

COMPLEMENTOS DE ALGEBRA, CAP. 2

PROF. DR. JORGE VARGAS

1. ECUACIONES CUADRÁTICAS

1.1. Ecuaciones en dos variables. Para cada data a, b, h, g, f, c de números reales que satisface

$$A := \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

estudiamos la naturaleza del conjunto

$$\{(x, y) \in R^2 : ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0\}.$$

Se tiene el siguiente,

Teorema 1. *Este conjunto puede ser vacío. Si es distinto del conjunto vacío es uno de: elipse, hipérbola, parábola, unión de dos rectas, una recta, un punto.*

La estrategia de demostración probablemente se debe a Lagrange o sus antecesores es la siguiente: Escribimos posibles ejemplos y luego por medio de una transformación afín mostramos que el conjunto solución que estamos estudiando es el transformado de uno de los ejemplos. Al resolver casos prácticos un modo de proceder es imitar los pasos de la demostración. Por ende, estudiar esta demostración es importante.

Ejemplos de cada situación son:

$$\{(u, v) : u^2 + v^2 = -1\} = \{au^2 + bv^2 = -d^2, a > 0, b > 0, d > 0\} = \emptyset$$

$$\{(u, v) : \frac{u^2}{r^2} + \frac{v^2}{t^2} = 1, r > 0, t > 0\} = \text{Elipse.}$$

$$\{(u, v) : \frac{u^2}{r^2} - \frac{v^2}{t^2} = 1, r > 0, t > 0\} = \text{Hiperbola.}$$

$$\{(u, v) : v = au^2 + bu + c, a \neq 0\} = \text{Parábola.}$$

$$\{(u, v) : (ax + by - c)(rx + ty - s) = 0\} = \text{Unión de dos rectas.}$$

$$\{(u, v) : (u - r)^2 + (v - s)^2 = 0\} = \{(r, s)\} = \text{Punto.}$$

Para cada conjunto $\{(x, y) : \dots\}$ construiremos una función afín $\Psi : R^2 \rightarrow R^2$ de modo que

$$\{(u, v) : \Psi(u, v) \in \{(x, y) : ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0\}\}$$

es uno de los conjuntos listados en el párrafo anterior.

Primeramente recordamos el concepto de función afín. Dos ejemplos de función afín son:

Traslación por un vector $v \in R^n$. Esta es la función

$$L_v(x) = x + v, \text{ para todo vector } x \in R^n.$$

Una traslación L_v es una función biyectiva, cuya inversa es la traslación L_{-v} , como el lector diligente verificará.

Transformación lineal definida por una matriz A cuadrada de n filas y n columnas, es la función

$$T_A(x) = Ax$$

para todo vector $x \in R^n$ pensado como vector columna.

Recordemos que en álgebra lineal se demostró que la transformación lineal es biyectiva si la matriz A es invertible.

En caso de ser T_A biyectiva, su función inversa es $T_{A^{-1}}$.

Definición, una *transformación afín* en R^n es una función biyectiva de R^n en sí mismo que resulta de componer transformaciones lineales con traslaciones. De manera que una transformación afín es una función del tipo

$$\Psi(x) = Ax + v$$

Donde A es una matriz invertible y v un vector en R^n .

Para el caso R^2 sus funciones afines son las del tipo

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & h \\ k & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + hy + u \\ kx + by + v \end{pmatrix}$$

Donde, $ab - hk \neq 0$.

Ejercicio, mostrar que la función inversa de una transformación afín es una transformación afín. Ayuda, un cálculo permite verificar que la función inversa de $x \rightarrow Ax + v$, es la función $y \rightarrow A^{-1}y - A^{-1}v$.

Un ejercicio más demandante en cálculo es mostrar que una transformación afín transforma elipses en elipses, rectas en rectas, hipérbolas en hipérbolas, parábolas en parábolas. Esto es, si Z es una elipse, hip..., entonces el conjunto

$$\Psi(Z) = \{\Psi(x) : x \in Z\}$$

es una elipse, hip...

