DE LOS GRUPOS DE LIE A LOS GRUPOS CUÁNTICOS

NICOLÁS ANDRUSKIEWITSCH

Contents

Partially supported by Ag. Cba. Ciencia, CONICET, Foncyt and Secyt (UNC)
.

Estas notas corresponden al curso de tres clases que dicté en la "Primeira Escola de Verão em História Conceitual da Matemática", Brasilia, febrero de 2008. El tema del curso es la evolución del rol jugado por los objetos combinatorios conocidos como diagramas de Dynkin en diversos problemas de clasificación. No representan un trabajo de investigación original en historia de la matemática sino una selección de tópicos, motivada por mi propia curiosidad, que he estudiado en las obras de referencia citadas a continuación. Una vez más, agradezco a Dominique Flament por la cordial invitación que ha servido, entre otras cosas, de incentivo para la redacción de estas modestas líneas.

Referencias

[1] A. Borel. *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups.* A. M. S. (2001).

[2] N. Bourbaki. Notes historiques. *Groupes et algèbres de Lie. Ch. 1-2-3, 4-5-6.*

[3] P. Cartier. Postface. En C. Chevalley, *Classification des Groupes Algébriques Semi-simples.* Springer.

[4] J. Gallian. *The Search for Finite Simple Groups.* Math. Magazine, Vol. 49 (1976), pp. 163-180.

[5] T. Hawkins. *Emergence of the Theory of Lie Groups.* Springer (2000).

1. Introducción

1.1. **Grupos y simetrías.** Uno de los conceptos básicos de la matemática es la noción de *equivalencia* $\equiv$ relación reflexiva, simétrica y transitiva.

Dado un conjunto X munido de una relación de equivalencia $\sim$, suele ser importante contar con invariantes de $\sim$, esto es, funciones en X invariantes en las clases de $\sim$.

Si se considera el conjunto G de todas las biyecciones de X en sí mismo invariantes por $\sim$ (las *simetrías* de $\sim$) vemos que G es estable por *composición* y por tomar *inversa*. En otras palabras, G es un *grupo*.

Por otro lado, sean G un grupo y X un conjunto munido de una *acción* de G:

$$\cdot : G \times X \to X.$$

Entonces se tiene una relación de equivalencia en X: $x \sim y \iff$ existe $g \in G : g \cdot x = y$.

Las variadas aplicaciones de los grupos en las distintas áreas de la matemática se producen a través de sus acciones en diversos conjuntos munidos de estructuras adicionales.

Ejemplo:

• $X = \mathbb{A}$ = conjunto de números algebraicos.

• $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{A}, \mathbb{Q})$ = conjunto de biyecciones de $\mathbb{A}$ que preservan suma y producto.

• $f \in \mathbb{Q}[T]$ un polinomio mónico irreducible.

• $\mathcal{O}$ = conjunto de raíces en $\mathbb{A}$ de f.

El grupo de Galois de f es el conjunto de biyecciones de $\mathcal{O}$ que provienen de G. El estudio de las raíces de f se reduce al estudio del grupo de Galois de f.

Este ejemplo fue considerado por Evariste Galois en 1828, en su explicación de la imposibilidad de resolver ecuaciones de grado cinco por radicales. La introducción por Galois de la noción de grupo podría ser considerada, junto con el descubrimiento de geometrías no euclideanas por Lobachevski y Bolyai, como el hito que señala el inicio de la matemática moderna.

Los ejemplos fundamentales de grupo son:

• Dado un conjunto X, el grupo $\mathbb{S}_X$ de todas las biyecciones de X en sí mismo. Si $X = \{1, \dots, n\}$, se denota simplemente $\mathbb{S}_n$.

• El grupo $GL(n, \Bbbk)$ de matrices $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo $\Bbbk$.

Una *representación* de un grupo G es un morfismo de grupos $\rho : G \to GL(n, \Bbbk)$. Se tienen equivalencias entre:

• acciones de G en X y morfismos de grupos $\rho : G \to \mathbb{S}_X$;

• acciones *lineales* de G en $\Bbbk^n$ y representaciones $\rho : G \to GL(n, \Bbbk)$.

Tres aspectos fundamentales de la teoría de grupos están íntimamente relacionados:

$$\begin{tikzcd}
& \text{estructura de un grupo } G \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\text{acciones de } G \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{representaciones de } G
\end{tikzcd}$$

Algunas palabras clave: *Linearización. Conjugación. Inducción.*

En el caso de los grupos de Lie semisimples complejos, el estudio de estos aspectos está gobernado por ciertos objetos combinatorios descubiertos por W. Killing, codificados hoy en día por los llamados *diagramas de Dynkin*.

Los diagramas de Dynkin intervienen en

• Clasificación de grupos finitos de desplazamientos.

• Clasificación de grupos algebraicos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado (cualquier característica).

• Clasificación de grupos finitos simples.

• Clasificación de álgebras de Hopf.

Además aparecen en el estudio de

• Singularidades (y por su intermedio tienen relaciones con los poliedros regulares).

• Teoría de representaciones de álgebras asociativas de dimensión finita.

• Teoría de álgebras de conglomerado (*cluster algebras*).

El propósito de esta serie de charlas, a cargo de un lego de la historia de las matemáticas, es presentar la evolución de los distintos roles que los diagramas de Dynkin han jugado en problemas de clasificación.

2. Nacimiento de la teoría de Lie

La teoría de grupos y álgebras de Lie fue gestada por Sophus Lie en el invierno boreal 1873-4 y desarrollada en una serie de artículos, que culmina en la publicación de un tratado en 3 volumenes, en colaboración con Engel.

Hoy entendemos por *grupo de Lie* a un grupo munido de una estructura de variedad diferencial, tal que el producto y la inversión son transformaciones diferenciales. *Ditto* para grupos de Lie complejos, reemplazando 'diferencial' por 'analítico'. Sin embargo, Lie trabajaba con definiciones más informales. Luego de presentar los ejemplos más comunes de grupos de Lie, esbozaremos las motivaciones de Lie y sus principales resultados.

2.1. **Ejemplos de grupos de Lie.**

• Si V es un espacio vectorial (real o complejo), entonces $(V, +)$ es un grupo de Lie abeliano.

• Respecto de la multiplicación, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - 0$ es un grupo de Lie abeliano.

•Un producto de n copias de $\mathbb{C}^\times$ es también un grupo de Lie abeliano, llamado el toro n-dimensional.

• Los grupos de matrices inversibles $GL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{R})$.

Subgrupos cerrados de los anteriores:

• El grupo $SL(n, \mathbb{R})$ de matrices reales cuyo determinante es uno.

• El grupo $SL(n, \mathbb{C})$ de matrices complejas cuyo determinante es uno.

• El grupo de matrices inversibles triangulares superiores, y el subgrupo del mismo de matrices con 1's en la diagonal.

• El grupo ortogonal $O(n, \mathbb{C})$ (de matrices complejas inversibles que preservan una forma bilineal simétrica no degenerada). También:

• $SO(n, \mathbb{C}) = O(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C})$;

• $O(p, q)$ (grupo de matrices inversibles reales que preservan una forma bilineal simétrica no degenerada de signatura (p, q)).

• $SO(p, q) = O(p, q) \cap SL(n, \mathbb{R})$.

• El grupo simpléctico $Sp(n, \mathbb{C})$ (de matrices que preservan una forma bilineal antisimétrica no degenerada).

• El grupo de automorfismos de un álgebra de dimensión finita.

2.2. **Sophus Lie.** Sophus Marius Lie finaliza sus estudios de grado en Cristiania (Oslo) en 1865 pero decide devenir un matemático profesional dos años más tarde. Becado por el gobierno de Noruega viaja en 1869 a Berlín, donde conoce a Felix Klein, quien jugaría un papel muy importante en su vida y en el desarrollo de su obra.

En la primavera de 1870 viajan a París, donde entre otros encuentran a Camille Jordan, autor de *'Traité des substitutions et des équations algébriques'*, primera obra dedicada a la teoría de Galois; y a Gaston Darboux. En julio de 1870, debido a la guerra franco-prusiana, Klein debe regresar a Alemania, mientras que Lie– un fanático de las caminatas– decide regresar a Noruega ... luego de una excursión a pie a Italia.

Es detenido en el camino por autoridades francesas, quienes confunden sus papeles matemáticos con informes militares y sospechan que es un espía. Liberado por intercesión de Darboux, regresa a Noruega donde redacta sus nuevos descubrimientos (en parte obtenidos en prisión) y presenta su tesis doctoral en 1871. En 1872, la Asamblea Nacional de Noruega crea una cátedra de matemática para él, por lo que puede dedicarse de lleno a la investigación en los siguientes años. En 1874 comienza a publicar sus resultados en grupos de transformaciones (hoy grupos de Lie), principalmente en revistas noruegas. Hacia 1884 ya ha obtenido los principales resultados de la teoría, la cual es poco conocida por estar desperdigada en publicaciones de poca circulación– y en gran parte inédita.

Sus colegas Klein y Mayer (de la Universidad de Leipzig) le proponen que redacte un tratado y sugieren la ayuda del joven Friedrich Engel, quien viaja a Cristiania en 1884, donde permanece nueve meses junto a Lie. En 1886 Klein deja Leipzig por Göttingen y persuade a Lie que lo suceda; éste acepta para continuar la redacción del tratado junto a Engel, a la sazón en Leipzig. Los tres volúmenes ven la luz en 1888, 1890 y 1893. Lie recibe en Leipzig a numerosos estudiantes, muchos de ellos enviados desde Francia por Picard, Poincaré y Darboux. Sin embargo, el cúmulo de tareas docentes– muy superior al de Noruega– le provoca un colapso nervioso en 1889 del cual no se recuperó nunca por completo. En 1898 regresa por fin a Cristiania, donde fallece en Febrero de 1899.

2.3. **Motivaciones de Lie.** Según Hawkins, podemos distinguir dos tipos de motivaciones en el pensamiento de Lie:

$$\text{Orígenes de la teoría de Lie} \begin{cases} \text{Geométricos} \\ \\ \text{Analíticos} \end{cases}$$

Los orígenes geométricos comprenden una serie de reflexiones y trabajos de Lie, en parte junto a Klein.

