Area de Triángulos Rectángulos

Jorge Vargas[1]

Un problema planteado por los árabes en el siglo X es el de determinar los números naturales que se obtienen como área de algún triángulo rectángulo de lados enteros positivos. Aún hoy en día no se conoce una respuesta a este problema, sin embargo, recientemente se han realizados progresos positivos tanto en resultados como en conjeturas. En estas notas trataremos de describir parte de este conocimiento matemático y de una técnica para resolver problemas, la de *trasladar un problema de un área de la matemática a otra y allí resolverlo.* De ahora en adelante (x, y, z) indica, salvo especificación contraria, los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo.

(1) Salvo congruencia, el número de triángulos rectángulos de lados enteros positivos y área fija igual a un entero positivo n es finito.

En efecto, la ecuación $xy = 2n$ tiene un número finito de soluciones enteras positivas, como se deduce del Teorema Fundamental de la Aritmética. Ahora recordemos que dos triángulos rectángulos son congruentes si sus catetos lo son.

(2) No existen triángulos rectángulos de lados enteros positivos y área 1, 2, 3, 4, 5, 7.

En efecto, sea (x, y, z) las medidas de un triángulo rectángulo de lados enteros positivos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \leq y$. Supongamos que existe un triángulo rectángulo cuya área es igual a uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, o 7. Entonces tendríamos que:

(a) $xy = 2$ con $x^2 + y^2 = z^2$ lo cual implica $x = 1$, $y = 2$, $z = \sqrt{5}$, absurdo pués x, y, z, son enteros positivos,
(b) $xy = 4$ implica $x = y = 2$, $z = \sqrt{8}$ absurdo, o $x = 1, y = 4, z = \sqrt{5}$, absurdo.
(c) $xy = 6$ implica $x = 2$, $y = 3, z = \sqrt{13}$, absurdo, o $x = 1, y = 6, z = \sqrt{37}$, absurdo, o....
(d) $xy = 8$ implica $x = 2$, $y = 4$, $z = \sqrt{20}$, absurdo, o....
(e) $xy = 10$ implica $x = 2$, $y = 5$, $z = \sqrt{29}$ absurdo, o....
(f) $xy = 14$ implica $x = 2$, $y = 7$ $z = \sqrt{53}$ absurdo.

(3) Salvo congruencia existe un único triángulo rectángulo de lados enteros positivos y área 6. Este es dado por el trío $(3, 4, 5)$.
Puesto que $xy = 12$, $x < y$, $x^2 + y^2 = z^2$ implican $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ o $x = 2$, $y = 6$, $z = \sqrt{14}$, o $x = 1, y = 6, z = \sqrt{37}$, el tercer criterio de congruencia concluye la afirmación.

Se daja como ejercicio al lector probar que no existen triángulos rectángulos de lados enteros positivos y área 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, o p, con p un número primo. Otro ejercicio es mostrar que para un triángulo cuyos lados miden números naturales siempre vale que $1 < x$. De lo contrario, tendriamos que $1 + y^2 = z^2$, de

[1]FAMAF-CIEM, Universidad Nacional de Cordoba. Argentina

esto, $1 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y)$ lo cual implicaria que $z - y = z + y = 1$. Por consiguiente, $z = \frac{1}{2}$.

Es claro que si queremos obtener resultados de importancia debemos cambiar el modo de trabajo, una primera cosa que podemos intentar es encontrar una máquina que nos ayude a producir ternas pitagóricas. Recordemos que

(1) Se llama terna pitagórica a una terna de números que son las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.
(2) Matemáticamente una máquina que nos produzca ternas pitagóricas significa encontrar un conjunto X y una función calculable de X en el conjunto de las ternas pitagóricas.

Lema 1 Una terna de números reales x, y, z, satisface $x^2 + y^2 = z^2$ si y sólo si es posible encontrar números reales m, n, con $m > n$ tal que $x = 2mn$, $y = m - n$, $z = m + n$.

