

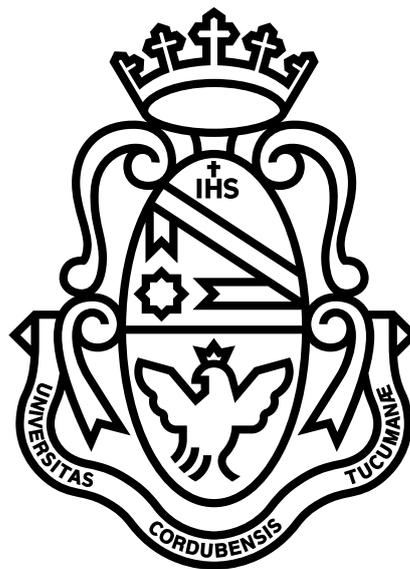
INTERACCIONES PLANETA-DISCO

Desarrollo y utilización de un código numérico.

Pablo Benítez Llambay

Presentada ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física
como parte de los requerimientos para la obtención del grado de
Doctor en Astronomía de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



©FaMAF - UNC - 2015

Director: Dr. Frédéric Masset
Co-Director: Dr. Cristian Beaugé



Interacciones planeta-disco, desarrollo y utilización de un código numérico por Pablo Benítez Llambay se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 2.5 Argentina](#).

A mis padres, mi hermano y mi esposa...

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera dar el mayor de todos los agradecimientos a mi director, Dr. Frédéric Masset. A pesar de la gran distancia geográfica que nos separó durante todo el doctorado, me enseñó que la distancia no está relacionada con los kilómetros sino con el interés. Junto a Frédéric recorrí un camino de transformación académica impresionante. La lista interminable de correos electrónicos, los cientos de horas de conversación telefónica y los días que pasamos juntos modificaron completamente mi forma de entender y atacar los problemas. Le debo una cantidad enorme de conocimiento. Mi más profunda admiración hacia él, tanto por su parte humana como profesional.

También quiero agradecer a mi co-director, Cristian Beaugé, quien me ayudó en momentos en los que las cosas no funcionaban, y especialmente por escucharme cuando era necesario. Le agradezco especialmente por haberme dado la oportunidad de progresar en mi investigación.

Quiero agradecer muy especialmente a Gloria Koenigsberger, quien me dio una ayuda invaluable en mis viajes a México. No me alcanzan las palabras para agradecerle la hospitalidad brindada, como así todas las horas que dedicó a nuestras conversaciones. Fue un verdadero placer poder conocerla y compartir tantas horas junto a ella.

También quiero agradecer de forma muy especial al Dr. Sébastien Fromang, quien me dio la posibilidad de visitar el CEA en Francia y dedicó su tiempo colaborando y supervisando el desarrollo del módulo magnetohidrodinámico de FARGO3D. Sin su experiencia y ayuda, el desarrollo de este proyecto hubiese sido mucho más complicado.

Otro agradecimiento muy especial es para a mi hermano, Alejandro Benítez Llambay, quien estuvo presente durante todo el desarrollo de este trabajo, a veces cerca, otra lejos... Fue una de las personas que más influyó en mi forma de resolver los diferentes problemas a los que me enfrenté y quien mantuvo mi motivación en los momentos más difíciles. En particular, gracias a su ayuda, en una estadía conjunta en la Universidad de Santa Cruz, mejoré de forma significativa la interface del usuario de FARGO3D.

Quiero agradecer profundamente la ayuda y apoyo brindado por mi esposa. Xime me brindó todo el apoyo que necesité durante el desarrollo y escritura de

este trabajo. En particular, quiero destacar su ayuda y sugerencias durante la realización del capítulo 7. Ya que es mi compañera de vida, es imposible agradecerle en pocas líneas por tanto, y cualquier cosa que diga parecerá poco. Simplemente quiero agradecerle por completar mi vida, hacerme feliz y por todo su amor.

Agradezco profundamente a mis padres, Marcela Llambay y Julio Benítez, quienes me brindaron palabras de aliento incondicional y siempre lograron transmitirme la emoción y fuerza necesarias para seguir adelante en mis proyectos, aún cuando estos parecían monumentales. Fueron especialistas enseñándome que puedo lograr lo que me proponga. Jamás me hicieron sentir una sensación de duda frente a los proyectos que comenzaba, y tengo la certeza de que gracias a su apoyo hoy puedo estar escribiendo estas líneas.

También agradezco la labor de mi tribunal de tesis. Sus observaciones y sugerencias hicieron de este un mejor trabajo.

Agradezco al personal de CoDePo de la FaMAF por ser tan gentiles en todo momento y por la eficiencia de su trabajo. Su ayuda y buena predisposición alivió significativamente el trabajo burocrático necesario para obtener mi doctorado.

Quiero agradecer a la Universidad Nacional de Córdoba y a la Facultad de Matemática Astronomía y Física. La Universidad, por medio de la Facultad, sus docentes, personal no docente y administrativo me brindó la posibilidad de obtener un doctorado de modo totalmente gratuito. Mi eterna gratitud hacia ella y al Estado Argentino.

Por último, quiero agradecer a CONICET por las becas doctorales que me brindó en estos años, las cuales fueron mi soporte financiero principal. También agradezco al IATE y a su personal por ser la institución que me albergó durante toda mi investigación.

Este trabajo ha sido posible gracias a la ayuda económica brindada por el grupo de Sistemas Planetarios a través de sus subsidios, y de forma muy significativa por medio de la ayuda brindada a través de los subsidios otorgados a Gloria y Frédéric, en particular los de la UNAM PAPIIT número 105313 y PAPIIT número IA101113 (Acreción de planetesimales), y el proyecto del CONACyT número 178377 (Supercómputo de discos astrofísicos con GPUs). En particular, éste último permitió adquirir un cluster de GPU's, con el cual la mayor parte de este trabajo fue realizado.

Resumen

Hoy tenemos certeza de que los planetas se forman dentro de estructuras con forma de disco, denominadas discos protoplanetarios. Estos discos están compuestos principalmente por gas y una pequeña fracción de polvo. Cuando los protoplanetas alcanzan un tamaño suficiente como para que su gravedad perturbe al medio gaseoso, como una reacción inevitable a la fuerza ejercida comenzará a sentir los efectos de la gravedad del disco. Es en esta etapa donde comienzan las interacciones de tipo planeta-disco.

Sabemos que estas interacciones generan estructuras asimétricas en el gas las cuales ejercen una fuerza neta y sostenida sobre el embrión en formación, cuyo efecto es generarle un torque, y por ende transferirle momento angular. El torque causa dos efectos, por un lado el planeta amortigua rápidamente cualquier excentricidad o inclinación que pudiese haber adquirido por medios externos. Por otro, el planeta altera su distancia a la estrella de forma dramática, un proceso conocido como *migración planetaria*. Según resultados recientes, en general el planeta es empujado o migra hacia la estrella central. Calculando las escalas de tiempo típicas para esta migración, se observa que son mucho más pequeñas (al menos un orden de magnitud) que la vida media de los discos de gas. Además, no es fácil reconciliar estas escalas temporales con los tiempos en los que se cree que ocurre la formación planetaria.

De acuerdo a los condicionamientos impuestos por las observaciones de sistemas planetarios alrededor de otras estrellas, hoy creemos que debe existir una forma robusta de detener o retardar esta migración. Así, diversos mecanismos han sido propuestos en la última década. Sin embargo, ninguno de ellos ha podido convertirse en un mecanismo lo suficientemente general como para retardar la migración sobre un rango de distancias suficientemente grande.

Si bien hubo avances teóricos en el problema, los mayores progresos fueron hechos mediante la exploración numérica utilizando códigos hidrodinámicos. En general estas exploraciones son muy costosas computacionalmente, en parte debido al amplio rango de parámetros disponibles. La necesidad de códigos numéricos eficientes surge así de forma natural, en particular aquellos que sean capaces de explotar recursos de computación de alto rendimiento, como ser *clusters* de CPU's o de GPU's.

Al momento de escribir esta tesis no existía ningún código numérico público, adaptado al problema de interacciones planeta-disco y que fuese capaz de explotar las últimas tecnologías de súper cómputo, como ser un cluster de GPU's. Por esta razón, y dada la necesidad de contar con un código de estas características, un primer y gran objetivo de nuestro trabajo fue abordar el desarrollo de este código. El resultado fue un nuevo código magnetohidrodinámico multiplataforma paralelo y versátil, al que denominamos FARGO3D, el cual fue liberado de forma temprana a la comunidad (<http://fargo.in2p3.fr/>).

Posteriormente, en una segunda etapa, utilizamos este código para abordar diferentes problemas físicos relacionados con las interacciones planeta disco, como ser, el cálculo del torque en discos radiativos y en discos magnetizados, en la búsqueda de mecanismos que pudiesen disminuir la tasa de migración experimentada por planetas en formación. Además, con la intención de desarrollar una nueva metodología de trabajo para el estudio de estas interacciones en sistemas dinámicos más complejos, abordamos el estudio de la optimización del tiempo de cómputo en simulaciones de gran escala.

Clasificación

- 95.30.Lz Hidrodinámica.
- 95.30.Qd Magnetohidrodinámica y plasmas.
- 95.75.Pq Procedimientos matemáticos y técnicas computacionales.
- 97.10.Gz Acreción y discos de acreción.
- 97.82.-j Sistemas planetarios extrasolares.
- 97.82.Jw Discos protoplanetarios.

Palabras clave:

interacciones planeta-disco – migración planetaria – hidrodinámica – magnetohidrodinámica – simulaciones numéricas – discos de acreción – formación planetaria

Abstract

Today we are sure that planets form inside disk-shaped structures, called protoplanetary disks. These structures are mainly composed by gas and a small fraction of dust. When a protoplanet reaches a large enough size to exert a significant gravitational force onto the gas, it will feel the reaction of that force produced by the disk, starting a process usually known as planet-disk interaction.

We know that these interactions generate asymmetric structures on gas which exert a net and sustained force onto the forming embryo. This force ultimately exerts a net torque onto the protoplanet and hence transferring angular momentum between these two components. The torque produces two main effects, first any eccentricity and or inclination gained by the planet is quickly damped. Secondly, the planet dramatically changes its distance to the star, a process called *planetary migration*. According to recent results, in general the planet is pushed onto the central star. By computing the typical time scales for migration, it can be proved that these time scales are shorter (at least by one order of magnitude) than the mean life time for disks. Furthermore it is not easy to reconcile these time scales with the typical ones for forming a planet.

According to observations of planetary systems around other stars, we believe that there must be a robust way to slow down this migration. Thus, in the last decade, different mechanisms have been proposed to alleviate this problem. However, these mechanisms have not been good enough to slow down the migration rate over large regions of the disk.

While there was theoretical progress on this problem, the major ones were done by numerical exploration using hydrodynamical codes. Generally, these explorations are computationally very expensive but also many parameters are involved in the problem. Thus, the need for efficient numerical codes naturally appears, and particularly the need for those capable to exploit the newest high performance computational resources, like CPU's or GPU's clusters.