Estas reflexiones desembocan en la necesidad de considerar 'grupos continuos' (por oposición a los grupos discretos en teoría de Galois).

2.3.1. *Complejos de líneas.* En 1869, Lie escribió un trabajo sobre complejos de líneas. El conjunto $\mathfrak{L}$ de líneas en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ es un espacio geométrico cuyos elementos pueden ser parametrizados así. Si $x = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ e $y = (y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$ son puntos distintos de una recta ℓ, entonces las coordenadas de Plücker de

ℓ son $p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$. De modo que $\mathfrak{L}$ se identifica con los puntos de $\mathbb{P}^6$ que satisfacen la ecuación $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$. Un complejo de líneas es un conjunto de rectas cuyas coordenadas satisfacen además una relación homogénea adicional.

Lie estudió un complejo de líneas $\mathfrak{T}$ asociado a un tetrahedro Δ. La originalidad de su enfoque estriba en que consideró para ello el conjunto $\mathfrak{G}$ de todas las transformaciones proyectivas de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ que fijan los vértices de Δ. Resulta que $\mathfrak{G}$ es un grupo abeliano 'de 3 parámetros', que actúa en forma simplemente transitiva en los puntos de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ en posición general. El estudio de las órbitas de $\mathfrak{G}$ permite a Lie obtener resultados geométricos sobre el complejo $\mathfrak{T}$.

Es esencial para las demostraciones que $\mathfrak{G}$ es conmutativo.

2.3.2. *W-curvas.* Previo a su encuentro con Lie en Berlín, Felix Klein (1848-1925) había publicado también un trabajo sobre complejos de línea. Klein fue estudiante de Plücker (1801-1868) en Bonn y luego de Clebsch (1833-1872) en Göttingen. En esta última universidad había asistido a seminarios de Jordan sobre grupos y teoría de Galois.

En Berín, Klein y Lie entraron en contacto en función de sus intereses comunes e iniciaron una provechosa colaboración. En dos artículos publicados en Comptes Rendues (1870), definen las así llamadas W-curvas *a partir* de un grupo abeliano 'de 1 parámetro' $\mathfrak{H}$.

En notación actual, $\mathfrak{H} = \{\exp \lambda A : \lambda \in \mathbb{C}\}$, donde A es una matriz 4×4; Klein y Lie explican por primera vez que el grupo 'continuo' $\mathfrak{H}$ se obtiene a partir de la 'transformación infinitesimal' $x \mapsto x + dx$, con $dx = Ax\, d\lambda$. En efecto, $\mathfrak{H}$ consta de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales asociado a la transformación infinitesimal.

Si A es diagonalizable, $\mathfrak{H}$ resulta un subgrupo del grupo $\mathfrak{G}$ asociado al tetrahedro cuyos vértices son los autovectores de A.

Desarrollan más ejemplos de familias de objetos geométricos obtenidas a partir de grupos abelianos 'continuos' de 1, 2 o 3 parámetros en otros trabajos, uno de ellos publicado en Math. Annalen (1871) y otro inédito. En el manuscrito inédito, Klein plantea que, para describir todas las configuraciones posibles en el espacio de esta forma, se debe resolver la clasificación de todos los grupos 'continuos lineales abelianos que actúan en el espacio'.

2.3.3. *Grupos continuos como análogos de grupos de Galois para ecuaciones diferenciales.* Lie se interesó en otros problemas geométricos emanentes del complejo de líneas $\mathfrak{T}$, que pudo expresar en términos de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden

$$f(z,x,y,p,q)=0, \quad p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

El grupo $\mathfrak{G}$ actúa en el conjunto de soluciones de la ecuación, lo que permite a Lie resolverla.

Klein, enterado de este método de Lie, observó la analogía entre el mismo y los trabajos de Abel sobre ecuaciones polinomiales abelianas– cuyos grupos de Galois son abelianos.

Lie acoge con entusiasmo esta idea, compatible con sus investigaciones.

2.3.4. *El programa de Erlangen.* En 1871, mientras Lie estudiaba las relaciones entre objetos geométricos y sistemas de ecuaciones diferenciales, Klein maduraba sus reflexiones sobre geometrías no euclideanas, que culminan en el programa de Erlangen. En síntesis, el mismo postula que 'una geometría consiste en una variedad munida de un grupo continuo de transformaciones'. Este punto de vista– enriquecido por el intercambio con, y por los trabajos de, Lie, por ejemplo en la 'correspondencia entre rectas y esferas'– implica implícitamente el problema de clasificación de los grupos continuos lineales que actúan en el espacio n-dimensional. Sin embargo, ni Klein ni Lie prosiguen esta dirección; es necesario aún que Lie absorba otro ingrediente fundamental para su teoría.

2.3.5. *La teoría de integración de Jacobi.* El ingrediente fundamental que permitiría a Lie manejar los grupos 'continuos' no conmutativos surge de los trabajos de Jacobi sobre integración de una ecuación diferencial parcial en la función incógnita z

$$F\big(x_1,\dots,x_n,\frac{\partial z}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\big)=0. \tag{1}$$

Para estudiar (1), Jacobi consideró funciones en $2n$ variables $x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_n$. El *corchete de Poisson* de dos funciones holomorfas u y v es

$$(u,v):=\sum_{1\le i\le n}\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}. \tag{2}$$

El corchete (2) es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi:

$$((u,v),w)+((w,u),v)+((v,w),u)=0.$$

Jacobi observa que la integración de (1) se simplifica si existe una función u tal que $(F,u) = 0$; cuantas más funciones con esta propiedad, tanto más simple es la integración de (1). Notemos que, si v es otra función que satisface $(F,v) = 0$, también (u,v) lo hace, debido a la identidad de Jacobi.

Esto lleva a la búsqueda de familias de funciones $u_1,\dots,u_s$ tales que $(u_i,u_j) = \Omega_{ij}(u_1,\dots,u_s)$, con Ω_{ij} analítica en s variables. En particular, si $(u_i,u_j) = \sum_k c_{ij}^k(x_1,\dots,x_n)u_k$, entonces los u_i's generan un álgebra de Lie– que Lie llamaba un *grupo de funciones*.

2.3.6. *Los grupos continuos de transformaciones.* Los grupos continuos finitos (por depender de un número finito de parámetros) o de transformaciones considerados por Lie eran 'locales'. Veamos cómo los concebía. Sean U un abierto de $\mathbb{C}^n$ y V un entorno del origen en $\mathbb{C}^p$. Para Lie, un grupo continuo G es un conjunto de transformaciones locales de U parametrizadas por V. Esto es, existen funciones holomorfas $f_1,\dots,f_n$ en $U\times V$ tales que

$$x \xmapsto{\;g_a\;} f(x,a),$$

$a\in V$, es una transformación local de U– lleva un abierto de U en otro (que depende de a). Además existen funciones holomorfas $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ en $V\times V$ tales que

$$g_b(g_a(x)) = g_{\varphi(a,b)}(x).$$

Lie define transformaciones infinitesimales, mediante derivadas respecto de a en el origen, en $b=0$. Luego muestra que el grupo generado por una transformación infinitesimal (las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales asociado) está contenido en G.

El espacio vectorial $\mathfrak{g}$ consistente en las transformaciones infinitesimales así obtenidas resulta un álgebra de Lie, en lenguaje moderno.

Lie establece un 'diccionario' entre grupos de Lie y álgebras de Lie, que le permite reducir problemas geométricos– inherentes a los grupos 'continuos'– en problemas algebraicos. En particular, el problema de clasificación.

2.4. **Fundamentos: grupos y álgebras de Lie.** Antes de explicar los teoremas fundamentales de Lie que constituyen la base del 'diccionario', recordamos alguna terminología.

2.4.1. *Álgebras de Lie.* Recordemos que un álgebra de Lie es un espacio vectorial munido de una operación bilineal $(X,Y)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \rightsquigarrow [X,Y]\in\mathfrak{g}$

(llamada corchete de Lie), que es antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi:

$$[X, Y] = -[Y, X], \tag{3}$$

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]], \tag{4}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Lie trabajaba primordialmente con espacios vectoriales complejos; si bien la definición anterior es pertinente sobre cualquier cuerpo.

2.4.2. *Ejemplos de álgebras de Lie.*

• Si V es un espacio vectorial, entonces V es un álgebra de Lie respecto del corchete nulo, llamada *abeliana*.

• Los espacios de matrices $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n\times n}$,con el corchete $[A, B] = AB - BA$; análogamente $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

• Las subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, por ejemplo $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ = espacio de matrices de traza 0.

• El espacio de derivaciones de un álgebra A, no necesariamente asociativa; esto es,

$$\operatorname{Der} A = \{T : A \to A \text{ lineal } / T(xy) = T(x)y + xT(y)\}.$$

Vimos que Lie asociaba a un grupo de Lie G el espacio $\mathfrak{g}$ de sus transformaciones infinitesimales, que es en lenguaje moderno el espacio tangente a G en el elemento neutro. El resultado fundamental de Lie es:

Teorema fundamental de Lie. *Si G es un grupo de Lie, el espacio $\mathfrak{g}$ de sus transformaciones infinitesimales es un álgebra de Lie de dimensión finita, con el corchete de operadores diferenciales.*

Recíprocamente si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces define un grupo de Lie (generado por los grupos uniparamétricos correspondientes a los sistemas de ecuaciones diferenciales definidos por los elementos de $\mathfrak{g}$).

En efecto, Lie muestra que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *determina* el grupo G– si bien este resultado debe ser interpretado localmente: dos grupos de Lie con álgebras de Lie isomorfas tienen entornos de la identidad isomorfos, tales que el isomorfismo preserva el producto. Por otra parte Lie sólo consideraba grupos de Lie *conexos* (en lenguaje actual), de modo que el Teorema fundamental reduce el estudio de los grupos de Lie al estudio de las álgebras de Lie.

De hecho, las nociones topológicas necesarias para una descripción ajustada de las sutilezas inherentes al 'diccionario' fueron desarrolladas sólo a principios del siglo XX.

Observemos también que Lie no distinguía terminológicamente entre un grupo de Lie y su álgebra de Lie.