En otras palabras cada vez que se nos ocurran un par de números $m > n$ podemos construir una terna pitagórica usando las fórmulas escritas allí, y de esta manera obtenemos todas las ternas.
Demostración. Si $x^2 + y^2 = z^2$ entonces $z^2 - y^2 = x^2$, en consecuencia $x^2 = (z-y)(z+y)$. Sean $p = z - y$, $q = z + y$, de esto $y = (q-p)/2$, $z = (p+q)/2$, y $x^2 = pq$. Escribamos $p = 2n^2$, $q = 2m^2$, (como p y q son positivos y todo número real positivo tiene raíz cuadrada, m y n existen). Por tanto $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$. La implicación recíproca es trivial.

En la terminología de funciones el lema se reinterpreta así: Sea X el conjunto de pares de números reales (m, n), con $m > n$. Fijemos en el plano un sistema de ejes coordenados ortogonales de orígen p. Sea ϕ la función que asocia a (m, n) el triángulo rectángulo con hipotenusa contenida en el primer cuadrante y vértice opuesto p, con catetos contenidos en los ejes y de medida $2mn$, $m^2 - n^2$, respectivamente. El Lema 1 y los criterios de congruencia implican que todo triángulo rectángulo es congruente al menos a uno de la forma $\phi(m, n)$, con m y n convenientes. El lector diligente podrá concluir que: salvo congruencia hemos construido una máquina para producir triángulos rectángulos.

Ejercicio. Denotemos por Y el conjunto cociente del conjunto de triángulos rectángulos dividido por la relación de congruencia. Sea $\psi : X \to Y$ la función definida por $\psi(m, n)$ =clase de congruencia de $\phi(m, n)$. Analizar si ψ es inyectiva o sobreyectiva.

Después de varias intentos (2500 años aproximadamente) Kronecker en el siglo pasado probó (ver [D], página 222) ,

Proposición Una terna $x, y < z$ de números enteros psoitivos, con x par y con máximo común divisor de x, y, z igual a 1 satisface la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ si y sólo si $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$, $m > n$, con m, n enteros positivos, $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$, y m de distinta paridad a n.

Demostración. Probemos primero que si $x = 2mn$, entonces $x^2 + y^2 = z^2$, $\mathrm{mcd}(x,y,z) = 1$ y los números x, y, z son enteros positivos. Estos son enteros positivos, puesto que resultan de operar con números enteros positivos. La ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ resulta de un cálculo directo. Si d divide a $\mathrm{mcd}(x,y,z)$ entonces $d/(x+z)^2 = (m+n)^2$, como m es par y n impar o viceversa resulta $m+n$ impar por lo tanto d es impar. Por tanto como $d/2m^2 = y+z$, $d/2n^2 = z-y$ resulta que d/n^2 y d/m^2. Si d fuera mayor que 1, cada factor primo de d dividiría m y n, lo cual implicaría que $\mathrm{mcd}(m,n) > 1$, absurdo. Para verificar la recíproca notemos que:

a) x es par e y impar o x es impar e y par. Puesto que si ambos fueran pares 2 dividiría a z^2, por tanto 2 dividiría a $\mathrm{mcd}(x,y,z) = 1$. Si ambos fueran impares tendríamos $x = 2k+1$, $y = 2r+1$, reemplazando en la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$ se obtendría $2(2s+1) = z^2$ con s entero positivo, lo que contradice el Teorema Fundamental de la Aritmética.

