Dominique FLAMENT e Wilton BARROSO
(orgs.)

DUALIDADE ÁLGEBRA GEOMETRIA

I Escola de Verão em História Conceitual da Matemática

Dominique FLAMENT e Wilton BARROSO
(orgs.)

Dualidade Álgebra Geometria

I Escola de Verão em História Conceitual da Matemática

Brasília, 2009.
1ª Ed.

CASA DAS MUSAS

Coordenação editorial
Florence Dravet

Editoração Eletrônica LaTeX
Silvio Bezerra

Capa
Rafiza Varão

Tradução do francês
Luciane Faustino

D812 Dualidade Álgebra Geometria : I Escola de Verão em História Conceitual da Matemática / Dominique Flament e Wilton Barroso (orgs.). – Brasília : Casas da Musas, 2009.
526p. ; 21 cm

Tradutora de alguns artigos em francês: Luciane Faustino

ISBN xx-xxxxx-xx-x

1. Matemática - conceitos. 2. Álgebra. 3. Geometria. I. Flament, Dominique, org. II. Barroso, Wilton, org. III. Título.

CDU 510

Casa das Musas
http://www.casadasmusas.org.br
Telefone (61) 9238-5912

Agradecimentos

Embaixada da França no Brasil
CNRS
CAPES
CESPE/UnB
Maison des Sciences de l'Homme de Paris
Alain d'Iribarne
Rogério da Silva Lima
Timothy Mulholland
Dione Moura

Esta obra foi realizada com o apoio do Programa Escola de Altos Estudos da CAPES

Sumário

Prefácio

Implicitamente este livro começa a ser feito a partir da criação da Cátedra Charles Morazé, fruto de uma convenção entre a Universidade de Brasília, UnB e a Maison des Sciences de l'Homme de Paris, FMSH, firmada através de uma convenção internacional. O que permitiu a vinda do prof. Dominique Flament como PVE/CAPES entre fevereiro de 2007 até fevereiro de 2009.

Todo o trabalho de elaboração e concepção é fruto do nosso trabalho de parceria. O nosso objetivo foi a criação e a justificação de um ambiente fecundo de constituição de uma cultura de bases amplas em Matemática. Obviamente concebida dentro de uma perspectiva histórico-filosófica. Com efeito, sabemos que se indagássemos aos estudantes em geral quais das diferentes disciplinas lhe causariam maior temor, por certo a Matemática seria a mais citada. No entanto se partirmos de uma concepção, bem mais ampla das Ciências Humanas e Sociais, podemos encontrar um lugar para uma disciplina, que tendo como objeto uma ciência exata, a Matemática, tem como fundamento e domínio de ação, uma outra disciplina, a História. Assim essa disciplina composta, História da Matemática, não é uma disciplina de Ciências Exatas e sim de Ciências Humanas, não é Matemática de forma alguma, é História, é Filosofia da Matemática.

O interesse desta disciplina é abrir a possibilidade de uma reflexão conceitual, que pode permitir através do seu estudo e pesquisa a constituição de um solo cultural mais adequado que entre outras coisas permitiria uma diminuição significativa do temor dos estudantes pela Matemática. As tentativas de explicar o problema são várias, mas cumpre transformá-lo. Para um país como o Brasil este problema representa um sério e perverso processo de exclusão social e está em oposição às necessidades de desenvolvimento científico e tecnológico da nação. Claro, há necessidade prévia de melhorarmos a formação dos nossos professores, para se poder pretender reforçar a noção de cultura no interior de suas disciplinas, e assim minimizarmos de modo significativo e sustentável o tradicional temor dos estudantes, bem como a perversão e a injustiça. As soluções que buscamos aplicar é algo já largamente testado em países como a França e a Itália, há pelo menos 200 anos. Em nosso gesto há a vontade de que na UnB construa-se uma dinâmica semelhante. Mas para que isso seja possível, a UnB teria que se dotar de um grupo multidisciplinar de pesquisa em Epistemologia e História das Ciências Exatas, Humanas e Sociais.

Desta forma, este livro se inscreve na vontade deliberada de contribuir para a construção de uma base cultural matemática indispensável aos alunos que pretendem fazer estudos científicos. Pretende, ainda, representar um instrumento a mais para ajudar as universidades a diminuir as altas taxas de reprovação nos cursos básicos de matemática. O ensino da Epistemologia e História Conceitual da Matemática tem cumprido esse objetivos em vários países.

Aqui no Brasil, há também essa percepção, tanto assim que a Profa. Suely Druck, então Presidente da Sociedade Brasileira de Matemática, em um artigo intitulado A crise do ensino da Matemática, (Informe Matemático, RS, outubro de 2003, 4), chamava atenção para enorme diferença entre o alto nível que a Matemática Pura atinge no Brasil em meados do século XX e os baixos níveis de aprendizado em Matemática encontrados na escola secundária. Evoca, também, a necessidade de criação de um programa nacional de ensino de Matemática, quase uma cruzada, para que se possa corrigir essa tão grave distorção. Na revista FEMAT, de abril de 2004 vários professores refletem sobre o artigo da Profa. Druck, de lá emergem dados interessantes e curiosos, como por exemplo dados comparativos entre o Brasil e outros países.

Dados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, SAEB, mostram que só 6% dos alunos tem o nível conhecimento matemático desejado. No Program for International Student Assessment, PISA, o Brasil figura em último lugar, ou seja tem a pior posição no ranking de aquisição do conhecimento matemático. Podemos então falar que há um consenso na identificação do problema. A proposta que apresentamos nos parece ser, no contexto brasileiro, muito inovadora, ou seja usar a história dos erros para ensinar o progresso dos acertos.

Percebemos este problema, com bastante clareza, como sendo parte da exclusão social brasileira. A motivação fundamental da Escola de Verão e deste livro é defender a idéia de que para essas taxas alarmantes recuem em níveis próximos aos dos países desenvolvidos só tem um caminho possível, é o estudo da História conceitual da Matemática. A utilização desta disciplina permite por exemplo ao professor do ensino médio introduzir o aluno não a um saber acabado, quase que sobre humano, mas a um saber humano, sempre inacabado, e duramente construído como qualquer outro saber humano, na trágica dialética do erro *versus* acerto. Ao introduzirmos de modo sistemático a história naturalizamos o ensino, isto acontece porque o professor passará a colocar o estudante no interior de um processo que o deixa nas mesmas condições do inventor ou criador diante de sua invenção ou criação.

Resumindo, o nosso objetivo é participar na definição de um processo de desenvolvimento de uma "cultura matemática" e ao mesmo tempo contribuir com uma proposta para uma melhora do aprendizado em matemática, o recurso à História Conceitual e a Filosofia da Matemática. Os limites dessa história conceitual se situam em um período que se estende desde a Antiguidade Clássica até os primeiros anos do século XXI.

Para executar essa ambiciosa tarefa pedimos a ajuda ativa de pesquisadores e professores de reputação internacional: evidentemente, convencidos da importância e da necessidade desta iniciativa, e sobretudo que estivessem dispostos a participar. Imaginamos essa escola como uma etapa essencial para que o objetivo inicial seja atingido, por isso torna-se indispensável a participação estrangeira, já que esta fortalece toda a cadeia.

Um rápido exame do quadro histórico permite perceber o papel que desempenharam e desempenham tanto a Geometria quanto a Álgebra na constituição do campo propriamente matemático, afinal são disciplinas de referências, já que uma puxa a outra ou aparecem juntas. Na Antiguidade Clássica, é com a linguagem geométrica que se elabora o primeiro método axiomático, aquele que permite a disciplina ter uma estrutura organizada. Esse hegemonia persistirá até o surgimento da Álgebra no século IX. A partir daí ambas vão combinar e confrontar-se; admite-se que a Álgebra tornar-se-á por certo tempo o método geral, no século XVII.

Buscar a compreensão do papel da Álgebra no seus primórdios significa perceber a importância, existente desde a Antiguidade, na diferenciação entre problemas aritméticos e problemas geométricos: sejam os primeiros referentes aos números inteiros, quantidades discretas; já os segundos tocantes as quantidades coníinuas ou seja os segmentos (assumindo o papel de números reais em fins do século XIX). Os métodos são atribuições das duas disciplinas, na Antiguidade assumem papéis claramente diferentes. Por exemplo, nos Elementos, Euclides apresenta uma teoria das proporções aplicável às quantidades contínuas, evidentemente distinta da teoria referente aos números, desenvolvida nos três livros de Aritmética. Ainda hoje, compreender o papel destas duas teorias no interior dos Elementos de Euclides é um objeto precioso de estudos para historiadores da Matemática.

A necessidade de unificar sob um mesmo arcabouço teórico os métodos que permitem resolver os diferentes problemas, aritméticos ou geométricos, levou os matemáticos a elaboração de uma teoria independentemente do seu campo de aplicação. Tomemos como exemplo o caso da primeira teoria das equações apresentada por al-Khwarizmi, por volta de 830 de nossa era. Matemáticos atacavam os mesmos problemas por vias diferentes, algébrica e geométrica. As duas disciplinas rivalizavam sem no entanto chegarem a se excluir. É precisamente o que acontece no caso dos chamados problemas sólidos, são chamamos assim problemas geométricos do século V, que tem correspondência com as equações do terceiro grau, foi percebendo tal correspondência que al-Khayyam conseguiu elaborar, na virada do século XI para o XII, a primeira teoria "completa"́das equações. Por causa das curvas cônicas e pela introdução rigorosa de uma unidade de medida, poder-se-á traduzir geometricamente as equações cúbicas. As relações entre curvas e equações, pouco a pouco, aparecem mas, sem duvida, é com Descartes que desvendará toda a sua importância.

A dualidade entre Álgebra e Geometria sempre foi uma tensão essencial na Matemática. Entretanto só assumirá realmente sua efetiva parte de "violência"́, após o famoso episódio da irracionalidade, na Geometria de Descartes. Ainda hoje, eruditos debatem se essa obra de Descartes se trata de um livro de Álgebra ou Geometria. No entanto, concordar-se-á com muitos outros que consideram-na misturadas e de difícil separação neste contexto. A "Aplicação da Álgebra à Geometria" cria vínculos, exacerbando ao mesmo tempo a sua diferença, análise e síntese; fazendo do lugar geométrico ocupado pela identidade do objeto matemático. Palavra e imagem, língua e figura combinam-se e desafiam-se, como um "anfíbio entre o Ser e o não Ser", tal como dizia Leibniz: dever-se-á esperar muito tempo a sua "realização" como figuração geométrica; quando crer-se tê-lo atingido, verifica-se que é apenas um resultado insatisfatório de uma Geometria euclidiana maltratada. Precisar-se-á mais ainda da ajuda exclusiva do algébrico para conseguir-se o pleno figurar em matemática; tornando-se assim igualmente "possível" como "número" ou "entidade geométrica", tanto quanto aqueles que são classificados como reais. Contudo a segurança de Gauss, criticada por Bolyai, que sempre chama a atenção para a parte tomada pela Geometria da Aritmética, o que não afasta de modo algum a sua reserva: Gauss continua se interrogando sobre a "natureza metafísica" da $\sqrt{-1}$ Os sucessos tão celebrados de Hamilton não impediram os excessos de Cauchy: que insiste no caráter simbólico de $\sqrt{-1}$, mas seguidamente o repudia também em favor de outra designação menos escandalosa, para finalmente admitir não sem provocação e deslealdade, a designação de uma "quantidade geométrica". Com efeito, entendia assim uma entidade muito geral:

> "[...] a noção de quantidade geométrica compreenderá, no caso específico, a noção de quantidade algébrica, positiva ou negativa, e por uma razão mais forte, a noção de quantidade aritmética ou de número, fechada em si mesmo, como no caso particular, na noção de quantidade algébrica. " (Mémoire sur les quantités géométriques, 1847)

O vai-e-vem entre a figura e a sua tradição discursiva é, por vezes, estéril, assim uma nova tradição desta vez geométrica não pode então restituir aquilo que é idêntico, o que suscita muitas dúvidas e debates apaixonados. Cálculo geométrico, cálculo direto sobre os objetos geométricos ... refugo das coordenadas entendidas como externas e estrangeiras aos objetos geométricos; grupos de transformação, seguidamente grupos "abstratos ", vão caracterizar Geometrias, invarianças, propriedades intrínsecas...; Geometrias "não-euclidianas" e teorias do espaço; Geometrias riemanniana, diferencial, complexa, symplética, não-comutativa, ... Cálculo baricêntrico, Teoria da grande extensão (lineale Ausdehungslehre) , de onde resultam os cálculos externo e vetor abstrato (elemento de um espaço vetorial) assim como outros tesouros que ainda estão por serem explorados; Cálculo de quaternions e o advento do cálculo vetorial resultante de uma "geometrização"; Álgebras lineares e multilineares, Álgebra geométrica, Geometria vetorial, Cálculo geométrico ...