When I started to develop this thesis there was not any public numerical code adapted to the planet-disk interactions problem and capable to exploit the latest super computing technologies, like a GPU's cluster. For this reason, our first and big goal was to develop this code. The result was a new multiplatform, parallel and versatile magnetohydrodynamic code, called FARGO3D. It was early relea-

sed to the community (<http://fargo.in2p3.fr/>).

We have successfully used this code to study different physical problems related with planet-disk interactions. In this work, aimed by the searching of different mechanism able to slow down or stopping planetary migration, we measure the torque in radiative disks and in magnetized disks. Additionally, we develop a new technique to dramatically optimize the computational cost of large-scale hydrodynamical simulations, allowing to efficiently study long-term and large-scale planetary migration in complex dynamical systems.

Classification

- 95.30.Lz Hydrodynamics.
- 95.30.Qd Magnetohydrodynamics and plasmas.
- 95.75.Pq Mathematical procedures and computer techniques.
- 97.10.Gz Accretion and accretion disks.
- 97.82.-j Extrasolar planetary systems.
- 97.82.Jw Protoplanetary disks.

Keywords:

planet-disk interactions – planetary migration – hydrodynamics – magnetohydrodynamics – numerical simulations – accretion disks – planetary formation

Índice general

1. Sistemas planetarios	1
1.1. Preliminares	1
1.2. El Sistema Solar	2
1.3. Exoplanetas, nuevos Sistemas Solares	4
1.3.1. Imagen directa	5
1.3.2. Método de velocidad radial	6
1.3.3. Método de Tránsito	8
1.3.4. Método de microlente	9
1.3.5. Cambios en la rotación de un pulsar (<i>timing</i>)	10
1.4. Algunas propiedades de los exoplanetas	10
1.5. Modelos de formación	13
1.5.1. Modelo de acreción de núcleos	15
1.5.2. Modelo de inestabilidad gravitacional	15
1.6. Conclusiones	16
2. Interacciones planeta-disco	17
2.1. Introducción	17
2.2. Motivación observacional	17
2.3. Modelo de disco de gas	19
2.4. Migración a partir de un torque	23
2.5. Migración planetaria	24
2.5.1. Migración de tipo I	24
2.5.2. Migración de tipo II	33
2.5.3. Migración de tipo III	36
2.6. Tiempos de migración	37
2.7. Posibles mecanismos para detener la migración planetaria	38
2.8. Discusiones finales	39
3. Solución numérica: FARGO3D	41
3.1. Introducción y motivación	41
3.2. Por qué desarrollar un nuevo código?	42
3.3. FARGO3D	44

3.4. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica	44
3.5. Discretización del dominio	47
3.5.1. Localización de las cantidades físicas	47
3.6. Sistemas de coordenadas	47
3.7. Construcción de la malla	48
3.8. Técnica del operador splitting	49
3.9. MPI - Descomposición de dominio	51
3.10. Operador Splitting en la práctica	54
3.10.1. Coordenadas cartesianas	56
3.10.2. Coordenadas cilíndricas	56
3.10.3. Coordenadas esféricas	57
3.10.4. Densidad y energía	58
3.10.5. Resumen	58
3.11. Incorporando las fuentes numéricamente	60
3.11.1. Viscosidad artificial	61
3.11.2. Conservación del momento	63
3.12. Transportando las cantidades	64
3.12.1. Método de donator cell	66
3.12.2. Método de van Leer	67
3.12.3. Método PPA	67
3.12.4. Transporte consistente	68
3.12.5. Advección del momento	69
3.12.6. Velocidad del marco de referencia	71
3.13. Condición CFL	71
3.14. Integrador orbital	72
3.15. Suavizado de perfiles	73
3.16. Algoritmo FARGO y advección orbital	75
3.16.1. Corrección al criterio CFL	79
3.17. MagnetoHidrodinámica	81
3.17.1. Transporte restringido (CT)	81
3.17.2. Método de características	83
3.17.3. Términos fuente	86
3.17.4. Términos resistivos	88
3.17.5. Advección orbital del campo magnético	89
3.18. Coeficientes geométricos	91
3.19. Tensor viscoso	92
3.20. Diagrama de flujo	94
3.20.1. Inicialización	94
3.20.2. Actualización completa	94
3.21. Conclusiones	97

4. Pruebas	101
4.1. Introducción	101
4.2. Prueba de Sod	101
4.3. Difusión de un anillo gas	103
4.4. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz	104
4.5. Problema de Riemann MHD	108
4.6. Difusión de una hoja de corriente	110
4.7. Cilindro magnético rotante	111
4.8. Vórtice de Orszag-Tang	113
4.9. Lazo magnético	115
4.10. Hoja de corriente	117
4.11. MRI en discos no estratificados	118
4.12. Vórtice en un disco Kepleriano	121
4.13. Conclusiones	122
5. Migración de planetas calientes	123
5.1. Introducción	123
5.2. Transferencia radiativa	124
5.3. Descripción del modelo	126
5.3.1. Condición inicial	128
5.4. Planteo del problema y metodología	128
5.5. Liberación de energía en la malla	131
5.6. Simulación de referencia	132
5.7. Exploración del espacio de parámetros	134
5.7.1. Dependencia con el tiempo de doblamiento de la masa	134
5.7.2. Dependencia con la densidad superficial	134
5.7.3. Dependencia con la masa del planeta	135
5.7.4. Dependencia con el perfil de densidad	135
5.7.5. Dependencia con la opacidad	137
5.7.6. Dependencia con la viscosidad	138
5.8. Inestabilidad	138
5.9. Integración de largo período	140
5.10. Densidad de torque	142
5.11. Líneas de corriente y lóbulos de densidad	143
5.12. Conclusiones	145
6. Migración en discos magnetizados	149
6.1. Introducción	149
6.2. Inestabilidad MagnetoRotacional	151
6.3. Estrategia de trabajo	153
6.4. Implementación numérica	154
6.4.1. Condición inicial	155
6.4.2. Condición de contorno	156

6.5.	Propiedades de la la turbulencia	157
6.5.1.	Saturación de la turbulencia	157
6.5.2.	Reutilización de un estado turbulento previo	159
6.5.3.	Tiempo de coherencia de la MRI	160
6.5.4.	El mejor muestreo temporal	164
6.6.	Midiendo el torque	165
6.7.	Cálculo del torque	166
6.8.	Simulaciones de comparación	166
6.8.1.	Modelos 2D: Viscosidad y número de Prandtl	168
6.9.	Resultados	169
6.9.1.	Simulación B2	169
6.9.2.	Simulación B4	171
6.10.	Conclusiones	173
7.	Migración planetaria de gran escala	175
7.1.	Introducción	175
7.2.	Modelo utilizado	177
7.3.	Método e implementación numérica	178
7.3.1.	Definiendo los bordes de la malla	180
7.3.2.	Llenado de la malla	181
7.3.3.	Evolución viscosa del disco	184
7.3.4.	Desplazamiento de las resonancias de Lindblad	187
7.4.	Pruebas numéricas	189
7.4.1.	Caso estándar: convergencia con la resolución	190
7.4.2.	Caso no estándar: convergencia con el dominio	191
7.4.3.	Caso no estándar: convergencia con la resolución	194
7.4.4.	Evolución viscosa	195
7.4.5.	Corrigiendo las frecuencias orbitales	196
7.5.	Sobre la distribución radial de las celdas	197
7.6.	Método de remapeo vs caso estándar	200
7.7.	Propiedades de conservación	203
7.8.	Conclusiones	204
8.	Conclusiones generales y perspectivas futuras	207
A.	Analizador sintáctico para FARGO3D	211

Organización del trabajo

Los capítulos 1 y 2 están dedicados al contexto astrofísico del problema tratado a lo largo de todo el trabajo. Se realiza una presentación y descripción del problema, en donde se explica la importancia de las interacciones planeta-disco durante el proceso de formación planetaria, para luego ahondar en su descripción, remarcando la necesidad de la utilización de códigos numéricos para avanzar en su entendimiento.

Posteriormente, en el capítulo 3, presentamos todos los algoritmos y métodos utilizados en la versión estándar del código numérico desarrollado a lo largo de esta tesis.

En el capítulo 4 mostramos resultados obtenidos de la resolución de diversos problemas sencillos con el código numérico desarrollado. Estos ejemplos son las pruebas o *tests* utilizados para demostrar que la implementación de todos los métodos descritos en el capítulo 3 es correcta. Una vez demostrada la validez de la implementación, los siguientes tres capítulos son aplicaciones y extensiones del mismo a problemas astrofísicos concretos, todos relacionados con la problemática de las interacciones planeta-disco.

En el capítulo 5 se presenta el estudio de la migración de planetas en crecimiento sumergidos en discos de gas radiativos. En este capítulo calculamos el impacto que tiene la emisión de calor por parte de un embrión planetario sobre su tasa de migración.

Posteriormente, en el capítulo 6, atacamos el problema de la migración en discos tridimensionales magnetizados y turbulentos, presentando una técnica para realizar mediciones suficientemente limpias de la dinámica en estos sistemas tan caóticos. En base a un gran número de simulaciones numéricas calculamos el torque efectivo al que está sujeto el embrión en estas condiciones físicas.

En el capítulo 7, motivados por la creciente necesidad de simular sistemas dinámicos más complejos para contrastar resultados con observaciones, abordamos el desarrollo de una nueva técnica numérica para el estudio de las interacciones planeta-disco.

Finalmente, en el capítulo 8 realizamos una discusión global de los logros obtenidos a lo largo de este trabajo, y los interrogantes que aún subsisten. Haremos un especial énfasis en los nuevos caminos de investigación que se desprenden de

forma natural a partir de nuestro trabajo.

RESULTADOS PUBLICADOS Y EN PROCESO DE PUBLICACIÓN

A lo largo de esta tesis hemos publicado diferentes artículos relacionados con ella:

- **FARGO3D: A new GPU-oriented MHD code.** Benítez-Llambay, Pablo; Masset, F. 2016, Aceptado para publicación en ApJS. [PDF](#)
- **Horseshoe Drag in Three-dimensional Globally Isothermal Disks.** Masset, F., Benítez-Llambay, Pablo. 2016, ApJ, 817, 1, 19. - [PDF](#)
- **Planet heating prevents inward migration of planetary cores.** Benítez-Llambay, Pablo; Masset, F., Koenigsberger, G., Szulágyi, J., 2015, Nature, 520, 63–65. - [PDF](#)
- **Low-mass planet in nearly inviscid disks: numerical treatment..** Kley, W., Müller, T. W. A.; Kolb, S. M., Benítez-Llambay, Pablo; Masset, F. 2012, A&A, 546, A99 - [PDF](#)
- **Origin and detectability of co-orbital planets from radial velocity data.** Giuppone, C.A., Benítez-Llambay, Pablo; Beaugé, C. 2012, MNRAS, 421, 356-368 - [PDF](#)
- Los capítulos 3 y 4 se corresponden con la publicación – FARGO3D: A new GPU-oriented MHD code. –
- El capítulo 5 corresponde con la publicación – Planet heating prevents inward migration of planetary cores. –
- Los resultados del capítulo 6 serán publicados en los próximos meses.
- El capítulo 7 está en proceso de referato en la revista ApJ.