b) z es impar, puesto que $x^2 + y^2$ es impar por a). Sín pérdida de generalidad podemos suponer que x es par e y impar (si fuera al revés hacer $x = y$ e $y = x$). Por el Lema 1, podemos escribir $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$, $m > n$ con m, n reales. Necesitamos probar que m y n son enteros positivos, $\mathrm{mcd}(m,n) = 1$, m, n tienen distinta paridad. Como x es entero positivo y par resulta que mn es entero positivo, como $y + z = 2m^2$, $z - y = 2n^2$, $y \pm z$ es par (ambos son impares) resulta que m^2 y n^2 son enteros positivos. $\mathrm{mcd}(m^2, n^2) = 1$, de lo contrario si un primo p dividiera a m^2 y a n^2 entonces p dividiría a y y a ,z la ecuación pitagórica implica que p dividiría a x, de esto $\mathrm{mcd}(x,y,z) > 1$, absurdo. Por lo tanto cada factor primo de n^2 no aparece en m^2 y viceversa, como mn es entero positivo, y como la raíz cuadrada de $(mn)^2$ se calcula por medio de la factorización en primos de $(mn)^2$ y $\mathrm{mcd}(m^2, n^2) = 1$, resulta que m y n son enteros positivos. Son coprimos ya que de lo contrario resultaría $\mathrm{mcd}(x,y,z) = 1$ como x es par e y impar resulta m par y n impar o viceversa.

Esta proposición tiene varias consecuencias interesantes, a saber:

1) (x,y,z) es una terna pitagórica de enteros positivos, con $mcd(x,y,z) = d$ si y sólo si existen enteros positivos m, n, con $x = 2mnd$, $y = d(m^2 - n^2)$, $z = d(m^2 + n^2)$, $m > n$, $\mathrm{mcd}(m,n) = 1$, m y n de distinta paridad.

2) Si (x,y,z) es una terna pitagórica de enteros positivos, entonces xyz es un múltiplo de 60.

En efecto, $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ por tanto debemos probar que $3/xyz$, $4/xyz$, $5/xyz$, luego $xyz = d^3 2mn(m^2 - n^2)(m^2 + n^2) = d^3 2mn(m-n)(m+n)(m^2 + n^2)$. Como m o n es par resulta $2mn$ múltiplo de 4. Si m y n son múltiplos de 3 entonces $(m^2 - n^2)$ es múltiplo de 3. Si ni n ni m son múltiplos de 3 entonces $m = 3k + r$ $(r = 1, 2)$ y $n = 3s + t$ $(t = 1, 2)$. Por lo tanto $m^2 - n^2$ es igual a 3 por entero positivo más $r^2 - s^2$. Dando los valores posibles a r y s resulta que $r^2 \pm s^2$ es igual a cero o ± 3 por lo tanto divisible por 3. Si alguno de los números $n, m, m+n$ es múltiplo de 5 completamos que xyz es múltiplo de 60, Si no, entonces $m = 5k + r$, $n = 5s + t$ con r, t en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Por tanto $m^4 - n^4 = 5$ por un entero positivo + $(r^4 - s^4)$, reemplazando r, s por sus valores resulta que xyz es múltiplo de 60.

3) Consecuencia espectacular y bella. El área de un triángulo rectángulo de lados enteros positivos es un entero positivo y múltiplo de 6.

En efecto, el área es igual a $mn(m^2 - n^2)$ por lo tanto entero positivo. De las cuentas hechas en 2) resulta múltiplo de 6.

Ejercicio. Probar que siempre un cateto de un triángulo rectángulo de lados enteros positivos es par. Deducir otra demostración de que el área es entero positivo.

4) Sin embargo, no todo múltiplo de 6 es área de un triángulo rectángulo de lados enteros positivos, por ejemplo probar que 12 no es área de un triángulo rectángulo de lados enteros positivos.

Ejercicio. Pruebe que no existen triángulos rectángulos de lados enteros positivos y área igual a un cuadrado, por ejemplo 25, 36, 81. Ayuda que no ayuda: Si área= r^2 , una homotecia de razón r lleva el conjunto de triángulos de área 1 sobre el conjunto de triángulos de área r .

5) Fibonacci (aprox. 1500 DC) descubrió un triángulo rectángulo de lados racionales y área un entero positivo. Este es dado por el trío $(9/6, 40/6, 41/6)$ que tiene área igual a 5.

6) Usando la notación de 1) es claro que resolver el problema de encontrar los enteros positivos s que son áreas de triángulos rectángulos de lados enteros positivos es equivalente a resolver el siguiente problema algebraico: Determinar los enteros positivos s para los cuales es posible encontrar enteros positivos m, n, d con $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$, m y n de distinta paridad, $m > n$, tal que $s = mn(m^2 - n^2)d$.