Perguntas subsistem: falar de "Geometria sem figuras" continua sendo um tema atual, mas aquilo que diz hoje Pierre Cartier não pode ser mais entendido na mesma perspectiva daquilo que entendia Lagrange no século XVIII. Questionar-se ainda hoje se é ou não necessário ensinar-se "Geometria elementar" na escola, já que a Álgebra linear a "substitui" com vantagem, vista aqui como fruto de uma observação involuntária e provocante formulada há varias décadas por Jean Dieudonné, mas que não tem mais hoje lugar em um contexto que evoca Alain Connes. Outras perguntas vem progressivamente se juntar a estas e que levam deliberadamente a questão sobre do conceito de "espaço", a questão sobre a "natureza", sobre aquilo que é necessário entender por "Geometria", por objeto"geométrico" (pode-se evocar também "idealidades matemáticas" e interrogar-se como as apreender ...) e perguntar-se sobre o que é a "realidade". Avançando ainda mais, poderemos perceber que se trata apenas do aspecto muito elaborado e ilustrativo da pergunta: podemos interpelar a dualidade Álgebra/Geometria? Isso nos permite generalizar a noção de forma geométrica, podemos obter aquilo que chamamos de um esquema (uma teoria induzida por Alexandre Grothendieck e Jean-Pierre Serre nos anos 60 do século passado).

Previamente, ainda se faz necessário buscar o entendimento daquilo que Álgebra e Geometria querem dizer, alternadamente "anjo" ou "demônio", juízo este que depende diretamente das convicções e/ou embaraços dos matemáticos. Desta forma, aquilo que escrevera a sua maneira e ao seu tempo Hermann Weyl continua a prevalecerem em nossos dias. Alain Connes o desafia magistralmente em seu admirável artigo "A View of Mathematics", nos primeiros anos do século XXI, e recorda a importância de situações referentes a dualidades, particularmente as bem sucedidas, frutuosas e as que são promessas entre a tensão essencial Álgebra e Geometria. Retenhamos, entretanto, nos dirigindo ao leitor, que o exemplo de simplicidade de resultado na Geometria plana de Frank Morley (1899), basta para nos convencer, caso houvesse necessidade, que esta tensão entre Álgebra e Geometria continua essencial e vital para ambas as disciplinas, cujas atividades evocam a perpétua transformação, definição e devir. Álgebra e Geometria ainda provocam reflexões sobre a possibilidade de sua "fusão", ou ainda de um outro extremo, igualmente dramático, segundo o qual não seria possível sequer imaginar uma tomando definitivamente as rédeas sobre a outra.

Do ponto de vista do ensino secundário, muitas experiências pedagógicas permitiram observar que os progressos efetuados pelos alunos são consideráveis, quando se ajuda a estabelecer de modo muito explicito um ponto entre a Álgebra e a Geometria.

As conferências bem como os cursos oferecidos para esta primeira Escola de Verão propõem uma gama abundantemente rica de situações exemplares sobre a questão da dualidade Álgebra-Geometria. Trazendo, por assim dizer, um forma de conhecimento e uma forma de compreensão, fusionados com os princípios que constituem a alma da atividade dos matemáticos e do curso da história, da mais antiga até a mais recente. Por isso, imaginamos, que servirão como os primeiros passos em direção da constituição de uma verdadeira cultura matemática, indispensável e ao mesmo tempo desafio essencial para a formação de futuro matemático.

Brasília,
Escola de Verão 2008

Dominique Flament
Wilton Barroso
Organizadores

Capítulo 18
Dos grupos de Lie aos grupos quânticos

Nicolás Andruskiewitsch

Universidade Nacional de Córdoba, Argentina

18.1 Introdução

18.1.1 Grupos e simetrias

Um dos conceitos básicos da matemática é a Noção de *equivalência* $\equiv$ relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Dado um conjunto X munido de uma relação de equivalência $\sim$, costuma ser importante contar com invariantes de $\sim$, isto é, funções em X invariantes nas classes de $\sim$.

Se considerarmos o conjunto G de todas as bijeções de X em si mesmo invariantes por $\sim$ (as *simetrias* de $\sim$) vemos que G é estável por *composição* e por obter inversa. Em outras palavras, G é um *grupo*.

Por outro lado, sejam G um grupo e X um conjunto munido de uma *ação* de G:

$$\cdot : G \times X \to X.$$

Assim, temos uma relação de equivalência em

$$X \colon x \sim y \iff \text{existe } g \in G : g \cdot x = y.$$

As várias aplicações dos grupos nas diferentes áreas da matemática são produzidas através de suas ações em diversos conjuntos munidos de estruturas adicionais.

Exemplo:

- $X = \mathbb{A} =$ conjunto de números algébricos.

- $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{A}, \mathbf{Q})$ conjunto de bijeções de $\mathbb{A}$ que preservam soma e produto.

- $f \in \mathbf{Q}[T]$ um polinômio mônico irredutível.

- $\mathscr{O} =$ conjunto de raízes em $\mathbb{A}$ de f.

O grupo de Galois de f é o conjunto de bijeções de $\mathscr{O}$ que provém de G. O estudo das raízes de f é reduzido ao estudo do grupo de Galois de f.

Esse exemplo foi considerado por Evariste Galois em 1828, em sua explicação a respeito da impossibilidade de resolver equações de grau cinco por radicais. A introdução através de Galois da noção de grupo poderia ser considerada, junto com a descoberta de geometrias não euclidianas por Lobachevski e Bolyai, como o marco fundacional da matemática moderna.

Os exemplos fundamentais de grupo são:

- Dado um conjunto X, o grupo $\mathbb{S}_X$ de todas as bijeções de X em si mesmo. Se $X = \{1, \dots, n\}$ indica simplesmente $\mathbb{S}_n$.

- O grupo $GL(n, \Bbbk)$ de matrizes $n \times n$ com coeficientes em um corpo $\Bbbk$.

Uma *representação* de um grupo G é um morfismo de grupos $\rho : G \to GL(n, \Bbbk)$. Há equivalências entre:

- ações de G em X e morfismos de grupos $\rho : G \to \mathbb{S}_X$;

- ações *lineares* de G em $\Bbbk^n$ e representações $\rho : G \to GL(n, \Bbbk)$.

Três aspectos fundamentais da teoria de grupos estão intimamente relacionados:

$$
\begin{tikzcd}
& \text{estrutura de um grupo } G \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\text{ações de } G \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{representações de } G
\end{tikzcd}
$$

Algumas palavras-chave: *Linearização, Conjugação e Indução.*

No caso dos grupos de Lie semi-simples complexos, o estudo desses aspectos é conduzido por certos objetos combinatórios descobertos por W. Killing, codificados atualmente pelos chamados *diagramas de Dynkin*.

Os diagramas de Dynkin intervir na:

- Classificação de grupos finitos de deslocamentos.
- Classificação de grupos algébricos sobre um corpo algebricamente fechado (qualquer característica).
- Classificação de grupos finitos simples.
- Classificação de álgebras de Hopf.

Além disso, aparecem no estudo de:

- Singularidades (e por seu intermédio têm relações com os poliedros regulares).
- Teoria de representações de álgebras associativas de dimensão finita.
- Teoria de álgebras cluster (cluster algebras).

O objetivo dessa série de conferências aos cuidados de um leigo da história das matemáticas é apresentar a evolução dos diferentes papéis que os diagramas de Dynkin têm representado em problemas de classificação.

18.2 Nascimento da teoria de Lie

A teoria de grupos e álgebras de Lie foi criada por Sophus Lie no inverno boreal de 1873-4 e desenvolvida em uma série de artigos, que culmina na publicação de um tratado em três volumes, junto com Engel.

Hoje entendemos por *grupo de Lie* um grupo munido de uma estrutura de variedade diferencial, tal que o produto e a inversão são transformações diferenciais. *Ditos* para grupos de Lie complexos, substituindo “diferencial ”por “analítico ”. No entanto, Lie trabalhava com definições mais informais. Depois de apresentar os exemplos mais comuns de grupos de Lie, esboçaremos as motivações de Lie e seus principais resultados.

18.2.1 *Exemplos de grupos de Lie*

- Se V é um espaço vetorial (real ou complexo), então $(V,+)$ é um grupo de Lie abeliano.
- A propósito da multiplicação, $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} - 0$ é um grupo de Lie abeliano.
- Um produto de n cópias de $\mathbb{C}^{\times}$ também é um grupo de Lie abeliano, chamado o toro n-dimensional.
- Os grupos de matrizes inversíveis $GL(n,\mathbb{C})$, $GL(n,\mathbb{R})$.

  Subgrupos fechados dos anteriores:

- O grupo $SL(n,\mathbb{R})$ de matrizes reais cujo determinante é um.
- O grupo $SL(n,\mathbb{C})$ de matrizes complexas cujo determinante é um.
- O grupo de matrizes inversíveis triangulares superiores e o subgrupo do mesmo de matrizes com 1's na diagonal.
- O grupo ortogonal $O(n,\mathbb{C})$ (de matrizes complexas inversíveis que preservam uma forma bilinear simétrica não-degenerada). Também:
- $SO(n,\mathbb{C}) = O(n,\mathbb{C}) \cap SL(n,\mathbb{C})$;
- $O(p,q)$ (grupo de matrizes inversíveis reais que preservam uma forma bilinear simétrica não-degenerada de código (p,q)).
- $SO(p,q) = O(p,q) \cap SL(n,\mathbb{R})$.
- O grupo simplético $Sp(n,\mathbb{C})$ (de matrizes que preservam uma forma bilinear antissimétrica não-degenerada).
- O grupo de automorfismos de uma álgebra de dimensão finita.

18.2.2 *Sophus Lie*

Sophus Marius Lie finaliza seus estudos de doutorado em Cristiania (Oslo) em 1865, mas decide tornar-se um matemático profissional dois anos mais tarde. Com uma bolsa de estudos do governo da Noruega viaja em 1869 a Berlim, onde conhece Felix Klein, que representará um papel muito importante em sua vida e no desenvolvimento de sua obra.

Na primavera de 1870 viajam a Paris, onde entre outros, encontram-se Camille Jordan, autor de *"Traité des substitutions et des équations algébriques"* (Tratado de substituições e equações algébricas), primeira obra dedicada à teoria de Galois; e Gaston Darboux. Em julho de 1870, devido à guerra franco-prussiana, Klein deve voltar à Alemanha, enquanto Lie - um fanático por caminhadas - decide voltar à Noruega … depois de uma excursão a pé à Itália.

É detido no caminho por autoridades francesas, que confundem seus textos matemáticos com relatórios militares e suspeitam que seja um espião. Liberado por intercessão de Darboux, volta à Noruega onde redige duas novas descobertas (obtidas em parte na prisão) e apresenta sua tese de doutorado em 1871. Em 1872, a Assembléia Nacional da Noruega cria uma cátedra de matemática para ele, para que possa se dedicar totalmente à pesquisa nos anos seguintes. Em 1874 começa a publicar seus resultados em grupos de transformações (atualmente, grupos de Lie), principalmente em revistas norueguesas. Até 1884 já obtém os principais resultados da teoria, que é pouco conhecida por estar dispersa em publicações de pouca circulação - e em grande parte inédita.