A todo esto, debe sumarse la existencia del proyecto FARGO3D, que contiene los resultados de todo el esfuerzo realizado en el desarrollo del código numérico. Se recomienda visitar la página <http://fargo.in2p3.fr/> para obtener detalles concretos sobre la forma en que se aplica el código en los casos prácticos. En particular, redactamos un documento en extenso que contiene gran cantidad de detalles importantes sobre la utilización y extensión del código y es un buen material complementario para la lectura de esta tesis:

<http://fargo.in2p3.fr/manuals/FARGO3DUserGuide.pdf>.

Sistemas planetarios

1

1.1. Preliminares

Hace tan solo 20 años se estaba descubriendo el primer planeta orbitando alrededor de una estrella diferente al Sol.

Durante la mayor parte de la historia del hombre, habíamos sido capaces de conocer acerca de la existencia de 5 cuerpos planetarios en nuestra bóveda celeste, que ordenados por distancia al Sol, hoy los llamamos: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. De forma tardía, con instrumental más avanzado, fuimos capaces de descubrir la existencia de Urano y Neptuno. Todos estos cuerpos tienen un conjunto de propiedades muy significativas, que vistas de forma aislada no parecerían dar pistas sobre su proceso de formación o la razón por la que se encuentran en su posición actual.

Sin embargo, las propiedades más notables, como ser la dirección y el plano de rotación de estos cuerpos, llevó a grandes pensadores del siglo XVIII, como Kant y Laplace, a desarrollar teorías sobre su formación, como la famosa *Hipótesis Nebular* sobre la formación de los planetas del Sistema Solar. Así, se comenzaron a esbozar las ideas primigenias y fundamentales sobre nuestro entendimiento moderno acerca del proceso de formación planetaria.

Si bien nuestro Sistema Solar es un ejemplo de un sistema planetario en el universo, explicar un posible origen para sus componentes, no necesariamente tiene que ver con estar yendo en la dirección correcta. Esto quedó muy claro desde el descubrimiento del primer *exoplaneta* alrededor de otra estrella, por [Mayor y Queloz \(1995\)](#). En este trabajo, los autores reportaron el descubrimiento de un planeta con una masa similar a la de Júpiter, moviéndose alrededor de una órbita muy cercana a la estrella central, a una distancia de tan sólo 8 millones de kilómetros, lo cual es una órbita más pequeña que la de Mercurio.

Este cuerpo era el primero de una larga serie de otros similares que fueron descubiertos con posterioridad. Esta serie de descubrimientos forzó a una revisión y reconsideración de los mecanismos de formación planetaria propuestos hasta entonces. En particular, se revalorizó la idea de *migración planetaria* por interacciones con el disco de gas primordial ([Lin et al., 1996](#)), cuyo estudio es el eje

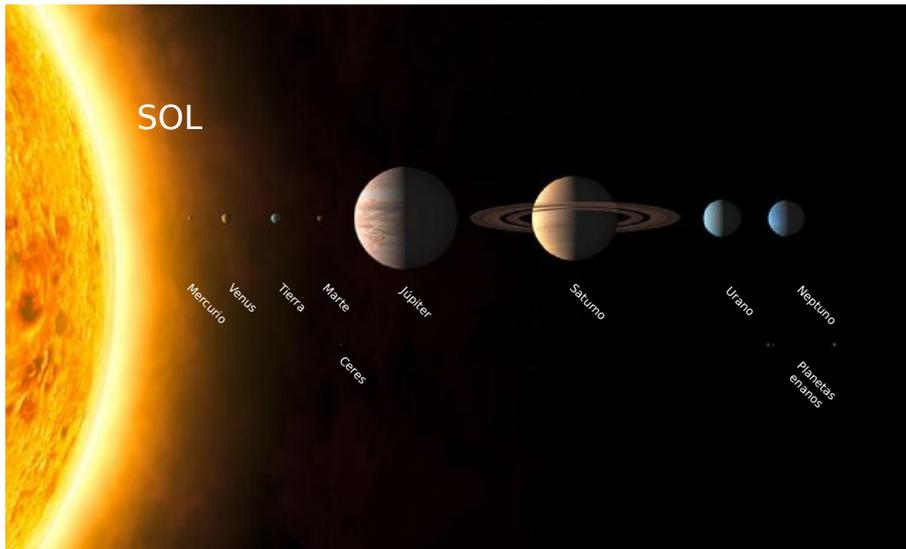


Figura 1.1: Aspecto cualitativo de nuestro Sistema Solar que muestra la gran diversidad de tamaños presente. Imagen modificada. Original: [IAU/Martin Kornmesser](#).

central de este trabajo.

1.2. El Sistema Solar

Una de las preguntas más importantes, aunque quizás carezca de sentido práctico, es ¿Qué es el Sistema Solar? Cualitativamente se puede decir que es un conjunto de cuerpos (planetas) que se mueven alrededor de un cuerpo extremadamente masivo (Sol), a distancias relativamente cercanas. Este conjunto o sistema, se representa de forma cualitativa en la Fig. 1.1, donde se muestra con claridad la forma, la textura y la proporción de tamaño de los cuerpos que conforman dicho conjunto. Nótese que este sistema es el único sistema planetario del cual tenemos un alto nivel de detalle.

Ahora bien, desde un punto de vista más académico, el Sistema Solar es uno de los laboratorios por excelencia para poner a prueba las implicaciones de los modelos de formación planetaria desarrollados. Esto se debe, principalmente, a que podemos observarlo de forma muy detallada, ya sea a través de telescopios o sondas robotizadas, y a que disponemos de datos geológicos y químicos de muchas de sus componentes. Además, disponemos de información recolectada durante un gran período de tiempo, por lo que conocemos muy bien su dinámica.

Nuestro Sistema Solar presenta una diversidad asombrosa. Por ejemplo, desde un punto de vista de sus componentes, presenta cuerpos en un espectro de escalas impresionante, desde planetas gigantes gaseosos, como son Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno, pasando por planetas rocosos, como Mercurio, Venus, Tierra y Marte, hasta planetas enanos, como Ceres y Plutón. Además, existen cuerpos menores, como asteroides y cometas, localizados en estructuras muy interesantes, como ser el cinturón de asteroides, de Kuiper y la nube de Oort.

También, dentro de nuestro Sistema Solar existen *Sistemas Solares* en miniatura, como son el caso de los sistemas de lunas presentes alrededor de los planetas gigantes, que son laboratorios excelentes para poner a prueba modelos de estructura de interiores planetarios y dinámica orbital. Incluso, existe la posibilidad de estudiar la dinámica de los sistemas de anillos de Saturno, la cual nos enseña propiedades muy interesantes de las interacciones entre un sistema continuo de partículas (a modo de partículas de prueba) y un perturbador masivo, como son las Lunas de este planeta.

Estudios detallados de algunas características del Sistema Solar, como ser la distribución de masa de los planetas, y en particular la baja masa de alguna de sus componentes, la cantidad de asteroides en el cinturón principal, algunos rasgos presentes en la Luna, entre otros, conducen a la idea de que en realidad los planetas de nuestro Sistema Solar no se formaron dónde realmente los vemos hoy. Es común aceptar que los planetas experimentaron migraciones. Estas migraciones podrían deberse a dos mecanismos diferentes. Por un lado está la conocida migración por dispersión de planetesimales, la cual consiste en la inyección o expulsión de masa sólida del sistema por parte de alguna de sus componentes y puede ocurrir en etapas tardías de la formación, al menos en el marco del conocido *modelo de Niza* (Levison *et al.*, 2011). Por otro lado, está la migración por interacción con la nebulosa primordial, la cual ocurre en el proceso mismo de la formación de los primeros núcleos planetarios.

Si bien el Sistema Solar sirve como último laboratorio para aplicar las teorías de formación planetaria y tratar de discernir entre ellas a partir de observables de alta calidad, sabemos que la variedad de condiciones astrofísicas de un sistema a otro, en las etapas primordiales, es demasiado grande. Por lo tanto, contar con tan sólo un ejemplo de sistema planetario probablemente no sea la mejor opción para desarrollar un modelo satisfactorio y realista del proceso de formación.

Desarrollar un modelo que explique ciertas características de un sistema demasiado particular, como lo es nuestro propio Sistema Solar, no necesariamente significa que estemos yendo en la dirección correcta. Por el contrario, entender y explicar cuáles son los mecanismos fundamentales en el modelado de muchas de las propiedades observacionales de los exoplanetas conocidos hasta ahora, y luego aplicar estos resultados a un sistema mucho más particular, como nuestro propio Sistema Solar, probablemente conduzca a modelos más cercanos a la realidad.

El estudio de la formación misma del Sistema Solar, y en particular, la formación de un sistema planetario genérico, requiere de una gran cantidad de datos observacionales. En este sentido, los últimos 20 años han sido una verdadera revolución en el campo del descubrimiento de planetas girando alrededor de otras estrellas. Por medio de la utilización de los datos recolectados, que cada día mejoran en calidad (y también en cantidad), seremos capaces en un futuro próximo de comenzar a develar los mecanismos fundamentales de la formación de sistemas

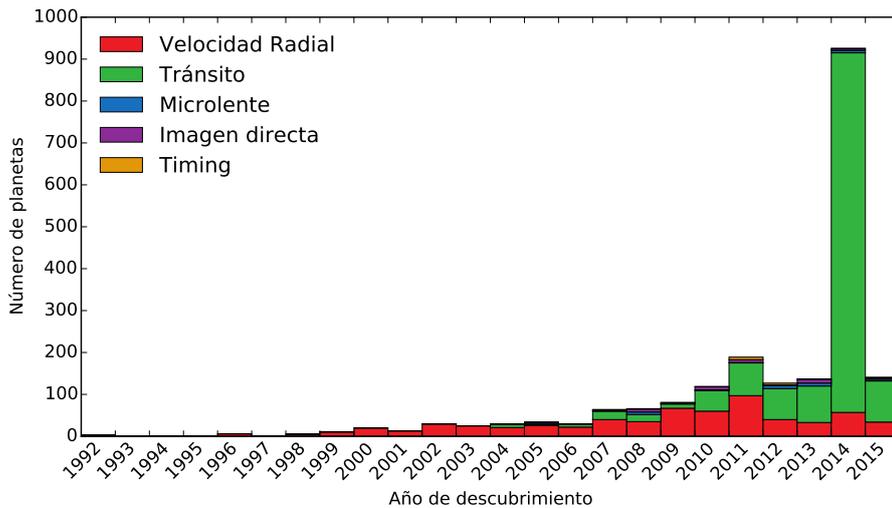


Figura 1.2: Histograma que muestra la cantidad de planetas descubiertos con el correr de los años. La frecuencia de descubrimientos se incrementa con el correr del tiempo, y en particular, entre el año 2013 y 2014, un gran número de ellos han sido descubiertos por el satélite Kepler, mediante la técnica fotométrica de tránsito. Datos del [Open Exoplanet Catalogue](#) (Diciembre de 2015).

planetarios genéricos, y en particular, de nuestro propio Sistema Solar.

