Complementos de Algebra, Cap. 1

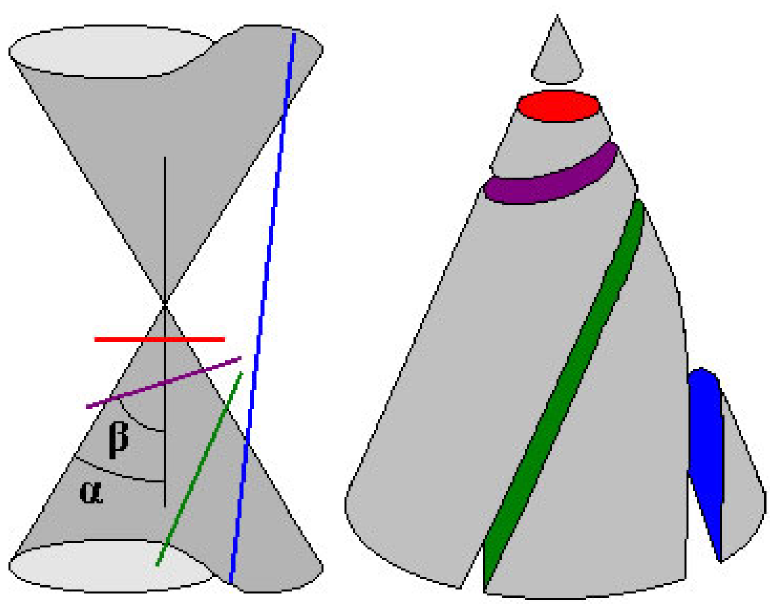
Prof. Dr. Jorge Vargas

10 de febrero de 2008

1 Conicas en el plano euclideano

1.1 De los griegos y Descartes

Desde la antiguedad llamaron la atención ciertas curvas que se obtienen al seccionar superficies cónicas por un plano. Apolonio de Perga (260-200 a.J.C.) se ocupó de esta parte de la matemática, notando que las curvas que se obtienen al seccionar[1] un cono por planos son: circunferencias, elipses, hipérbolas, unión de rectas, punto, o parábolas, de acuerdo a la posición relativa del plano con el cono. De la imaginación o de un dibujo surge:



1)Cuando el plano secante es perpendicular al eje del cono, la curva que resulta es una circunferencia o un punto.

2) Si el plano secante corta al eje oblicuamente, esto es, el ángulo determinado por el eje del cono y el plano es distinto a un recto o llano, entonces se obtiene una elipse.

3) Cuando el plano secante es paralelo a la generatríz del cono, la interesección resulta en parábola.

4) Si el plano contiene el eje del cono, se obtiene la unión de dos rectas

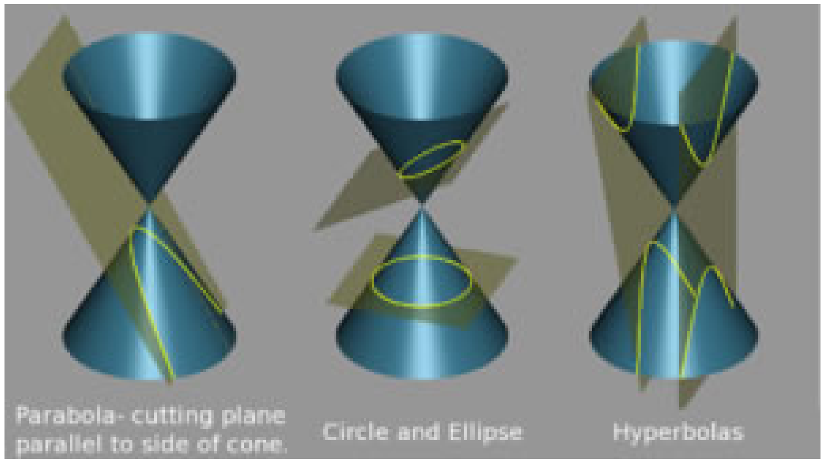
5) Finalmente, si el plano secante es paralelo al eje se determina una hiperbola.

Como el lector imaginará en este capítulo y posteriores nos ocuparemos de presentar en detalle la formulación matemática de estos conceptos y mostrar los resultados empiricos mencionados en los párrafos anteriores.

[1]En lenguaje clásico, seccionar es utilizado como sinonimo de intersectar.

Para esto, de ahora en más denotaremos por R el conjunto de los números reales y por R^2 el producto cartesiano R por sí mismo. Imaginamos a R^2 como un plano en el cual hemos dibujado dos rectas ortogonales. En cada recta imaginamos marcada una unidad de distancia de manera que podemos calcular la distancia entre dos puntos $P := (a, b), Q := (c, d)$ por la fórmula

$$d(P, Q) = \|P - Q\| := \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$



1.1.1 La Circunferencia

En lenguaje de los griegos una *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto dado, llamado centro. En lenguaje moderno, dados un punto P del plano y un número real positivo r la circunferencia de centro $P = (a, b)$ y radio r es el conjunto de puntos $Q = (x, y)$ en R^2 cuya distancia a P es r. En símbolos,

$$C_{P,r} := \{Q = (x, y) \in R^2 : d(Q, P) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r\}$$

Un ejercicio para el lector le permitirá mostrar que

$$C_{P,r} = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0\}$$

En lenguaje post Descartes, despues de 1637, la igualdad anterior se expresa:

La ecuación general de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Ejercicio: Determinar la ecuación de la circunferencia de centro el punto medio del segmento que une $(0, 0)$ con $(2, 2)$ y de radio la distancia de $(2, 3)$ a $(2, 4)$.
Ejercicio: Determinar la ecuación de la circunferencia que tiene por uno de sus diámetros el segmento determinado por los puntos $(2, 3), (4, 6)$.
Ejercicio: Dibujar dos circunferencias cuya intersección es no vacía, calcular sus ecuaciones y calcular las coordenadas de los puntos comunes a ambas circunferencias.
Ejercicio: Las circunferencias son con conjuntos no vacios, para esto mostrar que los puntos $P_\theta := P + r(cos\theta, sen\theta), \theta \in R$ pertenecen a la circunferencia de centro P y radio r. Surge una pregunta cual es?