Sea $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial de dimensión finita n. Sea $x_1, \dots, x_n$ una base de $\mathfrak{g}$. Una aplicación bilineal $[\,,\,]$ en $\mathfrak{g}$ está determinada por sus *coeficientes de estructura* ${c_{ij}}^k$: $[x_i, x_j] = \sum_k {c_{ij}}^k x_k$. Entonces $[\,,\,]$ es un corchete de Lie si y sólo si

$$
{c_{ij}}^k = -{c_{ji}}^k, \tag{5}
$$

$$
\sum_{1 \le s \le n} {c_{ik}}^s {c_{sj}}^t + {c_{kj}}^s {c_{si}}^t + {c_{ji}}^s {c_{sk}}^t = 0, \tag{6}
$$

para todos $1 \le i, j, k, t \le n$. Así, el problema de clasificar las álgebras de Lie se reduce al problema de encontrar las soluciones de (5) y (6), *a menos de isomorfismos.* Lie confiaba que este problema algebraico sería más accesible.

El 'diccionario' se completa con el siguiente resultado.

Teorema. *Si G es un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ es su álgebra de Lie, entonces existe una correspondencia biyectiva entre los subgrupos de Lie conexos de G y las subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$; bajo la misma, los subgrupos normales corresponden a los ideales de Lie.*

A continuación, Lie define: un grupo de Lie G es *simple* si su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no admite ideales propios no nulos (actualmente se pide que la dimensión de $\mathfrak{g} > 1$). En tal caso $\mathfrak{g}$ se dice *simple.* La consideración de grupos simples permite esbozar un procedimiento inductivo en la consideración de ecuaciones diferenciales.

2.4.3. *Álgebras de Lie simples.* Lie conoce las siguientes (la notación de tipos se debe a Killing):

Tipo A. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ = espacio de las matrices $n \times n$ de traza 0. Es el álgebra de Lie del grupo $SL(n, \mathbb{C})$.

Tipos B y D. $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ = espacio de las matrices antisimétricas $n \times n$ (tipo B si n es impar, tipo D si n es par). Es el álgebra de Lie del grupo $SO(n, \mathbb{C})$.

Tipo C. El álgebra de Lie del grupo $Sp(2n, \mathbb{C})$ = matrices inversibles que preservan una forma bilineal *antisimétrica.*

Motivado por sus trabajos en ecuaciones diferenciales, Lie define una clase especial de álgebras de Lie– hoy llamadas *solubles*:

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice soluble si admite una base $X_1, \dots, X_m$ tal que $[X_i, X_k]$ es combinación lineal de $X_1, \dots, X_{k-1}$, para todos $i < k$.

Teorema de Lie. *Si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ es un álgebra de Lie soluble, entonces existe una base $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{C}^n$ tal que, para todos $1 \leq j \leq n$ y $X \in \mathfrak{g}$,*

$$X(v_j) \text{ es combinación lineal de } v_1, \dots, v_j,$$

En las aplicaciones a ecuaciones diferenciales desarrolladas por Lie, las álgebras de Lie solubles permiten respuestas particularmente simples. Por otro lado, la noción de álgebra de Lie soluble y el correspondiente Teorema son importantes en el desarrollo ulterior de la teoría.

2.5. **Wilhelm Killing.** Como vimos, la clasificación de los 'grupos continuos' ocupaba un papel primordial en las consideraciones tanto geométricas como analíticas de Lie. Él mismo clasificó los 'grupos continuos' de dimensión 1,2,3. Sin embargo, fue Wilhelm Killing (1847–1923) quien obtuvo el resultado más significativo en esta dirección, uno de los teoremas más admirados de todos los tiempos. Comencemos por una reseña de la vida de Killing y cómo llegó a este problema.

Killing inicia sus estudios universitarios en Münster en 1865, pero ávido de aprender matemática, pasa a la Universidad de Berlín dos años después– no había matemáticos en Münster. Su intención era hacer carrera como profesor de un *Gymnasium*. En Berlín, el centro de la matemática en Alemania en ese momento, estaban Kronecker, Kummer y Weierstrass, quienes coordinaban sus cursos para dar una sólida formación a los estudiantes de matemática. Especialmente éste último ejerció una gran influencia en Killing, quien tomó sus cursos y escribió su tesis doctoral bajo su dirección.

Weierstrass había desarrollado la teoría de divisores elementales, motivado por el problema de clasificación de formas bilineales. Sus resultados implican la forma canónica de una matriz, resultado obtenido independientemente por Jordan algunos años después (la forma de Jordan). La tesis de Killing versa sobre la interpretación geométrica de la teoría de divisores elementales.

La influencia de Weierstrass en Killing no es sólo temática sino metodológica. Weierstrass encabezaba la reacción contra el *pensamiento genérico* predominante, que favorecía los resultados 'genéricos', esto es, descartando los casos particulares. Por ejemplo, genéricamente 'toda matriz compleja es diagonalizable'. Killing, naturalmente, adhiere a la posición de Weierstrass.

Killing, durante el año lectivo 1870-1, enseña en un colegio del pueblo de su padre. Defiende su tesis en 1872. Permanece en Berlín y participa en el seminario de Weierstrass, que versa en ese semestre sobre geometría no euclideana. Trabaja como profesor de un *Gymnasium* en Berlín hasta 1878; luego en Brilon hasta 1880, cuando es nombrado profesor en un Liceo para futuros clérigos en Braunsberg (hoy Braniewo, Polonia). Durante este tiempo, su interés matemático en las geometrías no euclideanas no decae; ejercen gran influencia sobre su pensamiento los ensayos de Riemann y Helmholz. Lee los artículos de Klein y otros, discute con Weierstrass y publica trabajos sobre el tema.

En 1884, presenta *Erweiterung des Raum Begriffes*, libro donde postula como objeto de la geometría los 'espacios de formas'. Esto es una variedad analítica real de dimensión n munida de m transformaciones infinitesimales. Ciertas consideraciones heurísticas lo llevan a introducir la noción de *álgebra de Lie*. En el espíritu de la escuela de Berlín, principalmente de Weierstrass, se propone adoptar el punto de vista más general posible. Esto lo conduce al problema de clasificar las álgebra de Lie reales de dimensión finita. En esta dirección, ya en 1884 había obtenido algunos resultados parciales bajo tres hipótesis I, II y III, que discutiremos más adelante.

Klein recibe una copia del libro y previene a Killing sobre los trabajos de Lie. Killing escribe a Lie y le solicita copias de sus trabajos, pues sólo tiene acceso a dos publicados en Math. Annalen. Las respuestas de Lie son escuetas y Killing entra en contacto epistolar con Engel en noviembre de 1885. Absorbido por sus tareas en el Liceo, tiene poco tiempo para llevar adelante sus investigaciones. Sin embargo, avanza en la clasificación las álgebras de Lie de dimensión finita. Bajo la influencia de los trabajos de Lie y la correspondencia con Engel, se concentra en las *complejas simples*.

Discute sus trabajos con Engel, quien lo urge a publicar sus resultados. Reluctante a ello, pues las pruebas son incompletas, envía no obstante una serie de 4 artículos a Klein, editor de Math. Annalen, revista donde aparecen entre 1889 y 1890.

En 1892, Killing es nombrado profesor de la universidad de Munster, donde permanecerá el resto de su vida. Recibe el Premio Lobachevski en 1897. Sin embargo nunca más se dedicará a las álgebras de Lie: se ocupa de problemas de geometría y de pedagogía. Pierde un hijo en la Primera Guerra Mundial; su tristeza profunda afecta su salud y muere en 1923.

2.6. **Álgebras de Lie semisimples.** Veamos ahora una síntesis de los trabajos de clasificación de Killing y cómo fueron completados por Elie Cartan. Para ello, es menester presentar sucintamente la clasificación de las álgebras de Lie simples de dimensión finita en lenguaje actual.

Recordemos que Lie define un grupo de Lie G *simple* como aquél cuya álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no admite ideales propios no nulos y además la dimensión de $\mathfrak{g} > 1$.

Sea entonces $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja simple de dimensión finita. La representación adjunta de $\mathfrak{g}$ es la transformación lineal $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} \mathfrak{g}$ dada por

$$\mathrm{ad}(X)(Y) := [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Obsérvese que 0 es siempre autovalor de $\mathrm{ad}X$. Diremos que X es *semisimple* si $\mathrm{ad}X$ es diagonalizable.

La primera noción clave es la de *subálgebra de Cartan*: es una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que verifica

- todos sus elementos son semisimples,
- es abeliana (esto es, $[X, Y] = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{h}$);
- es maximal respecto de estas dos propiedades.

Se sabe que existen subálgebras de Cartan y son únicas salvo automorfismos.

La dimensión k de $\mathfrak{h}$ se llama el *rango* de $\mathfrak{g}$.

La idea básica de Killing es considerar la descomposición *simultánea* de $\mathfrak{g}$ en autoespacios respecto de todos los elementos de una subálgebra de Cartan.

Dada una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, se consideran autoespacios generalizados: si $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, es

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X, \quad H \in \mathfrak{h}\}.$$

Aquéllos $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \neq 0$, tales que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ se llaman las *raíces* de $\mathfrak{g}$. Entonces

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \text{ raíz}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Se puede demostrar que $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, si α es raíz.

Si $\alpha \neq \beta$ son raíces, entonces existen enteros no negativos r, s tales que

$$\{j \in \mathbb{Z} : j\alpha + \beta \text{ es raíz}\} = \{j \in \mathbb{Z} : -r \leq j \leq s\},$$

y se define $a_{\alpha\beta} = r - s$; y además que $a_{\alpha\alpha} = 2$. Los números $a_{\alpha\beta}$ se llaman los *enteros de Cartan* de $\mathfrak{g}$.

Existen además raíces $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ que forman una base de $\mathfrak{h}^*$ con propiedades 'especiales'. La matriz $(c_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$, donde $c_{ij} := a_{\alpha_i\alpha_j}$, se llama la *matriz de Cartan* de $\mathfrak{g}$.