Con esta reformulación algebraica del problema es muy fácil escribir un programa en BASIC para calcular los triángulos rectángulos de lados enteros positivos y área menor o igual a 100.

Cuando se trata de resolver un problema, una técnica es trasladarlo a otra región de la matemática. Si en el nuevo encuadre uno no sabe que hacer, una técnica conveniente es tratar de incluir el problema inicial en otro. Eso es lo que haremos con nuestro problema, De ahora en adelante consideraremos el siguiente problema:

Dado un entero positivo s *, encontrar triángulos rectángulos de lados racionales y área* s *.*

En particular, deseamos encontrar criterios que nos permitan decidir cuando existen triángulos rectángulos de lados racionales y de área s .

Notar que estos criterios permitirán decidir que enteros positivos no son áreas de triángulos rectángulos de lados enteros positivos.

Notación. $TRLR$ significa triángulo(s) rectángulo(s) de lados racionales. Algebraicamente, encontrar los $TRLR$ de área s se traduce en:

(*) *Encontrar los racionales* $x < y < z$ *que satisfacen las ecuaciones* $xy = 2s$ *,* $x^2 + y^2 = z^2$ *.*

Para justificar la equivalencia de estos dos problemas recordemos que surge de aplicar el teorema de Pitágoras y el tercer criterio de congruencia, una terna de números reales x, y, z representan los lados de un triángulo rectángulo si y sólo si $x^2 + y^2 = z^2$.

En los párrafos siguientes transformaremos el problema (*) en varios equivalentes, parte de estas equivalencias fueron realizadas en las últimas décadas por distintos matemáticos europeos y norteamericanos.

Lema 2 Fijemos un entero positivo s. Entonces existen racionales $x < y < z$, que satisfacen las ecuaciones $xy = 2s$, $x^2 + y^2 = z^2$ si y sólo si es posible encontrar un racional b tal que $b, b+s, b-s$ son todos cuadrados de números racionales.

Demostración. ($\Longrightarrow$) $(z^2/4) \pm s = (x^2 + y^2)/4 \pm (xy)/2 = ((x \pm y)/2)^2$. Por tanto si definimos $b = (z/2)^2$, resultan $b, b \pm s$ cuadrados de números racionales.
($\Longleftarrow$) Escribamos $b = r^2$, $b \pm s = (r_\pm)^2$, con r y $r_\pm$ números racionales positivos. Definamos $x = r_+ - t_-$, $y = r_+ + r_-$, $z = 2r$, es claro que son racionales y calculando se obtiene que $x^2 + y^2 = z^2$.

Fijemos un entero positivo s, y mantengamos in mente la notación de la prueba del lema anterior. Sea

$$F_s = \{(x, y, z) : x, y, z \text{ racionales positivos, } x < y < z \text{ que satisfacen } xy = 2s,\ x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Sea $G_s = \{b : b \text{ y } b \pm s \text{ son cuadrados de números racionales}\}$ y sea $\phi : F_s \rightarrow G_s$ definida por $\phi(x, y, z) = (z/2)^2$. Sea $\psi : G_s \rightarrow F_s$ definida por $\psi(b) = (r_+ - r_-, r_+ + r_-, 2r)$.

Proposición 3 Las funciones ϕ y ψ son biyectivas, y una es la inversa de la otra.

Demostración. $\phi(\psi(b)) = \phi(r_+ - r_-, r_+ + r_-, 2r) = (2r/2)^2 = r^2 = b$, $\psi(\phi(x, y, z)) = \psi((z/2)^2) = (x, y, z)$ puesto que $(z/4)^2 \pm s = (x^2 + y^2)/4 \pm (xy)/2 = ((x \pm y)/2)^2$.

Ejercicio. Fijemos un orígen en el plano y un sistema de coordenadas ortogonales con centro en dicho punto. Sea θ la función de F_s en el conjunto de triángulos rectángulos, definida por $\theta(x, y, z)$ =triángulo rectángulo contenido en el primer cuadrante de catetos x, y, e hipotenusa z, con vértice opuesto a la hipotenusa igual al orígen. Probar que todo triángulo rectángulo de lados racionales y área s es congruente a $\theta(x, y, z)$ para (x, y, z) en F_s conveniente.