1.3. Exoplanetas, nuevos Sistemas Solares

En los últimos 20 años, la cantidad de planetas descubiertos se ha incrementado considerablemente. Además, también lo hizo el ritmo al cual se agregan a la lista de descubiertos. En la Fig. 1.2 se observa un histograma que muestra el número de planetas descubiertos en función del tiempo. La suma de todos los elementos del histograma arroja el asombroso número de 2061 planetas orbitando alrededor de otras estrellas, descubiertos en tan sólo dos décadas.

A pesar de conocer una gran cantidad de planetas, los parámetros físicos que podemos obtener de la mayoría de ellos no dista mucho del conocimiento que teníamos de los planetas de nuestro propio Sistema Solar en el siglo XIX. De hecho, lo que conocemos con mayor precisión para la mayoría son sus períodos orbitales. Así, en principio, podríamos estudiar de forma precisa la dinámica orbital de estos sistemas, pero lamentablemente, sus masas también se encuentran pobremente determinadas.

No obstante, la gran cantidad de información que tenemos de ellos nos brinda por primera vez en la historia la posibilidad de ver que los sistemas planetarios no son una rareza del universo. Además, comenzamos a comprender que en general son bastante diferentes al nuestro y nos permite comenzar a entender cuáles mecanismos podrían permitir su formación y, más importante quizás, cuáles mecanismos no son compatibles con las observaciones. Una discusión al respecto se hace en la sección 1.4.

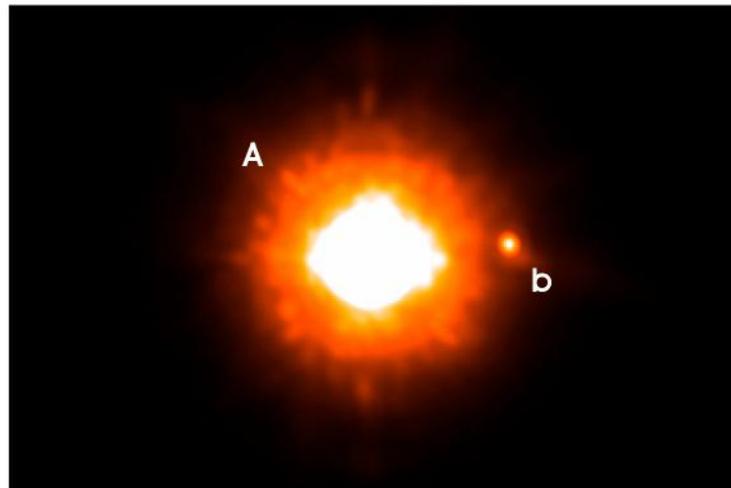


Figura 1.3: Imagen en la banda Ks tomada por VLT del sistema GQ Lupi. La separación entre las componentes A y b es ~ 100 UA, y su separación angular es 0.73 segundos de arco (Neuähuser *et al.*, 2005). Imagen de ESO.

Por completitud, para comprender de dónde provienen los datos que se utilizan cuando se habla de un determinado parámetro de un exoplaneta, haremos un breve resumen de los métodos comúnmente utilizados para su detección.

1.3.1. Imagen directa

El método de imagen directa está basado en la técnica que sirvió para detectar todos los planetas que componen nuestro Sistema Solar, es decir, la observación directa. Sin embargo, lo que parecería ser tan simple, en la práctica es una de las técnicas más difíciles de implementar en sistemas exoplanetarios.

Esto se debe a dos motivos: por un lado, la gran distancia a la que se encuentran las estrellas de nosotros produce que la separación angular entre la estrella central y el exoplaneta sea extremadamente pequeña. Por ejemplo, en la Fig. 1.3 se observa la imagen directa del sistema planetario GQ Lupi, donde la separación angular entre sus componentes es de tan solo 0.73 segundos de arco, aún estando separadas por 100 UA entre ellas.

Por otro lado, la gran diferencia entre el *brillo* de la estrella central y la luz reflejada por el exoplaneta hacen necesario un gran contraste dinámico en la imagen, o la utilización de técnicas que permitan enmascarar el brillo estelar.

En la Fig. 1.4 mostramos todos los exoplanetas descubiertos con esta técnica. Vemos que el número es bastante pequeño. Por otro lado, la mayoría de los cuerpos detectados son masivos y localizados a una distancia muy grande respecto de la estrella central.

A partir de esta técnica es posible obtener elementos orbitales precisos, si la distancia a la estrella central es conocida y se tienen imágenes en épocas significa-

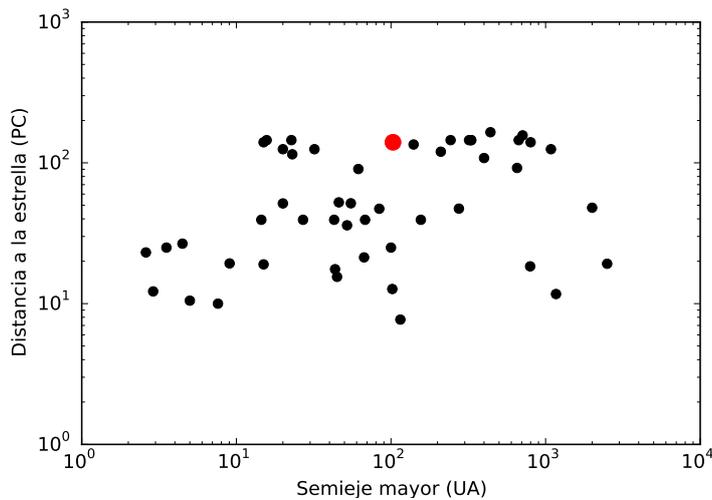


Figura 1.4: Exoplanetas detectados por el método de imagen directa. En rojo se muestra la posición del exoplaneta GQ Lupi b, el cual se muestra a modo de ejemplo en la figura. 1.3. Datos de exoplanets.eu.

tivamente separadas. Ya que los planetas se localizan en regiones tan exteriores, los tiempos dinámicos son muy largos. Así, en la práctica, ni los períodos ni las masas se pueden determinar de forma precisa, lo cual es importante y deseable en sistemas de planetas múltiples.

Por último, este método es prometedor en la detección de los planetas que puedan ser formados por el mecanismo de inestabilidad gravitacional (ver sección 1.5.2), los cuales deberían localizarse lejos de la estrella central y ser muy masivos.

1.3.2. Método de velocidad radial

El método por excelencia para la detección de exoplanetas, hasta la llegada del satélite Kepler, fue el método de velocidad radial.

Este método no necesita de una visión directa del exoplaneta, sino que está basado en la medición del desplazamiento de las líneas espectrales estelares a causa del movimiento radial de la estrella inducido por el/los cuerpos planetarios que la orbitan. Así, los exoplanetas son detectados de forma indirecta. El efecto físico involucrado detrás es el efecto Doppler.

Este método es muy eficiente cuando es aplicado a estrellas de baja masa, en donde las perturbaciones radiales de los planetas generan una mayor aceleración en la estrella. Naturalmente, movimientos radiales más grandes serán más simples de ser detectados. Por otro lado, ya que estas estrellas suelen ser rotadoras lentas (Lovis y Fischer, 2010), la medición mejora sustancialmente. Esto es así porque una alta rotación da como resultado un ensanchamiento de las líneas espectrales (Shajn y Struve, 1929), y conduce a una degradación de la medición.

La forma general de la semi amplitud para la velocidad radial observada en el

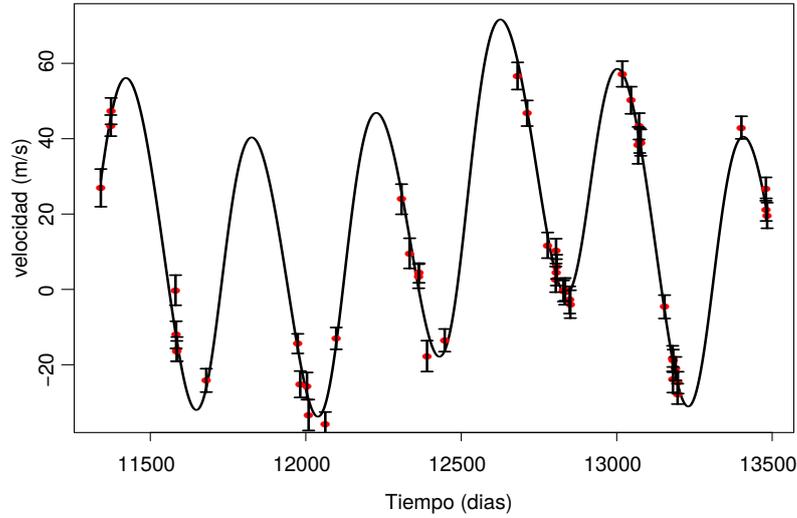


Figura 1.5: Ejemplo de curva de velocidad radial del sistema HD108874, un sistema de dos exoplanetas resonantes. Los puntos corresponden con mediciones, mientras que la curva negra es el ajuste orbital que minimiza los residuos. Imagen adaptada de [Hollis et al. \(2012\)](#).

problema de dos cuerpos general, puede ser calculada de forma analítica ([Marcy y Butler, 1998](#)), y viene dada por:

$$K = \left(\frac{2\pi\mathcal{G}}{P} \right)^{1/3} \frac{m_p \sin i}{(M_* + m_p)^{2/3} \sqrt{1 - e^2}}, \quad (1.1)$$

donde \mathcal{G} es la constante de gravitación universal, m_p es la masa del planeta, M_* es la masa de la estrella central, e es la excentricidad de su órbita y P el período orbital, que puede ser escrito en términos de la masa a partir de la tercer ley de Kepler. i es la inclinación de la órbita respecto del plano del cielo. Así, la variación de velocidad radial será $\Delta v_r = K g(t)$, con $g(t)$ una función oscilatoria. En la práctica la forma de la curva es bastante más complicada, y deben realizarse complejas técnicas de ajuste para la obtención de los parámetros orbitales (ver [Giuppone, 2011](#)).

Hay que notar que esta técnica sólo permite estimar una cota inferior para la masa del planeta ($m_p \sin i$). Sin embargo, esta indeterminación desaparece cuando la inclinación puede determinarse a través de un método alternativo, por ejemplo, el método de tránsito.

Nótese que la amplitud K es proporcional a la masa del planeta, e inversamente proporcional a la raíz cúbica del período. Por este motivo, el método de velocidad radial tendrá un sesgo para masas grandes y períodos pequeños, límites que incrementan la relación señal-ruido de la medición de esta cantidad.