Ejercicio, la transformación afín $\Psi(x, y) = (2x, 3y)$ transforma circunferencias con centro en $(0, 0)$ en elipses.

Comenzamos a demostrar el teorema

Separamos en varios casos.

Si $a = b = 0$, como la matriz A es no nula, se tiene que $h \neq 0$. La ecuación a estudiar es entonces $2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$.

Subcaso $f = g = 0$. Como $h \neq 0$, la ecuación $2hxy + c = 0$ es equivalente a $xy = -\frac{c}{2h}$. Si $c = 0$ la ecuación se transforma en $xy = 0$ cuyo conjunto solución es la unión del eje de las "x" con el eje de las "y". Esto es, el conjunto solución es $\{(x, y) : y = 0\} \cup \{(x, y) : x = 0\}$. Cuando $c \neq 0$, escribimos $-\frac{c}{2h} = r^2, -r^2$ con $r > 0$ de acuerdo a que $-\frac{c}{2h}$ es positivo o negativo. La ecuación a resolver es entonces $xy = \epsilon r^2$, donde $\epsilon = \pm 1$. Hacemos $x := u + v, y := u - v$, de manera que la ecuación es ahora $u^2 - v^2 = \epsilon r^2$. La ecuación resulta en $\frac{u^2}{r^2} - \frac{v^2}{r^2} = 1$ si $\epsilon = 1$ y $-\frac{u^2}{r^2} + \frac{v^2}{r^2} = 1$ si $\epsilon = -1$. De modo que si definimos $\Psi(u, v) = (u + v, u - v)$ cuando $\epsilon = 1$ y $\Psi(u, v) = (v - u, v + u)$ cuando $\epsilon = -1$, cada vez que $a = b = f = g = 0$ y $c \neq 0$, se tiene

$$\{(u, v) : \Psi(u, v) \in \{(x, y) \in 2hxy + c = 0\}\} = \{(u, v) : \frac{u^2}{r^2} - \frac{v^2}{r^2} = 1\} = \text{hipérbola}$$

Subcaso $a = b = 0, g \neq 0$ ó $f \neq 0$. En esta situación se propone $x := u + r, y := v + s$ con r, s a determinar, se reemplaza y se fuerza a que el coeficiente de u y el coeficiente de v resulten igual a cero, para entonces llevar la determinación del conjunto al subcaso anterior. Procedamos, $2h(u+r)(v+s) + 2g(u+r) + 2f(v+s) + c = 2huv + u(2hs + 2g) + v(2hr + 2f) + (2hrs + 2gr + 2fs)$. Al forzar que tanto el coeficiente de u como el de v es cero, se obtienen las ecuaciones en r, s

$$2hr + 2f = 0 \quad 2hs + 2g = 0$$

Por tanto,

$$s = -\frac{g}{h}, \quad r = -\frac{f}{h}$$

De manera que si definimos

$$\Psi : R^2 \rightarrow R^2 \text{ por } \Psi(u, v) = (u - \frac{f}{h}, v - \frac{g}{h}),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & \{(u, v) : \Psi(u, v) \in \{2hxy + 2gx + 2fy + c = 0\}\} = \\ & = \{(u, v) : 2huv + (2h\frac{gf}{h^2} - \frac{2gf}{h} - \frac{2fg}{h} + c) = 0\} = \\ & = \{(u, v) : 2huv = -c + 2\frac{gf}{h}\} \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que el conjunto solución de la ecuación $2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ es una hipérbola o la unión de dos rectas.

Ejercicios: a) Mostrar que las dos funciones Ψ definidas anteriormente son biyectivas y calcular sus inversas.

b) Escribir condiciones en h, g, f, c de manera de poder decidir cuando el conjunto solución de $2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ es una hipérbola o unión de dos rectas. Respuesta: es hipérbola sii $c - \frac{2gf}{h} \neq 0$, es unión de dos rectas sii $c - \frac{2gf}{h} = 0$.

