la segunda a Leonardo da Vinci(1451-1519), la tercera al matemático árabe An-Nairizi y la cuarta debida al inventor de la teoria de conjuntos George Cantor (1845-1918).

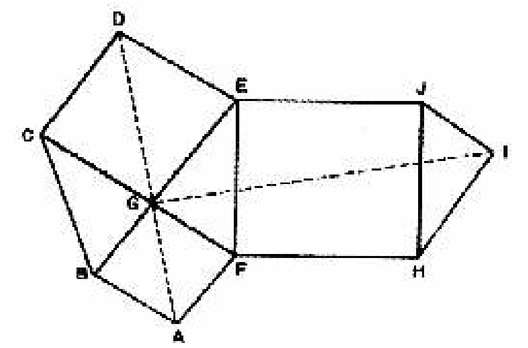
Prueba de Garfield

En la figura 1, tenemos un trapecio con base mayor b, base menor a (es trapecio porque el triángulo es rectángulo). El ángulo Z es recto porque su suplemento es la suma de los dos ángulos no rectos del triángulo. Ahora, como siempre calculamos el área del trapecio de las dos maneras que sugiere la figura, después de simplificar obtenemos la demostracion del presidente.
Figura 1 Garfield

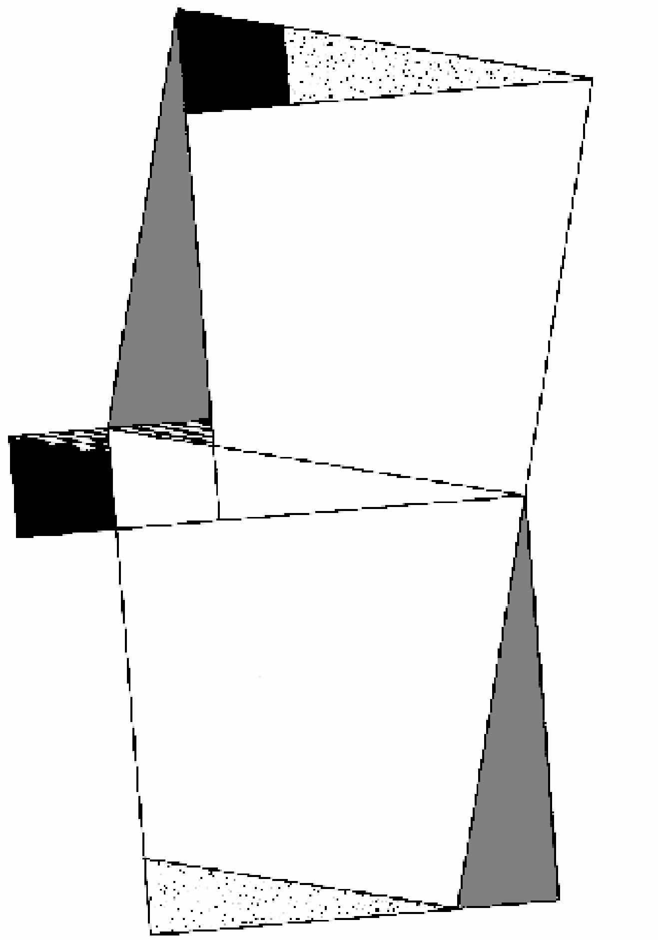


Prueba de Leonardo

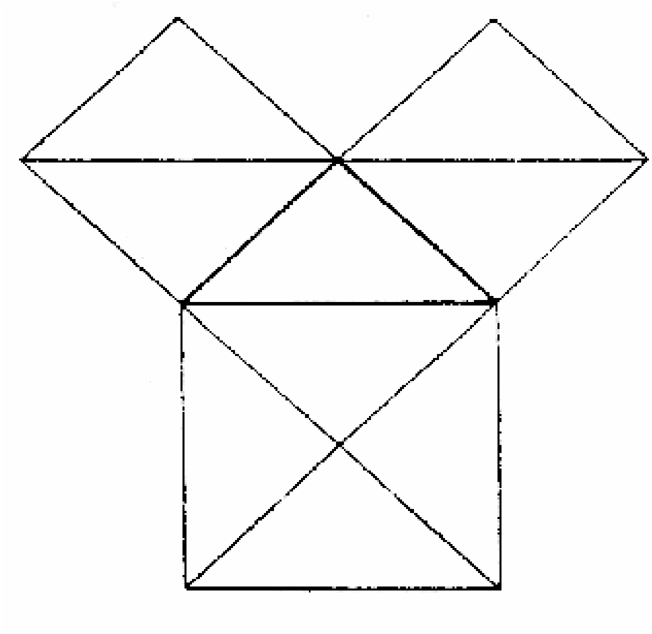
Consideramos un triangulo rectangulo de vertices JIH, en la figura 2 los cuadrila-teros ABCD, DEFA, GFHI y GEJI son congruentes. Por consiguiente los ex´ agonos ABCEF y GEJIHF tienen la misma ´ area. Por tanto el cuadrado FEJH es suma de las areas de los cuadrados ABGF, CDEG. Esta demostraci´ on tiene algo muy interesante, se visualiza que el area del cuadrado asentado sobre la hipotenusa es la suma de las areas de los cuadrados asentados sobre los catetos.
Figura 2,