1.1.2 La elipse

En lenguaje de Euclides, una *elipse* es el lugar geométrico de los puntos del plano la suma de cuyas distancias a otros dos puntos fijos llamados focos, es constante. En lenguaje moderno: Dados dos puntos F_1, F_2 en el plano y un número real positivo $2r$ la *elipse* determinada por esta data es el conjunto de puntos P en el plano que satisfacen

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2r.$$

En símbolos, la elipse de focos $F_1 = (a,b), F_2 = (c,d)$ y semieje mayor $2r$ es,

$$\{(x,y) \in R^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = 2r\}$$

Ejercicio: Dibujar y calcular la ecuación de elipses de focos $F_1 = (1,0), F_2 = (0,1)$ y semieje mayor de longitud $2r = 1/2, 2, 4$.
Ejercicio: Determinar para que eleccion de focos, la elipse resulta una circunferencia.
Ejercicio: Calcular la ecuación de elipses cuyos focos pertenecen a la recta de abcisas, y ademas se satisface que el orígen $(0,0)$ es punto medio del segmento determinado por los focos. Realize los cálculos y definiciones necesarios para que la ecuación resulte de la forma

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1,\ r > 0,\ t > 0.$$

Bosquejo de la solución: Los focos son $F_1 = (-c,0), F_2 = (c,0)$.
(x,y) pertenece a la elipse en cuestion sii satisface

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2r$$

Pasando de miembro, (x,y) pertenece a la elipse en cuestion sii

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2r - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Como elevar al cuadrado es una función inyectiva de los números positivos en los números positivos, esto es, $\sqrt{x^2} = x$ $(\sqrt{x})^2 = x$ para x es positivo,
se tiene que (x,y) pertenece a la elipse en cuestion sii

$$(x+c)^2 + y^2 = (2r - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

Operando, se obtiene

$$x^2 + c^2 + 2xc + y^2 = 4r^2 - 4r\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 + c^2 - 2xc + y^2$$

Simplificando y pasando de miembro, se arriba a

$$4r\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4r^2 - 4xc$$

Simplificando por 4 obtenemos

$$r\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = r^2 - xc$$

Nuevamente, elevamos al cuadrado y lo justificamos ....obteniendo

$$r^2((x-c)^2 + y^2) = (r^2 - xc)^2$$

Operando, se consigue

$$r^2x^2 + r^2c^2 - 2r^2xc + y^2r^2 = r^4 + x^2c^2 - 2r^2xc$$

Pasando de miembro y simplificando se arriba a

$$(r^2 - c^2)x^2 + r^2y^2 = r^4 - r^2c^2 = r^2(r^2 - c^2)$$

dividiendo por $r^2(r^2 - c^2)$ se obtiene
(x,y) pertenece a la elipse en cuestion sii

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - c^2} = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1 \qquad (\diamondsuit).$$

Donde $t := \sqrt{r^2 - c^2}$.

Ejercicio: La elipse de data $F_1, F_2, 2r$ es un conjunto distinto del vacío sí y sólo sí $d(F_1, F_2) \leq 2r$. En caso de que se satisface $d(F_1, F_2) = 2r$ la elipse resulta igual al segmento $\overline{F_1, F_2}$.

Resolución: Sí la elipse es un conjunto no vacío escogemos un punto P en la elipse, entonces

$$2r = d(P, F_1) + d(P, F_2)$$

por la desigualdad triangular se tiene que

$$d(F_1, F_2) \leq d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2r.$$

Por tanto, $d(F_1, F_2) \leq 2r$. Lo cual demuestra la implicación directa. Para demostrar que si $d(F_1, F_2) \leq 2r$, entonces la elipse asociada a esta data es un conjunto no vacío, mostramos que el punto

$$P_r = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) + r\frac{(F_2 - F_1)}{\|F_2 - F_1\|}$$

pertenece a la elipse en cuestión. Debemos mostrar que

$$\|P_r - F_1\| + \|P_r - F_2\| = 2r.$$

Por un lado, $P_r - F_1 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) + r\frac{(F_2-F_1)}{\|F_2-F_1\|} - F_1 = \frac{1}{2}(-F_1 + F_2) + r\frac{(F_2-F_1)}{\|F_2-F_1\|} = (\frac{1}{2} + \frac{r}{\|F_2-F_1\|})(F_2 - F_1)$ y por el otro $P_r - F_2 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) + r\frac{(F_2-F_1)}{\|F_2-F_1\|} - F_2 = \frac{1}{2}(F_1 - F_2) + r\frac{(F_2-F_1)}{\|F_2-F_1\|} = (-\frac{1}{2} + \frac{r}{\|F_2-F_1\|})(F_2 - F_1)$. Como $2r \geq d(F_1, F_2)$ se tiene que $(-\frac{1}{2} + \frac{r}{\|F_2-F_1\|}) \geq 0$. Recordando la igualdad $\|cQ\| = c\|Q\|$ para $c > 0, Q \in R^n$ se obtiene $\|P_r - F_1\| + \|P_r - F_2\| = (\frac{1}{2} + \frac{r}{\|F_2-F_1\|})\|(F_2 - F_1)\| + (-\frac{1}{2} + \frac{r}{\|F_2-F_1\|})\|(F_2 - F_1)\| = 2r$.

Ejercicio, evaluar procesos, si $2r \geq d(F_1, F_2)$ mostrar que el punto $P_r = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) - r\frac{(F_2-F_1)}{\|F_2-F_1\|}$ pertenece a la elipse para la data $F_1, F_2, 2r$.