(A_ℓ) $$\underset{\alpha_1}{\circ} - \underset{\alpha_2}{\circ} - \dots - \underset{\alpha_{\ell-1}}{\circ} - \underset{\alpha_\ell}{\circ}$$

(B_ℓ) $$\underset{\alpha_1}{\circ} - \underset{\alpha_2}{\circ} - \dots - \underset{\alpha_{\ell-1}}{\circ} \Rightarrow \underset{\alpha_\ell}{\circ}$$

(C_ℓ) $$\underset{\alpha_1}{\circ} - \underset{\alpha_2}{\circ} - \dots - \underset{\alpha_{\ell-1}}{\circ} \Leftarrow \underset{\alpha_\ell}{\circ}$$

(D_ℓ) $$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & \circ\ \alpha_{\ell-1} & & \\ & & & & & & | & & \\ \underset{\alpha_1}{\circ} & - & \underset{\alpha_2}{\circ} & - & \dots & - & \underset{\alpha_{\ell-2}}{\circ} & - & \underset{\alpha_\ell}{\circ} \end{array}$$

TABLE 1. Diagramas de Dynkin clásicos.

Un análisis minucioso de las raíces muestra que los enteros de Cartan, y por ende la matriz de Cartan, están sujetos a fuertes relaciones.

Este análisis usa la identidad de Jacobi y se simplifica si se considera la forma *de Killing*: es la forma bilineal simétrica e 'invariante' $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ dada por $K(X, Y) = \operatorname{tr} \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y$.

De hecho, Killing obtiene la lista de todas las posibles matrices de Cartan. Para visualizar convenientemente esta lista, es usual asignar a cada matriz de Cartan un grafo, llamado *diagrama de Dynkin*, con k vértices y donde entre los vértices i y j hay $c_{ij}c_{ji}$ aristas.

Se dice que una matriz de Cartan es 'indescomponible' si su diagrama de Dynkin es conexo.

Teorema (Killing - Cartan). *Existe un correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismo de álgebras de Lie simples complejas y matrices de Cartan 'indescomponibles'– o equivalentemente diagramas de Dynkin como se listan en las Tablas 1 y 2.*

Por lo tanto, gracias al 'diccionario' de Lie, los grupos de Lie simples complejos están clasificados por las matrices de Cartan 'indescomponibles'. (Salvo el hecho de que el álgebra de Lie determina al grupo localmente).

Por otro lado, G_2 se identifica con el álgebra de derivaciones de traza 0 del álgebra de octoniones. Las otras álgebras de Lie excepcionales admiten realizaciones en términos de derivaciones de álgebras no asociativas (e. g., álgebras de Jordan), como mostró Tits en la década del 50. Esta información se resume en el llamado 'cuadrado mágico' de Tits.

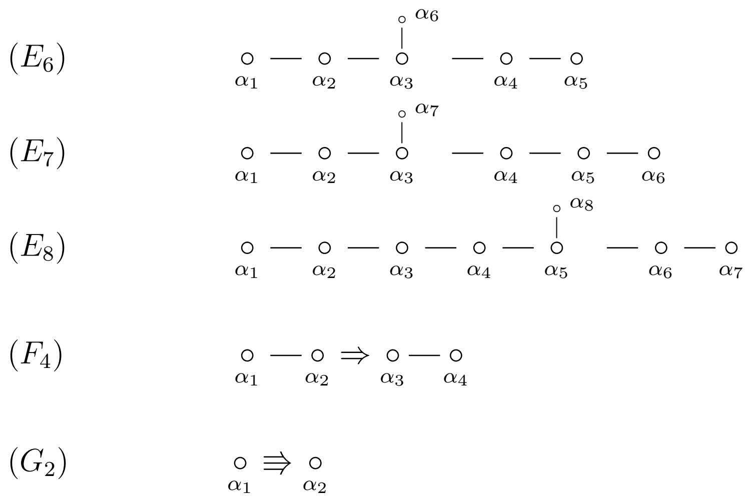

Table 2. Diagramas de Dynkin excepcionales.

(A_ℓ)	$\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$ = álg. de Lie de $SL(\ell+1,\mathbb{C})$
(B_ℓ)	$\mathfrak{so}(2\ell+1,\mathbb{C})$ = álg. de Lie de $SO(2\ell+1,\mathbb{C})$
(C_ℓ)	$\mathfrak{sp}(2\ell,\mathbb{C})$ = álg. de Lie de $Sp(2\ell,\mathbb{C})$
(D_ℓ)	$\mathfrak{so}(2\ell,\mathbb{C})$ = álg. de Lie de $SO(2\ell,\mathbb{C})$

Table 3. Álgebras de Lie clásicas.

Las subálgebras de Cartan, las raíces, las matrices de Cartan, y otros elementos constitutivos de la teoría ya aparecen en los trabajos de Killing.

Por otro lado, la forma de Killing es esencialmente una contribución de Cartan.

2.6.1. *La prueba de Killing.* El objetivo de Killing, como se dijo, era clasificar todas las álgebras de Lie reales (de dimensión finita). Sin embargo, comienza por las complejas, tal vez por su familiaridad con la teoría de divisores elementales de Weierstrass.

Antes de entrar en contacto con la teoría de Lie en 1884, ya había iniciado la consideración de álgebras de Lie complejas $\mathfrak{g}$ que satisfacen tres hipótesis I, II y III. Para enunciarlas, es preciso la siguiente notación.

Sea $X \in \mathfrak{g}$ y consideremos la descomposición de $\mathfrak{g}$ en autoespacios generalizados:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{0 \neq \alpha} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde α recorre las raíces (no nulas) del polinomio característico de ad$X$. Elige además X tal que $\dim \mathfrak{g}_0$ sea mínima– X *genérico*. Notar que por la identidad de Jacobi, $\mathfrak{g}_0$ es una subálgebra de Lie.

Las tres hipótesis de Killing son:

I. $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, la subálgebra de Lie derivada.

II. $\mathfrak{g}_0$ es una subálgebra de Lie *abeliana*.

III. $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, si α es raíz no nula del polinomio característico de ad$X$.

Al entrar en conocimiento de los resultados de Lie, intuye que las álgebras de Lie simples satisfacen las hipótesis I, II y III. La primera de ellas se satisface por razones elementales; sin embargo las demostraciones ofrecidas por Killing de que un álgebra de Lie simple satisface las hipótesis II y III son erróneas, pues utiliza un resultado auxiliar que resulta ser falso.

En efecto, Killing estudia más generalmente las álgebras de Lie que satisfacen I: $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$; su objetivo era probar que I implica II.

Para ello introduce la noción de álgebra de Lie *semisimple*: es aquélla que es suma directa de ideales simples, o equivalentemente que no contiene ningún ideal abeliano. De modo que el resultado anterior se puede adaptar de la siguiente manera:

Teorema (Killing - Cartan). *Existe un correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismo de álgebras de Lie semisimples complejas y matrices de Cartan.*

Luego prueba un *teorema de descomposición*: Si $\mathfrak{g}$ satisface I, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$, donde $\mathfrak{s}$ es un ideal semisimple y $\mathfrak{r}$ es un ideal cuyos elementos X sarisfacen que ad$X$ es *nilpotente*. (Esto motiva a Engel a introducir la noción de álgebra de Lie nilpotente y a demostrar su teorema de caracterización).

Killing 'deduce' que vale II, lo que en general no es cierto.

Otro importante punto cuya demostración es incompleta en los trabajos de Killing es la existencia de las álgebras de Lie correspondientes a los tipos excepcionales E_6, E_7, E_8 y F_4; pero presenta explícitamente los coeficientes de estructura del álgebra de Lie de tipo G_2. De hecho, su prueba de la existencia de las álgebras de Lie de tipo C tampoco es completa; lo cual no presenta inconvenientes pues Lie ya había descrito las álgebras $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$.

La construcción de las álgebras de Lie excepcionales fue llevada a cabo posteriormente por Cartan mediante laboriosos cálculos caso por caso; una prueba *a priori*– sin razonamientos caso por caso– fue ofrecida, independientemente, por Chevalley y Harish-Chandra en 1948. Recordemos también la construcción de Tits (el cuadrado mágico). En 1963, Serre presenta las álgebras de Lie semisimples por generadores y relaciones y concluye esta cuestión. Pero comienza otra: la teoría de álgebras de Kac-Moody.

Los trabajos de Killing fueron acogidos muy favorablemente por Lie y su escuela. Lie escribe en una carta a Klein en 1890:

> *"Killing has done beautiful research. If, as I believe, the results are correct, he has performed an outstanding service. Generally speaking, now the theory of transformation groups and differential invariants will reign over vast domains of mathematics."*

Engel y sus alumnos se aplican a la tarea de entender, ampliar o corregir las pruebas de los teoremas de Killing.

2.6.2. *El aporte de Elie Cartan.*

La teoría desarrollada por Sophus Lie, que como vimos fue apoyado por Klein, fue recibida con frialdad en Berlín, uno de los grandes centros matemáticos de la época. Las críticas de la escuela de Berlín a los trabajos de Lie apuntaban tanto a la falta de rigor de los fundamentos de la teoría (Lie adscribía implícitamente al *razonamiento genérico* firmemente rechazado por Weierstrass), como al rango de las aplicaciones previstas por Lie (problemas de ecuaciones diferenciales ya resueltos por otros métodos).

La acogida a la teoría de Lie era muy diferente en París.

Los líderes de la comunidad matemática francesa de la época, Darboux, Picard y Poincaré, tenían una opinión muy favorable de los trabajos de Lie. Darboux, contemporáneo de Lie a quien conoció en 1870, se interesaba en geometría diferencial y sus conexiones con ecuaciones diferenciales parciales, por lo que tenía conocimiento detallado de los trabajos de Lie en esa dirección; pese a ello, no apeló a los grupos de Lie en sus investigaciones.

Por el contrario, Picard y Poincaré, unos diez años más jóvenes, comienzan a utilizar los grupos de Lie en sus trabajos.

El aprecio de los círculos matemáticos franceses por la obra de Lie se acentúa debido a la visita de Lie a París en 1882. En 1889, Lie es elegido miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de París. De más importancia histórica es que, a partir de 1888, varios estudiantes de la École Normale Supérieure (ENS) de París, visitan a Lie en Leipzig para estudiar grupos de transformaciones. Los primeros son Ernest Vessiot y Wladimir de Tannenberg presentados a Lie por Darboux.