En la Fig. 1.5 vemos un ejemplo de esta técnica aplicada al sistema HD108874, el cual corresponde a un sistema de dos planetas alrededor de la estrella central. Los puntos rojos, con sus bandas de error, corresponden con mediciones del co-

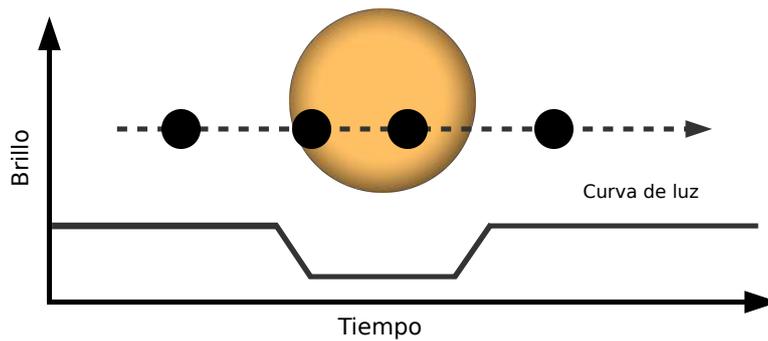


Figura 1.6: Tránsito planetario por delante de una estrella. Cuando el planeta se interpone entre la línea que une al observador con la estrella, se produce una disminución en la luz detectada, cuya duración, forma y profundidad están relacionadas con los parámetros geométricos del planeta.

rrimiento de las líneas espectrales de la estrella, mientras que la curva continua negra corresponde al ajuste de la función $Kg(t)$, que en este caso, por tratarse de un sistema de dos planetas, tendrá una forma no trivial.

1.3.3. Método de Tránsito

El método de tránsito, o tránsito fotométrico es aquel en el cual la detección del planeta se hace de forma indirecta, a través del monitoreo del brillo de la estrella. Con la aparición del satélite Kepler, este método ha sido el más fructífero detectando planetas alrededor de otras estrellas.

Si el ángulo respecto de la visual es el adecuado ($\tan i < a/R_*$, con i la inclinación de la órbita respecto del plano del cielo, a el semieje del planeta y R_* el radio estelar), el planeta eclipsará a la estrella cuando pase delante de ésta, y será ocultado en la otra mitad de su órbita.

Este comportamiento produce curvas de luz muy características, como la representada en la Fig. 1.6. En esta figura vemos la imagen de la estrella y un planeta que pasa delante de ella. Cuando el planeta no pasa por delante de la estrella, la curva de luz permanece constante. Un decaimiento de dicha curva se observa cuando el planeta se interpone entre la estrella y el observador. En la práctica, el poder resolvente de los telescopios no permite observar el disco estelar como se lo muestra en la Fig. 1.6, por lo que sólo se puede inferir la existencia del planeta por medio de mediciones fotométricas precisas de la variación del brillo estelar.

Además del período del planeta, esta técnica permite inferir radios planetarios e inclinación del plano orbital, lo cual junto a la técnica de la velocidad radial, permite precisar un valor efectivo para la masa, y como consecuencia, permite determinar la densidad del planeta. Así, con la combinación de ambos métodos, es posible diferenciar entre planetas rocosos y gaseosos.

A primer orden (estrella de brillo uniforme y planeta no radiante), la variación máxima del flujo estelar está asociada con la superficie del planeta proyectada

sobre la superficie de la estrella. Por lo tanto la variación de flujo es:

$$\frac{\Delta F_{\max}}{F} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2, \quad (1.2)$$

Así, con conocer el radio estelar, se puede determinar el radio planetario.

Un aspecto interesante del método es que, si se mide el tránsito en diversos filtros, se pueden obtener datos sobre la composición de la atmósfera de los exoplanetas [Charbonneau et al. \(2002\)](#).

Naturalmente, el método está limitado por la precisión fotométrica que se pueda alcanzar. Planetas gigantes pueden ser detectados desde tierra y, recientemente, planetas similares a la Tierra han sido descubiertos por medio de observaciones realizadas desde el espacio, por el satélite Kepler.

La técnica de tránsito sumada a la determinación precisa de los momentos de tránsito, a partir de ajustes orbitales previos y mediante observaciones posteriores, permite determinar variaciones en el tiempo de tránsito esperado. Esta técnica es conocida en inglés como *Transit timing variations* (TTV) ([Miralda-Escudé, 2002](#)), y es una técnica ampliamente utilizada para la detección de sistemas múltiples.

1.3.4. Método de microlente

El método de microlente se basa en la utilización de una estrella de fondo como fuente de luz de referencia, y la amplificación de ésta por una estrella intermedia, la cual actúa como lente gravitacional.

Si la estrella que transita posee un planeta, éste contribuirá al efecto de lente, pudiendo ser detectado midiendo alteraciones en la curva de luz observada. Para que esto ocurra, debe producirse un alineamiento casi exacto entre el observador y ambas estrellas.

Este efecto tiene dos propiedades importantes: por un lado, es un efecto simétrico con respecto al máximo de la curva de luz. Por otro, es perfectamente acromático, ya que se debe a efectos gravitatorios. Así, ambas propiedades permiten discernir entre observaciones de lentes y otro tipo de variaciones.

Una característica de este fenómeno es que es irrepetible, en el sentido de que el tránsito jamás volverá a ocurrir. Estadísticamente, es más probable observar una microlente hacia el centro galáctico, donde la cantidad de estrellas de fondo es muy grande.

En la Fig. 1.7 se muestra una curva característica de esta clase de fenómenos, en donde la existencia de un planeta genera una alteración notable en la curva de luz esperada.

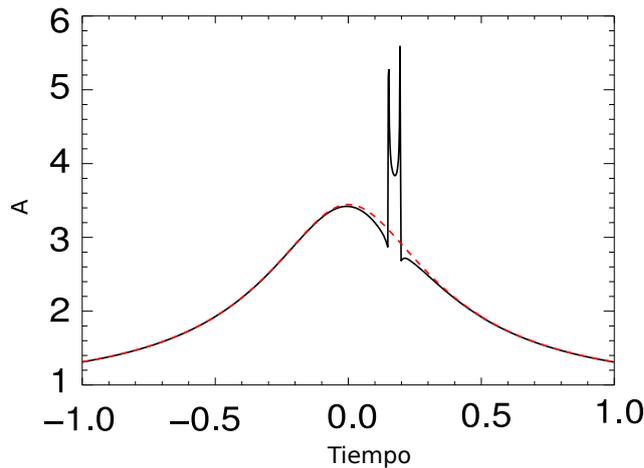


Figura 1.7: Curva de luz de una microlente. La línea a trazos roja corresponde a la curva de luz observada cuando una estrella pasa por delante de otra, asumiendo una fuente de luz puntual. Cuando un planeta está presente, la señal observada presenta un amplificación de muy corta duración. Imagen adaptada de [Fischer et al. \(2014\)](#).

1.3.5. Cambios en la rotación de un pulsar (*timing*)

El método que sirvió para la detección del primer planeta alrededor de un objeto masivo (el púlsar PSR 1257+12, [Wolszczan, 1994](#)) es el método de *timing*, que consiste en la medición del cambio en la frecuencia de rotación de un pulsar.

Un pulsar es un objeto residual, producto de la explosión de una estrella, muy compacto y un rotado rápido. Si el objeto posee un campo magnético y el eje magnético no coincide con el momento angular del objeto, y además, por casualidad, nos encontramos en la línea de visión de la radiación emitida por este objeto, observaremos pulsos regulares provenientes de él. La rotación de estos objetos es extremadamente regular, por lo que una perturbación, como por ejemplo la de un planeta alrededor de él, será detectable muy fácilmente.

Los planetas así detectados carecen de un interés popular ya que se encuentran en un ambiente muy hostil, y por lo tanto, las condiciones para albergar vida serían desfavorables. Por otro lado, ya que esta clase de objetos es muy rara, la cantidad de planetas conocidos alrededor de ellos, también es pequeña.

1.4. Algunas propiedades de los exoplanetas

La lista de todos los exoplanetas descubiertos presenta una gran diversidad en muchos aspectos diferentes. Referirnos a cada característica particular sería demasiado extenso, por lo que en esta sección sólo presentaremos aquellas que consideramos como una motivación importante para nuestro estudio, y que en algunos casos, podrán ser contrastadas con los resultados obtenidos de nuestro trabajo.

Desde el número de cuerpos presentes en el sistema hasta propiedades dinámi-

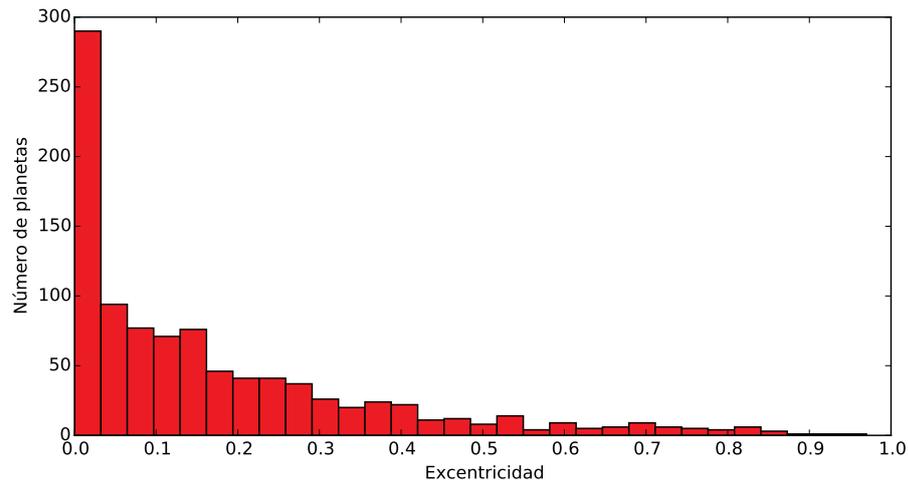


Figura 1.8: Distribución de excentricidades de los exoplanetas conocidos. Se observa que si bien un gran número de ellos se encuentran en órbita circular, un número significativo ($\sim 70\%$ de la muestra) se aparta de la circularidad. El histograma incluye 970 exoplanetas tomados del [Open Exoplanet Catalogue](#).

cas sensibles al propio proceso de formación, los exoplanetas abarcan un rango amplísimo de propiedades diferentes.

Cada una de las características presentes, posiblemente guarde una relación estrecha con los mecanismos actuantes durante la etapa de formación. De hecho, que el mecanismo de formación deje una huella profunda en la posterior estructura del sistema formado es altamente deseable, ya que permitiría distinguir entre diferentes modelos de formación. Un ejemplo claro de esta diversidad es la *distribución de excentricidades* observada. Esta distribución podría pasar desapercibida si no fuera que, como se verá en el capítulo siguiente, los planetas durante su formación deberían experimentar una gran disipación orbital. Por esto nos referimos a que los planetas deberían tender a la circularidad, y a un decaimiento en el semieje (ver capítulo 2). Sin embargo, esto no es precisamente lo que se observa en todos los casos.