Seus colegas Klein e Mayer (da Universidade de Leipzig) lhe propõem que redija um tratado e sugerem a ajuda do jovem Friedrich Engel, que viaja à Cristiania em 1884 onde permanece nove meses junto com Lie. Em 1886 Klein troca Leipzig por Göttingen e convence Lie a segui-lo; este aceita para que continue a formulação do tratado junto com Engel, naquele momento em Leipzig. Os três volumes surgem em 1888, 1890 e 1893. Lie recebe em Leipzig vários estudantes, muitos deles enviados da França por Picard, Poincaré e Darboux. No entanto, o acúmulo de trabalhos acadêmicos - muito superior ao da Noruega - provoca nele um colapso nervoso em 1889 do qual nunca se recuperou completamente. Em 1898, volta finalmente à Cristiania, onde falece em fevereiro de 1899.

18.2.3 *Motivações de Lie*

De acordo com Hawkins, podemos distinguir dois tipos de motivações no pensamento de Lie:

$$\text{Origens da teoria de Lie}\begin{cases}\text{Geométricos}\\ \\ \text{Analíticos}\end{cases}$$

As origens geométricas abrangem uma série de reflexões e trabalhos de Lie, em parte junto com Klein.

Essas reflexões concluem-se na necessidade de considerar “grupos contínuos ” (por oposição aos grupos discretos na teoria de Galois).

18.2.3.1 Complexos de linhas

Em 1869, Lie escreveu um trabalho sobre complexos de linhas. O conjunto $\mathscr{L}$ de linhas no espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ é um espaço geométrico cujos elementos podem ser parametrizados assim. Se $x = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ e $y = (y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$ são pontos distintos de uma reta , então as coordenadas de Plücker de ℓ são $p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$. De modo que $\mathscr{L}$ se identifica com os pontos de $\mathbb{P}^6$ que satisfazem a equação $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$. Um complexo de linhas é um conjunto de retas cujas coordenadas satisfazem, além disso, uma relação homogênea adicional.

Lie estudou um complexo de linhas $\mathscr{T}$ associado a um tetraedro Δ. A originalidade de seu enfoque apóia-se no que considerou para ele o conjunto $\mathfrak{G}$ de todas as transformações projetivas de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ que estabelecem os vértices de Δ. Resulta que $\mathfrak{G}$ é um grupo abeliano "de três parâmetros ", que atua em forma simplesmente transitiva nos pontos de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ em posição geral. O estudo das órbitas de G permite a Lie obter resultados geométricos sobre o complexo $\mathscr{T}$.

É essencial para as demonstrações que G seja comutativo.

18.2.3.2 W-curvas

Antes de seu encontro com Lie em Berlim, Felix Klein (1848 - 1925) também tinha publicado um trabalho sobre complexos de linha. Klein foi estudante de Plücker (1801-1868) em Bonn e depois de Clebsch (1833-1872) em Göttingen. Nessa última universidade tinha assistido a seminários de Jordan sobre grupos e teoria de Galois.

Em Berlim, Klein e Lie entraram em contato em função de seus interesses comuns e iniciaram uma proveitosa colaboração. Em dois artigos publicados em Comptes Rendus (1870), definem as assim chamadas W - curvas *a partir* de um grupo abeliano "de um parâmetro " $\mathfrak{H}$.

Em anotações atuais, $\mathfrak{H} = \{\exp \lambda A : \lambda \in \mathbb{C}\}$ onde A é uma matriz 4×4; Klein e Lie explicam pela primeira vez que o grupo "contínuo " $\mathfrak{H}$ é obtido a partir da "transformação infinitesimal " $x \mapsto x + dx$, com $dx = Ax d\lambda$. De fato, $\mathfrak{H}$ consiste nas soluções do sistema de equações diferenciais associado à transformação infinitesimal.

Se A é diagonalizável, $\mathfrak{H}$ resulta em um subgrupo do grupo $\mathfrak{G}$ associado ao tetraedro cujos vértices são os autovetores de A.

Em outros trabalhos são desenvolvidos mais exemplos de famílias de objetos geométricos obtidas a partir de grupos abelianos "contínuos " de 1, 2 ou 3 parâmetros, um desses trabalhos publicado em Math. Annalen (1871) e outro inédito. No manuscrito inédito, Klein supõe que, para descrever todas as configura-ções possíveis no espaço dessa forma, deve-se resolver a classificação de todos os grupos "contínuos lineares abelianos que atuam no espaço ".

18.2.3.3 Grupos contínuos como análogos de grupos de Galois para equações diferenciais

Lie interessou-se em outros problemas geométricos emanentes do complexo de linhas $\mathscr{T}$, que pode expressar em termos de equações diferenciais parciais de primeira ordem

$$f(z,x,y,p,q) = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

O grupo $\mathfrak{G}$ atua no conjunto de soluções da equação, o que permite a Lie resolvê-la. Klein, interado desse método de Lie, observou a analogia entre o mesmo e os trabalhos de Abel sobre equações polinomiais abelianas - cujos grupos de Galois são abelianos.

Lie recebe essa idéia com entusiasmo, por ser compatível com suas pesquisas.

18.2.3.4 O programa de Erlangen

Em 1871, enquanto Lie estudava as relações entre objetos geométricos e sistemas de equações diferenciais, Klein amadurecia suas reflexões a respeito de geometrias não-euclidianas, que culminam no programa de Erlangen. Em síntese, o mesmo postula que "uma geometria consiste em uma variedade munida de um grupo contínuo de transformações ". Esse ponto-de-vista - enriquecido pelo intercâmbio com, e pelos trabalhos de, Lie, por exemplo, na "correspondência entre retas e esferas " - implica implicitamente no problema de classificação dos grupos contínuos lineares que atuam no espaço n-dimensional. No entanto, nem Klein, nem Lie prosseguem nessa direção; é necessário ainda que Lie absorva outro ingrediente fundamental para sua teoria.

18.2.3.5 A teoria de integração de Jacobi

O ingrediente fundamental que permitiria a Lie lidar com os grupos "contínuos " não-comutativos surge dos trabalhos de Jacobi sobre integração de uma equação diferencial parcial na função incógnita z

$$F\big(x_1,\ldots,x_n,\frac{\partial z}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\big)=0. \tag{18.1}$$

Para estudar (1), Jacobi considerou funções em $2n$ variáveis $x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n$. O colchete de Poisson de duas funções holomorfas u e v é

$$(u,v):=\sum_{1\leq i\leq n}\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}. \tag{18.2}$$

O colchete (2) é antissimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi:

$$((u,v),w)+((w,u),v)+((v,w),u)=0.$$

Jacobi observa que a integração de (1) simplifica-se se existe uma função u tal que $(F,u)=0$; quanto mais funções com essa propriedade, mais simples é a integração de (1). Observemos que, se v é outra função que satisfaz $(F,v)=0$, também (u,v) o faz, devido à identidade de Jacobi.

Isso leva à busca de famílias de funções $u_1,\ldots,u_s$ tais que $(u_i,u_j)=\Omega_{ij}(u_1,\ldots,u_s)$, com Ω_{ij} analítica em s variáveis. Particularmente, se $(u_i,u_j)=\sum_k c_{ij}^k(x_1,\ldots,x_n)u_k$ então os u_i's geram uma álgebra de Lie - que Lie chamava de um *grupo de funções*.

18.2.3.6 Os grupos contínuos de transformações

Os grupos contínuos finitos (por depender de um número finito de parâmetros) ou de transformações consideradas por Lie eram "locais ". Vejamos como os concebia. Sejam

U um aberto de $\mathbb{C}^n$ e V uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^p$. Para Lie, um grupo contínuo G é um conjunto de transformações locais de U parametrizadas por V. Isto é, existem funções holomorfas $f_1, \ldots, f_n$ em $U \times V$ tal que

$$x \xmapsto{\quad g_a \quad} f(x,a),$$

$a \in V$, é uma transformação local de U - leva um aberto de U em outro (que depende de a). Além disso, existem funções holomorfas $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ em $V \times V$ tal que

$$g_b(g_a(x)) = g_{\varphi(a,b)}(x).$$

Lie define transformações infinitesimais, mediante derivadas a propósito de a na origem, em $b = 0$. Logo mostra que o grupo gerado por uma transformação infinitesimal (as soluções do sistema associado de equações diferenciais) está contido em G.

O espaço vetorial $\mathfrak{g}$ consistente nas transformações infinitesimais assim obtidas resulta em uma álgebra de Lie, em linguagem moderna.

Lie estabelece um “dicionário ” entre grupos de Lie e álgebras de Lie, que lhe permite reduzir problemas geométricos - inerentes aos grupos “contínuos ” - em problemas algébricos. Particularmente, o problema de classificação.

18.2.4 Fundamentos: grupos e álgebras de Lie

Antes de explicar os teoremas fundamentais de Lie que constituem a base do “dicionário ”, lembremo-nos um pouco da terminologia.

18.2.4.1 Álgebras de Lie

.

Lembremo-nos que uma álgebra de Lie é um espaço vetorial munido de uma operação bilinear $(X,Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightsquigarrow [X,Y] \in \mathfrak{g}$ (chamada de colchete de Lie), que é antissimétrica e satisfaz a identidade de Jacobi:

$$[X,Y] = -[Y,X], \tag{18.3}$$
$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]], \tag{18.4}$$

para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

Lie trabalhava primordialmente com espaços vetoriais complexos; apesar de a definição anterior ser pertinente sobre qualquer corpo.

18.2.4.2 Exemplos de álgebras de Lie

- Se V é um espaço vetorial, então V é uma álgebra de Lie a propósito do colchete nulo, chamada *abeliana*.
- Os espaços de matrizes $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n\times n}$, com o colchete $[A,B] = AB - BA$; analogamente $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.
- As subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, por exemplo $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ =espaço de matrizes de traço 0.
- O espaço de derivações de uma álgebra A, não necessariamente associativa; isto é,

$$A = \{T : A \to A \text{ linear } / T(xy) = T(x)y + xT(y)\}.$$

Vimos que Lie associava a um grupo de Lie G o espaço $\mathfrak{g}$ de suas transformações infinitesimais, que é em linguagem moderna o espaço tangente a G no elemento neutro. O resultado fundamental de Lie é:

Teorema fundamental de Lie. *Se G é um grupo de Lie, o espaço $\mathfrak{g}$ de suas transformações infinitesimais é uma álgebra de Lie de dimensão finita, com o colchete de operadores diferenciais.*

Reciprocamente se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita, então define um grupo de Lie (gerado pelos grupos uniparamétricos correspondentes aos sistemas de equações diferenciais definidos pelos elementos de $\mathfrak{g}$).

De fato, Lie mostra que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *determina* o grupo G - apesar de esse resultado dever ser interpretado localmente: dois grupos de Lie com álgebras de Lie isomorfas têm vizinhança da identidade isomorfos, tal que o isomorfismo preserva o produto. Por outro lado, Lie apenas considerava grupos de Lie *conexos* (na linguagem atual), de modo que o Teorema fundamental reduz o estudo dos grupos de Lie ao estudo das álgebras de Lie.

Na verdade, as noções topológicas necessárias para uma descrição adequada das sutilezas inerentes ao "dicionário " foram desenvolvidas apenas no começo do século XX.

Observemos também que Lie não distinguia terminologicamente entre um grupo de Lie e sua álgebra de Lie.

Seja $\mathfrak{g}$ um espaço vetorial de dimensão finita n. Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma base de $\mathfrak{g}$. Uma aplicação bilinear $[\,,\,]$ em $\mathfrak{g}$ está determinada por seus *coeficientes de estrutura* ${c_{ij}}^k$: $[x_i, x_j] = \sum_k {c_{ij}}^k x_k$. Então$[\,,\,]$ é um colchete de Lie se e somente se

$${c_{ij}}^k = -{c_{ji}}^k, \tag{18.5}$$

$$\sum_{1\le s\le n} {c_{ik}}^s {c_{sj}}^t + {c_{kj}}^s {c_{si}}^t + {c_{ji}}^s {c_{sk}}^t = 0, \tag{18.6}$$

para todos $1 \le i, j, k, t \le n$. Assim, o problema de classificar as álgebras de Lie reduz-se ao problema de encontrar as soluções de (18.5) e (18.6), *a menos de isomorfismos*. Lie confiava que esse problema algébrico seria mais acessível.