Ejercicio, suponga $2r \geq d(F_1, F_2)$, sea W un vector de norma uno y ortogonal a $F_1 - F_2$. Sea $c := d(F_1, \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = \frac{1}{2}d(F_1, F_2)$ y sea $Q_r = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) + \sqrt{r^2 - c^2}W$. Mostar que Q_r pertenece a la elipse de data $F_1, F_2, 2r$. Este ejercicio es muy fácil despues que estudiemos traslación en un próximo capítulo. Una cuenta permite mostrar que los puntos

$$\frac{1}{2}(F_1 + F_2) + r\,cos(\theta)\ \frac{F_1 - F_2}{\|F_1 - F_2|} + \sqrt{r^2 - c^2}\,sen(\theta)\ W$$

pertenecen a la elipse de data $F_1, F_2, 2r$. Despues de hacer la cuenta y dibujar surge una pregunta, cual es?

Ejercicio: Si $d(F_1, F_2) = 2r$ entonces la elipse de data $F_1, F_2, 2r$ es el segmento $\overline{F_1F_2}$.

Bosquejo de la solución: Los puntos del segmento $\overline{F_1F_2}$ son los puntos $Y_t := tF_1 + (1-t)F_2, 0 \leq t \leq 1$. $\|Y_t - F_1\| + \|Y_t - F_2\| = \|(t-1)F_1 + (1-t)F_2\| + \|tF_1 + (1-t-1)F_2\| = \|(1-t)(F_2 - F_1)\| + \|t(F_1 - F_2)\| = ((1-t) + t)(\|F_1 - F_2\| = d(F_1, F_2) = 2r$ La penultima igualdad se justifica puesto que ambos t y $1-t$ son nonegativos, por tanto, vale la igualdad $\|cX\| = c\|X\|$. De manera que hemos verificado que los puntos del segmento pertenecen a la elipse. La recíproca sigue del hecho que si en la desigualdad triangular vale la igualdad, entonces los puntos estan alineados.

A continuación, definimos conceptos geométricos necesarios para interpretar los números $r, t := \sqrt{r^2 - c^2}$ de la ecuación $\diamondsuit$.

En caso de focos distintos $F_1 \neq F_2$, estos determinan una recta que intersecta la elipse en dos puntos distintos A, A', el segmento determinado por estos dos puntos A, A' se lo denomina el *eje mayor* de la elipse, la longitud del semieje mayor se la denomina *diámetro mayor* de la elipse. La recta que pasa por el punto medio del segmento que une los puntos F_1, F_2 y es perpendicular a la recta determinada por los focos, intersecta la elipse en dos puntos B, B', el segmento que determinan los puntos B, B' se lo denomina *eje menor* de la elipse, la longitud del semieje menor se la denomina *diámetro menor* de la elipse. La distancia de F_1 a F_2 se la denomina *distancia focal* de la elipse, es conveniente escribir $d(F_1, F_2) = 2c$. Para las elipses del ejercicio $\diamondsuit$ un cálculo fácil nos conduce a mostrar

$$\text{Longitud eje mayor} = 2r$$

$$\text{Longitud eje menor} = 2t$$

$$\text{Distancia de un foco a (0,0)} = c$$

$$d(B,(0,0)) = d(B',(0,0)) = t, \quad d(A,(0,0)) = d(A',(0,0)) = r$$

Denotemos por $d := d(B, F_1) = d(B, F_2) = d(B', F_1) = d(B', F_2)$,

Mostremos que $d = r$.

En efecto, puesto que B, A pertenecen a la elipse, se tiene que

$$d(B, F_1) + d(B, F_2) = d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2r \qquad (*)$$

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras y la definición de B se tiene que

$$d(B, F_1) = d(B, F_2) = d.$$

(*) implica $2r = 2d$ de modo que $r = d$.
Para otra demostración, se procede así, supongamos los puntos $A' < F_1 < F_2 < A$. Por esto,

$$d(A, F_1) = r - c, \quad d(A, F_2) = r + c,$$

por tanto la igualdad (*) implica que $d = r$.

Una consecuencia de la igualdad $r = d$ es que si conocemos los extremos de los dos ejes de una elipse podemos determinar sus focos y el número $2r$. Denotemos por A, A' los extremos del eje de mayor longitud, y por B, B' los extremos del eje de longitud menor, puesto que $2r = \|A - A'\|$ =longitud eje de mayor longitud. Denotemos por $2t = \|B - B'\|$ =longitud eje menor. Calculamos $c := \sqrt{r^2 - t^2}$ por lo analizado mas arriba, el lector laborioso verificara que los focos son $\frac{1}{2}(A + A') \pm c\frac{A - A'}{\|A - A'\|}$. Como ejercio del ejercicio sugerimos inventar data A, A', B, B' calcular los focos y la ecuación de la elipse resultante.

De ahora en mas, solo consideraremos *elipse* para data $F_1, F_2, 2r$ que satisface

$$F_1 \neq F_2, d(F_1, F_2) \neq 2r$$

Excentricidad de la Elipse
Por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$d^2 = t^2 + c^2.$$