En la Fig. 1.8 vemos un histograma que muestra la distribución de excentricidades para todos los exoplanetas con datos disponibles (970). Existe una gran cantidad de cuerpos con excentricidad nula, en buen acuerdo con lo esperado según el proceso de formación en un disco de gas. Sin embargo, una gran cantidad se halla en órbitas excéntricas, y algunos, en órbitas, de hecho, muy excéntricas y quizás clasificables como cometarias. Esta distribución, por ejemplo, es un rasgo observacional notable que probablemente nos esté dando pistas importantes sobre qué ocurre en un sistema planetario cuando la formación está en sus etapas tardías. Se observa que una gran fracción de los exoplanetas no se encuentran en órbitas circulares, como sería esperable en un escenario de formación dentro de una nube de gas. Por otro lado, esta distribución podría ser evidencia de mecanismos de formación alternativos, o la existencia de efectos importantes

posteriores a la disipación del gas. Este es un efecto que puede ser explicado fácilmente a partir de la excitación en excentricidad por medio de una componente masiva en el sistema, efectos seculares o binarias cercanas, y posterior circularización por efectos tidales, pero constantemente despreciando la interacción con el gas (Ford, 2014). Comprender en detalle esta distribución particular, con vista a los procesos físicos que gobiernan las interacciones con el gas, incluyendo por ejemplo, procesos turbulentos o estudiando inestabilidades que puedan aparecer, podría ser relevante a la hora de explicar, en alguna medida, la excentricidad de estos cuerpos (ver por ejemplo la sección 5.8).

Otra propiedad interesante es la distribución de distancias. Los exoplanetas, no se localizan al azar, sino que hay regiones privilegiadas en las que prefieren estar y otras en las que no. Benítez-Llambay *et al.* (2011) mostraron que algunas características presentes en la distribución espacial de los planetas podría guardar relación con su proceso de formación. Por ejemplo, la frecuencia de planetas gigantes a distancias grandes, como Júpiter en nuestro Sistema Solar, no puede ser explicada sin la ayuda de mecanismos que reduzcan la tasa de migración en las etapas iniciales (Cossou *et al.*, 2014), estrechamente relacionado con nuestra investigación en los capítulos 5 y 6.

Otro aspecto muy curioso es la frecuencia de aparición de planetas respecto de algunas propiedades estelares. En particular, hay una relación empírica llamada correlación planeta-metalicidad, la cual muestra que la ocurrencia de planetas gigantes alrededor de estrellas metálicas es mucho más alta respecto de su ocurrencia en estrellas normales (Fischer y Valenti, 2005). Es más, Wang y Fischer (2013) encontraron que esta dependencia sería universal, por lo que la incidencia de planetas sería más alta con la metalicidad, aunque significativamente mayor para planetas gigantes. Esta característica importante ciertamente nos está diciendo algo respecto de la formación de los sistemas planetarios. Por ejemplo, Johnson *et al.* (2010) argumentan que esto podría ser una evidencia a favor del modelo de formación por acreción de núcleos. Nosotros proponemos un mecanismo para explicar esta característica en el capítulo 5.

Por último, otra propiedad destacable es la distribución de resonancias de los sistemas exoplanetarios múltiples detectados por el satélite Kepler. En la Fig. 1.9 vemos el histograma generado con el cociente de periodos calculados para todos los exoplanetas múltiples de 2, 3, 4 y 5 planetas (Goldreich y Schlichting, 2014). Quizás la característica más sobresaliente de esta figura sea el hueco en torno a la resonancia de movimientos medios 2:1. Se sabe que esta resonancia es estable, y que cuerpos en migración deben converger hacia ella. Sin embargo, es notable cómo la acumulación de cuerpos se produce levemente por fuera de la posición nominal. Lo mismo se observa para la resonancia 3:2, y en menor medida para las demás. Esta cualidad distintiva podría ser evidencia importante sobre los mecanismos de formación de tales sistemas. Inspirados en este problema, en el capítulo 7 presentaremos una técnica para estudiarlo.

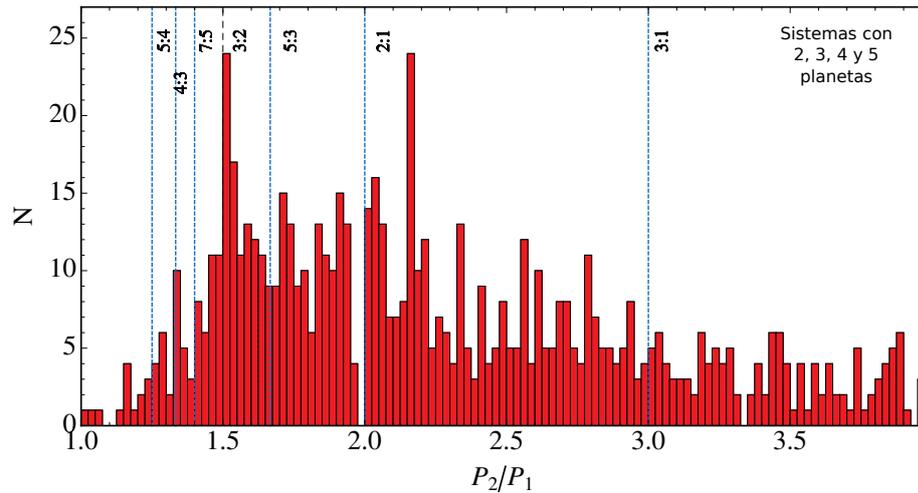


Figura 1.9: Histograma que muestra la distribución de los cocientes de períodos de todos los sistemas múltiples de 2, 3, 4 y 5 planetas descubiertos por la misión Kepler. Las líneas azules a trazos se corresponden con resonancias de movimientos medios entre los diferentes pares. Imagen adaptada de [Goldreich y Schlichting \(2014\)](#).

Así, vemos que estudiar en detalle características observacionales de planetas alrededor de otras estrellas puede darnos información muy útil sobre los procesos de formación. En particular, nos muestra que estudiar el proceso de migración planetaria, incluyendo el estudio de los procesos disipativos y el ritmo de migración en diferentes condiciones físicas, es crucial para la correcta interpretación de las propiedades observacionales de los exoplanetas.

1.5. Modelos de formación

Los planetas son un residuo del proceso de formación estelar. Éstos crecen en nubes de gas con forma de disco, y no hay motivos para creer que la composición de los planetas será diferente a la composición de la nube de gas, que a su vez comparte la misma composición que la estrella central ([Lissauer, 1993](#)).

Las estrellas se forman a partir de una nube de gas de gran escala, la cual es gravitatoriamente inestable. A medida que el material colapsa, por conservación de momento angular, la nube cada vez tiende a girar más rápido. Habrá partes que tengan el momento angular suficiente para soportar la caída radial a la estrella, pero otras se transformarán en el material que alimente a la estrella en formación. Cuando el material que desciende a través de los polos estelares se encuentre en el plano ecuatorial, se producirán choques entre ambos frentes y esto, al cabo de no mucho tiempo, terminará disipando la energía cinética vertical, permitiendo alcanzar un equilibrio hidrostático vertical, y una estructura con forma de disco. Una revisión completa del proceso de formación estelar puede encontrarse en el famoso trabajo de [Shu et al. \(1987\)](#).

De forma resumida, podemos decir que el proceso de la formación y desaparición

ción del proceso de formación planetaria tiene 5 etapas, y que durante las últimas tres, los planetas deben lograr alcanzar los tamaños que tendrán durante toda su vida. Así, entender en dónde se forman los planetas implica un estudio detallado previo de cuáles son las condiciones en las que una estrella puede nacer.

Según el modelo estándar de formación estelar, las estrellas nacen del colapso gravitatorio de una nube de gas gigante en rotación (etapa 1). Este colapso se produce cuando la nube de gas gigante es suficientemente masiva como para que la gravedad supere a las fuerzas repulsivas del medio, a saber, presión térmica, presión magnética y fuerza centrífuga. El resultado de este proceso es una nube de gas en contracción, en la que la temperatura y la presión aumentan de forma significativa a medida que su tamaño efectivo se va reduciendo. Una condición fundamental en esta etapa es que la nube pierda su soporte magnético, el cual puede superar hasta en un factor 10 al soporte térmico y rotacional. Hay evidencia de que el mecanismo de remoción de campo magnético es la difusión ambipolar (Crutcher, 1999), un efecto resistivo debido a colisiones entre iones y neutros. Si la nube presenta una densidad suficiente, podrá vencer a la energía térmica (criterio de Jeans), y podrá formar un objeto central con las características de una estrella. Por la ley de conservación de la energía, la energía potencial perdida durante el colapso se transformará en calor, y a partir de un determinado momento, la proto estrella comenzará a producir energía por medio de reacciones nucleares (etapa 2). La formación de la estrella, y de forma simultánea, del disco, ocurre en escalas de tan sólo 10^5 años, lo cual es el orden de magnitud del tiempo de caída libre de la nube primordial. En las primeras etapas de la formación del disco la masa contenida en forma de sólidos es considerable, pero el tamaño medio de las partículas es demasiado pequeño como para formar un planeta. Así, el camino hacia la etapa 3 es el de crecimiento de planetesimales mientras la envoltura de escombros del disco primordial se limpia. En la etapa 4, el disco se hace ópticamente visible, y la estrella es reconocible como una estrella de tipo T Tauri. Es en esta etapa en donde los primeros núcleos planetarios se formarán. Finalmente, en una quinta y última etapa, el disco desaparece por los efectos del viento estelar y la fotoevaporación, dejando un disco poblado por los objetos planetarios recientemente formados y por escombros.

A pesar de entender de forma global el mecanismo que da origen a las estrellas y a los discos protoplanetarios, los mecanismos que podrían dar origen a los planetas aún siguen sin poder ser elucidados de forma precisa, principalmente debido a la falta de observaciones. Sin embargo, mediante experimentación numérica, se han realizado avances considerables.

Actualmente hay dos líneas de investigación predominantes en cuanto al posible origen de cuerpos planetarios masivos. Por un lado está el modelo de *acreción de núcleos* (Pollack *et al.*, 1996) y, de forma alternativa, está el modelo de *inestabilidad gravitacional* (Boss, 1997; Mayer *et al.*, 2002).

1.5.1. Modelo de acreción de núcleos

Este modelo postula que los planetas gigantes se forman por la creación de planetesimales (fragmentos de polvo y roca de tamaño considerable) y núcleos de tamaño creciente, por colisiones sucesivas. Una vez que el núcleo alcanza una masa entre 10 y 15 M_{\oplus} , comienza una fase de acreción de gas, la cual es muy eficiente y permite que el planeta gane la masa necesaria en tiempos comparables a la vida media de los discos de gas.