En el segundo semestre de 1891, viaja a Leipzig Arthur Tresse, quien se había recibido en la ENS junto a Elie Cartan. En Leipzig, aprende de Engel y Lie los resultados de Killing y los problemas suscitados por sus demostraciones.

Al regresar a París en 1892, Tresse (quien trabajaba en un problema de tesis sugerido por Lie) vive con su amigo Cartan, quien había pasado un año en el servicio militar.

Tresse cuenta a Cartan el teorema de Killing, quien deviene intensamente interesado en el desafío de demostrarlo cabalmente.

Lie viaja a París en 1893, donde conoce a Cartan. Éste ya había descubierto el método de prueba del teorema de clasificación, cuya primera publicación data de abril de 1893.

2.7. **Elie Cartan.** Elie Cartan nació en Dolomieu, un pequeño poblado en el sudeste de Francia. Hijo del herrador del pueblo, es recomendado por su maestro de primaria al delegado cantonal, Antonin Dubost, más tarde presidente del Senado. Dubost toma al joven Elie bajo su protección y le ayuda para que estudie en Vienne, luego en el Liceo de Grenoble y finalmente en el Liceo Janson-de-Sailly (Paris). Elie Cartan ingresa a la ENS en 1888. Después de su doctorado en 1894, trabajó en Montpellier y Lyon, luego como profesor en Nancy a partir de 1903. Obtuvo un puesto en Pars en 1909, y pasó a ser profesor en 1912. Se retiró en 1942.

Fue padre de cuatro hijos, uno de ellos el matemático Henri Cartan. Otros dos hijos varones fallecieron trágicamente– uno de ellos en la Segunda Guerra Mundial; también tuvo una hija. De personalidad tímida, no alcanzó la fama sino hasta su madurez.

En su tesis doctoral, Cartan concluye brillantemente la prueba de la clasificación de las álgebras de Lie semisimples. Una herramienta clave en su enfoque es la llamada “forma de Killing”...

Elie Cartan realizó otras contribuciones fundamentales a la teoría de Lie y a la geometría diferencial. En los años siguientes a su tesis, trabajó en aplicaciones de la misma y en la clasificación de los grupos “continuos infinitos”.

En 1913-14, publica tres artículos claves, donde obtiene la clasificación de las representaciones irreducibles de las álgebras de Lie semisimples complejas por un lado, y de las álgebras de Lie semisimples *reales*– así como de las representaciones irreducibles de éstas– por otro.

Más adelante, a fines de la década del 20, influenciado por los trabajos de Weyl, obtiene otro teorema importantísimo: la clasificación de los espacios simétricos. Todos estos resultados dependen de la clasificación de las álgebras de Lie simples reales.

2.7.1. *Complementos.* Para finalizar esta sección, mencionamos tres resultados complementarios de la clasificación de Killing-Cartan.

Teorema de descomposición. *Toda álgebra de Lie de dimensión finita* $\mathfrak{g}$ *admite un máximo ideal soluble* $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$*; además, existe una subálgebra semisimple* $\mathfrak{s}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tal que* $\mathfrak{g} = \operatorname{rad}\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{s}$.

Una variante de este teorema fue ya vislumbrada por Killing; Cartan dio una demostración errónea del mismo en 1893. Luego advirtió su error pero no se dedicó a encontrar una prueba, que fue finalmente una contribución de E. Levi (1905).

Este resultado reduce la clasificación de todas las álgebras de Lie de dimensión finita a la clasificación de las solubles, un arduo problema que no fue completamente resuelto aún, y que era el programa inicial de Killing (y de Lie). Actualmente la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes con ciertas propiedades ocupa la atención de varios especialistas.

Clasificación de las álgebras de Lie semisimples reales. Este problema, también, era parte principal del programa de Killing. Como se dijo, fue obtenida por Cartan en 1914. Es instrumental a su clasificación de los espacios simétricos.

Globalización. Como ya se dijo, el diccionario 'grupos de Lie–álgebras de Lie' sólo consideraba los aspectos locales de los primeros, si bien Lie y otros especialistas de su escuela conocían los ejemplos de distintos grupos de Lie con la misma álgebra de Lie. Las respuestas teóricas a este problema aparecen en los trabajos de Weyl en 1924 y en sus continuaciones por Cartan.

3. Teoría de representaciones

Tanto el programa de Erlangen de Klein, como la teoría de Galois de ecuaciones diferenciales que motivaba a Lie, como el idiosincrático punto de vista geométrico de Killing, abarcaban el problema de clasificación de los grupos 'proyectivos'. En una formulación equivalente, este problema se puede presentar como la clasificación de los subgrupos de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$ para todos los posibles n.

Recordemos que una representación lineal de G de grado n es un morfismo de grupos de Lie $\varrho : G \to GL(n, \mathbb{C})$. El problema mencionado se puede reformular como dos problemas separados:

- la clasificación de los grupos de Lie;
- para cada grupo de Lie G, la clasificación de todas las representaciones lineales inyectivas de G.

Es evidentemente de interés, en este contexto, la clasificación de todas las representaciones lineales de los grupos de Lie *simples*.

Antes de esbozar la historia de este problema, resuelto por Elie Cartan y Hermann Weyl, es conveniente discutir algunas reducciones técnicas.

Consideremos una representación lineal $\varrho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ de un grupo de Lie G, $n > 0$. Un subespacio U de $\mathbb{C}^n$ se dice G*-invariante* is para todo $g \in G$, $u \in U$, se tiene

$$\varrho(g)(u) \in U.$$

A través de una identificación lineal $U \simeq \mathbb{C}^d$, a un subespacio G-invariante le corresponde una representación lineal de grado d.

La representación ϱ se dice *irreducible* si admite exactamente dos subespacios G-invariantes, a saber $U = 0$ y $U = \mathbb{C}^n$.

Por otro lado, se dice *completamente reducible* si existen subespacios G-invariantes <u>irreducibles</u> $U_1, \dots, U_s$ tales que $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$.

Teorema. *Sea G un grupo de Lie simple (simplemente conexo).*

(E. Cartan). Existe un correspondencia biyectiva entre las representaciones lineales irreducibles de G y los 'pesos dominantes' de G.

(H. Weyl). Toda representación de G es completamente reducible.

Esta situación es óptima: si $G = \mathbb{C}$, entonces la representación $\varrho : G \to GL(2, \mathbb{C})$ dada por

$$\varrho(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$z \in \mathbb{C}$, admite exactamente tres subespacios invariantes:

$$0, \quad \mathbb{C}e_1, \quad \mathbb{C}^2.$$

Luego no es irreducible ni completamente reducible.

3.0.2. *Representaciones de álgebras de Lie.* Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Una representación de grado n de $\mathfrak{g}$ es un morfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, es decir una transformación lineal que satisface

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

En la práctica, las representaciones de un grupo de Lie conexo G dan lugar a representaciones de su álgebra de Lie; vale la recíproca si G es simplemente conexo. Se tiene que una representación de un grupo de Lie conexo G es irreducible exactamente cuando la representación asociada de su álgebra de Lie lo es. Análogamente para representaciones completamente reducibles.

3.1. **Teoría de representaciones de** $SL(2, \mathbb{C})$**.**

3.1.1. *Representaciones irreducibles de* $SL(2, \mathbb{C})$*.* Lie determinó las representaciones irreducibles de $SL(2, \mathbb{C})$: para cada entero $m \geq 0$, existe exactamente una representación irreducible V_m de $SL(2, \mathbb{C})$ de dimensión $m + 1$.

Explícitamente, V_m se identifica con el espacio de polinomios en 2 variables, homogéneos de grado m, con la acción natural de $SL(2, \mathbb{C})$.

Sean $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Estos elementos forman una base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, el álgebra de Lie de $SL(2, \mathbb{C})$.

El espacio V_m tiene una base $v_0, \dots, v_m$ donde la representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ está determinada por

$$\begin{aligned} \rho(H)(v_i) &= (m - 2i)v_i, \\ \rho(F)(v_i) &= -(i + 1)v_{i+1}; \\ \rho(E)(v_i) &= (m - i + 1)v_{i-1}, \end{aligned}$$

donde se conviene que $v_{-1} = v_{m+1} = 0$.

El enfoque de Lie es geométrico: las representaciones que considera son proyectivas (no lineales). Si B es el grupo de matrices triangulares superiores, entonces el espacio cociente $C = SL(2, \mathbb{C})/B$ es isomorfo a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ por un lado. Por otro, una representación proyectiva de $SL(2, \mathbb{C})$ en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ admite un punto fijo por B, debido al teorema de Lie para álgebras solubles. Así, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ contiene una copia de la curva C; Lie requiere que C sea *tan curvada como sea posible*– lo que equivale a que la correspondiente representación lineal sea irreducible.

3.1.2. *Completa reducibilidad:* $SL(2,\mathbb{C})$. En su tratado, Lie y Engel anuncian que un discípulo de Lie, E. Study, demuestra la completa reducibilidad de las representaciones de $SL(2,\mathbb{C})$. La prueba no es publicada, aparentemente tiene algunos errores luego corregidos por Engel. Study conjetura la completa reducibilidad de las representaciones de cualquier álgebra de Lie semisimple.

En su tesis, E. Cartan demuestra la completa reducibilidad de las representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, como un paso en la prueba de un teorema de Engel: *toda álgebra de Lie no soluble contiene una copia de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. La demostración es algebraica.

Independientemente, Guido Fano ofrece en 1896 una demostración geométrica de la completa reducibilidad para $SL(2,\mathbb{C})$. La prueba de Fano contiene– en lenguaje proyectivo como Lie– una reducción a la consideración de sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow V_m \longrightarrow E \longrightarrow V_n \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión es clave en la prueba algebraica que Casimir presenta en la década del 30.