O "dicionário " completa-se com o seguinte resultado.

Teorema. *Se G é um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ é sua álgebra de Lie, então existe uma correspondência bijetiva entre os subgrupos de Lie conexos de G e as subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$; sob a mesma, os* *subgrupos normais correspondem aos ideais de Lie.*

A seguir, Lie define: um grupo de Lie G é *simples* se sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ não admite ideais próprios não-nulos (atualmente pede-se que a dimensão de $\mathfrak{g} > 1$). Nesse caso $\mathfrak{g}$ é dito simples. A consideração de grupos *simples* permite esboçar um procedimento indutivo na consideração de equações diferenciais.

18.2.4.3 Álgebras de Lie simples

Lie conhece as seguintes (a anotação de tipos deve-se a Killing):

Tipo A. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ = espaço das matrizes $n \times n$ de traço 0. É a álgebra de Lie do grupo $SL(n,\mathbb{C})$.

Tipos B e D. $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ = espaço das matrizes antissimétricas $n \times n$ (tipo B se n for ímpar, tipo D se n for par). É a álgebra de Lie do grupo $SO(n,\mathbb{C})$.

Tipo C. A álgebra de Lie do grupo $Sp(2n,\mathbb{C})$ = matrizes inversíveis que preservam uma forma bilinear antissimétrica.

Motivado por seus trabalhos em equações diferenciais, Lie define uma classe especial de álgebras de Lie - atualmente chamadas *solúveis*:

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel se admite uma base $X_1,\dots,X_m$ tal que $[X_i,X_k]$ é combinação linear de $X_1,\dots,X_{k-1}$, para todos $i < k$.

Teorema de Lie. *Se $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ é uma álgebra de Lie solúvel, então existe uma base $v_1,\dots,v_n$ de $\mathbb{C}^n$ tal que, para todos $1 \le j \le n$ e $X \in \mathfrak{g}$*

$$X(v_j) \text{ é a combinação linear de } v_1,\dots,v_j,$$

Nas aplicações em equações diferenciais desenvolvidas por Lie, as álgebras de Lie solúveis permitem respostas particularmente simples. Por outro lado, a noção de álgebra de Lie solúvel e o correspondente Teorema são importantes no desenvolvimento posterior da teoria.

18.2.5 Wilhelm Killing

Como vimos, a classificação dos "grupos contínuos " ocupava um papel primordial nas considerações tanto geométricas quanto analíticas de Lie. Ele mesmo classificou os "grupos contínuos " de dimensão 1, 2, 3. No entanto, foi Wilhelm Killing (1847 - 1923) que obteve o resultado mais significativo nesse sentido, um dos teoremas mais admirados de todos os tempos. Comecemos por uma resenha da vida de Killing e de como chegou a esse problema.

Killing inicia seus estudos universitários em Münster em 1865, mas inclinado a aprender matemática, passa na Universidade de Berlim dois anos depois - não havia matemáticos em Münster. Sua intenção era fazer carreira como professor de um *Gymna-*

sium (escola). Em Berlim, o centro da matemática na Alemanha nesse momento, estavam Kronecker, Kummer e Weierstrass, que coordenavam seus cursos para dar uma sólida formação aos estudantes de matemática. Especialmente este último exerceu uma grande influência sobre Killing, que participou de seus cursos e escreveu sua tese de doutorado sob sua orientação.

Weierstrass tinha desenvolvido a teoria de divisores elementares, motivado pelo problema de classificação de formas bilineares. Seus resultados implicam na forma canônica de uma matriz, resultado obtido independentemente por Jordan alguns anos mais tarde (a forma de Jordan). A tese de Killing trata sobre a interpretação geométrica da teoria de divisores elementares.

A influência de Weierstrass sobre Killing não é apenas temática, mas também metodológica. Weierstrass liderava a reação contra o pensamento genérico predominante, que favorecia os resultados "genéricos ", isto é, descartava os casos particulares. Por exemplo, genericamente "toda matriz complexa é diagonalizável ". Killing, naturalmente, adere à posição de Weierstrass.

Killing, durante o ano letivo de 1870-1, leciona em um colégio do povoado de seu pai. Defende sua tese em 1872. Permanece em Berlim e participa do seminário de Weierstrass, que trata nesse semestre da geometria não-euclidiana. Trabalha como professor de um *Gymnasium* (escola) em Berlim até 1878; depois em Brilon até 1880, quando é nomeado professor em um Liceu (escola de Ensino Médio no Brasil) para futuros clérigos em Braunsberg (hoje Braniewo, Polônia). Durante esse tempo, seu interesse matemático nas geometrias não-euclidianas não diminui; exercem grande influência sobre seu pensamento os ensaios de Riemann e Helmholz. Lê os artigos de Klein e de outros, discute com Weierstrass e publica trabalhos sobre o tema.

Em 1884, apresenta *Erweiterung des Raum Begriffes*, livro no qual postula como objeto da geometria os "espaços de formas ". Isso é uma variedade analítica real de dimensão n munida de m transformações infinitesimais. Certas considerações heurísticas levam-no a introduzir a noção de *álgebra de Lie*. No espírito da escola de Berlim, principalmente de Weierstrass, propõe-se a adotar o ponto-de-vista mais geral possível. Isso o conduz ao problema de classificar as álgebras de Lie reais de dimensão finita. Nesse sentido, já em 1884 tinha obtido alguns resultados parciais sob três hipóteses I, II e III, que discutiremos mais para frente.

Klein recebe uma cópia do livro e previne Killing sobre os trabalhos de Lie. Killing escreve para Lie e lhe pede cópias de seus trabalhos, pois tem acesso apenas a dois publicados em Math. Annalen. As respostas de Lie são sucintas e Killing entra em contato através de cartas com Engel em novembro de 1885. Absorvido por suas tarefas no Liceu, ele tem pouco tempo para levar adiante suas pesquisas. No entanto, avança na classificação as álgebras de Lie de dimensão finita. Sob a influência dos trabalhos de Lie e a correspondência com Engel, concentra-se nas *complexas simples*.

Discute seus trabalhos com Engel, que inciste que ele publique seus resultados. Relutante a isso, pois as provas estão incompletas, envia, entretanto, uma série de quatro artigos a Klein, editor de Math. Annalen, revista na qual aparecem entre 1889 e 1890.

Em 1892, Killing é nomeado professor da universidade de Münster, onde permanecerá o resto de sua vida. Recebe o Prêmio Lobachevski em 1897. No entanto, nunca mais se dedicará às álgebras de Lie: ocupa-se de problemas de geometria e pedagogia. Perde um filho na Primeira Guerra Mundial; sua tristeza profunda afeta sua saúde e então morre em 1923.

18.2.6 *Álgebras de Lie semi-simples*

Vejamos agora um resumo dos trabalhos de classificação de Killing e como foram completados por Elie Cartan. Para isso, é necessário apresentar sucintamente a classificação das álgebras de Lie simples de dimensão finita em linguagem atual.

Lembremo-nos que Lie define um grupo de Lie G simples como aquele cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ não admite ideais próprios não nulos e, além disso, a dimensão de $\mathfrak{g} > 1$.

Seja então $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa simples de dimensão finita. A representação adjunta de $\mathfrak{g}$ é a transformação linear $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}\mathfrak{g}$ dada por

$$\operatorname{ad}(X)(Y) := [X,Y], \quad X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Observemos que 0 sempre é autovalor de $\operatorname{ad}X$. Dizemos que X é *semi-simples* se $\operatorname{ad}X$ é diagonalizável.

A primeira noção-chave é a de *subálgebra de Cartan*: é uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que verifica

- se todos os seus elementos são semi-simples,
- se for abeliana (isto é, $[X,Y] = 0$ para todos $X,Y \in \mathfrak{h}$);
- se for maximal a propósito dessas duas propriedades.

Sabe-se que existem subálgebras de Cartan e que são únicas exceto automorfismos.

A dimensão k de $\mathfrak{h}$ chama-se a *característica* de $\mathfrak{g}$.

A idéia básica de Killing é considerar a decomposição *simultânea* de $\mathfrak{g}$ em auto-espaços a propósito de todos os elementos de uma subálgebra de Cartan.

Dada uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, são considerados auto-espaços generalizados: se $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, é

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} : [H,X] = \alpha(H)X, \quad H \in \mathfrak{h}\}.$$

Aqueles $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \neq 0$, tal que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ se chamam as *raízes* de $\mathfrak{g}$. Então

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \,\text{raíz}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

É possível demonstrar que $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, se α é raiz.

Se $\alpha \neq \beta$ são raízes, então existem inteiros não negativos r, s tal que

$$\{j \in \mathbf{Z} : j\alpha + \beta \text{ es raíz}\} = \{j \in \mathbf{Z} : -r \leq j \leq s\},$$

e se define $a_{\alpha\beta} = r - s$; e, além disso, que $a_{\alpha\alpha} = 2$. Os números $a_{\alpha\beta}$ chamam-se os *inteiros de Cartan* de $\mathfrak{g}$.

Existem também, raízes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$que formam uma base de $\mathfrak{h}^*$ com propriedades "especiais ". A matriz $(c_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$, onde $c_{ij} := a_{\alpha_i \alpha_j}$ chama-se a *matriz de Cartan* de $\mathfrak{g}$.

Uma análise minuciosa das raízes mostra que os inteiros de Cartan, e, portanto, a matriz de Cartan, estão sujeitos a fortes relações.

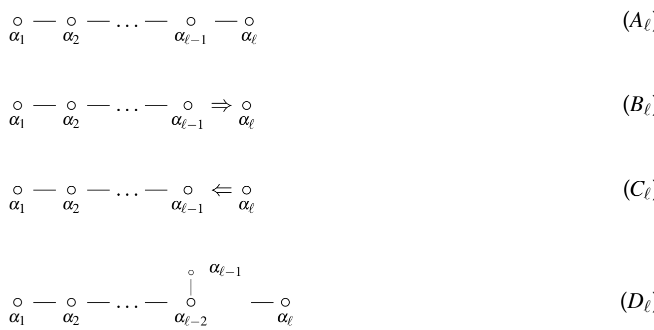

Tabela 18.1 Diagramas de Dynkin clásicos.

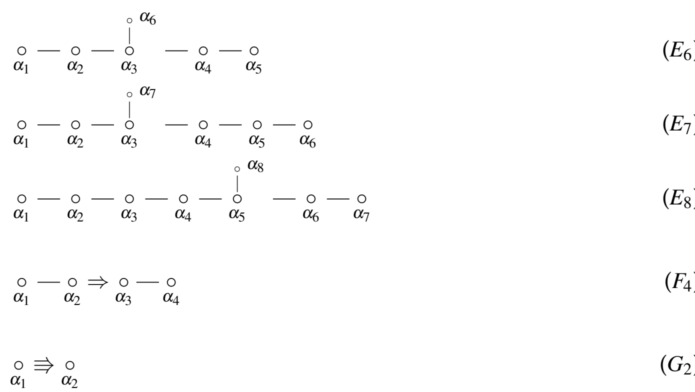

Tabela 18.2 Diagramas de Dynkin excepcionais.

Essa análise utiliza a identidade de Jacobi e se simplifica se se considera a forma de *Killing*: é a forma bilinear simétrica e “invariante ” $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ dada por $K(X,Y) = \operatorname{tr} \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y$.

De fato, Killing obtém a lista de todas as possíveis matrizes de Cartan. Para visualizar convenientemente essa lista, é habitual atribuir a cada matriz de Cartan um grafo, chamado *diagrama de Dynkin*, com k vértices e no qual entre os vértices i e j existe $c_{ij}c_{ji}$ arestas.

Uma matriz de Cartan é dita “indecomponível ” se seu diagrama de Dynkin é conexo.