Pasando de miembro y recordando que $d = r$ se obtiene

$$r^2 - t^2 = c^2 \qquad (**)$$

Ahora dividimos por r^2 obteniendo

$$\frac{r^2 - t^2}{r^2} = \frac{c^2}{r^2} =: e^2$$

El número $e = \frac{d(F_1, F_2)}{2r} = \frac{c}{r}$ se lo denomina *excentricidad* de la elipse. Notar, consultar un ejercicio de este apartado para mostrar,

$$\text{excentricidad de elipse} \;=\; e < 1.$$

Caso límite son las elipses de focos iguales, esto es, de excentricidad cero que resultan nada mas ni nada menos que las circunferencias. Por otra parte como $c^2 \geq 0$ de (**) se deduce que

$$r \geq t$$

lo cual justifica la terminología semieje mayor y semieje menor.
Notar que la ecuación (**) permite calcular c a partir de r, t, en efecto $c = \sqrt{r^2 - t^2}$.
Ejercicio, bajo las hipótesis del párrafo anterior, calcular las coordenadas de los focos, de los puntos A, A', B, B'.
Ejercicio, ¿ a partir de la excentricidad y la longitud del semieje mayor de una elipse que podemos concluir?
Surgen preguntas, para elipses bien ubicadas hemos asociado ciertos números que nos describen su geometría, ¿ podremos esto hacerlo para cualquier elipse?
Observación: Una recta, queda determinada por dos de sus puntos, una circunferencia queda determinada por tres de sus puntos ¿ cuantos puntos necesitamos conocer de una elipse, para determinar sus focos, semiejes, diámetros, centro? Parte del curso, es contestar estas preguntas.

1.1.3 La hiperbola

Para los griegos, la *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante e igual a una distancia dada. En lenguaje post Descartes, dados dos puntos fijos F_1, F_2, de ahora en más denominados *focos* y un número real $2r$, la *hipérbola* determinada por esta data es el conjunto de puntos $P = (x, y)$ en R^2 que satisfacen

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2r.$$

En símbolos, la hipérbola determinada por la data $F_1 = (a, b), F_2 = (c, d),\ 2r$ es

$$\{(x, y) \in R^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = 2r\}.$$

Como escribió don Julio Rey Pastor, el lector laborioso, deducirá la ecuación de la hipérbola para la data

$$F_1 = (c, 0),\ F_2 = (-c, 0),\ 2r,\ c \text{ positivo}$$

quien obtendrá una ecuación del tipo

$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{t^2} = 1,\ \text{donde } t^2 := c^2 - r^2.$$

El esquema de cálculo es semejante al de la elipse, esto es un ejemplo de evaluar procesos, aqui lo conveniente es pasar de miembro la cuenta correspondiente al foco F_2. De modo análogo que para elipses, se define la excentricidad de una hipérbola al número

$$e := \frac{d(F_1, F_2)}{2r} = \frac{c}{r}$$

el cual resulta mayor que uno, puesto que
la hipérbola asociada a la data $F_1, F_2, 2r$ es distinta del conjunto vacío sí y sólo si $d(F_1, F_2) \geq 2r$ En efecto, si la hipérbola correspondiente a la data $F_1, F_2, 2r$ es no vacía podemos escoger un punto P de modo que

$$2r = d(F_1, P) - d(F_2, P)$$

Pasando de miembro se obtiene

$$2r + d(F_2, P) = d(F_1, P)$$

Aplicamos la desigualdad triangular para llegar a

$$d(F_1, P) \leq d(F_1, F_2) + d(F_2, P)$$

Por propiedad transitiva del orden se tiene que

$$2r + d(F_2, P) \leq d(F_1, F_2) + d(F_2, P)$$

Simplificando $d(F_2, P)$ nos lleva a

$$2r \leq d(F_1, F_2).$$

Para mostrar la afirmación recíproca, esto es, si $2r \leq d(F_1, F_2)$, entonces la hipérbola de data $F_1, F_2, 2r$ es no vacía, dejamos como ejercicio para el lector mostrar que $Q_r = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) + \frac{r}{\|F_1 - F_2\|}(F_1 - F_2)$ es un punto de la hipérbola, esto es, se verifica la igualdad $\|Q_r - F_1\| - \|Q_r - F_2\| = 2r$. Si al realizar el cálculo aparecen dudas, repase el cálculo para mostrar que la elipse es no vacía.
Ejercicio Si $d(F_1, F_2) = 2r$ la hipérbola asociada a la data $F_1, F_2, 2r$ es la unión de dos semirectas. Para el caso $F_1 = (-r, 0), F_2 = (r, 0)$ es la unión de las semirectas "$(-\infty, -r] \cup [r, \infty)$ del eje de las x. Cuando aprendamos movimientos rígidos será fácil resolver el caso general.
Ejercicio: Los puntos $(r\,cosh(t), s\,sinh(t))$ pertenecen a la hiperbola de data $(\pm c, 0), 2r$ para $s =$?.
Preguntas?
Como es de esperar, surge al estudiar la hipérbola las mismas preguntas que para la elipse.

1.1.4 La recta

Para los griegos una *recta* es ... ir a la biblioteca, buscar los elementos de Euclides, leer la definición de recta .... En geometría aprenderemos que la ecuación de una recta L es del tipo $ax + by = c$, esto es, dada una terna ordenada (a, b, c) de modo que al menos a o b es no nulo, la *recta* determinada por esta terna es el conjunto de puntos

$$\{(x, y) \in R^2 : ax + by = c\}.$$

Para $d \neq 0$ es obvio, que la terna (da, db, dc) determina la misma recta que la terna (a, b, c). Una cuenta permite mostrar que si (a, b, c) y (r, s, t) determinan la misma recta, entonces existe $d \neq 0$ de modo que $(a, b, c) = d(r, s, t)$. Bosquejo de demostración : Hipótesis: Las rectas determinadas por las ternas $(a, b, c), (r, s, t)$ tienen dos puntos distintos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ en común. Tésis: Existe un número d de modo que $(a, b, c) = d(r, s, t)$. En efecto, la hipótesis significa que

$$ax_1 + by_1 = c,\ rx_1 + sy_1 = t,\ ax_2 + by_2 = c,\ rx_2 + sy_2 = t.$$

Sustrayendo la tercera igualdad a la primera, y la cuarta igualdad a la segunda se arriba a

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0,\ r(x_1 - x_2) + s(y_1 - y_2) = 0 \tag{1}$$