3.2. **Representaciones irreducibles de un álgebra de Lie semisimple.** La clasificación de las representaciones irreducibles de un álgebra de Lie simple ocupó entre 1890 y 1910 a varios discípulos de S. Lie (quien fundó una escuela en su paso por Leipzig). E. Study la obtuvo para $SL(3,\mathbb{C})$ y otros grupos de rango bajo, pero nunca publicó los resultados. Study, quien escribió su tesis de habilitación bajo Klein, era *Privatdozent* en Leipzig cuando llegó Lie y se unió a su escuela. G. Kowalewski, alumno de Lie, consideró el problema de clasificación de grupos proyectivos que no dejan 'nada linear invariante'. Por un resultado de Cartan (1909), se reduce al problema de clasificación de las representaciones irreducibles de un álgebra de Lie semisimple.

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple y V una representación de $\mathfrak{g}$. Recordemos que $\mathfrak{g}$ tiene ciertas subálgebras llamadas de Cartan, con propiedades especiales. Si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ y $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, entonces se denota:

$$V_\lambda = \{v \in V : \rho(H)(v) = \lambda(H)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Entonces $V = \oplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$. Aquellos λ tales que $V_\lambda \neq 0$ se dicen los *pesos* de la representación.

Existen además una base $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de $\mathfrak{h}^*$ que satisface:

Si λ es un peso de alguna representación de dimensión finita V, entonces $\lambda = \sum_{1\leq i\leq k} c_i\lambda_i$, donde los c_i son enteros.

Un peso $\lambda = \sum_{1\leq i\leq k} c_i\lambda_i$ se dice *dominante* si los c_i son enteros mayores o iguales a 0.

Teorema. *(E. Cartan). Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple. Existe un correspondencia biyectiva entre las representaciones lineales irreducibles de $\mathfrak{g}$ y los pesos dominantes de $\mathfrak{g}$.*

Sea λ un peso dominante y sea $V(\lambda)$ la correspondiente representación irreducible. Entonces la combinatoria inherente a $V(\lambda)$ está gobernada por el diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$; en particular, la dimensión de $V(\lambda)$, su conjunto de pesos, las multiplicidades de los mismos, etc.

3.3. **Completa reducibilidad.** Para finalizar esta sección, queremos esbozar sucintamente la historia del teorema de completa reducibilidad de Weyl.

Sea G un grupo finito. Entonces toda representación (sobre $\mathbb{C}$) de G es completamente reducible. Este teorema es debido a Maschke (1899), y se sigue de la siguiente obervación debida a E. H. Moore– e independientemente a A. Loewy (1896):

Toda representación V de G admite una forma hermitiana positiva no-degenerada G-invariante.

La construcción es muy sencilla. Sea $(\,|\,)$ *cualquier* forma hermitiana positiva no-degenerada en V, entonces

$$(x|y)_0 := \sum_{g\in G}(\rho(g)(x)|\rho(g)(y))$$

es la forma G-invariante buscada.

La operación de *promediar* se aplica más generalmente a la búsqueda de invariantes: si $v \in V$, entonces $v_0 = \sum_{g\in G}\rho(g)(v)$ es un elemento *invariante*– esto es, $v_0 = \rho(g)(v_0)$ para todo $g \in G$.

En 1897, A. Hurwitz extendió la operación de promediar a la búsqueda de invariantes de grupos infinitos G, como $SL(n,\mathbb{C})$ y $SO(n,\mathbb{C})$. La idea básica es reemplazar la suma $\sum_{g\in G}$ por una integral $\int_G d\mu$ donde $d\mu$ es una medida G-invariante. Sin embargo, $\int_G d\mu$ puede diverger is G no es compacto. Hurwitz propone considerar un subgrupo compacto maximal G_0, en los ejemplos

$$SU(n) \subset SL(n,\mathbb{C}), \quad SO(n) \subset SO(n,\mathbb{C}).$$

Estos subgrupos son lo suficientemente 'grandes' como para que todo G_0-invariante sea necesariamente G-invariante.

El trabajo de Hurwitz pasó desapercibido a los estudiosos de la teoría de Lie, hasta que en 1924, I. Schur aplicó el método de Hurwitz al estudio de las representaciones e invariantes de $SO(n,\mathbb{C})$ y en particular, a la completa reducibilidad.

Poco más tarde, Hermann Weyl demostró la completa reducibilidad para cualquier grupo de Lie semisimple G mediante el método de Hurwitz y Schur. Es crucial en su enfoque la construcción de un subgrupo compacto maximal G_0 de G, que es posible a través de la forma compacta $\mathfrak{g}_0$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Esta forma se construye gracias al análisis del sistema de raíces de $\mathfrak{g}$. Si bien esta álgebra de Lie real aparece en la lista de Cartan (1913), es Weyl quien destaca su rol en la prueba de completa reducibilidad.

Por razones de tiempo, nos es imposible repasar las importantísimas contribuciones de Weyl a la teoría de grupos de Lie y de sus representaciones; contribuciones que son una síntesis de álgebra, geometría y análisis.

4. De los grupos algebraicos a los grupos cuánticos

4.1. **Sistemas de raíces y grupos de Coxeter.** La clasificación de las álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$ se expresa en términos de las matrices de Cartan, construidas a partir de las *raíces* (autovalores simultáneos de una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$):

$$R = \text{sistema de raíces } \subset \mathfrak{h}^*.$$

También, la clasificación de las representaciones irreducibles de $\mathfrak{g}$ está dada por:

$$\begin{aligned} P^+ = \text{pesos dominantes } &= \sum_{1\le i\le k} \mathbb{Z}_{\ge 0}\lambda_i \\ \subset P = \sum_{1\le i\le k} \mathbb{Z}\lambda_i &= \text{látice de pesos } \subset \mathfrak{h}^*, \end{aligned}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ es una base de $\mathfrak{h}^*$ (los *pesos fundamentales*).

Por otra parte, $R \subset P$ y por lo tanto $Q =$ subgrupo de $\mathfrak{h}^*$ engendrado por R también está contenido en P.

Recordemos que el 'diccionario' de Lie era impreciso pues un grupo de Lie es determinado por su álgebra de Lie sólo localmente. A partir de la determinación del grupo fundamental de un grupo de Lie simple y simplemente conexo por Weyl, Cartan resuelve esta cuestión.

Teorema. *Existe un correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismo de grupos de Lie simples cuya álgebra de Lie es isomorfa a* $\mathfrak{g}$ *y subgrupos intermedios* L*:* $Q \subset L \subset P$.

Otro importante objeto asociado a una matriz de Cartan es el *grupo de Weyl*, que se puede definir de varias maneras alternativas (por ejemplo, el subgrupo de automorfismos lineales de $\mathfrak{h}^*$ generado por las reflexiones correspondientes a las raíces). La importancia de su uso fue señalada por Weyl; aparece en los trabajos posteriores de E. Cartan.

La combinatoria de los sistemas de raíces es estudiada en abstracto por van der Waerden (1935). Simultánea pero independientemente, Coxeter completa la clasificación de los grupos finitos de traslaciones euclideanas generados por reflexiones. La relación entre ambos temas es explorada por Witt y Coxeter, y más tarde por Chevalley y Harish-Chandra.

4.2. **Grupos algebraicos lineales.** Recordemos la definición de grupo de Lie (real): es una variedad diferencial munida de una estructura de grupo compatible, en el sentido de que tanto el producto como la inversión sean morfismos de variedades diferenciales. La definición de grupo de Lie complejo es análoga, reemplazando diferencial por analítica.

Los principales ejemplos de grupos de Lie que hemos visto son

$$GL(n, \Bbbk), \quad SL(n, \Bbbk)$$

con $\Bbbk = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$; los que tienen sentido aún si $\Bbbk$ es un cuerpo (o un anillo conmutativo cualquiera).

La geometría algebraica se ocupa del estudio de objetos geométricos cuyas 'coordenadas locales' viven en un cuerpo (o aún en un anillo conmutativo) arbitrario. Estos objetos se llaman variedades algebraicas. Así, resulta natural plantearse el estudio de *grupos algebraicos*: se define un grupo algebraico como una variedad algebraica munida de una estructura de grupo compatible, en el sentido de que tanto el producto como la inversión sean morfismos de variedades algebraicas.

Fijemos un cuerpo algebraicamente cerrado $\Bbbk$. Los dos ejemplos paradigmáticos de variedades algebraicas sobre $\Bbbk$ (es decir, con 'coordenadas' en $\Bbbk$) son:

- el espacio afín $\mathbb{A}^n_{\Bbbk} = \Bbbk^n$,
- el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\Bbbk}$.

Consecuentemente, se distinguen dos clases de variedades algebraicas:

• las variedades *afines*– definidas como los ceros en $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ de una familia de polinomios;

• las variedades *proyectivas*– definidas como los ceros en $\mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ de una familia de polinomios homogéneos.

Por ende, se distinguen dos clases de grupos algebraicos:

• los *grupos algebraicos lineales*– es decir, aquellos grupos algebraicos cuya variedad subyacente es afín;

• las *variedades abelianas*– aquellos grupos algebraicos cuya variedad subyacente es proyectiva.

Las variedades abelianas, cuya multiplicación es siempre conmutativa, aparecen naturalmente en geometría algebraica; las curvas elípticas son ejemplos de ellas. Su estudio es vital en teoría de números.

En esta exposición, se bosquejará la historia de algunos aspectos de los inicios de la teoría de *grupos algebraicos lineales*.

Observemos antes de comenzar que no se pierde generalidad. En efecto, si G es cualquier grupo algebraico, entonces existe un máximo subgrupo algebraico normal N *lineal*; el cociente G/N resulta una variedad abeliana.

Este teorema fue demostrado por Chevalley en 1953, e independientemente por Barsotti. Existen una prueba alternativa debida a Rosenlicht.

4.3. **Inicios en el siglo XIX.** La historia de los grupos algebraicos lineales comienza a fines del siglo XIX, con trabajos debidos a Maurer, E. Cartan y Picard. Luego de un prolongado período de inactividad, se reinicia en la década del 1940.

Ludwig Maurer publica cuatro trabajos, de 1888 a 1893, donde entre otros temas, considera grupos algebraicos lineales sobre $\mathbb{C}$, con una definición distinta pero equivalente a la actual– como explica A. Borel en su monografía.
En su primer artículo Maurer considera el grupo de matrices que fijan un polinomio homogéneo, pero luego pasa al caso general.