Teorema (Killing - Cartan). *Existe uma correspondência bijetiva entre classes de isomorfismo de álgebras de Lie simples complexas e matrizes de Cartan “indecomponíveis ” - ou equivalentemente diagramas de Dynkin como estão listados nas Tabelas 1 e 2.*

Assim, graças ao “dicionário ” de Lie, os grupos de Lie simples complexos estão classificados pelas matrizes de Cartan “indecomponíveis ”. (Com exceção do fato de que a álgebra de Lie determina o grupo localmente).

$$\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C}) = \text{álg. de Lie de } SL(\ell+1,\mathbb{C}) \qquad (A_\ell)$$

$$\mathfrak{so}(2\ell+1,\mathbb{C}) = \text{álg. de Lie de } SO(2\ell+1,\mathbb{C}) \qquad (B_\ell)$$

$$\mathfrak{sp}(2\ell,\mathbb{C}) = \text{álg. de Lie de } Sp(2\ell,\mathbb{C}) \qquad (C_\ell)$$

$$\mathfrak{so}(2\ell,\mathbb{C}) = \text{álg. de Lie de } SO(2\ell,\mathbb{C}) \qquad (D_\ell)$$

Tabela 18.3 Álgebras de Lie clásicas.

Por outro lado, G_2 identifica-se com a álgebra de derivações de traço 0 da álgebra de octoniões (octônios). As outras álgebras de Lie excepcionais admitem realizações em termos de derivações de álgebras não-associativas (por exemplo, álgebras de Jordan), como mostrou Tits na década de 50. Essa informação resume-se ao chamado "quadrado mágico " de Tits.

As subálgebras de Cartan, as raízes, as matrizes de Cartan e outros elementos constitutivos da teoria já aparecem nos trabalhos de Killing.

Por outro lado, a forma de Killing é essencialmente uma contribuição de Cartan.

18.2.6.1 A prova de Killing

O objetivo de Killing, como foi dito, era classificar todas as álgebras de Lie reais (de dimensão finita). No entanto, ele começa pelas complexas, talvez por sua familiaridade com a teoria de divisores elementares de Weierstrass.

Antes de entrar em contato com a teoria de Lie em 1884, já tinha iniciado a consideração de álgebras de Lie complexas $\mathfrak{g}$ que satisfazem três hipóteses I, II e III. Para pronunciá-las, é preciso a seguinte anotação. Seja $X \in \mathfrak{g}$ e consideremos a decomposição de $\mathfrak{g}$ em auto-espaços generalizados:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{0\neq\alpha} \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde α percorre as raízes (não-nulas) do polinômio característico de $\operatorname{ad} X$. Também designa X tal que $\dim \mathfrak{g}_0$ seja mínima - X *genérico*. Observe que pela identidade de Jacobi, g_0 é uma subálgebra de Lie.

As três hipóteses de Killing são:

I. $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ a subálgebra de Lie derivada.

II. $\mathfrak{g}_0$ é uma subálgebra de Lie *abeliana*.

III. $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, se α é raiz não-nula do polinômio característico de $\operatorname{ad} X$.

Ao conhecer os resultados de Lie, ele percebe que as álgebras de Lie simples satisfazem as hipóteses I, II e III. A primeira delas satisfaz-se por razões elementares; no entanto, as demonstrações oferecidas por Killing de que uma álgebra de Lie simples satisfaz as hipóteses II e III são errôneas, pois utiliza um resultado auxiliar que resulta ser falso.

De fato, Killing estuda mais geralmente as álgebras de Lie que satisfazem I: $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$; seu objetivo era provar que I implica em II.

Para isso, introduz a noção de álgebra de Lie semi-simples: é aquela que é soma direta de ideais simples, ou equivalentemente que não contém nenhum ideal abeliano. De modo que o resultado anterior possa ser adaptado da seguinte maneira:

Teorema (Killing - Cartan) *Existe uma correspondência bijetiva entre classes de isomorfismo de álgebras de Lie semi-simples complexas e matrizes de Cartan.*

Depois prova um *teorema de decomposição*: Se $\mathfrak{g}$ satisfaz I, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$, onde $\mathfrak{s}$ é um ideal semi-simples e $\mathfrak{r}$ é um ideal cujos elementos X satisfazem que $\mathrm{ad}X$ é *nilpotente*. (Isso motiva Engel a introduzir a noção de álgebra de Lie nilpotente e a demonstrar seu teorema de caracterização).

Killing "deduz" que consta II, o que em geral não é correto.

Outro importante ponto cuja demonstração é incompleta nos trabalhos de Killing é a existência das álgebras de Lie correspondentes aos tipos excepcionais E_6, E_7, E_8 e F_4; mas apresenta explicitamente os coeficientes de estrutura da álgebra de Lie de tipo G_2. De fato, sua prova da existência das álgebras de Lie de tipo C também não é completa; o que não apresenta inconvenientes, pois Lie já tinha descrito as álgebras $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$.

A construção das álgebras de Lie excepcionais foi realizada posteriormente por Cartan mediante exaustivos cálculos caso por caso; uma prova *a priori* - sem raciocínios caso por caso - foi oferecida, independentemente, por Chevalley e Harish- Chandra em 1948. Lembremo-nos também a construção de Tits (o quadrado mágico). Em 1963, Serre apresenta as álgebras de Lie semi-simples por geradores e relações e conclui essa questão. Porém, outra começa: a teoria de álgebras de Kac-Moody.

Os trabalhos de Killing foram muito bem recebidos por Lie e sua escola. Lie escreve em uma carta a Klein em 1890:

> *"Killing has done beautiful research. If, as I believe, the results are correct, he has performed an outstanding service. Generally speaking, now the theory of transformation groups and differential invariants will reign over vast domains of mathematics. "*
> *("Killing realizou uma ótima pesquisa. Se, como acredito, os resultados estiverem corretos, ele desempenhou um trabalho excepcional. Falando de modo geral, agora a teoria de grupos de transformação e invariantes diferenciais predominará em muitos domínios da matemática. ")*

Engel e seus alunos aplicam-se à tarefa de entender, ampliar ou corrigir as provas dos teoremas de Killing.

18.2.6.2 A contribuição de Elie Cartan

A teoria desenvolvida por Sophus Lie, que como vimos foi apoiado por Klein, foi recebida com indiferença em Berlim, um dos grandes centros matemáticos da época. As críticas da escola de Berlim aos trabalhos de Lie apontavam tanto para a falta de rigor dos fundamentos da teoria (deveria ser implicitamente para o *raciocínio genérico* firmemente rejeitado por Weierstrass), quanto para a classe das aplicações previstas por Lie (problemas de equações diferenciais já resolvidos por outros métodos).

A recepção à teoria de Lie foi muito diferente em Paris.

Os líderes da comunidade matemática francesa da época, Darboux, Picard e Poincaré, tinham uma opinião muito favorável dos trabalhos de Lie. Darboux, contemporâneo de Lie que o conheceu em 1870, interessava-se em geometria diferencial e suas conexões com equações diferenciais parciais, através do que conhecia detalhadamente os trabalhos de Lie nesse sentido; apesar disso, não recorreu aos grupos de Lie em suas pesquisas.

Pelo contrário, Picard e Poincaré, uns dez anos mais jovens, começam a utilizar os grupos de Lie em seus trabalhos.

A consideração dos círculos matemáticos franceses pela obra de Lie acentua-se devido à visita de Lie a Paris em 1882. Em 1889, Lie é eleito membro correspondente da Academia de Ciências de Paris. Com mais importância histórica é que, a partir de 1888, vários estudantes da Ecole Normale Supérieure (ENS) de Paris, visitam Lie em Leipzig para estudar grupos de transformações. Os primeiros são Ernest Vessiot e Wladimir de Tannenberg apresentados a Lie por Darboux.

No segundo semestre de 1891, viaja a Leipzig Arthur Tresse, que foi recebido na ENS junto com Elie Cartan. Em Leipzig, aprende com Engel e Lie os resultados de Killing e os problemas suscitados por suas demonstrações.

Ao voltar à Paris em 1892, Tresse (que trabalhava em uma questão de tese sugerida por Lie) vive com seu amigo Cartan, que tinha passado há um ano no serviço militar.

Tresse conta para Cartan o teorema de Killing, que fica intensamente interessado no desafio de demonstrá-lo honradamente.

Lie viaja a Paris em 1893, onde conhece Cartan. Esse já tinha descoberto o método de prova do teorema de classificação, cuja primeira publicação data de abril de 1893.

18.2.7 Elie Cartan

Elie Cartan nasceu em Dolomieu, um pequeno povoado no sudeste da França. Filho do ferrador do povoado, é recomendado por seu professor de ensino fundamental ao delegado cantonal, Antonin Dubost, mais tarde presidente do Senado. Dubost coloca o jovem Elie sob sua proteção e o ajuda a estudar em Vienne, depois no Liceu de Grenoble e finalmente no Liceu Janson-de-Sailly (Paris). Elie Cartan ingressa na ENS em 1888. Depois de seu doutorado em 1894, trabalhou em Montpellier e Lyon, depois como professor em Nancy a partir de 1903. Obteve um posto em Paris em 1909, e passou a ser professor em 1912. Retirou-se em 1942.

Foi pai de quatro filhos, um deles o matemático Henri Cartan. Os outros dois filhos homens faleceram tragicamente - um deles na Segunda Guerra Mundial; também teve uma filha. Tímido, atingiu a fama apenas na sua maturidade.

Em sua tese de doutorado, Cartan conclui brilhantemente a prova da classificação das álgebras de Lie semi-simples. Uma ferramenta importante em seu enfoque é a chamada "forma de Killing "...

Elie Cartan realizou outras contribuições fundamentais para a teoria de Lie e para a geometria diferencial. Nos anos seguintes a sua tese, trabalhou em aplicações da mesma e na classificação dos grupos "contínuos infinitos ".

Em 1913-14, publica três artigos importantes, nos quais obtém a classificação das representações irredutíveis das álgebras de Lie semi-simples complexas por um lado, e das álgebras de Lie semi-simples *reais* - assim como das representações irredutíveis dessas - por outro.

Mais tarde, no final da década de 20, influenciado pelos trabalhos de Weyl, obtém outro teorema importantíssimo: a classificação dos espaços simétricos. Todos esses resultados dependem da classificação das álgebras de Lie simples complexas.

18.2.7.1 Complementos

Para finalizar essa seção, mencionamos três resultados complementares da classificação de Killing-Cartan.

Teorema de decomposição. *Toda álgebra de Lie de dimensão finita* $\mathfrak{g}$ *admite um máximo ideal solúvel* $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$*; além disso, existe uma subálgebra semi-simples* $\mathfrak{s}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tal que* $\mathfrak{g} = \operatorname{rad}\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{s}$*.*

Uma variante desse teorema já foi vislumbrada por Killing; Cartan deu uma demonstração errônea do mesmo em 1893. Depois notificou seu erro, mas não se dedicou a encontrar uma prova, que foi finalmente uma contribuição de E. Levi (1905).

Esse resultado reduz a classificação de todas as álgebras de Lie de dimensão finita à classificação das solúveis, um árduo problema que ainda não foi completamente resolvido, e que era o programa inicial de Killing (e de Lie). Atualmente, a classificação das álgebras de Lie nilpotentes com certas propriedades ocupa a atenção de vários especialistas.

Classificação das álgebras de Lie semi-simples reais. Esse problema também era parte principal do programa de Killing. Como foi dito, foi obtida por Cartan em 1914. Este resultado é instrumental à sua classificação dos espaços simétricos

Globalização. Como já foi dito, o dicionário "grupos de Lie - álgebras de Lie" considerava apenas os aspectos locais dos primeiros, apesar de Lie e outros especialistas de sua escola conhecerem os exemplos de distintos grupos de Lie com a mesma álgebra de Lie. As respostas teóricas a esse problema aparecem nos trabalhos de Weyl em 1924 e em suas seqüências por Cartan.

18.3 Teoria de representações

Tanto o programa em Erlangen de Klein, quanto à teoria de Galois de equações diferenciais que motivava Lie, como o idiossincrático ponto-de-vista geométrico de Killing, abrangiam o problema de classificação dos grupos "projetivos". Em uma formulação equivalente, esse problema pode ser apresentado como a classificação dos subgrupos de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$ para todos os possíveis n.