Prueba de An-Nairizi
Est´ a basada en la figura 3, esta demostraci´ on tiene la bondad de puede usarse para hacer que los alumnos descubran el enunciado del teorema de Pit´ agoras, para esto, primero pedimos un tri´ angulo rect´ angulo, luego dibujar cuadrados sobre cada lado del rect´ angulo, luego hacemos dividir y colorear cada cuadrado dibujado, por ultimo la pregunta, ¿Que se observa?, se espera algún alumno responda: la superficie del cuadrado pegado a la hipotenusa es igual a la suma de las superficies de los cuadrados pegados sobre cada cateto, ahora hacemos escribir este hecho en fórmula y el alumno descubrió el enunciado del teorema.
Figura 3 Narisi



Prueba de Cantor
La prueba está basada en la figura 4, es quizás la más linda desde el punto de vista didáctico, puesto que obviamente se puede presentar como la de Nairizi. De paso si presenta el proceso descripto para Nairizi, después para evaluarlo presenta el dibujo de Cantor y así evalúa si entendieron el proceso de Nairizi.
Figura 4, Cantor



Como es de esperarse, hay demostraciones aparentemente mucho más complicadas del teorema de Pitágoras, sin embargo, como la ley de conservación de energía es una verdad indiscutible, no la hemos contradecido para nada, pués estas simples demostraciones están basadas en la teoría de áreas, tema nada fácil de desarrollar. Otro punto a favor de las demostraciones aparentemente más complicadas de Pitágoras (por ejemplo, las que aparecen en los libros de Repeto, Cabrera y Médici, Tapia) es que se obtiene información extra sobre los triángulos rectángulos.

Triángulos (tetraedros) de lados naturales y área (volúmen) natural

De modo mas preciso, se busca triángulos (tetraedros) cuyos lados miden un número natural y su área (volúmen) es un número natural. En un artículo de la Revista Educación Vol. 14 número 2, M. Pacheco ha descripto propiedades de los mismos, entre ellas:
Teorema

El área de tales triángulos es un mútiplo de seis.

El volúmen de un tal tetraedro es un múltiplo de tres.

Los tetraedros cuyos lados tiene por longitud un número natural y cuyo volumen es 3, tienen una altura de a lo sumo 0.006. Ejemplos de tetraedros de volumen tres son los de lados

35 33 32 76 44 70

47 32 21 58 56 76

En el mismo artículo se encuentra un programa en Mathematica para calcular ejemplos de tales tetraedros. Este teorema tiene la bondad que podemos presentarlo a los alumnos preguntando si existen tales objetos, hacerles construir ejemplos y observar la descomposición en números primos del área (volúmen), los alumnos que se anoticien que el área es múltiplo de dos y tres (el volúmen es múltiplo de tres) habrán conjeturado el teorema. El programa en Mathematica está escrito de modo de que quien sepa Derive o Maple lo reprogramará con muy poco trabajo.

Para ejercitar análisis y trigonometría

En los textos de análisis encontramos, usando polinomios de Taylor, que un modo de aproximar los valores de arctg (x) para x cualquier número real entre - 1 y 1 es por medio de

$$p_k(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + ... + (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)$$

y el error que se comete es

$$|arctg(x) - p_k(x)| \leq x^{2k+3}/(2k+3)$$

Como $tg(\frac{\pi}{4}) = 1$ se tiene que $arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ Por tanto se obtiene la aproximación

$$|\frac{\pi}{4} - [1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ... + (-1)^k/(2k+1)]| \leq 1/(2k+3).$$

De modo que si k = 500 se obtiene

$$|\frac{\pi}{4} - [1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ... + (-1)^{500}/(1000+1)]\,| \leq 1/1003 \leq 1/1000.$$

Por consiguiente debemos calcular 500 sumas para determinar los dos primeros Decimales de $\pi/4$.

Usando trigonometría se obtienen mejores aproximaciones de $\frac{\pi}{4}$. Para esto notemos la igualdad

$$\frac{\pi}{4} = 4arctg(\frac{1}{50}) - arctg(\frac{1}{239})$$

Un modo de demostrar esta igualdad es:

1) Verificar que $tg(\frac{\pi}{4}) = 1$

2) Verificar, usando los teoremas de adicion de la tangente y la identidad $tg(arctg(t)) = t, \forall t,$ la igualdad $tg[4arctg(1/50) - arctg(1/239)] = 1$

3) Recordar que tangente es una función inyectiva en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, esto es, si $tg(x) = tg(y), x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$ entonces $x = y$

4) Ahora utilizar $4p_k(1/50) - p_k(1/239)$ para aproximar a $\frac{\pi}{4}$.

7) El error cometido es a lo mas $\mathbf{4} * (1/50)^{2k+3} + 1/(239)^{2k+3}$

8) Notar que para $k = 7$ el error es a lo sumo $.5242880000 * 10^{-28} + .3691778905 * 10^{-40}$

Para evaluar procesos sugerimos usar la identidad

$$\frac{\pi}{4} = arctg(1/2) + arctg(1/3).$$

Córdoba, 30 de junio de 2000
FAMAF
Ciudad Universitaria
5000 Córdoba

e-mail: vargas@famaf.unc.edu.ar