Dado que existen subgrupos de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$ que no son algebraicos, el 'diccionario' no es válido en el contexto algebraico y es de interés caracterizar aquellas álgebras de Lie que corresponden a un grupo algebraico– llamadas *algebraicas*. Maurer estudia esta cuestión, caracterizando en particular la 'cápsula algebraica' de un elemento semsimple.

Otra importante contribución de Maurer es que todo grupo algebraico lineal es una variedad racional (tiene un abierto isomorfo a un abierto de un espacio proyectivo).

Por su parte, E. Cartan publica en 1895 un artículo donde se prueba que algunos grupos de Lie son algebraicos. Mientras que Picard, en la década de 1890, se ocupa de grupos algebraicos en tanto que grupos de Galois de eciaciones diferenciales con coeficientes racionales.

Los trabajos de Picard son continuados por E. Vessiot y A. Loewy a principios de siglo XX.

4.4. **Chevalley y Kolchin.** El estudio de los grupos algebraicos es retomado vigorosamente por Chevalley y Kolchin en los 40.

Chevalley– en parte, en colaboración con Tuan– estudia las álgebras de Lie de grupos algebraicos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0; generaliza los resultados de Maurer mediante la noción de 'réplica' y obtiene una caracterización necesaria y suficiente. Estos trabajos fueron continuados y ampliados por Goto y Matsushima.

La herramienta fundamental de Chevalley es el uso de la exponencial 'formal' para establecer un 'diccionario' grupos algebraicos–álgebras de Lie algebraicas, por lo que su análsis se restringe a cuerpos de característica 0.

Por otro lado, Kolchin se propone a mediados de los 40 algebrizar la teoría de Galois para ecuaciones diferenciales de Picard-Vessiot. El contexto algebraico para tratar ecuaciones diferenciales– el álgebra diferencial– había sido desarrollado por su mentor, J. Ritt. Kolchin aborda el desarrollo de una teoría de grupos algebraicos de matrices, pero para "enfatizar la naturaleza algebraica del tema" su enfoque es independiente de la característica (y no apela a la teoría de álgebras de Lie). Sus primeros dos trabajos, publicados en el Annals en 1948, contienen ya varios resultados de gran importancia en el desarrollo de la teoría de grupos algebraicos.

Uno de ellos es: todo grupo algebraico de matrices conexo y soluble es triangular (respecto de alguna base). Esta generalización del teorema de Lie se conoce hoy como el *teorema de Lie-Kolchin.*

También prueba que todo grupo algebraico conmutativo es el producto directo de uno semisimple por otro unipotente (lo que implica la *descomposición de Jordan multiplicativa*).

Estos dos trabajos influyeron en Borel (ver página 169 de su monografía). Kolchin prosiguió su estudio de los grupos algebraicos de matrices durante 25 años mediante un desarrollo propio de la teoría de conjuntos algebraicos.

En 1954 Armand Borel escribió un paper fundamental [Annals 1956] donde sentó las bases del estudio de los grupos algebraicos lineales, influenciado por el trabajo de Kolchin pero también por artículos de Hopf, Samelson y Stiefel. No hay álgebras de Lie en el enfoque de Borel.

Desde un punto de vista técnico, el punto de partida de Borel es el estudio de la acción de un grupo algebraico; en particular el hecho de que toda órbita contiene un abierto denso en su clausura. En particular, existen órbitas cerradas. Esta diferencia fundamental con los grupos de Lie es explotada sistemáticamente por Borel.

Entre las numerosas contribuciones, se destacan:

El estudio de los subgrupos conexos solubles maximales de un grupo algebraico lineal (llamados hoy en día *subgrupos de Borel*, y así bautizados por Chevalley).

El estudio de los subgrupos conexos diagonalizables (bautizados *toros* por Borel) y la caracterización de los subgrupos de Cartan (introducidos por Chevalley) como los centralizadores de los toros maximales.

En el verano de 1955, Borel entrega una copia de este trabajo a Chevalley.

4.5. **Grupos finitos.** Chevalley escribió en 1954:

> *The principal interest of the algebraic groups seems to me to be that they establish a synthesis, at least partial, between the two main parts of group theory, namely the theory of Lie groups and the theory of finite groups.*

Los primeros grupos simples fueron descubiertos por el mismo Galois (1832): $\mathbb{A}_5$, por supuesto, pero también $PSL(2, \mathbb{F}_p) = PSL(2, p)$, p primo. En 1870, Jordan incluyó en su Tratado la prueba de la simplicidad de $\mathbb{A}_n$, $n \geq 5$. Siempre en el Tratado, Jordan introdujo los análogos de los grupos clásicos sobre un cuerpo finito y probó la simplicidad en el caso del cuerpo primo. Para cuerpos no primos, el primer resultado es de Cole (1893) quien prueba la simplicidad de $PSL(2, 8)$; pronto Moore (1893) y Burnside (1894) extendieron el resultado a $PSL(2, p^n)$, salvo $p^n = 2, 3$; y Dickson a $PSL(m, p^n)$ (1897).

Dickson procedió a demostrar la simplicidad de los otros grupos clásicos sobre todos los cuerpos finitos; también introdujo y demostró la simplicidad de grupos de tipo G_2 (y de tipo E_6 lo que permaneció ignorado por mucho tiempo), sobre cuerpos finitos (1897-1905). Una simplificación del enfoque de Dickson fue ofrecida por Dieudonné (1948), siempre para los grupos clásicos y caso por caso.

E. Mathieu descubrió cinco grupos (que pertenecen a la familia hoy llamada de 'esporádicos') en 1861, a partir de un estudio de grupos múltiplemente transitivos. La simplicidad de los mismos fue establecida por Cole (1895, uno de ellos) y Miller (1900, los otros cuatro). Una presentación alternativa se debe a Witt (1938).

En 1953, Chevalley construyó los análogos de los grupos F_4, E_6 y E_7 sobre cuerpos finitos. Sin embargo, los problemas de cálculo que enfrentó al encarar E_8 lo llevaron a la búsqueda de un método general, que publicó en su famoso artículo de 1955 en Tohoku Math. Journal.

El método de Chevalley consiste en los siguientes pasos:

(i). Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple compleja de dimensión finita. Entonces se construye una base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{g}$ cuyos coeficientes de estructura son especiales (en particular son números enteros).

(ii). Sea $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ el subgrupo abeliano de $\mathfrak{g}$ generado por $\mathcal{B}$; es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{Z}$. Si K es un cuerpo, se encuentra un álgebra de Lie sobre K por extensión de escalares: $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$.

(iii). Mediante exponenciales de elementos nilpotentes, se construye un subgrupo G_K del grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}_K$.

(iv). Si K es finito, y excepto en algunos casos que K tenga 2 o 3 elementos, el cociente de G_K por su centro es un grupo finito simple.

Así, obtiene nuevas familias de grupos simples, 50 años después de los descubrimientos de Dickson.

El impacto de la teoría de Lie, a través del teorema de Chevalley, en la teoría de grupos es muy profundo. Por un lado, desencadenó un interés muy vivo en la búsqueda de nuevos grupos simples, resultando en el descubrimiento de varias familias, algunas de ellos variaciones de los grupos de Chevalley. Por otro lado, los métodos de la teoría de representaciones y otros aspectos de la teoría de Lie fueron adaptados a los grupos de Chevalley, obteniéndose una enorme cantidad de información.

La construcción de Chevalley fue reformulada por Kostant en 1965 en el lenguaje de álgebras de Hopf.

4.6. **Clasificación de los grupos algebraicos semisimples.** Como se dijo, Borel entregó una copia de su paper a Chevalley en el verano de 1955. En 1956, Chevalley obtiene un resultado notable: la clasificación de los grupos algebraicos lineales semisimples sobre un cuerpo $\Bbbk$ algebraicamente cerrado, independientemente de la característica de $\Bbbk$. El enunciado preciso es el siguiente:

Teorema. *Los grupos algebraicos lineales semisimples sobre* $\Bbbk$ *están en correspondencia con pares* (A, L) *donde*

- A *es una matriz de Cartan,*

- L *es un subgrupo del grupo* P *de pesos, que contiene al grupo* Q *generado por las raíces.*

Este teorema de Chevalley fue el objeto del Seminario dirigido por Chevalley en los años académicos 56-57 y 57-58 en la Ecole Normale Superieure de París. Los expositores fueron P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard y el mismo Chevalley.

Las notas del Seminario fueron accesibles únicamente en una versión mecanografiada por el Instituto Poincaré, hasta su publicación (ligeramente revisada) en 2005 por Springer-Verlag, como parte de la edición de las Obras Completas de Chevalley– gracias a los esfuerzos de Pierre Cartier.

El Seminario comienza con una exposición de la geometría algebraica necesaria para el desarrollo de la teoría de grupos algebraicos. Sin pretender siquiera esbozar la historia de la geometría algebraica en el siglo XX, es menester destacar que las bases formales de la misma estaban en esa época en discusión: diferentes alternativas se proponían como lenguaje apto para los fundamentos de esta disciplina.

El Seminario continúa con un *racconto* de los resultados de Borel en [Annals 1956].

El resultado clave, como Chevalley destacó en diversas oportunidades, es el siguiente teorema:

El normalizador de un subgrupo algebraico conexo soluble maximal (bautizado en este Seminario subgrupo de Borel *por Chevalley) de un grupo algebraico lineal conexo es él mismo.*

Según Cartier, *Chevalley a toujours dit qu'ensuite il n'y avait plus qu'à suivre la pente!*

(Borel confirma que Chevalley consideraba a este teorema como el punto clave de la demostración).

Sea ahora G un grupo algebraico lineal conexo semisimple. Como en el paper de Borel, no hay álgebras de Lie. El rol de la subálgebra de Cartan es jugado por un toro maximal T.

El primer objetivo de la prueba es asignar a G un sistema de raíces *en abstracto*. Según Cartier, este trabajo contiene la primera presentación autónoma de sistemas de raíces. Se sabe que los sistemas de raíces están clasificados por las matrices de Cartan (implícito en Killing, Cartan, van der Waerden).

A este efecto, se considera el grupo $X(T)$ de caracteres– es decir, morfismos de grupos algebraicos a valores en $GL(1, \Bbbk)$– de T. Resulta ser un grupo abeliano libre en tantos generadores como la dimensión de T.