Operando, y no preocupandose en que puede estar efectuandose divisiones por cero, se obtiene

$$-\frac{a}{b} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{r}{s}$$

De manera que $\frac{a}{b} = \frac{r}{s}$ operando, se obtiene

$$a = \frac{b}{s}r,\ b = \frac{b}{s}s$$

y

$$c = ax_1 + by_1 = \frac{b}{s}rx_1 + \frac{b}{s}sy_1 = \frac{b}{s}(rx_1 + sy_1) = \frac{b}{s}t. \tag{2}$$

De modo que si denotamos $d := \frac{b}{s}$ hemos desmostrado la igualdad buscada. Las operaciones realizadas son lícitas tan pronto los tres números $b \neq 0,\ x_1 - x_2 \neq 0,\ s \neq 0$. En caso de que algunos de estos tres números es cero, por ejemplo, b un modo de proceder es: como $b = 0$, entonces por (1), $a(x_1 - x_2) = 0$, como $(a, b) \neq (0, 0)$ y $b = 0$ se deduce que $a \neq 0$, de manera que $(x_1 - x_2) = 0$, entonces por (1), $s(y_1 - y_2) = 0$ como $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \neq 0$, y $x_1 - x_2 = 0$, se tiene que $(y_1 - y_2) \neq 0$ de modo que $s = 0$, como $(r, s) \neq (0, 0)$ se tiene que $r \neq 0$. Por tanto, $a = \frac{a}{r}r, b = 0 = \frac{a}{r}0 = \frac{a}{r}s$. Un cálculo identico a (2) nos conduce a que $c = \frac{a}{r}t$. Los casos $x_1 - x_2 = 0$, o, $s = 0$ se procede de modo similar. Esto concluye el bosquejo de que si dos rectas se cortan en dos puntos distintos, entonces son iguales.

Después de Descartes, un modo de enunciar este hecho es,
Hipótesis: $ax + by = c,\ rx + sy = t$ rectas, $P = (u, v) \neq Q = (w, z)$ pertenecen a ambas rectas.
Tesis:

$$\{(x, y) \in R^2 : ax + by = c\} = \{(x, y) \in R^2 : rx + sy = t\}.$$

Ejercicio, la recta que pasa por los puntos distintos P, Q es el conjunto $\{P_t = P + t(Q - P),\ t \in R\}$. Bosquejo de la solución, escribamos $P = (r, s), Q = (u, v)$ y $ax + by = c$ por la ecuación de la recta. Repitiendo una cuenta del párrafo anterior se tiene que $a(r - u) + b(s - v) = 0$. Debido a que P pertenece a la recta se satisface $ar + bs = c$. Como $P_t = (r + t(u - r), s + t(v - s))$ un cálculo muestra que P_t pertenece a la recta de ecuación $ax + by = c$. Queda para el lector mostrar que todo punto de la recta es de la forma P_t, para t conveniente.

Ejercicio, Una recta no paralela al eje de las $y's$ tiene una ecuación del tipo $y = mx + h$.

En el curso de geometría aprenderemos que la distancia de un punto $P = (u, v)$ a la recta L de ecuación $ax + by = c$ está dada por la fórmula

$$d((u, v), L) = \frac{|au + bv - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A seguir bosquejamos una prueba de esta igualdad.
Comenzamos recordando que el teorema de Pitágoras, para un triángulo rectángulo de catetos de longitud r, s e hipotenusa de longitud t afirma, $t^2 = s^2 + r^2$. De esta igualdad se deduce que la longitud de cualquier cateto es menor que la de la hipotenusa, ya que $t^2 = s^2 + r^2 \geq s^2 + 0 = s^2$, como $s \geq 0, t \geq 0$ y la función elevar al cuadrado es injectiva y monotona creciente en el conjunto de números reales no negativos, se deduce que $t \geq s$. Esto es, en un triángulo rectángulo, la longitud de cualquier cateto es menor o igual a la longitud de la hipotenusa.
Por definición, *distancia de un punto a un conjunto,* es el ínfimo de las posibles distancias del punto a cada punto del conjunto. En símbolos, si $P \in R^n$ y L es un subconjunto de R^n, distancia de P a L es

$$d(P, L) := infimo\{d(P, X) : X \in L\}.$$

A veces, tenemos suerte y este ínfimo es un mínimo lo que simplifica los cálculos. Esta suerte tenemos cuando calculamos la distancia de un punto P a una recta L. Para verificar esta afirmación trazamos la perpendicular $L^{\perp}$ a L por el punto P. Denotemos por X_0 el punto de intersección de ambas rectas, esto es, $\{X_0\} = L \cap L^{\perp}$. Para cada X en la recta L nos queda determinado un triángulo rectángulo de vértices P, X_0, X cuya hipotenusa es el segmento $\overline{PX}$ y uno de sus catetos es $\overline{X_0P}$, por la observación tenemos que $d(P, X_0) \leq d(P, X)$. De manera que $d(P, X_0)$ es menor o igual a cualquier elemento del conjunto $\{d(P, X) : X \in L\}$. Como $d(P, X_0) \in \{d(P, X) : X \in L\}$. Se tiene que $d(P, X_0)$ es el mínimo del conjunto $\{d(P, X) : X \in L\}$.

En el próximo capítulo verificaremos que la recta perpendicular a $L = \{(x, y) : ax + by = c\}$ que pasa por $P = (u, v)$ es el conjunto de puntos

$$Y_t = P + t(a, b), t \in R.$$

Calculemos ahora el punto de intersección X_0. Este corresponde a un t de manera que $(u, v) + t(a, b) = (u + ta, v + tb) \in L$, por consiguiente tenemos la igualdad

$$a(u + ta) + b(v + tb) = c$$

de donde

$$t(a^2 + b^2) + au + bv = c$$

Despejando t se obtiene $t = \frac{c-au-bv}{a^2+b^2}$ Por tanto, $X_0 = (u + \frac{c-au-bv}{a^2+b^2}a, v + \frac{c-au-bv}{a^2+b^2}b)$, y

$$d(P, X_0) = \|P-(P+\frac{c-au-bv}{a^2+b^2}(a,b)\| = \|-\frac{c-au-bv}{a^2+b^2}(a,b) = |\frac{c-au-bv}{a^2+b^2}|\|(a,b)\| = |\frac{c-au-bv}{\sqrt{a^2+b^2}}|.$$

Aqui hemos usado: $\|cZ\| = |c|\|Z\|$, $\frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{1}{\sqrt{r}}$

Ejercicio: Encontrar la distancia del punto $P = (10, -1)$ a la recta que pasa por los puntos $(1, 2), (2, -3)$.