El proceso de acreción de núcleos puede separarse en tres etapas principales. Inicialmente, un núcleo poco masivo se encuentra en formación, el cual no posee envoltura gaseosa ya que su gravedad no es lo suficientemente fuerte como para mantener alguna especie de equilibrio hidrostático. A medida que el núcleo crece en masa por la acreción de planetesimales, llega un punto en el que es posible mantener una envoltura gaseosa en equilibrio hidrostático. Este equilibrio es el producto del balance entre la radiación térmica y el calentamiento producido por el bombardeo. El núcleo continuará creciendo hasta que se alcance una masa crítica, para la cual el equilibrio ya no puede mantenerse, y la atmósfera del planeta se contrae. A partir de esta masa crítica ocurre una rápida acreción de gas, la cual provee de la mayor parte de la masa al planeta en formación. Esta etapa de rápido crecimiento ocurre para masas entre $10M_{\oplus}$ y $15M_{\oplus}$. El proceso finaliza cuando el suministro de gas se agota, lo cual puede ocurrir porque el planeta adquiere una masa suficiente como para limpiar completamente su órbita o que el disco de gas se disperse. Un aspecto importante es que la masa crítica depende pobremente de las propiedades del disco protoplanetario (Armitage, 2007; Papanastasiou y Terquem, 1999). Sin embargo, crecimientos más rápidos son esperados en las regiones más densas del disco, como por ejemplo, más allá de la llamada línea del hielo, lugar en dónde la mayor cantidad de los materiales volátiles del disco se encuentran en estado sólido.

Probablemente este sea el mecanismo principal para explicar la formación de la mayoría de los exoplanetas observados, aunque una densidad suficiente de sólidos es necesaria para compensar los tiempos de migración en las etapas primordiales y los tiempos de vida media de los discos de gas ($\sim 1,10$ Millones de años).

1.5.2. Modelo de inestabilidad gravitacional

Otro modelo de formación es el de *inestabilidad gravitacional*, el cual postula la creación de grandes planetas gaseosos por medio de inestabilidades dentro del disco de gas primordial (Boss, 1997; Mayer et al., 2002). Estas inestabilidades fragmentarían el disco generando grumos densos y fríos, los cuales serían los núcleos de los planetas gigantes. Una ventaja de este método respecto del método de acreción de núcleos son los tiempos característicos involucrados. Mientras que este último requiere tiempos del orden de la vida media de los discos, la

inestabilidad gravitacional actúa en muy pocos tiempos dinámicos. La condición necesaria para la aparición de esta inestabilidad es que el parámetro de Toomre Q (Toomre, 1964) sea del orden de la unidad. Este parámetro mide la relación entre la dispersión de velocidad local y la fuerza gravitatoria, razón por la cual es esperable que dependa fuertemente de la temperatura del medio. En otras palabras, la aparición y eficiencia de este mecanismo es fuertemente dependiente de la eficiencia de enfriamiento del gas, a fin de permitir la aglomeración de material. Por lo tanto, la eficiencia del mecanismo es también una función de la distancia.

Podría ser el mecanismo predilecto para la formación de planetas gigantes muy lejos de la estrella, con tal de que la escala de tiempo del gas no sea mucho mayor al tiempo dinámico del mismo. De lo contrario, aparecen en un primer lugar brazos espirales (por inestabilidad gravitacional), que calientan el gas e inhiben la aparición de grumos gravitacionalmente inestables.

1.6. Conclusiones

En este capítulo discutimos el contexto astrofísico en el cual se encuentra inmerso el problema que trataremos a lo largo de este trabajo. Vimos que el Sistema Solar, si bien es una fuente de información muy valiosa, y de calidad muy superior a la obtenida para los exoplanetas, no puede ser el sistema de referencia para el desarrollo de los modelos de formación; aunque esto no significa que los modelos desarrollados no deban ser compatibles con nuestro propio sistema.

Presentamos algunos aspectos relevantes referidos a los exoplanetas detectados, incluyendo sus principales técnicas de detección, algunas de sus características más notables y discutimos cuáles podrían haber sido sus mecanismos de formación. En estas discusiones, nunca contemplamos los efectos producidos por la nube de gas sobre los cuerpos en formación. Se sabe que esta interacción es extremadamente importante en las primeras etapas de crecimiento, por lo que no puede ser ignorada. Así, en el siguiente capítulo, nos concentraremos en un aspecto más específico que se corresponde con la motivación verdadera de esta tesis.

Interacciones planeta-disco

2

2.1. Introducción

En el capítulo anterior vimos que, sin importar cual sea el modelo de formación planetaria adoptado, el cual puede ser objeto de debate, no hay discrepancias frente a la idea de que los planetas se forman dentro de un disco de gas. Las interacciones que ocurran dentro del entorno gaseoso, ciertamente moldearán la estructura final de los sistemas planetarios. Sin embargo, aún existe discrepancia respecto de cuales de todas las interacciones posibles dentro de un disco de gas son dominantes y capaces de esculpir un sistema planetario con las características observadas.

Como se vio en el capítulo 1, los planetas son resultado del proceso de formación estelar, y nacen dentro de una estructura de gas y polvo con forma de disco. La interacción gravitatoria entre el planeta en formación y el polvo y gas del disco es, como veremos en este capítulo, muy compleja, y la consecuencia es un proceso conocido como migración planetaria. Esta migración es el resultado de torques actuantes sobre el planeta, generados por estructuras asimétricas excitadas en el disco de gas por el planeta en formación.

2.2. Motivación observacional

De forma temprana, en el trabajo clásico de Goldreich y Tremaine (1979), se demostró que una masa en órbita fija alrededor de un objeto central y sumergido en un disco gaseoso está sujeto a fuerzas que son capaces de cambiar su distancia de forma considerable. Este hecho no cobró importancia sino hasta después del descubrimiento del primer exoplaneta, 51 Pegasi (Mayor y Queloz, 1995), el cual se encuentra muy próximo a la estrella. A partir de este ejemplo, Lin *et al.* (1996) propusieron que debido a que la formación *in-situ* de este sistema es improbable, debería haberse formado en regiones distantes y migrar a través del mecanismo de Goldreich y Tremaine (1979).

Una sucesión de descubrimientos posteriores, como por ejemplo, la existencia de sistemas planetarios resonantes (Marcy *et al.*, 2001), pusieron en evidencia

que procesos disipativos deben ocurrir durante la formación de los planetas, y que probablemente las interacciones entre un protoplaneta y el disco podrían ser relevantes para explicar las observaciones.

En la actualidad existen otros mecanismos propuestos que pueden dar cuenta de algunas características importantes de los exoplanetas, como por ejemplo la distribución de excentricidades. Estos mecanismos además son capaces de predecir cambios impresionantes en sus órbitas, logrando producir migraciones de gran escala. Una de tales propuestas es la llamada dispersión planetaria (Jurić y Tremaine, 2008), en donde la interacción gravitatoria de dos o más componentes del sistema genera un crecimiento de excentricidad (y posiblemente inclinación) la cual finalmente, por torques con la estrella (favorecidos por un periastro cercano a la estrella), se amortigua y el semieje se modifica. Este método es uno de los predilectos para explicar la distribución de excentricidad observada en los sistemas de exoplanetas (Chatterjee *et al.*, 2008).

Por otro lado, perturbaciones seculares (como la resonancia de Kozai), ejercidas por alguna componente masiva lejana e inclinada también podría explicar la existencia de planetas excéntricos y retrógrados (Wu y Murray, 2003; Naoz *et al.*, 2011). Estos mecanismos combinados podrían dar cuenta de la existencia de planetas gigantes cercanos a la estrella central (Fabrycky y Tremaine, 2007).

También existen muchos ejemplos de exoplanetas suficientemente lejos de la estrella (p.ej. Fig. 1.4). Todas estas evidencias parecerían indicar que la migración por interacciones planeta-disco parecería no jugar un papel importante.

Sin embargo, hay una serie de hechos que no pueden ser ignorados. Por un lado, las teorías clásicas predicen que un planeta con una masa similar a la de la Tierra debería caer hasta la estrella central en $\sim 10^5$ años (Tanaka *et al.*, 2002), lo cual es un tiempo al menos un orden de magnitud menor que el tiempo de vida media de los discos de gas (Mamajek, 2009).

Así, si consideramos que los mecanismos mencionados anteriormente son capaces de explicar ciertas características observacionales, y que no presentan el problema con las escalas de tiempo de la migración por interacciones planeta-disco, quizás los exoplanetas nos estén diciendo algo importante acerca de la eficiencia de la migración planeta-disco. Sin embargo, estamos casi seguros de que no hay forma de esquivar el proceso de interacción gravitatoria en el disco de gas, por lo que probablemente nos estamos perdiendo una parte importante del proceso de formación y migración planetaria.

En la Fig. 2.1 podemos ver una imagen reciente tomada por el radio interferómetro ALMA, en la cual puede verse el disco progenitor de la estrella HL Tau, con unas interesantes estructuras en forma de anillos y surcos, los cuales podrían ser la evidencia de planetas en formación. Esto además sería una evidencia observacional de que los planetas no pueden esquivar el proceso de interacción con su disco.

Los motivos expuestos son más que suficiente para continuar esta línea de in-

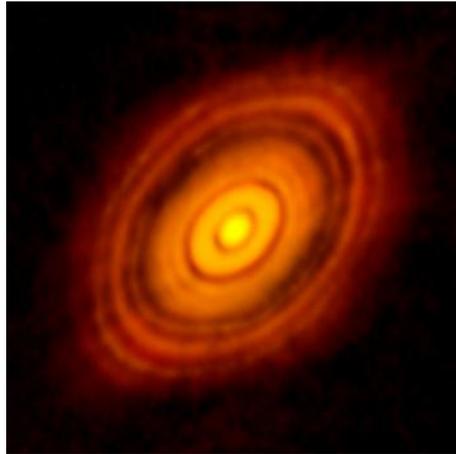


Figura 2.1: Imagen tomada con el radio interferómetro ALMA de la estrella joven HL Tau con su disco de gas. Se observan un gran número de anillos y surcos, lo cual podría ser la evidencia de múltiples planetas en formación. Imagen de ALMA (NRAO/ESO/NAOJ), C. Brogan, B. Saxton (NRAO/AUI/NSF).

vestigación y avanzar en el entendimiento de qué factores son dominantes en las interacciones planeta-disco. En última instancia, lo que descubramos aquí, ciertamente pondrá restricciones al proceso mismo de formación. A fin de avanzar en esta investigación, se hace cada vez más necesario comprender de forma detallada la dinámica y estructura de los discos en los cuales se forman. Es crucial distinguir y caracterizar cuáles son los procesos físicos fundamentales que dominan en ellos ya que, en última instancia, serán los que gobiernen el tipo de interacciones que el planeta pueda sufrir.

Hoy creemos que la *migración de tipo I*, el nombre que recibe la migración descrita por [Goldreich y Tremaine \(1979\)](#), no ocurre de forma estricta durante la formación de los planetas, y los mayores esfuerzos se centran en el estudio de una región muy pequeña en los discos, que se corresponde con la región coorbital del planeta. Hoy sabemos, y lo veremos a lo largo de este capítulo, que esta región puede ejercer un torque significativo y positivo, pudiendo contrarrestar la migración, o incluso revertirla. Así, las líneas de investigación actuales se enfocan en caracterizar con cada vez más detalle ésta región tan pequeña en torno a la órbita del planeta.