Conclusión. El problema (*) es equivalente a determinar los s tal que F_s, resulta no vacío, el cual resulta equivalente a determinar los s tal que G_s es no vacío.El viejo problema de analizar si s es área de $TRLR$ es equivalente a analizar si G_s es no vacío.

Ahora definiremos una función de F_s en una curva elíptica $E_{s^2}(\mathbb{Q})$. No se asuste el lector ya diremos que es cada cosa.

De ahora en adelante la letra $\mathbb{Q}$ representa el conjunto de los números racionales.

Para un racional d definimos la *curva elíptica* $E_d(\mathbb{Q})$ igual al conjunto de pares de números racionales (x, y) que satisfacen la ecuación $y^2 = x^3 - dx$. Si graficamos en el plano real la curva para $d = s^2$ se obtiene el siguiente dibujo.

Fijemos ahora (a,b,c) en F_s , en consecuencia $a^2+b^2=c^2$, $a<b<c$, a,b,c son racionales positivos y $2s=ab$. Por lo tanto, $((a+b)/2)^2=(c/2)^2+s$, $((a-b)/2)^2=(c/2)^2-s$. Multiplicando miembro a miembro se obtiene $((a^2-b^2)/4)^2=(c/2)^4-s^2$. Sean $u=c/2$, $v=(a^2-b^2)/4$. Por lo tanto , $v^2=u^4-s^2$,multiplicando miembro a miembro por u^2 se obtiene $(uv)^2=(u^2)^3-s^2u^2$. Sean $x=u^2$, $y=uv$. De esto $y^2=x^3-s^2x$. En consecuencia si partimos de (a,b,c) logramos un par (x,y) que pertenece a la curva elíptica $E_{s^2}(\mathbb{Q})$. Por ende podemos definir la siguiente función: $\upsilon : F_s \to E_{s^2}(\mathbb{Q})$ por la regla $\upsilon(a,b,c)=(x,y)=(c^2/4, c(a^2-b^2)/8)$.

Preguntas que surgen: ¿Cuál es la imagen de υ ?, ¿Es υ inyectiva?

Probemos que υ es inyectiva. Si $\upsilon(a,b,c)=\upsilon(a',b',c')$ entonces $c^2/4=c'^2/4$ implican $c=\pm c'$, y como ambos son positivos $c=c'$, Por tanto de la igualdad $c(a^2-b^2)/8=c'(a'^2-b'^2)/8$ se deduce que $(a^2-b^2)=(a'^2-b'^2)$. Por Pitágoras se tiene que $(a^2+b^2)=(a'^2+b'^2)=c^2$, en consecuencia $2a^2=2a'^2$, $2b^2=2b'^2$; la positividad de a,a',b,b' implican $a=a'$, $b=b'$. Por ende υ es inyectiva.