Caso $A \neq 0$ y $a \neq 0$ ó $b \neq 0$.

Estudiaremos el caso $a \neq 0$.

El caso $a = 0, b \neq 0$ se reduce al caso $a \neq 0$ por medio del cambio de variables $x := y, y := x$ En lenguaje moderno, definimos $\Phi(x, y) = (y, x)$ entonces se tiene

$$\begin{aligned} & \{(x, y) : \Phi(x, y) \in \{(x, y) : 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0\}\} = \\ & = \{(x, y) : bx^2 + 2hxy + 2gy + 2fx + c = 0\}. \end{aligned}$$

Ejercicio: Demostrar que Φ es biyectiva y calcular su función inversa.

El objetivo es llevar la ecuación a una del tipo

$$lu^2 + \tilde{l}v^2 + \tilde{l} = 0$$

para esto completamos cuadrados y hacemos cambios de variables.

Como $a \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in R^2 : ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0\} = \\ & = \{(x, y) \in R^2 : a(ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c) = 0\}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} & a^2x^2 + 2haxy + 2gax + aby^2 + 2fay + ca = \\ & = (ax + hy + g)^2 - h^2y^2 - g^2 - 2hyg + aby^2 + 2fay + ca = \end{aligned}$$

$$= (ax + hy + g)^2 + (ab - h^2)y^2 + 2y(af - hg) + ca - g^2.$$

Para continuar, consideramos dos subcasos, a saber,

$$ab - h^2 \neq 0, \quad ab - h^2 = 0.$$

Cuando $a \neq 0$ y $ab - h^2 \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in R^2 : a(ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c) = 0\} = \\ & = \{(x, y) \in R^2 : (ab - h^2)a(ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c) = 0\}. \end{aligned}$$

Por tanto, haciendo el mismo truco con que logramos a^2x^2 , nada mas que ahora multiplicamos por $ab - h^2$ para lograr que un cuadrado acompañe y^2 llegamos a

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in R^2 : (ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c) = 0\} = \\ & = \{(x, y) \in R^2 : (ab - h^2)(ax + hy + g)^2 + (ab - h^2)^2y^2 + \\ & \quad + 2y(ab - h^2)(af - hg) + (ab - h^2)(ca - g^2) = 0\}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} & (ab - h^2)(ax + hy + g)^2 + (ab - h^2)^2y^2 + 2y(ab - h^2)(af - hg) + (ab - h^2)(ca - g^2) \\ & = (ab - h^2)(ax + hy + g)^2 + ((ab - h^2)y + (af - hg))^2 - (af - hg)^2 + (ab - h^2)(ca - g^2). \end{aligned}$$

Si procedemos de manera clásica, hacemos lo siguiente: definimos

$$\begin{aligned} u &:= ax + hy + g, \quad v := (ab - h^2)y + (af - hg), \\ R &:= (af - hg)^2 - (ab - h^2)(ca - g^2) \end{aligned}$$

de modo que, bajo las hipótesis $a \neq 0, ab - h^2 \neq 0$, nuestra ecuación se transforma en

$$(ab - h^2)u^2 + v^2 = R$$

Subcaso: $R = 0$ y $ab - h^2 > 0$, la ecuación $(ab - h^2)u^2 + v^2 = 0$ tiene como única solución $u = v = 0$, por ende, la ecuación original tiene por única solución el punto de coordenadas

$$x = \frac{-g - h \frac{hg - af}{ab - h^2}}{a}, \quad y = \frac{hg - af}{ab - h^2}.$$

Si $R = 0$, y $ab - h^2 < 0$, escribimos $ab - h^2 = -d^2$ y aplicamos diferencia de cuadrados, obteniendo

$$(du + v)(-du + v) = 0$$

que es la unión de dos rectas, por tanto el conjunto solución es la unión de dos rectas.