Bosquejo de solución: la ecuación de la recta es del tipo $ax + by = c$, reemplazando, se obtiene, $a + 2b = c, 2a - 3b = c$. Hacemos $c = 1$ y resolvemos en a, b y obtenemos $a = \frac{5}{7}, b = \frac{1}{7}$. Por tanto una ecuación de la recta es $5x + y = 7$. (encuentre veinte ecuaciones mas de esta recta).

$$d(P, L) = |\frac{c-au-bv}{\sqrt{a^2+b^2}}| = |\frac{7-5.10+1.(-1)}{\sqrt{5^2+1^2}}| = |\frac{-44}{\sqrt{26}}| = \frac{44}{\sqrt{26}}.$$

1.1.5 La parábola

Para los griegos una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta llamada directriz y de un punto fijo llamado foco. En lenguaje moderno, dados una recta L y un punto F del plano, la *parábola* determinada por esta data, es el conjunto de puntos en $P \in R^2$ de modo que

$$d(P, L) = d(P, F).$$

Sí L tiene por ecuación $ax + by = c$, $F = (r, s)$ la parábola determinada por esta data es,

$$\{(x, y) \in R^2 : \sqrt{(x-r)^2 + (y-s)^2} = \frac{|ax+by-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\}.$$

La recta L la denominaremos *la directriz* y el punto F *el foco* de la parábola. La recta por el foco y perpendicular a la directriz, la denominaremos *eje* de la parábola. Una parábola siempre es un conjunto no vacío puesto que el lector resolverá

Ejercicio, Una parábola intersecta su eje en un punto A que equidista del foco y del punto de intersección de su directriz con su eje.

A continuación deducimos la ecuación de una parábola. Por la definición de parábola y la elaboración posterior tenemos que (x, y) pertenece a la parábola de data L, F sii

$$\sqrt{(x-r)^2 + (y-s)^2} = \frac{|ax+by-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Como elevar al cuadrado es una función inyectiva en los números positivos, y $(\sqrt{r})^2 = r$, para $r \geq 0$, (x, y) pertenece a la parábola de data L, F entonces (porque no escribimos sii)

$$(x-r)^2 + (y-s)^2 = \frac{(|ax+by-c|)^2}{a^2+b^2}$$

sii

$$(a^2+b^2)(x^2+r^2-2xr+y^2+s^2-2ys) = a^2x^2+b^2y^2+c^2+2axby-2axc-2byc$$

sii

$$b^2x^2+a^2y^2-2abxy+x(2ac-2r(a^2+b^2))+y(2bc-2s(a^2+b^2))+(r^2+s^2)(a^2+b^2)-c^2 = 0.$$

Una ecuación de segundo grado.

Ejercicio, calcular la ecuación de una parábola cuya directriz es la recta perpendicular al eje de las x que pasa por el punto $(-p, 0)$, esto es, la recta $\{(-p, y) : y \in R\}$ y cuyo foco es $(p, 0)$, $p > 0$ El lector obtendrá $y^2 = 4px$.

Por decreto, la *excentricidad* de cualquier parábola es $e = 1$.

Ejercicio Para la parábola $y = ax^2 + bx + c$ su foco es $(-\frac{-b}{2a}, 0)$, su directríz es la recta paralela al eje x que pasa por $(0, \frac{4ac-b^2}{2a})$ y su eje es la recta perpendicular al eje x que pasa por $(\frac{-b}{2a}, 0)$.

1.1.6 Un problema

En los textos de geometría se encuentra problemas cuyo enunciado se parece a: encontrar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen ciertas propiedades. En el lenguaje de Descartes (1637) y posterior, ver notas históricas en Struik Lectures on analytic and projective geometry, este problema se traduce en: determinar el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen cierta fórmula. Muchos de estos problemas provienen de los griegos, sin embargo su solución tuvo que esperar al advenimiento de las coordenadas. Un ejemplo es el siguiente: Dadas cuatro rectas L_1, L_2, L_3, L_4 y un número positivo c encontrar los puntos P del plano de modo que

$$\frac{d(P, L_1)d(P, L_2)}{d(P, L_3)d(P, L_4)} = c.$$

Utilizando, coordenadas, representamos a la recta L_j por $a_jx + b_jy = c_j$ y $P = (x, y)$. Ademas recordamos que

$$d((x, y), L_j) = \frac{|a_jx + b_jy - c_j|}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}},$$

de manera que nuestro problema consiste en calcular el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$\frac{|a_1x + b_1y - c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \frac{|a_2x + b_2y - c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = c\frac{|a_3x + b_3y - c_3|}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \frac{|a_4x + b_4y - c_4|}{\sqrt{a_4^2 + b_4^2}}$$

Para relacionar esta igualdad con cónicas, consideramos cada una de las componentes conexas del complemento de la unión de las cuatro rectas. Cada vez que hacemos variar (x, y) en una componente conexa la positividad de cada funcion $a_ix + b_i - c_i$ es constante, de manera que ¨desaparece¨ el valor absoluto en los cuatro factores y nos queda que en dicha componente conexa (x, y) pertenece al conjunto solución una ecuación en (x, y) del tipo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + fy + h = 0.$$

Un objetivo de este curso es dibujar el conjunto de soluciones de una tal ecuación.