Probemos ahora que la imagen de υ es $\{(x,y)\in E_{s^2}(\mathbb{Q})$, tal que x es el cuadrado de un número racion $0\}$. Denotemos por $\{\ldots\}$ el conjunto de la derecha. Probemos primero que la imagen de $\upsilon \subset \{\ldots\}$ y luego que $\{\ldots\}\subset$ Imágen de υ . Por definición de υ la primera coordenada de $\upsilon(a,b,c)$ es el cuadrado de un racional, además $a<b$, en consecuencia la segunda coordenada de $\upsilon(a,b,c)$ es negativa. Por lo tanto la primera inclusión es clara. Para la otra inclusión fijemos (x,y) en $\{\ldots\}$, por consiguiente $x=u^2$ con u racional positivo. Sea $v=y/u$. Por tanto $v^2=y^2/x=x^2-s^2$. De esto, $v^2+s^2=x^2$. Denotemos por t el denominador de la expresión reducida de u . Multiplicando miembro a miembro $v^2+s^2=x^2$ por t^4 obtenemos que $(t^2v)^2+(t^2s)^2=(t^2x)^2$. Ahora, $t^2x=t^2u^2=$ número entero positivo; t^2s es entero positivo pués es producto de enteros positivos; $-t^2v$ es entero positivo puesto que la igualdad $v^2+s^2=x^2$ implica que el mínimo denominador de v^2 es igual a un divisor del denominador de x^2 que es t^2 . Por consiguiente, el denominador de v es un divisor de t . En consecuencia $(-t^2v, t^2s, t^2x)$ es una terna pitagórica de enteros positivos. Es fácil verificar que $\operatorname{mcd}(-t^2v,t^2s,t^2x)=1$. Por ende podemos aplicar el Teorema de Kronecker. Sean a,b , enteros positivos coprimos, $a>b$, de distinta paridad, tal que $-t^2v=a^2-b^2$, $t^2s=2ab$, $t^2x=a^2+b^2$. Afirmamos que $(2b/t, 2a/t, 2u)$ está en F_s .

En efecto, como $b<a$, se tiene que $2b/t$ es menor que a/t . Ahora, $(4a^2/t^2)+(4b^2/t^2)=4(a^2+b^2)/t^2=4t^2x/t^2=(2u)^2$, $(1/2)(2a/t)(2b/t)=2ab/t^2=t^2s/t^2=s$ y $\upsilon(2b/t,2a/t,2u)=(4u^2/4, 8u(b^2-a^2)/8t^2)=(x, v(t^2v)/t^2)=(x,y)$, lo cual prueba la inclusión deseada. Con esto completamos el cálculo de la imagen de υ .

Ejercicio. Fijemos s,d enteros positivos y sean F_s , F_{sd^2} como los hemos definido en el parágrafo anterior. Sea $H: F_s \to F_{sd^2}$ definida por la regla $H(x,y,z)=(dx,dy,dz)$. Sea $K: F_{sd^2}\to F_s$ definida por $K(x,y,z)=(x/d,y/d,z/d)$. Verificar que H y K estan bien definidas, esto es, verificar que la terna imagen aterriza en el lugar correcto. Probar que K es biyectiva y que su función inversa es H . Concluir que F_s es (no) vacío si y sólo si F_{sd^2} es (no) vacío. Como sabemos que F_5, F_6 son no vacíos ¿qué otros F's son no vacíos?.

Ejercicio. Verificar que $(24/5, 35/12, 337/60) \in F_7$; $(8/3, 21/2, 65/6) \in F_{14}$; $(12, 7/2, 25/2) \in F_{21}$.

Si $(a, b, h) \in F_s$, entonces la terna $(2abh/(2b^2 - h^2), (2b^2 - h^2)/2h, (h^4 + 4b^2h^2 - 4b^4)/2h(2b^2 - h^2))$ también pertenece a F_s , y determina un triángulo rectángulo de área s no congruente al (a, b, h) . Concluir que si F_s es no vacío entonces es un conjunto infinito.

Ejercicio. Piense en triángulos rectángulos con catetos contenidos en los ejes coordenados, hipotenusa en el cuadrante $x > 0$ e $y > 0$, y el vértice opuesto a la hipotenusa igual al (0,0) y área s. Para cada uno de ellos marque en el plano el punto medio de la hipotenusa. ¿Qué curva queda dibujada?.

Ejercicio. Probar que F_s es no vacío si y sólo si el sistema de ecuaciones $x^2 + s = y^2, x^2 - s = z^2$ tiene el menos una solución (x, y, z) con x, y, z racionales si y sólo si el sistema de ecuaciones $u^2 + sv^2 = t^2, u^2 - sv^2 = r^2$ tiene al menos una solución (u, v, t, r) con u, v, t, r números enteros. Ayuda: si (x, y, z) resuelve el primer sistema verificar que si d es el denominador mínimo de x, entonces $u = dx, v = d, t = zd, r = zd$ resuelve el segundo sistema. Pruebe además que la función que lleva a (x, y, z) que resuelve el primer sistema en (u, v, t, r) es biyectiva. En otras palabras estos dos sistemas son equivalentes. Deduzca de los teoremas expuestos en $[V]$ que F_1 es el conjunto vacío. en consecuencia no hay TRLR cuya área es el cuadrado de un número racional. Dar una interpretación geométrica a las funciones H y K.