Lembremo-nos que uma representação linear de G de grau n é um morfismo de grupos de Lie. O problema mencionado pode ser reformulado como dois problemas separados:

- a classificação dos grupos de Lie;
- para cada grupo de Lie G, a classificação de todas as representações lineares injetivas de G.

É evidentemente interessante, nesse contexto, a classificação de todas as representações lineares dos grupos de Lie *simples*.

Antes de esboçar a história desse problema, resolvido por Elie Cartan e Hermann Weyl, é conveniente discutir algumas reduções técnicas.

Consideremos uma representação linear $\rho : G \to GL(n,\mathbb{C})$ de um grupo de Lie G, $n > 0$. Um subespaço U de $\mathbb{C}^n$ é dito *G-invariante* se para todo $g \in G, u \in U$, tem-se

$$\rho(g)(u) \in U.$$

Através de uma identificação linear em um subespaço G-invariante corresponde a ele uma representação linear de grau d.

A representação ρ é dita *irredutível* se admite exatamente dois subespaços G- invariantes, isto é, $U = 0$ e $U = \mathbb{C}^n$.

Por outro lado, é dito *completamente redutível* se existir subespaços G- invariantes irredutíveis $U_1, \dots, U_s$ tales que $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$.

Teorema. *Seja G um grupo de Lie simples (simplesmente conexo).*

(E. Cartan). Existe uma correspondncia bijetiva entre as representações lineares irredutíveis de G e os "pesos dominantes " de G.

(H. Weyl). Toda representação de G é completamente redutível.

Essa situação é ótima: se $G = \mathbb{C}$, então a representação $\rho : G \to GL(2,\mathbb{C})$ dada por

$$\rho(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$z \in \mathbb{C}$, admite exatamente tres subespaços invariantes:

$$0, \quad \mathbb{C}e_1, \quad \mathbb{C}^2.$$

Logo não é irredutível, nem completamente redutível.

18.3.0.2 Representações de álgebras de Lie

.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma representação de grau n de $\mathfrak{g}$ é um morfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathbf{gl}$ ou seja, uma transformação linear que satisfaz

$$\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Na prática, as representações de um grupo de Lie conexo G dão lugar a representações de sua álgebra de Lie; a recíproca é verdadeira se G for simplesmente conexo. Uma representação de um grupo de Lie conexo G é irredutível exatamente quando a representação associada de sua álgebra de Lie também o é. Analogamente para representações completamente redutíveis.

18.3.1 Teoria de representações de $SL(2,\mathbb{C})$

18.3.1.1 Representações irredutíveis de $SL(2,\mathbb{C})$

. Lie determinou as representações irredutíveis de $SL(2,\mathbb{C})$: para cada inteiro $m \geq 0$, existe exatamente uma representação irredutível V_m de $SL(2,\mathbb{C})$ de dimensão $m+1$.

Explicitamente, V_m identifica-se com o espaço de polinômios em 2 variáveis, homogneos de grau m, com a ação natural de $SL(2,\mathbb{C})$.

Sejam $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Esses elementos formam uma base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, a álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{C})$.

O espaço V_m tem uma base $v_0, \ldots, v_m$ onde a representação de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ está determinada por

$$\begin{aligned}\rho(H)(v_i) &= (m-2i)v_i,\\ \rho(F)(v_i) &= -(i+1)v_{i+1};\\ \rho(E)(v_i) &= (m-i+1)v_{i-1},\end{aligned}$$

onde é conveniente que $v_{-1} = v_{m+1} = 0$.

O enfoque de Lie é geométrico: as representações que leva em consideração são projetivas (não lineares). Se B é o grupo de matrizes triangulares superiores, então o espaço quociente $C = SL(2,\mathbb{C})/B$ é isomorfo a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ é isomorfo a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ por um lado. Por outro, uma representação projetiva de$SL(2,\mathbb{C})$ em $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ admite um ponto fixo por B, devido ao teorema de Lie para álgebras solœveis. Assim, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ contém uma cópia da curva

C; Lie requer que *C seja a mais curvada possível* o que equivale que a correspondente representação linear seja irredutível.

18.3.1.2 Completa redutibilidade: $SL(2,\mathbb{C})$

Em seu tratado, Lie e Engel anunciam que um discípulo de Lie, E. Study, demonstra a completa redutibilidade das representações de $SL(2,\mathbb{C})$.A prova não é publicada, aparentemente possui alguns erros logo corrigidos por Engel. Study presume a completa redutibilidade das representações de qualquer álgebra de Lie semi-simples.

Em sua tese, E. Cartan demonstra a completa redutibilidade das representações de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, como uma passagem na prova de um teorema de Engel: *toda álgebra de Lie não solœvel contém uma cópia de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. A demonstração é algébrica.

Independentemente, Guido Fano oferece em 1896 uma demonstração geométrica da completa redutibilidade para $SL(2,\mathbb{C})$. A prova de Fano contém na linguagem projetiva como Lie uma redução na consideração de sucessões exatas

$$0 \longrightarrow V_m \longrightarrow E \longrightarrow V_n \longrightarrow 0.$$

Essa sucessão é essencial na prova algébrica que Casimir apresenta na década de 30.

18.3.2 *Representações irredutíveis de uma álgebra de Lie semi-simples*

A classificação das representações irredutíveis de uma álgebra de Lie simples ocupou entre 1890 e 1910 vários discípulos de S. Lie (que fundou uma escola em sua passagem por Leipzig). E. Study obteve-a para $SL(3,\mathbb{C})$ e outros grupos de classe baixa, mas nunca publicou os resultados. Study, que escreveu sua tese de habilitação a partir de Klein, era *Privatdozent* em Leipzig quando chegou Lie e se uniu a sua escola. G. Kowalewski, aluno de Lie, considerou o problema de classificação de grupos projetivos que não deixam "nada linear invariante". Devido a um resultado de Cartan (1909), é reduzido ao problema de classificação das representações irredutíveis de uma álgebra de Lie semi-simples.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples e V uma representação de $\mathfrak{g}$. Lembremo-nos que $\mathfrak{g}$ possui certas subálgebras chamadas de Cartan, com propriedades especiais. Se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ e $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ então é indicado:

$$V_\lambda = \{v \in V : \rho(H)(v) = \lambda(H)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Então $V = \oplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$. Aqueles λ tal que $V_\lambda \neq 0$ são ditos os *pesos* da representação.

Existe, além disso, uma base $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $\mathfrak{h}^*$ que satisfaz:

Se λ é um peso de alguma representação de dimensão finita V, então $\lambda = \sum_{1\leq i\leq k} c_i\lambda_i$, onde os c_i são inteiros.

Um peso $\lambda = \sum_{1 \leq i \leq k} c_i \lambda_i$ é dito *dominante* se os c_i são inteiros maiores ou iguais a 0.

Teorema. *(E. Cartan). Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples. Existe uma correspondência bijetiva entre as representações lineares irredutíveis de $\mathfrak{g}$ e os pesos dominantes de $\mathfrak{g}$.*

Seja λ um peso dominante e seja $V(\lambda)$ a correspondente representação irredutível. Então a combinatória inerente a $V(\lambda)$ está conduzida pelo diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$; particularmente, a dimensão $V(\lambda)$, seu conjunto de pesos, as multiplicidades dos mesmos, etc.

18.3.3 Completa redutibilidade

Para finalizar essa seção, queremos esboçar sucintamente a história do teorema de completa redutibilidade de Weyl.

Seja G um grupo finito. Então toda representação (sobre $\mathbb{C}$) de G é completamente redutível. Esse teorema deve-se a Maschke (1899), e segue-se da seguinte observação devida a E. H. Moore - e independentemente a A. Loewy (1896):

Toda representação V de G admite uma forma hermitiana positiva não- degenerada G-invariante.

A construção é muito simples. Seja $(\,|\,)$ *qualquer* forma hermitiana positiva não- degenerada em V, então

$$(x|y)_0 := \sum_{g \in G} (\rho(g)(x)|\rho(g)(y))$$

é a forma G-invariante procurada.

A operação de *promediar* aplica-se mais geralmente à busca de invariantes: se $v \in V$, então $v_0 = \sum_{g \in G} \rho(g)(v)$ é um elemento *invariante* - isto é, $v_0 = \rho(g)(v_0)$ para todo $g \in G$.

Em 1897, A. Hurwitz estendeu a operação de promediar para a busca de invariantes de grupos infinitos G, como $SL(n,\mathbb{C})$ y $SO(n,\mathbb{C})$. A idéia básica é substituir a soma $\sum_{g \in G}$ por uma integral $\int_G d\mu$ onde $d\mu$ é uma medida G-invariante. No entanto, $\int_G d\mu$ pode divergir se G não for compacto. Hurwitz propõe considerar um subgrupo compacto maximal G_0, nos exemplos

$$SU(n) \subset SL(n,\mathbb{C}), \quad SO(n) \subset SO(n,\mathbb{C}).$$

Esses subgrupos são suficientemente "grandes" como para que todo G_0-invariante seja necessariamente G-invariante.

O trabalho de Hurwitz passou despercebido pelos estudiosos da teoria de Lie, até que em 1924, I. Schur aplicou o método de Hurwitz no estudo das representações e invariantes de $SO(n,\mathbb{C})$ e em particular, na completa redutibilidade.

Um pouco mais tarde, Hermann Weyl demonstrou a completa redutibilidade para qualquer grupo de Lie semi-simples G mediante o método de Hurwitz e Schur. É crucial em seu enfoque a construção de um subgrupo compacto maximal G_0 de G, que é possível através da forma compacta $\mathfrak{g}_0$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Essa forma é construída graças à análise do sistema de raízes de $\mathfrak{g}$. Ainda que essa álgebra de Lie real apareça na lista de Cartan (1913), é Weyl que destaca seu papel na prova de completa redutibilidade.

Por motivos de tempo, é impossível para nós revisarmos as importantíssimas contribuições de Weyl para a teoria de grupos de Lie e de suas representações; contribuições essas que são uma síntese de álgebra, geometria e análise.

18.4 Dos grupos algébricos aos grupos quânticos

18.4.1 Sistemas de raízes e grupos de Coxeter

A classificação das álgebras de Lie semi- simples sobre $\mathbb{C}$ se expressa em termos das matrizes de Cartan, construídas a partir das raízes (autovalores simultâneos de uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de uma álgebra de Lie semi-simples $\mathfrak{g}$):

$$R = \text{sistema de raíces } \subset \mathfrak{h}^*.$$

Também, a classificação das representações irredutíveis de $\mathfrak{g}$ é dada por:

$$P^+ = \text{pesos dominantes } = \sum_{1\le i\le k} \mathbf{Z}_{\ge 0}\lambda_i$$
$$\subset P = \sum_{1\le i\le k} \mathbf{Z}\lambda_i = \text{látice de pesos } \subset \mathfrak{h}^*,$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ é uma base de $\mathfrak{h}^*$ (os pesos fundamentais).

Por outro lado, $R \subset P$ e, portanto,$Q =$ subgrupo de $\mathfrak{h}^*$ produzido por R também está contido em P.

Lembremo-nos que o "dicionário" de Lie era impreciso, pois um grupo de Lie é determinado por sua álgebra de Lie apenas localmente. A partir da determinação do grupo fundamental de um grupo de Lie simples e simplesmente conexo por Weyl, Cartan resolve essa questão.

Teorema. *Existe uma correspondência bijetiva entre classes de isomorfismo de grupos de Lie simples cuja álgebra de Lie é isomorfa a $\mathfrak{g}$ e subgrupos intermediários L: $Q \subset L \subset P$.*

Outro importante objeto associado a uma matriz de Cartan é o *grupo de Weyl*, que pode ser definido de várias maneiras alternativas (por exemplo, o subgrupo de automorfismos lineares de $\mathfrak{h}^*$ gerado pelas reflexões correspondentes às raízes). A importância de sua utilização foi relatada por Weyl; aparece nos trabalhos posteriores de E. Cartan.

A combinatória dos sistemas de raízes é estudada abstratamente por van der Waerden (1935). Simultânea, mas independentemente, Coxeter completa a classificação dos grupos finitos de translações euclidianas geradas por reflexões. A relação entre ambos os temas é explorada por Witt e Coxeter, e, mais tarde, por Chevalley e Harish- Chandra.

18.4.2 *Grupos algébricos lineares*

Lembremo-nos da definição de grupo de Lie (real): é uma variedade diferencial munida de uma estrutura de grupo compatível, no sentido de que tanto o produto quanto a inversão sejam morfismos de variedades diferenciais. A definição de grupo de Lie complexo é análoga, substituindo diferencial por analítica.

Os principais exemplos de grupos de Lie que vimos são

$$GL(n, \Bbbk), \quad SL(n, \Bbbk)$$

com $\Bbbk = \mathbb{C}, \mathbb{R}$; os quais têm sentido ainda que $\mathbb{K}$ seja um corpo (ou um anel comutativo qualquer).

A geometria algébrica trata-se do estudo de objetos geométricos cujas "coordenadas locais " vivem em um corpo (ou ainda em um anel comutativo) arbitrário. Esses objetos se chamam variedades algébricas. Assim, é normal abordar o estudo de *grupos algébricos*: define-se um grupo algébrico como uma variedade algébrica munida de uma estrutura de grupo compatível, no sentido de que tanto o produto quanto a inversão sejam morfismos de variedades algébricas.

Estabelecemos um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$. Os dois exemplos paradigmáticos de variedades algébricas sobre $\mathbb{K}$ (ou seja, com "coordenadas" em $\mathbb{K}$) são:

- o espaço afim $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^n$,
- o espaço projetivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Conseqüentemente, distinguem-se duas classes de variedades algébricas:

- as variedades *afins* - definidas como os zeros em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ de uma família de polinômios;
- as variedades *projetivas* - definidas como os zeros em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ de uma família de polinômios homogêneos.

Portanto, distinguem-se duas classes de grupos algébricos:

- os grupos algébricos lineares - ou seja, aqueles grupos algébricos cuja variedade subjacente é afim;
- as variedades abelianas - aqueles grupos algébricos cuja variedade subjacente é projetiva.

As variedades abelianas, cuja multiplicação sempre é comutativa, aparecem naturalmente em geometria algébrica; as curvas elípticas são exemplos delas. Seu estudo é vital em teoria de números.

Nessa exposição, será delineada a história de alguns aspectos dos inícios da teoria de *grupos algébricos lineares*.

Observemos antes de começar que a generalidade não se perde. De fato, se G é qualquer grupo algébrico, então existe um máximo subgrupo algébrico normal *N linear*; o quociente G/N resulta em uma variedade abeliana.

Esse teorema foi demonstrado por Chevalley em 1953, e independentemente por Barsotti. Existe uma prova alternativa devida a Rosenlicht.

18.4.3 Inícios no século XIX

A história dos grupos algébricos lineares começa no final do século XIX, com trabalhos de Maurer, E. Cartan e Picard. Depois de um prolongado período de inatividade, reinicia-se na década de 1940.

Ludwig Maurer publica quatro trabalhos, de 1888 a 1893, nos quais entre outros temas, considera grupos algébricos lineares sobre $\mathbb{C}$, com uma definição distinta, mas equivalente à atual - como explica A. Borel em sua monografia.

Em seu primeiro artigo Maurer considera o grupo de matrizes que determinam um polinômio homogêneo, mas passa logo para o caso geral.

Dado que existem subgrupos de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$ que não são algébricos, o "dicionário" não é válido no contexto algébrico e é interessante caracterizar aquelas álgebras de Lie que correspondem a um grupo algébrico - chamadas *algébricas*. Maurer estuda essa questão, caracterizando particularmente a "cápsula algébrica " de um elemento semi-simples.

Outra importante contribuição de Maurer é que todo grupo algébrico linear é uma variedade racional (tem um aberto isomorfo a um aberto de um espaço projetivo).

De sua parte, E. Cartan publica em 1895 um artigo através do qual é provado que alguns grupos de Lie são algébricos. Enquanto que Picard, na década de 1890, trata de grupos algébricos como grupos de Galois de equações diferenciais com coeficientes racionais.

Os trabalhos de Picard são prosseguidos por E. Vessiot e A. Loewy no início do século XX.

18.4.4 *Chevalley e Kolchin*

O estudo dos grupos algébricos é retomado vigorosamente por Chevalley e Kolchin nos 40.

Chevalley - em parte, em colaboração com Tuan - estuda as álgebras de Lie de grupos algébricos sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0; generaliza os resultados de Maurer mediante a noção de "réplica " e obtém uma caracterização necessária e suficiente. Esses trabalhos foram retomados e ampliados por Goto e Matsushima.

A ferramenta fundamental de Chevalley é o uso da exponencial "formal " para estabelecer um "dicionário " de grupos algébricos - álgebras de Lie algébricas, através das quais sua análise restringe-se a corpos de característica 0.

Por outro lado, Kolchin propõe em meados dos anos 40 algebrizar a teoria de Galois para equações diferenciais de Picard-Vessiot. O contexto algébrico para tratar equações diferenciais - a álgebra diferencial - tinha sido desenvolvido por seu mentor, J. Ritt. Kolchin aborda o desenvolvimento de uma teoria de grupos algébricos de matrizes, mas para "enfatizar a natureza algébrica do tema " seu enfoque é independente da característica (e não recorre à teoria de álgebras de Lie). Seus primeiros dois trabalhos, publicados no Annals em 1948, já contêm vários resultados de grande importância no desenvolvimento da teoria de grupos algébricos.

Um deles é: todo grupo algébrico de matrizes conexo e solúvel é triangular (a propósito de alguma base). Essa generalização do teorema de Lie é conhecida hoje como o *teorema de Lie-Kolchin*.

Também prova que todo grupo algébrico comutativo é o produto direto de um semisimples por outro unipotente (o que implica na *decomposição de Jordan multiplicativa*).

Esses dois trabalhos influenciaram Borel (ver página 169 de sua monografia). Kolchin prosseguiu seu estudo dos grupos algébricos de matrizes durante 25 anos mediante um desenvolvimento próprio da teoria de conjuntos algébricos.

Em 1954, Armand Borel escreveu um artigo fundamental [Annals 1956] no qual colocou as bases do estudo dos grupos algébricos lineares, influenciado pelo trabalho de Kolchin, mas também por artigos de Hopf, Samelson e Stiefel. Não há álgebras de Lie no enfoque de Borel.

A partir de um ponto-de-vista técnico, o ponto de partida de Borel é o estudo da ação de um grupo algébrico; particularmente o fato de que toda órbita contém um aberto denso em sua clausura. Em particular, existem órbitas fechadas. Essa diferença fundamental com os grupos de Lie é explorada sistematicamente por Borel.

Entre as numerosas contribuições, destacam-se:

O estudo dos subgrupos conexos solúveis maximais de um grupo algébrico linear (chamados hoje em dia de subgrupos de Borel, e assim batizados por Chevalley).

O estudo dos subgrupos conexos diagonalizáveis (batizados *toros* por Borel) e a caracterização dos subgrupos de Cartan (introduzidos por Chevalley) como os centralizadores dos toros maximais.

No verão de 1955, Borel entrega uma cópia desse trabalho a Chevalley.

18.4.5 Grupos finitos

Chevalley escreveu em 1954:

> *The principal interest of the algebraic groups seems to me to be that they establish a synthesis, at least partial, between the two main parts of group theory, namely the theory of Lie groups and the theory of finite groups.*
>
> *(O principal interesse dos grupos algébricos parece para mim para que eles estabeleçam uma síntese, pelo menos parcial, entre as duas partes principais da teoria do grupo, isto é, a teoria dos grupos de Lie e a teoria dos grupos finitos.)*

Os primeiros grupos simples foram descobertos pelo mesmo Galois (1832): $\mathbb{A}_5$, certamente, mas também $PSL(2,\mathbb{F}_p) = PSL(2,p)$, p primo. Em 1870, Jordan incluiu em seu Tratado a prova da simplicidade de $\mathbb{A}_n$, $n \geq 5$.

Sempre no Tratado, Jordan introduziu os análogos dos grupos clássicos sobre um corpo finito e provou a simplicidade no caso do corpo primo. Para corpos não primos, o primeiro resultado é de Cole (1893) que prova a simplicidade de $PSL(2,8)$; logo Moore (1893) e Burnside (1894) estenderam o resultado para $PSL(2,p^n)$, salvo $p^n = 2,3$; e Dickson para $PSL(m;p^n)$ (1897).

Dickson continuou a demonstrar a simplicidade dos outros grupos clássicos sobre todos os corpos finitos; também introduziu e demonstrou a simplicidade de grupos de tipo G_2 (e de tipo E6 o que permaneceu ignorado por muito tempo), sobre corpos finitos (1897-1905). Uma simplificação do enfoque de Dickson foi oferecida por Dieudonné (1948), sempre para os grupos clássicos e caso por caso.

E. Mathieu descobriu cinco grupos (que pertencem à família chamada atualmente de "esporádicos") em 1861, a partir de um estudo de grupos multiplamente transitivos. A simplicidade dos mesmos foi estabelecida por Cole (1895, um deles) e Miller (1900, os outros quatro). Uma apresentação alternativa deve-se a Witt (1938).

Em 1953, Chevalley construiu os análogos dos grupos F_4, E_6 e E_7 sobre corpos finitos. No entanto, os problemas de cálculo que enfrentou ao encarar E_8 levaram-no à busca por um método geral, que publicou em seu famoso artigo de 1955 em Tohoku Math. Journal.

O método de Chevalley consiste nos seguintes passos:

(i) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples complexa de dimensão finita. Então, constrói-se uma base $\mathscr{B}$ de $\mathfrak{g}$ cujos coeficientes de estrutura são especiais (são particularmente números inteiros).

(ii) Seja $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}$ o subgrupo abeliano de $\mathfrak{g}$ gerado por $\mathscr{B}$; é uma álgebra de Lie sobre $\mathbf{Z}$. Se K é um corpo, encontra-se uma álgebra de Lie sobre K por extensão de escalares: $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} K$.
(iii) Mediante exponenciais de elementos nilpotentes, constrói-se um subgrupo G_K do grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}_K$.
(iv) Se K é finito, e exceto em alguns casos que K tenha 2 ou 3 elementos, o quociente de G_K por seu centro é um grupo finito simples.

Assim, obtém novas famílias de grupos simples, 50 anos depois das descobertas de Dickson.

O impacto da teoria de Lie, através do teorema de Chevalley, na teoria de grupos é muito profundo. Por um lado, desencadeou um interesse muito vivo na busca por novos grupos simples, resultando na descoberta de várias famílias, algumas dessas variações dos grupos de Chevalley. Por outro lado, os métodos da teoria de representações e outros aspectos da teoria de Lie foram adaptados aos grupos de Chevalley, obtendo-se uma enorme quantidade de informação.

A construção de Chevalley foi reformulada por Kostant em 1965 na linguagem de álgebras de Hopf.

18.4.6 Classificação dos grupos algébricos semi-simples

Como foi dito, Borel entregou uma cópia de seu artigo a Chevalley no verão de 1955. Em 1956, Chevalley obtém um resultado notável: a classificação dos grupos algébricos lineares semi-simples sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado, independentemente da característica de $\Bbbk$. O enunciado preciso é o seguinte:

Teorema. *Os grupos algébricos lineares semi-simples sobre $\Bbbk$ estão em correspondência com pares (A, L) onde*

- *A é uma matriz de Cartan,*
- *L é um subgrupo do grupo P de pesos, que contém o grupo Q gerado pelas raízes.*

Esse teorema de Chevalley foi o objeto do Seminário dirigido por Chevalley nos anos acadêmicos 56-57 e 57-58 na Ecole Normale Supérieure de Paris. Os expositores foram P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard e o próprio Chevalley.

As notas do Seminário foram acessíveis apenas em uma versão datilografada pelo Instituto Poincaré, até sua publicação (ligeiramente revisada) em 2005 por Springer-Verlag, como parte da edição das Obras Completas de Chevalley - graças aos esforços de Pierre Cartier.

O Seminário começa com uma exposição da geometria algébrica necessária para o desenvolvimento da teoria de grupos algébricos. Sem pretender pelo menos esboçar a história da geometria algébrica no século XX, é necessário destacar que as bases formais da mesma estavam nessa época em discussão: diferentes alternativas eram propostas como linguagem apta aos fundamentos dessa disciplina.