Las raíces aparecen como los caracteres asociados a los subgrupos unipotentes conexos de dimensión 1 estables por conjugación de T.

Para demostrar que las raíces así definidas forman efectivamente un sistema de raíces que caracteriza a G, es necesario un delicado análisis de centralizadores de subtoros de T. Luego introduce el látice intermedio L.

A continuación procede a clasificar las representaciones racionales (es decir, morfismos de grupos algebraicos) irreducibles de G en términos de pesos dominantes (respecto de un subgrupo de Borel $B \supset T$). Para ello, dado un peso dominante λ, considera el espacio de secciones $W(\lambda)$ del fibrado de línea en la variedad G/B definido por λ; el cociente irreducible de $W(\lambda)$ es la representación irreducible correspondiente a λ.

Chevalley dedica los siete capítulos finales del Seminario a una laboriosa prueba de la unicidad del sistema de raíces asociado a G.

La *existencia* del grupo algebraico semisimple G asociado a un sistema de raíces no es tratada en este texto, sino que Chevalley refiere a su artículo en Tohoku que ya comentamos.

4.7. **Álgebras de Hopf.** La noción de álgebra de Hopf (conmutativa) parece natural desde el punto de vista de la dualidad álgebra conmutativa-geometría algebraica (afín).

Sea $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Recordemos que una variedad algebraica afín sobre $\Bbbk$ es el conjunto $X \subset \Bbbk^n$ de ceros comunes de polinomios $f_1, \dots, f_s$.

Gracias al teorema de los ceros de Hilbert, se tiene una equivalencia entre las categorías de variedades algebraicas afines y de $\Bbbk$-álgebras **conmutativas** finitamente generadas, sin nilpotentes.

Geometría	**Álgebra**
Espacios	Funciones
Variedad algebraica afín X	álgebra $\mathcal{O}(X)$
$f : X \to Y$ morfismo de variedades algebraicas afines	$f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ morfismo de álgebras
$X \times Y$	$\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y)$
G grupo algebraico afín	$H = \mathcal{O}(G)$ álgebra de Hopf *conmutativa*
$\cdot : G \times G \to G$ producto	$\Delta : H \to H \otimes H$ coproducto
$e \in G$ unidad	$\varepsilon : H \to \mathbb{C}$ counidad
$\iota : G \to G$ inversión	$\mathcal{S} : H \to H$ antípoda

TABLE 4. 'Geometría algebraica afín'–'álgebra conmutativa'.

Concretamente, a una variedad algebraica afín X le corresponde el álgebra $\mathcal{O}(X)$ de funciones polinomiales en X.

Si se desea formular los axiomas de grupo en términos de la correspondiente álgebra de funciones, se arriba a la siguiente definición, ver Tabla 4.

Definición. *Un álgebra de Hopf es una terna* (H, m, Δ) *que satisface*

- (H, m) álgebra asociativa con unidad 1,
- $\Delta : H \to H \otimes H$ es morfismo de álgebras (coproducto),
- Δ es coasociativa con counidad ε,
- existe $\mathcal{S} : H \to H$ "antípoda" tal que $m(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id}_H = m(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta$.

Se dice conmutativa si el álgebra subyacente lo es. Se dice coconmutativa si $\tau\Delta = \Delta$, donde $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$.

En este contexto, la categoría de grupos algebraicos afines resulta equivalente a la categoría de $\Bbbk$-álgebras de Hopf **conmutativas** finitamente generadas, sin nilpotentes.

Ejemplos.

• Si G grupo, el álgebra de grupo $\Bbbk G$, esto es el espacio vectorial de base e_g $(g \in G)$ y producto $e_g e_h = e_{gh}$, resulta un álgebra de Hopf con coproducto $\Delta(e_g) = e_g \otimes e_g$ y antípoda $\mathcal{S}(e_g) = e_g^{-1}$.

• Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, el álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$, denotada $U(\mathfrak{g})$, resulta un álgebra de Hopf con coproducto $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ y antípoda $\mathcal{S}(x) = -x$, $x \in \mathfrak{g}$.

La expresión *'algèbre de Hopf'*, aparece por primera vez en un artículo de Borel en [Annals 53] sobre la cohomología de los grupos de Lie compactos:

...la structure d'une algèbre de Hopf (c'est à dire vérifiant les conditions de Hopf) ...

Por otro lado, Borel no habla de álgebras de Hopf– ni de álgebras de funciones en un grupo algebraico– en su paper de 1956 discutido previamente.

Jean Dieudonné considera la noción de *hiperálgebra* en 1954. Su interés era la estructura del álgebra de distribuciones con soporte en la identidad de un grupo 'de Lie' en característica positiva. Se sabe que el objeto análogo en característica 0 es el álgebra envolvente de la correspondiente álgebra de Lie. Dieudonné buscaba una noción que permitiera establecer el diccionario en característica positiva: es la de hiperálgebra. En lenguaje actual, la definición de hiperálgebra es la de 'biálgebra coconmutativa'. La formalización axiomática de esta noción es debida a Cartier (1956).

En la primera mitad de la década de los 60, la estructura de las álgebras de Hopf conmutativas o coconmutativas es estudiada por Cartier, Gabriel (en el contexto de SGA), Kostant y Milnor-Moore; la relación con los grupos algebraicos está claramente presente. Se obtienen los siguientes teoremas sobre un cuerpo $\Bbbk$ algebraicamente cerrado de característica 0:

Un álgebra de Hopf <u>conmutativa</u> es el álgebra de funciones polinomiales en un grupo pro-algebraico.

Un álgebra de Hopf <u>coconmutativa</u> es el producto semidirecto de un álgebra de grupo por un álgebra envolvente de un álgebra de Lie.

A partir de 1965, se inicia el estudio de álgebras de Hopf generales, esto es, ni conmutativas, ni coconmutativas, por Sweedler (alumno de Kostant), Heyneman, Larson; y en la década del 70, Taft, Radford, Nichols.

Independientemente, el matemático soviético G. I. Kac y sus discípulos desarrollan en Kiev la teoría de C^*-álgebras de Hopf de dimensión finita– hoy conocidas como álgebras de Kac.

Ambas escuelas establecen independientemente algunos resultados básicos, a menudo similares. El objetivo no es ya una reinterpretación de resultados de teoría de Lie.

Lentamente emergen algunos ejemplos de álgebras de Hopf 'genuinas', ni conmutativas, ni coconmutativas. G. I. Kac en 1968, e independientemente Takeuchi en 1981, descubren cómo construir un álgebra de Hopf semisimple a partir de una factorización exacta de un grupo finito G: esto es, dos subgrupos F, H tales que $G = FH$, $F \cap H = e$.

En la búsqueda de ejemplos de álgebras de Hopf con antípoda de orden mayor a 2, Taft introduce en 1971 un álgebra de Hopf de dimensión N^2, a partir de un parámetro q que es una raíz de la unidad de orden 1. Es el primer ejemplo de grupo cuántico.

4.8. **Grupos cuánticos.** El descubrimiento por Drinfeld y Jimbo de los grupos cuánticos en 1983 representa un vuelco en el desarrollo de las álgebras de Hopf– como en otras áreas.

El origen de los grupos cuánticos está en trabajos de la escuela de Fadeev, en Leningrado, sobre el método de scattering inverso. Motivados por ciertas consideraciones en esa dirección, Kulish y Reshetikhin definen en 1980 un álgebra $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ que es una deformación a un parámetro del álgebra envolvente de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Casi inmediatamente, Sklyanin realiza la observación clave: el álgebra $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ admite una estructura de álgebra de Hopf, ni conmutativa ni coconmutativa.

Poco después, Drinfeld y Jimbo definen independientemente, para cada álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}$, un álgebra que es una deformación a un parámetro del álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$ y admite una estructura de álgebra de Hopf, ni conmutativa ni coconmutativa.

Ambas definiciones son esencialmente equivalentes, si bien para Drinfeld $U_\hbar(\mathfrak{g})$ es un álgebra sobre el anillo de series formales, mientras que para Jimbo $U_q(\mathfrak{g})$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$ que depende de un parámetro q.

Drinfeld acuña la expresión 'grupos cuánticos' y ofrece explicaciones y aplicaciones de los mismos en un justamente famoso artículo presentado en el ICM de Berkeley en 1986 (leído por Cartier, ya que Drinfeld no fue autorizado a salir de la Unión Soviética).

En primer lugar, interpreta con precisión a $U_\hbar(\mathfrak{g})$ como una deformación formal– en el sentido de Lichnerowicz y su escuela– del álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$. Esto lo lleva a las nociones de 'grupo de Lie-Poisson' y su versión infinitesimal 'biálgebra de Lie', en el espíritu del diccionario de Lie.

En esta dirección, Drinfeld había clasificado en colaboración con Belavin todas las posibles estructuras de 'biálgebra de Lie cuasitriangular' en un álgebra de Lie simple (1982).

Otra contribución fundamental es la construcción de soluciones de la *ecuación cuántica de Yang-Baxter*, a partir de las representaciones de dimensión finita de $U_\hbar(\mathfrak{g})$. Es funcional a su método la noción del *doble de Drinfeld*, una construcción que resultó de gran importancia en diversas aplicaciones.

Es imposible resumir todas las ideas contenidas en el artículo de Drinfeld, ni mucho menos esbozar la historia de todas las investigaciones motivadas por las mismas. Baste mencionar la construcción de ciertas álgebras de Hopf de dimensión finita $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{g})$ por Lusztig (1988), las cuales han sido estudiadas intensamente en relación con diversos problemas.

Finalmente, el decubrimiento de los grupos cuánticos ha significado un impulso decisivo a la clasificación de álgebras de Hopf de dimensión finita (o aún de 'crecimento' finito). Bajo ciertas hipótesis adecuadas, los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo, o los de Lusztig, o variaciones de los mismos, son todos los ejemplos de álgebras de Hopf.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física,
Universidad Nacional de Córdoba,
CIEM - CONICET,
(5000) Ciudad Universitaria, Córdoba, Argentina
E-mail address: andrus@famaf.unc.edu.ar
E-mail address: http://www.mate.uncor.edu/andrus