Para $s = 101$ la solución más pequeña (u, v, t, r) es u= 2015 242462 949760 001961, v= 118 171431 852779 451900, t= 2339 148435 306225 006961, y $r =$ 1628 124370 727269 996961

Para s= 229 la solución más pequeña es:
$u =$ 764646 440211 958998 267241, $v =$ 9404 506457 489780 613180, $t =$ 777777 618847 556210 645041, y $r =$ 751285 786287 393798 649441

Para $s = 103$ se sabe que: $(134\,130664\,938047\,228374\,702001\,079697)^2 \pm 103\,(7\,18861\,768365\,914788\,447417\,161240)^2$ son el cuadrado de enteros positivos.

Ahora definiremos otra función σ de F_s en $E_{s^2}(\mathbb{Q})$. Para esto fijemos (a, b, c) en F_s. Sean $u = a/c, v = b/c$ en consecuencia $u^2 + v^2 = 1$. En el triángulo de la figura, sea $t = \tan(\alpha)$. Se tiene que $u = (1 - t)^2/(1 + t^2), v = 2t/(1 + t^2)$.
En efecto, $\tan(\alpha) = t = v/(1+u)$, de esto, $v = t(1+u)$, reemplazando en $u^2+v^2 = 1$, y resolviendo la ecuación de segundo grado en u se obtiene $u = (-t^2 \pm 1)/(1 + t^2)$. Como u es no negativo y $t \leq 1$ (pués $\alpha \leq 45$ grados) se tiene que $u = (1 - t^2)/(1 + t^2), v = 2t/(1 + t^2)$.

Sean $x = -st,\ y = s^2(1 + t^2)/c$. Notar que $x > 0$ e $y < 0$. Es fácil verificar que:

$$y^2 = s^4(1 + t^2)^2/c^2 = x^3 - s^2x$$

Ejercicio. Sea $\sigma : F_s \longrightarrow E_{s^2}(\mathbb{Q})$ definida por $\sigma(a, b, c) = (x, y)$

1) Escribir explícitamente x, y en términos de a, b, c.
2) Probar que si (x, y) es un elemento de $E_{S^2}(Q)$ con y no nulo entonces (x, y) están en la imagen de σ. Ayuda considerar $a =$ valor absoluto de $(s^2 - x^2)/y$, $b =$ valor absoluto de $2sx/y$, $c =$ valor absoluto de $(s^2 + x^2)/y$

En un ejercicio propusimos probar que sí F_s es no vacío entonces es infinito. Se puede probar la siguiente:

Proposición Un entero positivo s es el área de un TRLR si y sólo si $E_{s^2}(Q)$ es un conjunto infinito.

La demostración que conozco usa el hecho de que si le agregamos un punto al infinito a la curva $E_{s^2}(\mathbb{Q})$ resulta un grupo abeliano y la imagen de la función υ definida anteriormente es precisamente los elementos de orden dos de este grupo.

Conclusión: El problema (*) tiene solución si y sólo si la curva elíptica asociada a s^2 es infinita. Este último problema no ha sido completamente resuelto pero se ha logrado reescribirlo en el lenguaje de la teoría de las funciones analíticas donde al menos uno puede escribir conjeturas que resultan como consecuencia de unas conjeturas más generales llamadas conjeturas de Birch-Swinnerton-Dyer.

Ahora describimos algunos resultados debidos esencialmente a Tunnnell (1983) y conjeturas sobre el problema (*).