El lector diligente escribirá en coordenadas (x, y) la ecuación de ambas rectas. Muy fácil, en $v = du$, ó $v = -du$ reemplazar, d, v, u por sus valores.

Nos resta analizar 1) $a \neq 0$, y $ab - h^2 \neq 0$, y $R \neq 0$ y el caso 2) $a \neq 0$, y $ab - h^2 = 0$

Continuamos con el caso $a \neq 0$, y $ab - h^2 \neq 0$, y $R \neq 0$

$$R > 0, \Rightarrow R = d^2, d > 0, ab - h^2 > 0, \Rightarrow ab - h^2 = p^2, p > 0, \Rightarrow p^2u^2 + v^2 = d^2 \Rightarrow \frac{u^2}{(\frac{d}{p})^2} + \frac{v^2}{d^2} = 1, \text{ Elipse}$$

$$R > 0, \Rightarrow R = d^2, d > 0, ab - h^2 < 0, \Rightarrow ab - h^2 = -p^2, p > 0, \Rightarrow -p^2u^2 + v^2 = d^2 \Rightarrow -\frac{u^2}{(\frac{d}{p})^2} + \frac{v^2}{d^2} = 1, \text{ Hipérbola}$$

$$R < 0, \Rightarrow R = -d^2, d > 0, ab - h^2 > 0, \Rightarrow ab - h^2 = p^2, p > 0, \Rightarrow p^2u^2 + v^2 = -d^2, \text{ Conjunto vacío}$$

$R < 0, \Rightarrow R = -d^2, d > 0, ab - h^2 < 0, \Rightarrow ab - h^2 = -p^2, p > 0, \Rightarrow -p^2 u^2 + v^2 = -d^2 \Rightarrow \frac{u^2}{(\frac{d}{p})^2} - \frac{v^2}{d^2} = 1$, Hipérbola

Análisis moderno de la ecuación, se define

$\Psi : R^2 \rightarrow R^2$, por $\Psi(u, v) = (x, y)$ si $u = ax + hy + g, v = y(ab - h^2)y + (af - hg)$

Esto es,

$$\Psi(u, v) = \left(\frac{u - g - h \frac{v - (af - hg)}{ab - h^2}}{a}, \frac{v - (af - hg)}{ab - h^2} \right)$$

De manera que

$$\{(u, v) : \Psi(u, v) \in \{ax^2 + \dots\}\} = \{(u, v) : (ab - h^2)u^2 + v^2 = R\}$$

ahora se procede como en el cálculo anterior.

Finalmente, analizamos el caso $a \neq 0, ab - h^2 = 0$. Entonces

$$\{(x, y) : ax^2 + \dots = 0\} = \{(x, y) : (ax + hy + g)^2 + 2y(af - hg) + ca - g^2 = 0\}$$

Haciendo $u := ax + hy + g, v := y$ resulta $u^2 + 2(af - gh)v + ca - g^2 = 0$ lo cual es una parábola si $af - gh \neq 0$. Cuando $af - gh = 0$, resulta $u^2 = g^2 - ca$ lo cual es el conjunto vacío para $g^2 - ca < 0$, una recta si $g^2 - ca = 0$ y la unión de dos rectas si $g^2 - ca > 0$.

Ejercicio, en la notación de anterior, esto es, $a \neq 0, ab - h^2 = 0$, si $af - gh = 0$, y $g^2 - ca = 0$, verificar que la recta tiene por ecuación $ax + hy + g = 0$. Si $af - gh = 0, g^2 - ca > 0$, verificar que las rectas tienen por ecuación $ax + hy + g = \pm \sqrt{g^2 - ca}$.

