

1. Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto X . Demostrar las siguientes afirmaciones.

- a) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.
- b) $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.
- c) $A \cap (B - A) = \emptyset$ y $A \subseteq B \implies B = A \cup (B - A)$.
- d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- f) $A \subseteq B \cap C \implies A \subseteq B \wedge A \subseteq C$.
- g) $A \cup B \subseteq C \implies A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.
- h) $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.
- i) $A - B = A \cap B^c$.
- j) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Leyes de De Morgan)

2. Sean $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Demostrar las siguientes afirmaciones.

- a) $A \times C \subseteq B \times D \iff A \subseteq B \wedge C \subseteq D$.
- b) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
- c) $(A \times C)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times C^c)$.

3. Sean A_1, \dots, A_n subconjuntos de un conjunto X .

- a) Probar que $A_1 \cap (A_2 \cup \dots \cup A_n) = (A_1 \cap A_2) \cup \dots \cup (A_1 \cap A_n)$.
- b) ¿Es cierto que $A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq A_2 \cap A_{n-1}$?
- c) ¿Es verdad que $A_1 \cup A_2 \subseteq (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cup \dots \cup A_n)$?

4. Sea $f : X \rightarrow Y$, $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Probar:

- a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
 - b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Además, f inyectiva $\implies f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
 - c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
 - d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
 - e) Si $A \subseteq B$ entonces $f(A) \subseteq f(B)$ y si $C \subseteq D$ entonces $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.
- Demostrar también:
- f) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ (y se cumple la igualdad si f es inyectiva).
 - g) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ (y se cumple la igualdad si f es suryectiva).
 - h) $f^{-1}(C^c) = [f^{-1}(C)]^c$.
 - i) Si f es inyectiva entonces $f(A^c) \subseteq [f(A)]^c$.
 - j) Si f es suryectiva entonces $[f(A)]^c \subseteq f(A^c)$.

Además:

- k) En todos los items donde probé alguna contención, busque ejemplos de funciones que muestren que a veces no se cumple la igualdad.
Finalmente:
 - l) f es inyectiva si y sólo si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$. ($\text{id}_X : X \rightarrow X$ es la función identidad de X , esto es, $\text{id}_X(x) = x \forall x \in X$.)
 - m) f es suryectiva si y sólo si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = \text{id}_Y$.
 - n) **Corolario:** f es biyectiva si y sólo si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$ y $f \circ g = \text{id}_Y$.

5. a) Probar que si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ y $x \notin \mathbb{N}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < x < n$.
 b) Probar que si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.
 c) $A \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si $[x, y] \subseteq A$ para todo $x, y \in A$.
 d) Probar que $x \in (0, 1)$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$.