Fijemos s un entero positivo y supongamos que F_s es no vacío, Tunnell ha probado:

Si s es impar, entonces $\sharp\{(x, y, z)$ tal que x, y, z son enteros satisfaciendo $2x^2 + y^2 + 8z^2 = s\} = 2\sharp\{(x, y, z)$ tal que x, y, z son enteros satisfaciendo $2x^2 + y^2 + 32z^2 = s\}$. Si s es par, entonces $\sharp\{(x, y, z)$ tal que x, y, z son enteros satisfaciendo $4x^2 + y^2 + 32z^2 = s/2\} = (1/2)\sharp\{(x, y, z)$ tal que x, y, z son enteros satisfaciendo $4x^2 + y^2 + 8z^2 = s/2\}$. Como los conjuntos en el Teorema de Tunnell se pueden calcular fácilmente usando una computadora, se puede, en principio determinar los $s < 200$ tal que F_s es no vacío. Cuidado los números que hay que manejar tienen un número muy grande de cifras.

Tunnell usando estos teoremas e ingredientes de la teoría de Galois y otras yerbas, además de ideas, logró probar: Si s es primo congruente a uno de los números $3, 5, 6, 7 \pmod 8$, entonces F_s es no vacío.

Conjetura. Si s es libre de cuadrados y s es congruente a uno de los números 3, 5, 6, 7 (mod 8), entonces F_s es no vacío.

Se puede probar que esta conjetura es consecuencia de las conjeturas de Birch-Swinnerton-Dyer. Por lo tanto, a probar las conjeturas de Birch-Swinnerton-Dyer.

Lamentablemente esta conjetura no dá una respuesta satisfactoria al problema (*) en el sentido que no proporciona una condición necesaria y suficiente para s de modo que F_s resulte no vacío.

Tunnell nos proporciona una conjetura que satisface nuestros requerimientos. Sea

$$g(q) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (-1)^{m+n} q^{(4m^2+1)^2+1\sigma n^2}$$

Esta función está bien definida para q complejo de valor absoluto menor que uno.

Para cada t entero positivo sea

$$\Theta_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{tn^2}$$

Nuevamente esta función está bien definida para q complejo de valor absoluto menor que uno.

Para las funciones producto $g\Theta_2$ y $g\Theta_4$ escribamos

$$g\Theta_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n)q^n, \qquad g\Theta_4 = \sum_{n\in\mathbb{N}} b(n)q^n$$

Procediendo formalmente se puede calcular explícitamente tanto $a(n)$, como $b(n)$ para los primeros veinte enteros positivos. Es fácil escribir un programa en BASIC para calcularlos en general.

Se puede probar (intentarlo como ejercicio) que para n impar,

$a(n) = 2\sharp\{(x, y, z) : x, y, z$ son enteros y satisfacen $2\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+32\mathrm{z}^2 = \mathrm{s}\}-\sharp\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) : \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ son enteros satisfaciendo $2\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+8\mathrm{z}^2 = \mathrm{s}\}$. El lector diligente no encontrará dicultad en derivar fórmulas similares para $b(n)$.

Ahora podemos formular una conjetura de Tunnell.

Conjetura. Si $s/2$ no es entero positivo convengamos en escribir $b(s/2) = 0$.

Sea s entero positivo libre de cuadrados, entonces F_s es no vacío si y sólo si $a(s) + b(s/2) = 0$.

Tunnell ha demostrado que esta conjetura es consecuencia de las conjeturas de Birch-Swinnerton-Dyer.

Finalmente damos una lista de los números menores que 100 para los cuales F_s es el conjunto vacío:

1, 2, 3, 10, 11, 17, 19, 26, 33, 35, 42, 43, 51, 57, 58, 59, 66, 67, 73, 74, 82, 83, 89, 97, y cualquier otro número igual al cuadrado de un natural por uno de la lista.

Para finalizar, recordamos que un número entero positivo se dice congruente si es igual al área de un TRLR.

Bibliografía

[T] Tunnell J. Inventiones Math. 72 (1983), 323-333.

[G] Guy, *Unsolved problems in number theory*, Springer Verlag.

[D] Dickson. *History of theory of numbers.* Vol 2.

[V] Vargas J. *Sobre triángulos rectángulos*, Revista de Educación Matemática, Vol 2, Número 3, 1985.