Para el caso, $a \neq 0, ab - h^2 = 0$, la función $\Psi(u, v) = (\frac{u - hv - g}{a}, v)$ satisface,

$$\begin{aligned} \{(u, v) : \Psi(u, v) \in \{(x, y) : ax^2 + \dots + c = 0\}\} \\ = \{(u, v) : u^2 + 2(af - gh)v + ac - g^2 = 0\}. \end{aligned}$$

este último conjunto es una parábola si $af - gh \neq 0$; el conjunto vacío si $af - gh = 0$ y $g^2 - ac < 0$; una recta si $af - gh = 0$ y $g^2 - ac = 0$; la unión de dos rectas paralelas si $af - gh = 0$ y $g^2 - ac > 0$;

Ejercicio: inventar ejemplos de ecuaciones $ax^2 + \dots + c = 0$ y deducir, siguiendo los pasos de la demostración que corresponda, que tipo de dibujo es su conjunto solución.

Ejercicio: Resumen de lo demostrado, su trabajo es escribir cada afirmación, en función los coeficientes, $a, b, \dots$: Cuando $a = b = 0$, el dibujo es una hipérbola o la unión de dos rectas. Cuando $a \neq 0$ y $ab - h^2 = 0$ se obtiene el vacío, una recta, la unión de dos rectas paralelas o una parábola. Cuando $a \neq 0$ y $ab - h^2 \neq 0$ de acuerdo a la positividad de $ab - h^2$ y R se obtiene una elipse, punto, hipérbola, unión de dos rectas, conjunto vacío.

Ejercicio: Para $a \neq 0$ y $ab - h^2 \neq 0$ hemos definido el número $R = (af - hg)^2 - (ab - h^2)(ca - g^2)$. Mostrar que

$$R = -a \det \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}.$$

En efecto, el lado izquierdo es igual a

$$a^2 f^2 + h^2 g^2 - 2afgh - a^2 cb + abg^2 + h^2 ca - h^2 g^2 = a^2 f^2 - 2afgh - a^2 cb + abg^2 + h^2 ca$$

Mientras que el lado derecho, desarrollando el determinante por la primera columna, es igual a

$$-a \left[a \det \begin{pmatrix} b & f \\ f & c \end{pmatrix} - h \det \begin{pmatrix} h & f \\ g & c \end{pmatrix} + g \det \begin{pmatrix} h & b \\ g & f \end{pmatrix} \right] =$$

$$= -a[a(bc-f^2)-h(hc-gf)+g(hf-gb)] = -a^2bc+a^2f^2+ah^2c-ahgf-aghf+ag^2b.$$

Comparando, monomios se concluye el ejercicio.

Preguntas: 1) Si en lugar de considerar polinomios de segundo grado en x, y analizamos polinomios de grado 3, 4, $\dots$ ¿Se obtiene una clasificación tan nítida de los dibujos? La respuesta es si, este problema se lo estudia en geometría algebraica de curvas.

2) Si consideramos polinomios de grado dos en 3, 4, o más variables, ¿se obtiene una clasificación? Respuesta, si, es el objeto de los próximos temas. De ahora en mas, nos dedicamos a estudiar el problema 2), el objetivo final es buscar nuevas variables $u_1, \dots, u_n$ de manera que la ecuación en $x_1, \dots, x_n$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{ij} x_i x_j + \sum d_k x_k + \alpha = 0$$

se reduce (transforma) en una de las ecuaciones

$$\lambda_1 u_1^2 + \dots + \lambda_n u_n^2 = c \quad \text{ó} \quad \lambda_1 u_1^2 + \dots + \lambda_{n-1} u_{n-1}^2 + \gamma_n u_n = \tilde{c}$$

1.2. Producto escalar en R^n . Definición: Producto escalar en R^n es la función

$$\langle, \rangle: R^n \times R^n \longrightarrow R$$

dada por la fórmula

$$\langle (c_1, \dots, c_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n.$$

Ejercicio: inventar seis vectores en R^2 y calcular el producto escalar de uno por el otro.

Propiedades: