De los grupos de Lie a los grupos cuánticos

Brasilia, febrero de 2008

Nicolás Andruskiewitsch

Universidad de Córdoba, Argentina.

`http://www.mate.uncor.edu/andrus`

Plan de las exposiciones.

1. Grupos y simetrías. Nacimiento de la teoría de Lie. Fundamentos: grupos y álgebras de Lie. Álgebras de Lie semisimples: Killing.

2. Álgebras de Lie semisimples: Killing y Cartan. Teoría de representaciones. Representaciones irreducibles de las álgebras de Lie semisimples. Completa irreducibilidad.

3. Sistemas de raíces y grupos de Coxeter. Grupos algebraicos lineales. Grupos finitos. Clasificación de los grupos algebraicos lineales semisimples. Álgebras de Hopf. Grupos cuánticos.

Referencias:

A. Borel. *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups.* American Math. Soc. (2001).

T. Hawkins. *Emergence of the Theory of Lie Groups.* Springer (2000).

Plan de la exposición.

I. Grupos y simetrías.

II. Nacimiento de la teoría de Lie.

III. Fundamentos: grupos y álgebras de Lie.

IV. Álgebras de Lie semisimples: Killing.

I. Grupos y simetrías.

Uno de los conceptos básicos de la matemática es la noción de *equivalencia* $\equiv$ relación reflexiva, simétrica y transitiva.

Dado un conjunto X munido de una relación de equivalencia $\sim$, suele ser importante contar con invariantes de $\sim$, esto es, funciones en X invariantes en las clases de $\sim$.

Si se considera el conjunto G de todas las biyecciones de X en sí mismo invariantes por $\sim$ (las *simetrías* de $\sim$) vemos que G es estable por *composición* y por tomar *inversa*.

En otras palabras, G es un *grupo*.

Por otro lado, sean G un grupo y X un conjunto munido de una *acción* de G:

$$\cdot : G \times X \to X.$$

Entonces se tiene una relación de equivalencia en X: $x \sim y \iff$ existe $g \in G : g \cdot x = y$.

Las variadas aplicaciones de los grupos en las distintas áreas de la matemática se producen a través de sus acciones en diversos conjuntos munidos de estructuras adicionales.

Ejemplo:

• $X = \mathbb{A} =$ conjunto de números algebraicos

• $G =$ Gal$(\mathbb{A}, \mathbb{Q})$ = conjunto de biyecciones de $\mathbb{A}$ que preservan suma y producto.

• $f \in \mathbb{Q}[T]$ un polinomio mónico irreducible.
• $\mathcal{O} =$ conjunto de raíces en $\mathbb{A}$ de f.

El grupo de Galois de f es el conjunto de biyecciones de $\mathcal{O}$ que provienen de G. El estudio de las raíces de f se reduce al estudio del grupo de Galois de f.

Este ejemplo fue considerado por Evariste Galois en 1828, en su explicación de la imposibilidad de resolver ecuaciones de grado cinco por radicales.

La introducción por Galois de la noción de grupo podría ser considerada, junto con el descubrimiento de geometrías no euclideanas por Lobachevski y Bolyai, como el hito que señala el inicio de la matemática moderna.

Los ejemplos fundamentales de grupo son:

• Dado un conjunto X, el grupo $\mathbb{S}_X$ de todas las biyecciones de X en sí mismo. Si $X = \{1, \ldots, n\}$, se denota simplemente $\mathbb{S}_n$.

• El grupo $GL(n, \Bbbk)$ de matrices $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo $\Bbbk$.

Una *representación* de un grupo G es un morfismo de grupos $\rho : G \to GL(n, \Bbbk)$. Se tienen equivalencias entre:

• acciones de G en $X \leftrightsquigarrow$ morfismos de grupos $\rho : G \to \mathbb{S}_X$;

• acciones *lineales* de G en $\Bbbk^n \leftrightsquigarrow$ representaciones $\rho : G \to GL(n, \Bbbk)$.

Tres aspectos fundamentales de la teoría de grupos están íntimamente relacionados:

$$\begin{tikzcd} & \text{estructura de un grupo } G \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \text{acciones de } G \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{representaciones de } G \end{tikzcd}$$

Algunas palabras clave:

Linearización. Conjugación. Inducción.

En el caso de los grupos de Lie semisimples complejos, el estudio de estos aspectos está gobernado por ciertos objetos combinatorios descubiertos por W. Killing, codificados hoy en día por los llamados *diagramas de Dynkin*.

Los diagramas de Dynkin intervienen en

- Clasificación de grupos finitos de desplazamientos.
- Clasificación de grupos algebraicos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado (cualquier característica).
- Clasificación de grupos finitos simples.
- Clasificación de álgebras de Hopf.

Además aparecen en el estudio de

- Singularidades (y por ende tienen relaciones con los polihedros regulares).
- Teoría de representaciones de álgebras (asociativas) de dimensión finita.

El propósito de esta serie de charlas, a cargo de un lego de la historia de las matemáticas, es presentar la evolución de los distintos roles que los diagramas de Dynkin han jugado en problemas de clasificación.

II. Nacimiento de la teoría de Lie.

La teoría de grupos y álgebras de Lie fue gestada por Sophus Lie en el invierno boreal 1873-4 y desarrollada en una serie de artículos, que culmina en la publicación de un tratado en 3 volumenes, en colaboración con Engel.
Hoy entendemos por *grupo de Lie* a un grupo munido de una estructura de variedad diferencial, tal que el producto y la inversión son transformaciones diferenciales. *Ditto* para grupos de Lie complejos, reemplazando 'diferencial' por 'analítico'. Sin embargo, Lie trabajaba con definiciones más informales. Luego de presentar los ejemplos más comunes de grupos de Lie, esbozaremos las motivaciones de Lie y sus principales resultados.

Ejemplos de grupos de Lie:

• Si V es un espacio vectorial (real o complejo), entonces $(V, +)$ es un grupo de Lie abeliano.

• Respecto de la multiplicación, $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} - 0$ es un grupo de Lie abeliano.

•Un producto de n copias de $\mathbb{C}^{\times}$ es también un grupo de Lie abeliano, llamado el toro n-dimensional.

• Los grupos de matrices inversibles $GL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{R})$.

Subgrupos cerrados de los anteriores:

• El grupo $SL(n, \mathbb{R})$ de matrices reales cuyo determinante es uno.

• El grupo $SL(n, \mathbb{C})$ de matrices complejas cuyo determinante es uno.

• El grupo de matrices inversibles triangulares superiores, y el subgrupo del mismo de matrices con 1's en la diagonal.

• El grupo ortogonal $O(n, \mathbb{C})$ (de matrices complejas inversibles que preservan una forma bilineal simétrica no degenerada). También:

• $SO(n, \mathbb{C}) = O(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C})$;

• $O(p, q)$ (grupo de matrices inversibles reales que preservan una forma bilineal simétrica no degenerada de signatura (p, q)).

• $SO(p, q) = O(p, q) \cap SL(n, \mathbb{R})$.

• El grupo simpléctico $Sp(n, \mathbb{C})$ (de matrices que preservan una forma bilineal antisimétrica no degenerada).

• El grupo de automorfismos de un álgebra de dimensión finita.

Sophus Marius Lie
(Nordfjordeid, 17/12/1842, Christiania, 18/2/1899).

Sophus Marius Lie finaliza sus estudios de grado en Cristiania (Oslo) en 1865 pero decide devenir un matemático profesional dos años más tarde. Becado por el gobierno de Noruega viaja en 1869 a Berlín, donde conoce a Felix Klein, quien jugaría un papel muy importante en su vida y en el desarrollo de su obra. En la primavera de 1870 viajan a Paris, donde entre otros conocen a Camille Jordan, autor de *'Traité des substitutions et des équations algébriques'*, primera obra dedicada a la teoría de Galois; y a Gaston Darboux. En julio de 1870, debido a la guerra franco-prusiana, Klein debe regresar a Alemania, mientras que Lie– un fanático de las caminatas– decide regresar a Noruega . . . luego de una excursión a pie a Italia.

Es detenido en el camino por autoridades francesas, quienes confunden sus papeles matemáticos con informes militares y sospechan que es un espía. Liberado por intercesión de Darboux, regresa a Noruega donde redacta sus nuevos descubrimientos (en parte obtenidos en prisión) y presenta su tesis doctoral en 1871. En 1872, la Asamblea Nacional de Noruega crea una cátedra de matemática para él, por lo que puede dedicarse de lleno a la investigación en los siguientes años. En 1874 comienza a publicar sus resultados en grupos de transformaciones (hoy grupos de Lie), principalmente en revistas noruegas. Hacia 1884 ya ha obtenido los principales resultados de la teoría, la cual es poco conocida por estar desperdigada en publicaciones de poca circulación– y en gran parte inédita.

Sus colegas Klein y Mayer (de la Universidad de Leipzig) le proponen que redacte un tratado y sugieren la ayuda del joven Friedrich Engel, quien viaja a Cristiania en 1884, donde permanece nueve meses junto a Lie. En 1886 Klein deja Leipzig por Göttingen y persuade a Lie que lo suceda; éste acepta para continuar la redacción del tratado junto a Engel, a la sazón en Leipzig. Los tres volúmenes ven la luz en 1888, 1890 y 1893. Lie recibe en Leipzig a numerosos estudiantes, muchos de ellos enviados desde Francia por Picard, Poincaré y Darboux. Sin embargo, el cúmulo de tareas docentes– muy superior al de Noruega– le provoca un colapso nervioso en 1889 del cual no se recuperó nunca por completo. En 1898 regresa por fin a Cristiania, donde fallece en Febrero de 1899.

Según Hawkins, podemos distinguir dos tipos de motivaciones en el pensamiento de Lie:

Orígenes de la teoría de Lie → Geométricos

Orígenes de la teoría de Lie → Analíticos

Los orígenes geométricos comprenden una serie de reflexiones y trabajos de Lie, en parte junto a Klein.

Estas reflexiones desembocan en la necesidad de considerar 'grupos continuos' (por oposición a los grupos discretos en teoría de Galois).

Complejos de líneas. En 1869, Lie escribió un trabajo sobre complejos de líneas. El conjunto $\mathcal{L}$ de líneas en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ es un espacio geométrico cuyos elementos pueden ser parametrizados así. Si $x = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ e $y = (y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$ son puntos distintos de una recta ℓ, entonces las coordenadas de Plücker de ℓ son $p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$. De modo que $\mathcal{L}$ se identifica con los puntos de $\mathbb{P}^6$ que satisfacen la ecuación $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$. Un complejo de líneas es un conjunto de rectas cuyas coordenadas satisfacen además una relación homogénea adicional.

Lie estudió un complejo de líneas $\mathcal{T}$ asociado a un tetrahedro Δ. La originalidad de su enfoque estriba en que consideró para ello el conjunto $\mathfrak{G}$ de todas las transformaciones proyectivas de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ que fijan los vértices de Δ. Resulta que $\mathfrak{G}$ es un grupo abeliano 'de 3 parámetros', que actúa en forma simplemente transitiva en los puntos de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ en posición general. El estudio de las órbitas de $\mathfrak{G}$ permite a Lie obtener resultados geométricos sobre el complejo $\mathcal{T}$.

Es esencial para las demostraciones que $\mathfrak{G}$ es conmutativo.

W-curvas.

Previo a su encuentro con Lie en Berín, Felix Klein (1848-1925) había publicado también un trabajo sobre complejos de línea. Klein fue estudiante de Plücker (1801-1868) en Bonn y luego de Clebsch (1833-1872) en Göttingen. En esta última universidad había asistido a seminarios de Jordan sobre grupos y teoría de Galois.

En Berín, Klein y Lie entraron en contacto en función de sus intereses comunes e iniciaron una provechosa colaboración. En dos artículos publicados en Comptes Rendues (1870), definen las así llamadas W-curvas *a partir* de un grupo abeliano 'de 1 parámetro' $\mathfrak{H}$.

En notación actual, $\mathfrak{H} = \{\exp \lambda A : \lambda \in \mathbb{C}\}$, donde A es una matriz 4×4; Klein y Lie explican por primera vez que el grupo 'continuo' $\mathfrak{H}$ se obtiene a partir de la 'transformación infinitesimal' $x \mapsto x + dx$, con $dx = Ax\, d\lambda$. En efecto, $\mathfrak{H}$ consta de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales asociado a la transformación infinitesimal.

Si A es diagonalizable, $\mathfrak{H}$ resulta un subgrupo del grupo $\mathfrak{G}$ asociado al tetrahedro cuyos vértices son los autovectores de A.

Desarrollan más ejemplos de familias de objetos geométricos obtenidas a partir de grupos abelianos 'continuos' de 1, 2 o 3 parámetros en otros trabajos, uno de ellos publicado en Math. Annalen (1871) y otro inédito. En el manuscrito inédito, Klein plantea que, para describir todas las configuraciones posibles en el espacio de esta forma, se debe resolver la clasificación de todos los grupos 'continuos lineales abelianos que actúan en el espacio'.

Grupos continuos como análogos de grupos de Galois para ecuaciones diferenciales.

Lie se interesó en otros problemas geométricos emanentes del complejo de líneas $\mathcal{T}$, que pudo expresar en términos de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden

$$f(z,x,y,p,q)=0, \quad p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

El grupo $\mathfrak{G}$ actúa en el conjunto de soluciones de la ecuación, lo que permite a Lie resolverla.

Klein, enterado de este método de Lie, observó la analogía entre el mismo y los trabajos de Abel sobre ecuaciones polinomiales abelianas– cuyos grupos de Galois son abelianos.

Lie acoge con entusiasmo esta idea, compatible con sus investigaciones.

El programa de Erlangen.

En 1871, mientras Lie estudiaba las relaciones entre objetos geométricos y sistemas de ecuaciones diferenciales, Klein maduraba sus reflexiones sobre geometrías no euclideanas, que culminan en el programa de Erlangen. En síntesis, el mismo postula que 'una geometría consiste en una variedad munida de un grupo continuo de transformaciones'. Este punto de vista– enriquecido por el intercambio con, y por los trabajos de, Lie, por ejemplo en la 'correspondencia entre rectas y esferas'– implica implícitamente el problema de clasificación de los grupos continuos lineales que actúan en el espacio n-dimensional. Sin embargo, ni Klein ni Lie prosiguen esta dirección; es necesario aún que Lie absorba otro ingrediente fundamental para su teoría.

La teoría de integración de Jacobi. El ingrediente fundamental que permitiría a Lie manejar los grupos 'continuos' no conmutativos surge de los trabajos de Jacobi sobre integración de una ecuación diferencial parcial en la función incógnita z

$$F\Big(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\Big) = 0. \tag{1}$$

Para estudiar (1), Jacobi consideró funciones en $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. El *corchete de Poisson* de dos funciones holomorfas u y v es

$$(u, v) := \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}. \tag{2}$$

El corchete (2) es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi:

$$((u,v),w)+((w,u),v)+((v,w),u)=0. \tag{3}$$

Jacobi observa que la integración de (1) se simplifica si existe una función u tal que $(F,u)=0$; cuantas más funciones con esta propiedad, tanto más simple es la integración de (1). Notemos que, si v es otra función que satisface $(F,v)=0$, también (u,v) lo hace, debido a la identidad de Jacobi.

Esto lleva a la búsqueda de familias de funciones $u_1,\ldots,u_s$ tales que $(u_i,u_j)=\Omega_{ij}(u_1,\ldots,u_s)$, con Ω_{ij} analítica en s variables. En particular, si $(u_i,u_j)=\sum_k c_{ij}^k(x_1,\ldots,x_n)u_k$, entonces los u_i's generan un álgebra de Lie– que Lie llamaba un *grupo de funciones*.

Los grupos de transformaciones. Los grupos continuos o de transformaciones considerados por Lie eran 'locales'. Veamos cómo los concebía. Sean U un abierto de $\mathbb{C}^n$ y V un entorno del origen en $\mathbb{C}^p$. Para Lie, un grupo continuo G es un conjunto de transformaciones locales de U parametrizadas por V. Esto es, existen funciones holomorfas $f_1, \ldots, f_n$ en $U \times V$ tales que

$$x \xmapsto{g_a} f(x, a),$$

$a \in V$, es una transformación local de $U-$ lleva un abierto de U en otro (que depende de a). Además existen funciones holomorfas $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ en $V \times V$ tales que

$$g_b(g_a(x)) = g_{\varphi(a,b)}(x).$$

Lie define transformaciones infinitesimales, mediante derivadas respecto de a en el origen, en $b = 0$. Luego muestra que el grupo generado por una transformación infinitesimal (las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales asociado) está contenido en G.

El espacio vectorial $\mathfrak{g}$ consistente en las transformaciones infinitesimales así obtenidas resulta un álgebra de Lie, en lenguaje moderno.

Lie establece un 'diccionario' entre grupos de Lie y álgebras de Lie, que le permite reducir problemas geométricos– inherentes a los grupos 'continuos'– en problemas algebraicos. En particular, el problema de clasificación.

III. Fundamentos: grupos y álgebras de Lie.

Antes de explicar los teoremas fundamentales de Lie que constituyen la base del 'diccionario', recordamos alguna terminología.
Álgebras de Lie. Recordemos que un álgebra de Lie es un espacio vectorial munido de una operación bilineal $(X,Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightsquigarrow [X,Y] \in \mathfrak{g}$ (llamada corchete de Lie), que es antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi:

$$[X,Y] = -[Y,X], \tag{4}$$

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]], \tag{5}$$

para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.
Lie trabajaba primordialmente con espacios vectoriales complejos; si bien la definición anterior es pertinente sobre cualquier cuerpo.

Ejemplos de álgebras de Lie:

• Si V es un espacio vectorial, entonces V es un álgebra de Lie respecto del corchete nulo, llamada *abeliana*.

• Los espacios de matrices $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n\times n}$,con el corchete $[A, B]$ $= AB - BA$; análogamente $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

• Las subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, por ejemplo $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) =$ espacio de matrices de traza 0.

Vimos que Lie asociaba a un grupo de Lie G el espacio $\mathfrak{g}$ de sus transformaciones infinitesimales, que es en lenguaje moderno el espacio tangente a G en el elemento neutro. El resultado fundamental de Lie es:

Teorema fundamental de Lie. *Si G es un grupo de Lie, el espacio $\mathfrak{g}$ de sus transformaciones infinitesimales es un álgebra de Lie de dimensión finita, con el corchete de operadores diferenciales.*

Recíprocamente si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces define un grupo de Lie (generado por los grupos uniparamétricos correspondientes a los sistemas de ecuaciones diferenciales definidos por los elementos de $\mathfrak{g}$).

En efecto, Lie muestra que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *determina* el grupo $G-$ si bien este resultado debe ser interpretado localmente: dos grupos de Lie con álgebras de Lie isomorfas tienen entornos de la identidad isomorfos, tales que el isomorfismo preserva el producto. Por otra parte Lie sólo consideraba grupos de Lie *conexos* (en lenguaje actual), de modo que el Teorema fundamental reduce el estudio de los grupos de Lie al estudio de las álgebras de Lie.

De hecho, las nociones topológicas necesarias para una descripción ajustada de las sutilezas inherentes al 'diccionario' fueron desarrolladas sólo a principios del siglo XX.

Observemos también que Lie no distinguía terminológicamente entre un grupo de Lie y su álgebra de Lie.

Sea $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial de dimensión finita n. Sea $x_1, \ldots, x_n$ una base de $\mathfrak{g}$. Una aplicación bilineal $[\,,\,]$ en $\mathfrak{g}$ está determinada por sus *coeficientes de estructura* ${c_{ij}}^k$: $[x_i, x_j] = \sum_k {c_{ij}}^k x_k$. Entonces $[\,,\,]$ es un corchete de Lie si y sólo si

$$ {c_{ij}}^k = -{c_{ji}}^k, \tag{6} $$

$$ \sum_{1 \leq s \leq n} {c_{ik}}^s {c_{sj}}^t + {c_{kj}}^s {c_{si}}^t + {c_{ji}}^s {c_{sk}}^t = 0, \tag{7} $$

para todos $1 \leq i, j, k, t \leq n$. Así, el problema de clasificar las álgebras de Lie se reduce al problema de encontrar las soluciones de (6) y (7), *a menos de isomorfismos*. Éste es un problema algebraico que Lie confiaba sería más accesible.

El 'diccionario' se completa con el siguiente resultado.

Teorema. *Si G es un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ es su álgebra de Lie, entonces existe una correspondencia biyectiva entre los subgrupos de Lie conexos de G y las subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$; bajo la misma, los subgrupos normales corresponden a los ideales de Lie.*

A continuación, Lie define: un grupo de Lie G es *simple* si su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no admite ideales propios no nulos (actualmente se pide que la dimensión de $\mathfrak{g} > 1$). En tal caso $\mathfrak{g}$ se dice *simple*. La consideración de grupos simples permite esbozar un procedimiento inductivo en la consideración de ecuaciones diferenciales.

Álgebras de Lie simples. Lie conoce las siguientes (la notación de tipos se debe a Killing):

Tipo A. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ = espacio de las matrices $n \times n$ de traza 0. Es el álgebra de Lie del grupo $SL(n, \mathbb{C})$.

Tipos B y D. $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ = espacio de las matrices antisimétricas $n \times n$ (tipo B si n es impar, tipo D si n es par). Es el álgebra de Lie del grupo $SO(n, \mathbb{C})$.

Tipo C. El álgebra de Lie del grupo $Sp(2n, \mathbb{C})$ = matrices inversibles que preservan una forma bilineal *antisimétrica*.

Motivado por sus trabajos en ecuaciones diferenciales, Lie define una clase especial de álgebras de Lie– hoy llamadas *solubles*: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice soluble si admite una base $X_1, \ldots, X_m$ tal que $[X_i, X_k]$ es combinación lineal de $X_1, \ldots, X_{k-1}$, para todos $i < k$.

Teorema de Lie. *Si* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ *es un álgebra de Lie soluble, entonces existe una base* $v_1, \ldots, v_n$ *de* $\mathbb{C}^n$ *tal que, para todos* $1 \leq j \leq n$ *y* $X \in \mathfrak{g}$,

$$X(v_j) \text{ es combinación lineal de } v_1, \ldots, v_j,$$

En las aplicaciones a ecuaciones diferenciales desarrolladas por Lie, las álgebras de Lie solubles permiten respuestas particularmente simples. Por otro lado, la noción de álgebra de Lie soluble y el correspondiente Teorema son importantes en el desarrollo ulterior de la teoría.

IV. Álgebras de Lie semisimples: Killing.

Como vimos, la clasificación de los 'grupos continuos' ocupaba un papel primordial en las consideraciones tanto geométricas como analíticas de Lie. Él mismo clasificó los 'grupos continuos' de dimensión 1,2,3. Sin embargo, fue Wilhelm Killing (1847–1923) quien obtuvo el resultado más significativo en esta dirección, uno de los teoremas más admirados de todos los tiempos. Comencemos por una reseña de la vida de Killing y cómo llegó a este problema.

Wilhelm Karl Joseph Killing

10 Mayo 1847 en Burbach (cerca Siegen), Westphalia, Alemania
11 Feb 1923 en Münster, Alemania

Killing inicia sus estudios universitarios en Münster en 1865, pero ávido de aprender matemática, pasa a la Universidad de Berlín dos años después– no había matemáticos en Münster. Su intención era hacer carrera como profesor de un *Gymnasium*. En Berlín, el centro de la matemática en Alemania en ese momento, estaban Kronecker, Kummer y Weierstrass, quienes coordinaban sus cursos para dar una sólida formación a los estudiantes de matemática. Especialmente éste último ejerció una gran influencia en Killing, quien tomó sus cursos y escribió su tesis doctoral bajo su dirección.

Weierstrass había desarrollado la teoría de divisores elementales, motivado por el problema de clasificación de formas bilineales. Sus resultados implican la forma canónica de una matriz, resultado obtenido independientemente por Jordan algunos años después (la forma de Jordan). La tesis de Killing versa sobre la interpretación geométrica de la teoría de divisores elementales.

La influencia de Weierstrass en Killing no es sólo temática sino metodológica. Weierstrass encabezaba la reacción contra el *pensamiento genérico* predominante, que favorecía los resultados 'genéricos', esto es, descartando los casos particulares. Por ejemplo, genéricamente 'toda matriz compleja es diagonalizable'. Killing, naturalmente, adhiere a la posición de Weierstrass.

Killing, durante el año lectivo 1870-1, enseña en un colegio del pueblo de su padre. Defiende su tesis en 1872. Permanece en Berlin y participa en el seminario de Weierstrass, que versa en ese semestre sobre geometría no euclideana. Trabaja como profesor de un *Gymnasium* en Berlin hasta 1878; luego en Brilon hasta 1880, cuando es nombrado profesor en un Liceo para futuros clérigos en Braunsberg (hoy Braniewo, Polonia). Durante este tiempo, su interés matemático en las geometrías no euclideanas no decae; ejercen gran influencia sobre su pensamiento los ensayos de Riemann y Helmholz. Lee los artículos de Klein y otros, discute con Weierstrass y publica trabajos sobre el tema.

En 1884, presenta *Erweiterung des Raum Begriffes*, libro donde postula como objeto de la geometría los 'espacios de formas'. Esto es una variedad analítica real de dimensión n munida de m transformaciones infinitesimales. Ciertas consideraciones heurísticas lo llevan a introducir la noción de *álgebra de Lie*. En el espíritu de la escuela de Berlin, principalmente de Weierstrass, se propone adoptar el punto de vista más general posible. Esto lo conduce al problema de clasificar las álgebra de Lie reales de dimensión finita.

En esta dirección, ya en 1884 había obtenido algunos resultados parciales bajo tres hipótesis I, II y III, que no discutiremos aquí.

Klein recibe una copia del libro y previene a Killing sobre los trabajos de Lie. Killing escribe a Lie y le solicita copias de sus trabajos, pues sólo tiene acceso a dos publicados en Math. Annalen. Las respuestas de Lie son escuetas y Killing entra en contacto epistolar con Engel en noviembre de 1885. Absorbido por sus tareas en el Liceo, tiene poco tiempo para llevar adelante sus investigaciones. Sin embargo, avanza en la clasificación las álgebras de Lie de dimensión finita. Bajo la influencia de los trabajos de Lie y la correspondencia con Engel, se concentra en las *complejas simples*.

Discute sus trabajos con Engel, quien lo urge a publicar sus resultados. Reluctante a ello, pues las pruebas son incompletas, envía no obstante una serie de 4 artículos a Klein, editor de Math. Annalen, revista donde aparecen entre 1889 y 1890.

En 1892, Killing es nombrado profesor de la universidad de Munster, donde permanecerá el resto de su vida. Recibe el Premio Lobachevski en 1897. Sin embargo nunca más se dedicará a las álgebras de Lie: se ocupa de problemas de geometría y de pedagogía. Pierde un hijo en la Primera Guerra Mundial; su tristeza profunda afecta su salud y muere en 1923.