1.1.7 Descripción unificada de hipérbola, elipse y parábola

Deseamos dibujar y obtener una ecuación que represente el conjunto de puntos del plano de modo que la razón de la distancia a un punto fijo y a una recta fija es constante. Por tanto, disponemos de la data: e un número real positivo, L una recta y F un punto que no pertenece a L. Deseamos describir los puntos P en

$$\{P \in R^2 : \frac{d(P, F)}{d(P, L)} = e\}.$$

Para esto, gracias a Descartes podemos utilizar coordenadas, conviene elegir bien el sistema de coordenadas, la práctica o la lectura de problemas resueltos dá experiencia al respecto, en este caso, fijamos como eje de las x la recta perpendicular a L que pasa por F, denotemos por S el punto de intersección de dichas rectas, para fijar el orígen en la recta de las x, procedemos del modo siguiente, la función $f(P) = \frac{d(P,F)}{d(P,L)}$ transforma el segmento $\overline{SF}$ en números reales no negativos, es claro que $f(F) = 0, f(S) = +\infty$, además es un ejercicio sencillo mostrar que es inyectiva y contínua (ver final de esta subsección para su verificación), por tanto, por el teorema de Bolzano, existe un único punto O en el segmento $\overline{SF}$ de modo que

$$f(O) = \frac{d(O, F)}{d(O, L)} = e.$$

Este punto O lo fijamos como orígen de coordenadas y marcamos como eje y la recta perpendicular al eje x por O.
Ahora calculamos en función de la data

$$k := d(F, L), \quad e,$$

escribimos, $F = (c, 0), S = (-d, 0), d > 0$, de manera que

$$d(O,F) = c, d(O,L) = d, e = d(O,F)/d(O,L) = \frac{c}{d}, k = d(L,F) = d(L,O) + d(O,F) = d + c,$$

de modo que

$$c = ed, \ k = d + c = ed + d,$$

de donde $d = \frac{k}{1+e}, \ c = ed = \frac{ke}{1+e}$. Por tanto

$$F = (\frac{ke}{1+e}, 0), \quad S = (-\frac{k}{1+e}, 0).$$

Un punto $P = (x, y)$ pertenece a nuestro conjunto sii $d(P,F)/d(P,L) = e$. Escribiendo en función de la data, y eliminando las raíces cuadradas, recordar que la función $x \to x^2$ es inyectiva en el dominio de los números reales nonegativos, se obtiene

$$(x - \frac{ke}{1+e})^2 + y^2 = e^2(x + \frac{k}{1+e})^2$$

Operando se concluye: un punto (x, y) pertenece al conjunto asociado a la data e, L, F sii

$$y^2 = 2kex + (e^2 - 1)x^2.$$

Un ejercio algebraico permite deducir que la ecuación representa una elipse si $e < 1$, una hipérbola si $e > 1$ y una parábola para $e = 1$. El lector no impaciente esperá los próximos capítulos y entonces sin hacer cuentas verificará la afirmación.
A seguir verificamos que $f : \overline{SF} \to R$ es una función inyectiva. Para esto recordamos que los puntos del segmento $\overline{SF}$ son los puntos de la forma $P_t = tF + (1-t)S, \ 0 \leq t \leq 1$. Como

$$d(P_t, F) = \|P_t - F\| = \|(1-t)F + (1-t)S\| = \|(1-t)(S-F)\| = (1-t)\|S-F\|$$

puesto que $\|cX\| = c\|X\|$, para $c \geq 0, X \in R^n$ y $(1-t) \geq 0$ para $0 \leq t \leq 1$. Por otro lado,

$$d(P_t, L) = d(P_t, S) = \|P_t - S\| = \|t(F-S)\| = t\|F-S\|,$$

puesto que $t \geq 0$. De manera que

$$f(P_t) = \frac{d(P_t, F)}{d(P_t, S)} = \frac{(1-t)\|S_F\|}{t\|S-F\|} = \frac{1-t}{t}.$$

Por consiguiente, $f(P_0) = f(S) = \frac{1-0}{0} = \infty$ y $f(P_1) = f(F) = \frac{1-1}{1} = 0$. f es inyectiva, puesto que si $f(P_t) = f(P_s)$, entonces $\frac{1-t}{t} = \frac{1-s}{s}$ simplificando, resulta $t = s$, de esto, $P_t = P_s$.

De acuerdo al libro de Coxeter, la presentacion de las conicas a partir de la data de punto, recta y número se debe a Manaecmio 340 años antes de Jesucristo. Papo de Alejandria en el siglo cuatro despues de Jesucristo demostro que los conjuntos definidos por Manaecmio son realmente conicas. Finalmente, con el advenimiento de las coordenadas en el 1600 aparece esta nueva demostración.

1.1.8 Donde vamos

El lector habrá notado que después de desarrollar los cálculos y simplificaciones necesarias, la ecuación de las cuatro cuádricas que hemos analizado es siempre del tipo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + fx + gy + h = 0.$$

La pregunta que surge es: si consideramos una ecuación de este tipo y dibujamos su conjunto solución, ¿resulta el mismo un dibujo de los cuatro ya conocidos o aparece algun otro dibujo nuevo? Por lo pronto, aparece un dibujo nuevo, puesto que si consideramos la ecuacón en incognitas (x, y)

$$(ax + by - c)(rx + ty - s) = 0$$

donde, $(a, b) \neq (0, 0), (r, t) \neq (0, 0)$ el dibujo es la unión de dos rectas. Entonces, surge la duda, habrá otros dibujos. La respuesta es no, justificar esta respuesta es el trabajo de los próximos capítulos.

1.2 Comentarios

El lector interesado en hacer otros ejercicios, encontrará una lista muy interesante en el libro de Rey Pastor, Santalo, Balanzat, Geometria Analitica, paginas 182-185.