O Seminário continua com um racconto dos resultados de Borel em [Annals 1956].

O resultado chave, como Chevalley destacou em diversas oportunidades, é o seguinte teorema:

O normalizador de um subgrupo algébrico conexo solúvel maximal (batizado nesse Seminário subgrupo de Borel *por Chevalley) de um grupo algébrico linear conexo é o mesmo.*

De acordo com Cartier, *Chevalley a toujours dit qu'ensuite il n'y avait plus qu'à suivre la pente!* (Chevalley sempre disse que depois tinha apenas que seguir a inclinação!)

(Borel confirma que Chevalley considerava esse teorema como o ponto chave da demonstração).

Seja agora G um grupo algébrico linear conexo semi-simples. Como no artigo de Borel, não há álgebras de Lie. O papel da subálgebra de Cartan é representado por um toro maximal T.

O primeiro objetivo da prova é atribuir a G um sistema de raízes *abstratamente*. De acordo com Cartier, esse trabalho contém a primeira apresentação autônoma de sistemas de raízes. Sabe-se que os sistemas de raízes estão classificados pelas matrizes de Cartan (implícito em Killing, Cartan, van der Waerden).

Em conseqüência, considera-se o grupo $X(T)$ de caracteres - ou seja, morfismos de grupos algébricos com valores em $GL(1,\Bbbk)$– de T. Resulta ser um grupo abeliano livre em tantos geradores quanto a dimensão de T.

As raízes aparecem como os caracteres associados aos subgrupos unipotentes conexos de dimensão 1 estáveis por conjugação de T.

Para demonstrar que as raízes assim definidas formam efetivamente um sistema de raízes que caracteriza G, é necessário uma delicada análise de centralizadores de subtoros de T. Depois introduz o látice intermediário L.

A seguir, continua a classificar as representações racionais (ou seja, morfismos de grupos algébricos) irredutíveis de G em termos desses dominantes (a propósito de um subgrupo de Borel $B \supset T$). Para isso, dado um peso dominante λ, considera o espaço de seções $W(\lambda)$ do fibrado de linha na variedade G/B definido por λ; o quociente irredutível de $W(\lambda)$ é a representação irredutível correspondente a λ.

Chevalley dedica os sete capítulos finais do Seminário a uma trabalhosa prova da unicidade do sistema de raízes associado a G.

A *existência* do grupo algébrico semi-simples G associado a um sistema de raízes não é abordada nesse texto, mas Chevalley reporta-se a seu artigo em Tohoku que já comentamos.

18.4.7 *Álgebras de Hopf*

A noção de álgebra de Hopf (comutativa) parece natural do ponto-de-vista da dualidade álgebra comutativa-geometria algébrica (afim).

Geometría	**Álgebra**
Espaços	Funções
Variedade algébrica afim X	álgebra $\mathscr{O}(X)$
$f : X \to Y$ morfismo de variedades algébricas afins	$f^* : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X)$ morfismo de álgebras
$X \times Y$	$\mathscr{O}(X) \otimes \mathscr{O}(Y)$
G grupo algébrico afim $\cdot : G \times G \to G$ produto $e \in G$ unidade $\iota : G \to G$ inversão	$H = \mathscr{O}(G)$ álgebra de Hopf *conmutativa* $\Delta : H \to H \otimes H$ coproduto $\varepsilon : H \to \mathbb{C}$ counidad $\mathscr{S} : H \to H$ antípoda

Tabela 18.4 "Geometria algébrica afim" - "álgebra comutativa".

Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Lembremo-nos que uma variedade algébrica afim sobre $\mathbb{K}$ é o conjunto $X \subset \mathbb{K}^n$ de zeros comuns de polinômios $f_1, \ldots, f_s$.

Por intermédio do teorema dos zeros de Hilbert, tem-se uma equivalência entre as categorias de variedades algébricas afins e de $\mathbb{K}$-álgebras **comutativas** finitamente geradas, sem nilpotentes.

Concretamente, a uma variedade algébrica afim X corresponde a álgebra $\mathscr{O}(X)$ de funções polinomiais em X.

Se se deseja formular os axiomas de grupo em termos da correspondente álgebra de funções, chega-se à seguinte definição, ver Tabela 18.4.

Definição. *Uma álgebra de Hopf é uma terna* (H, m, Δ) *que satisfaz*

- (H, m) álgebra associativa com unidade 1,
- $\Delta : H \to H \otimes H$ é morfismo de álgebras (co-produto),
- Δ é co-associativa com co-unidade ε,
- $\mathscr{S} : H \to H$ "antípoda"
  tal que $m(\mathscr{S} \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id}_H = m(\mathrm{id} \otimes \mathscr{S})\Delta$.

Diz-se comutativa se a álgebra subjacente também é comutativa. Diz-se co- comutativa se $\tau\Delta = \Delta$, onde $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$.

Nesse contexto, a categoria de grupos algébricos afins resulta equivalente à categoria de $\Bbbk$-álgebras de Hopf comutativas finitamente geradas, sem nilpotentes.

Exemplos.

• Se G grupo, a álgebra de grupo $\Bbbk G$, isto é, o espaço vetorial de base e_g ($g \in G$) e producto $e_g e_h = e_{gh}$, resulta em uma álgebra de Hopf com co-produto $\Delta(e_g) = e_g \otimes e_g$ e antípoda $\mathscr{S}(e_g) = e_g^{-1}$.

• Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, a álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$, denotada $U(\mathfrak{g})$, resulta em uma álgebra de Hopf com co-produto $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ y antípoda$\mathscr{S}(x) = -x$, $x \in \mathfrak{g}$.

A expressão "*algèbre de Hopf* ", aparece pela primeira vez em um artigo de Borel em [Annals 53] sobre a co-homologia dos grupos de Lie compactos:

... la structure d'une algèbre de Hopf (c'est à dire vérifiant les conditions de Hopf) ... (a estrutura de uma álgebra de Hopf (ou seja, de acordo com as condições de Hopf)).

Por outro lado, Borel não fala de álgebras de Hopf - nem de álgebras de funções em um grupo algébrico - em seu artigo de 1956 discutido previamente.

Jean Dieudonné considera a noção de hiperálgebra em 1954. Seu interesse era a estrutura da álgebra de distribuições com suporte na identidade de um grupo "de Lie" em característica positiva. Sabe-se que o objeto análogo em característica 0 é a álgebra envolvente da correspondente álgebra de Lie. Dieudonné buscava uma noção que permitisse estabelecer o dicionário em característica positiva: é a de hiperálgebra. Em linguagem atual, a definição de hiperálgebra é a de "bi-álgebra co-comutativa ". A formalização axiomática dessa noção deve-se a Cartier (1956).

Na primeira metade da década de 60, a estrutura das álgebras de Hopf comutativas ou co-comutativas é estudada por Cartier, Gabriel (no contexto de SGA), Kostant e Milnor-Moore; a relação com os grupos algébricos está claramente presente. Obtêm-se os seguintes teoremas sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado de característica 0:

Uma álgebra de Hopf comutativa é a álgebra de funções polinomiais em um grupo pró-algébrico.

Uma álgebra de Hopf <u>co-comutativa</u> é o produto semi-direto de uma álgebra de grupo por uma álgebra envolvente de uma álgebra de Lie.

A partir de 1965, inicia-se o estudo de álgebras de Hopf gerais, isto é, nem comutativas, nem co-comutativas, por Sweedler (aluno de Kostant), Heyneman, Larson; e na década de 70, Taft, Radford, Nichols.

Independentemente, o matemático soviético G. I. Kac e seus discípulos desenvolvem em Kiev a teoria de C^*-álgebras de Hopf de dimensão finita - conhecidas hoje como álgebras de Kac.

Ambas as escolas estabelecem independentemente alguns resultados básicos, muitas vezes similares. O objetivo agora não é uma reinterpretação de resultados de teoria de Lie.

Lentamente vão surgindo alguns exemplos de álgebras de Hopf "genuínas", nem comutativas, nem co-comutativas. G. I. Kac em 1968, e independentemente Takeuchi em 1981, descobrem como construir uma álgebra de Hopf semi-simples a partir de uma fatorização exata de um grupo finito G: isto é, dois subgrupos F, H tal que $G = FH$, $F \cap H = e$.

Na busca por exemplos de álgebras de Hopf com antípoda de ordem maior que 2, Taft introduz em 1971 uma álgebra de Hopf de dimensão N^2, a partir de um parâmetro q que é uma raiz da unidade de ordem N. É o primeiro exemplo de grupo quântico.

18.4.8 *Grupos quânticos*

A descoberta por Drinfeld e Jimbo dos grupos quânticos em 1983 representa uma reviravolta no desenvolvimento das álgebras de Hopf - como em outras áreas.

A origem dos grupos quânticos está em trabalhos da escola de Fadeev, em Leningrado, sobre o método de espalhamento inverso. Motivados por certas considerações nessa direção, Kulish e Reshetikhin definem em 1980 uma álgebra $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ que é uma deformação a um parâmetro da álgebra envolvente de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Quase imediatamente, Sklyanin realiza a observação chave: a álgebra $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ admite uma estrutura de álgebra de Hopf, nem comutativa, nem co-comutativa.

Um pouco depois, Drinfeld e Jimbo definem independentemente, para cada álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$, uma álgebra que é uma deformação a um parâmetro da álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$ e admite uma estrutura de álgebra de Hopf, nem comutativa, nem co-comutativa.

Ambas as definições são essencialmente equivalentes, apesar de que para Drinfeld $U_\hbar(\mathfrak{g})$ é uma álgebra sobre o anel de séries formais, enquanto que para Jimbo $U_q(\mathfrak{g})$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ que depende de um parâmetro q.

Drinfeld inventa a expressão "grupos quânticos"e oferece explicações e aplicações dos mesmos em um artigo justamente famoso apresentado no ICM de Berkeley em 1986 (lido por Cartier, já que Drinfeld não foi autorizado a sair da União Soviética).

Em primeiro lugar, interpreta com precisão $U_\hbar(\mathfrak{g})$ como uma deformação formal - no sentido de Lichnerowicz e sua escola - da álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$. Isso o leva às noções de "grupo de Lie-Poisson"e sua versão infinitesimal "bi-álgebra de Lie", no espírito do dicionário de Lie.

Nesse sentido, Drinfeld tinha classificado em colaboração com Belavin todas as possíveis estruturas de "bi-álgebra de Lie quase triangular" em uma álgebra de Lie simples (1982).

Outra contribuição fundamental é a construção de soluções da *equação quântica de Yang-Baxter*, a partir das representações de dimensão finita de $U_\hbar(\mathfrak{g})$. É funcional ao seu método a noção do doble de Drinfeld, uma construção que resultou de grande importância em diversas aplicações.

É impossível resumir todas as idéias contidas no artigo de Drinfeld, e muito menos esboçar a história de todas as pesquisas motivadas pelas mesmas. Basta mencionar a construção de certas álgebras de Hopf de dimensão finita $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{g})$ por Lusztig (1988), as quais têm sido estudadas intensamente com relação a diversos problemas.

Finalmente, a descoberta dos grupos quânticos significou um impulso decisivo na classificação de álgebras de Hopf de dimensão finita (ou ainda de "crescimento " finito). A partir de certas hipóteses adequadas, os grupos quânticos de Drinfeld-Jimbo, ou os de Lusztig, ou variações dos mesmos, são todos os exemplos de álgebras de Hopf.

18.5 Referências

[1] A. Borel. *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups*. A. M. S. (2001).

[2] N. Bourbaki. *Notes historiques. Groupes et algèbres de Lie*. Cap. 1-6.

[3] P. Cartier. Postface. In: C. Chevalley, *Classification des Groupes Algébriques Semi-simples*. Springer.

[4] J. Gallian. *The Search for Finite Simple Groups. Math. Magazine*, Vol. 49 (1976), p. 163-180.

[5] T. Hawkins. *Emergence of the Theory of Lie Groups.* Springer (2000).