Una conica queda determinada por cinco puntos, esto es,
si dos conicas coinciden en cinco puntos, entonces son iguales,
una demostracion de este hecho se encuentra en el libro de Rey Pastor Santalo pagina 177. A continuación de la demostración, los autores describen un metodo geometrico para construir una conica conociendo cinco puntos de la misma. El topico contiene un Teorema de Pascal, quien fundamenta el metodo. En el próximo capítulo bosquejaremos una demostracion de que dos conicas coinciden si tienen cinco puntos en común.

En las siguientes paginas internet, encontraran notas historicas, teoria, aplicaciones y hermosos dibujos de las conicas

http://www.wmatemam.eis.uva.es/ matpag/contenidos/conicas/marco_conicas.htm
http://www.apuntes.rincondelvago.com/secciones-conicas_1.html

1.3 Otro ejemplo

Este ejemplo es muy lindo para trabajarlo dibujando en computadoras. En un libro escrito por Rodriguez, Rezende, Cabri-geometre e a geometria plana, de nuestra biblioteca encontrara los detalles en lo referente a Cabri.

Dibujemos una circunferencia $C_{P,r}$ de centro P y radio r. Fijamos un punto D interior a la circunferencia. Ahora para cada punto Q en la circunferencia $C_{P,r}$ dibujamos una circunferencia C_Q que pasa por D y es tangente $C_{P,r}$ en el punto Q. Llamemos X_Q el centro de C_Q. Finalmente dibujamos el conjunto $\mathcal{F}$ de puntos X_Q variando Q en todos los puntos de la circunferencia $C_{P,r}$. La pregunta es: ¿cual es la estructura del conjunto $\mathcal{F}$? Como estamos estudiando conicas...adivine una respuesta posible.....
Notar que para cada D obtenemos un conjunto posiblemente distinto. Si escogemos $D = P$ el conjunto $\mathcal{F}$ resulta la circunferencia de centro P y radio $\frac{r}{2}$ como es facil convencerse haciendo un dibujo, si el dibujo no lo convence felicitaciones....vamos por muy buen camino.
La respuesta en el caso general es que $\mathcal{F}$ es una elipse cuyos focos son P, D y $2r =$radio de $C_{P,r}$.
A continuación bosquejamos una demostración.

Fijamos un sistema de coordenadas ortogonales con centro en P de manera que el punto D pertenece al semieje de las $x's$ positivas. Por ende $P = (0,0), D = (d,0)$ donde $0 \leq d < r$. Para simplificar los cálculos suponemos $r = 1$, de manera que $0 \leq d < 1$. Sea $E = (1,0)$.
El lector con conocimientos de geometría euclideana podrá justificar que

$$\mathcal{F} = \{X \in R^2 : d(X,D) = d(X, \frac{X}{\|X\|}) = \|X - D\| = \|X - \frac{X}{\|X\|}\|\}$$

Por consiguiente, como $\|X\| < 1$,

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{F} \quad \text{sii} \quad & \|X - D\| = 1 - \|X\| \quad \text{sii} \quad \|X - D\| + \|X\| = 1 \\ & \text{sii } X \text{ satisface } d(X,D) + d(X,(0,0)) = 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente los puntos del conjunto $\mathcal{F}$ son los puntos de la elipse de focos D, P y $2r = 1$. El caso general posee la misma estructura lógica.
De la igualdad $\|X - D\| = 1 - \|X\|$ el lector deducirá la ecuación de la elipse.
El lector verificará que $\frac{D+E}{2}, \frac{D-E}{2}$ pertenecen a $\mathcal{F}$.
El lector verificará que el punto medio del segmento $\overline{\frac{D+E}{2}, \frac{D-E}{2}}$ es el punto $\frac{D}{2}$. De manera que el centro de la elipse es.....

Ahora buscamos los puntos en la recta $\{(\frac{d}{2}, y), y \in R\}$ que pertenecen a $\mathcal{F}$. Para esto debemos resolver la ecuación en y, $\|(\frac{d}{2}, y) - (d,0)\| = 1 - \|(\frac{d}{2}, y)\|$.
El lector aguerrido, concluirá que sus soluciones son

$$y = \pm \frac{\sqrt{1-d^2}}{2}$$

de modo que los puntos $(\frac{d}{2}, \pm\frac{\sqrt{1-d^2}}{2})$ pertenecen a $\mathcal{F}$.

Con esto hemos calculado los extremos de los ejes de la elipse, de manera que la ecuacion de la elipse es

$$4(x-\frac{d}{2})^2 + \frac{4y^2}{(1-d^2)} = 1$$

1.4 Ejemplo útil para evaluar procesos

Dibujemos una elipse E y fijemos una recta L. Para cada recta L_p paralela a L calculamos su intersección con la elipse. De manera que calculamos $E \cap L_p$. Dibujando, o algebraicamente el lector mas aguerrido, encontramos que dicha intersección tiene tres posibilidades. El conjunto vacío, es un conjunto de un punto, es un conjunto de dos puntos. Cada vez que la intersección es no vacía dibujemos el punto medio del segmento cuyos extremos son los de la intersección. La pregunta es: ¿que dibujo obtenemos? La respuesta es:
Sea L_0 la paralela a L por el centro de la elipse, escribamos $L_0 \cap E = \{M, N\}$, el conjunto es el segmento $\overline{MN}$.
Una demostración de este hecho la puede hacer el lector si recuerda que las rectas paralelas a la recta $y = mx + k$, son las rectas $y = mx + h, h \in R$. si prefiere pregunte al docente o consulte el libro de Rey Pastor Santalo página 96.

Para evaluar procesos, reemplaza la elipse por una hiperbola, el resultado es el mismo. Los detalles los encontrará en página 103.

Para evaluar procesos, reemplaza, hiperbola por parabola y consulta el libro en página.