Es común dividir a la migración planetaria por interacciones planeta-disco en tres regímenes diferentes: migración de tipo I, de tipo II y de tipo III, íntimamente relacionados con la masa del cuerpo considerado en el proceso de migración, y serán explicados posteriormente.

2.3. Modelo de disco de gas

Para estudiar las interacciones de planetas con un disco de gas, primero debe realizarse un modelo de disco, que será el objeto base sobre el cual se formarán

los planetas.

Sabemos que los discos en los cuales se forman los planetas se encuentran alrededor de lo que se denominan estrellas de tipo T Tauri, un tipo de estrella temprana de pre-secuencia principal. La composición del disco es la misma que la composición estelar, y sólo el 1% de su masa total se encuentra en forma de polvo. El resto es mayoritariamente hidrógeno y helio, con una poca cantidad de elementos más pesados. La masa de los discos ronda entre $0,1-0,001M_{\odot}$ (Williams y Cieza, 2011) siendo por lo general poco masivos. En nuestro estudio, nos centraremos en los discos de baja masa para poder despreciar los efectos de su autogravedad¹. También sabemos que son estructuras extendidas en radio, en escalas de ~ 100 UA.

La ecuación de estado comúnmente utilizada para el estudio de estos discos es la ecuación de los gases ideales isoterma, dada por:

$$P = c_s^2 \rho, \quad (2.1)$$

con c_s la velocidad del sonido, calculada a partir de la ecuación de estado de los gases ideales $c_s^2 = k_B T / \mu m_H$, con k_B la constante de Boltzmann, m_H la masa del átomo de hidrógeno y μ el peso molecular medio. Pude verse fácilmente que la ecuación de equilibrio hidrostático vertical (considerando el equilibrio entre las fuerzas de presión, la gravedad, y la ecuación de estado isoterma) conduce, en el caso de disco delgado ($z \ll r$), a una distribución de masa de la forma:

$$\rho(r, z) = \frac{\Sigma(r)}{\sqrt{2\pi}H} \exp\left(-\frac{z^2}{2H^2}\right), \quad (2.2)$$

lo cual muestra que, en equilibrio hidrostático, la densidad decrece exponencialmente con el cuadrado de la altura, en una escala típica H . $\Sigma(r)$ es la densidad en el plano ecuatorial.

Observacionalmente, se verifica que los discos son estructuras de poca extensión vertical, es decir, baja altura. La altura del disco respecto de la distancia al centro, comúnmente conocida como relación de aspecto, y denotada por $h = H/r$, puede ser función de la distancia, y varía entre $\sim 0,03$ y $0,1$. Ya que la fuerza gravitatoria actuante sobre un elemento de fluido en movimiento circular se relaciona directamente con su velocidad de rotación², a través de la ecuación de estado surge una propiedad fundamental para estos discos. Esta propiedad es la relación entre la escala de altura, la frecuencia orbital y la temperatura del gas:

$$H = \frac{c_s}{\Omega_k}. \quad (2.3)$$

Los discos protoplanetarios son discos de acreción, es decir, son discos que

¹Fuerza de gravedad ejercida por el gas sobre él mismo.

²Fuerza gravitatoria igual a la fuerza centrípeta.

entregan material a la estrella central. Las tasas típicas son del orden de 10^{-8} , $10^{-9} M_{\odot}/\text{año}$. El motivo por el que esto ocurre es la existencia de una viscosidad efectiva que genera torques internos. Sin importar el origen de esta viscosidad (en el capítulo 6 hacemos una discusión al respecto), la viscosidad suele incluirse, por simplicidad, como un parámetro *ad-hoc* salvo que se considere, por ejemplo, turbulencia.

La acreción es modelada generalmente de dos formas diferentes. Por un lado se puede utilizar una viscosidad cinemática ν constante, ajustada a partir de observaciones. Por otro, y quizás el método más extendido, se puede utilizar una viscosidad de tipo α_{ν} (Shakura y Sunyaev, 1973), la cual se define en término de las variables dinámicas fundamentales del disco:

$$\nu = \alpha_{\nu} c_s H. \quad (2.4)$$

En este caso, lo que se ajusta a partir de las observaciones (o simulaciones) es α_{ν} , lo cual es un parámetro adimensional.

Las ecuaciones de evolución para el disco de gas son las ecuaciones de Navier-Stokes. Una aproximación muy frecuente que se hace sobre estas ecuaciones es promediarlas en la dirección vertical. El resultado de estos promedios son ecuaciones bidimensionales para la evolución sobre el plano.

El modelo más extendido para el estudio de migración de planetas en discos de gas es aquel que asume leyes de potencia para las cantidades fundamentales, las cuales son el perfil de densidad:

$$\frac{d \log \Sigma}{d \log r} = -\sigma, \quad (2.5)$$

y la relación de aspecto del disco:

$$\frac{d \log h}{d \log r} = f, \quad (2.6)$$

con lo cual se puede deducir la temperatura del disco o la velocidad del sonido del medio. Por ejemplo, por la ecuación de estado de los gases ideales ($T \propto c_s^2 \propto P$) y utilizando (2.3) y (2.6) se obtiene una ley de potencia para la temperatura, con índice $\beta = 2f - 1$.

La utilización de la relación de aspecto por sobre la temperatura tiene sus ventajas a la hora de desarrollar una idea geométrica de la estructura del disco. En efecto, el índice f mide la forma del disco. Si $f > 0$ entonces la altura H crecerá aceleradamente con R , por lo que el disco será cóncavo para arriba. Por el contrario, si $f < 0$, el disco será convexo o cóncavo para abajo. El caso $f = 0$ se corresponde con un disco que presenta una relación de aspecto constante, por lo que su altura crece linealmente con el radio. En la Fig. 2.2 puede verse un esquema sencillo de estas cualidades.

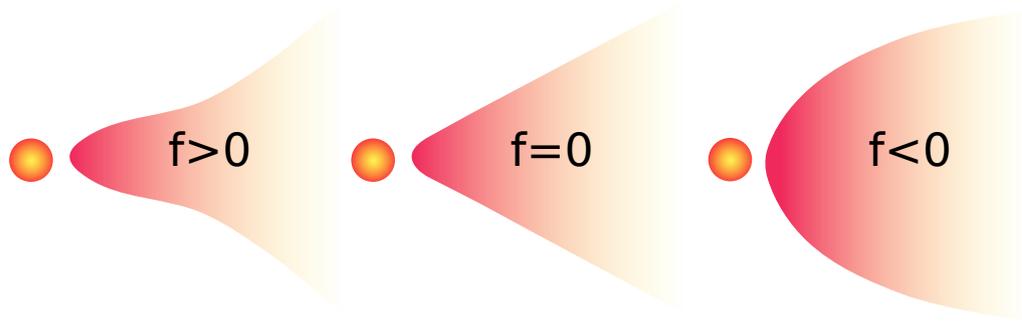


Figura 2.2: Representación de la forma de los discos en función del índice f de la relación de aspecto. $f > 0$ es un disco cóncavo para arriba, $f = 0$ es el modelo de disco plano, y el caso $f < 0$, el disco cóncavo para abajo, el cual puede proyectarse sombra a sí mismo.

La velocidad radial para estos sistemas viene dada por la velocidad de evolución viscosa, la cual es función de los parámetros del disco. Una discusión sobre esta característica se hace en la sección 7.3.3. Por ahora será suficiente con decir que los tiempos de evolución viscosa de los discos de gas son muy lentos comparados con los tiempos dinámicos del sistema y que considerarla como nula, al menos para un modelo inicial, no es una aproximación incorrecta.

La velocidad de rotación para estos discos es prácticamente Kepleriana, sin embargo, presenta un leve apartamiento por causa de los gradientes de presión, los cuales son un factor correctivo del orden del 1% respecto de este valor. La velocidad de rotación puede escribirse como:

$$v_{\phi} = v_k \sqrt{1 - h^2(1 + \sigma - 2f)}, \quad (2.7)$$

que es el resultado de calcular el equilibrio rotacional del sistema utilizando las leyes de potencia descritas anteriormente.

Si bien el apartamiento de la rotación Kepleriana estricta puede parecer pequeña, es el que tendrá un impacto profundo sobre la posterior evolución de los planetas, como se verá en las secciones siguientes.

El número de Mach³ en los discos de acreción es muy grande ($\sim h^{-1}$), por lo que son extremadamente supersónicos⁴.

Los últimos ajustes necesarios del modelo provienen, como siempre, de las observaciones. Los parámetros libres del modelo de disco adoptado son tan sólo cuatro: una constante para la relación de aspecto del disco (que es equivalente a conocer la temperatura en alguna posición), la densidad superficial de gas, que también alcanza con conocerla en alguna región particular y las pendientes para las leyes de potencia.

Una suposición aceptada es considerar los valores de la Nebulosa Solar de Ma-

³Relación entre la velocidad del fluido respecto de la velocidad del sonido

⁴Sin embargo, un planeta sumergido en el disco corrota localmente con el gas, y respecto de su velocidad, el flujo del gas es subsónico.

sa Mínima⁵ necesaria para formar los planetas del Sistema Solar si éstos hubieran estado siempre donde los observamos (Hayashi, 1981). Los valores típicos en este caso son $\Sigma(r=1\text{UA}) = 1700 \text{ g/cm}^2$ y $T(r=1\text{UA}) = 280 \text{ K}$. Además, según este modelo $\sigma = 1,5$, aunque en la práctica se utilizan exponentes en el rango $\sigma \in [0; 1,5]$, y para el perfil de temperatura en el rango $\beta \in [-1; 0]$.

En las secciones siguientes, siempre asumiendo un modelo con las características presentadas, veremos con detalle los mecanismos de migración planetaria.

2.4. Migración a partir de un torque

La migración planetaria, es decir, el movimiento radial de un planeta en un disco, ocurre como consecuencia de torques.

Consideremos un planeta en órbita circular a una distancia r_p de la estrella. El momento angular del planeta es $L(r_p) = m_p r_p^2 \Omega(r_p)$, con Ω la frecuencia orbital.

El torque ejercido sobre un planeta se relaciona directamente con la aceleración angular en la dirección del torque. Así, una fuerza sobre el plano orbital y no radial ejercerá un torque no nulo que tendrá un impacto sobre la velocidad de traslación del planeta.

La tasa de variación del momento angular del planeta, que se corresponde con el torque Γ ejercido sobre éste es:

$$\Gamma = \frac{dL_p}{dt} = 2m_p r \dot{r} \left[\Omega(r) + \frac{r}{2} \frac{d\Omega}{dr} \right], \quad (2.8)$$

donde el término entre corchetes es la segunda constante de Oort (B), y en el caso Kepleriano es igual a $\Omega_k/4$. El signo del torque ejercido tiene relación directa con el signo de \dot{r} , es decir, el sentido de la migración.

El tiempo característico de migración se define como $r_p |dr_p/dt|^{-1}$, que por medio de la ecuación 2.8, se puede escribir como:

$$\tau_{\text{mig}} = \frac{2r_p^2 m_p B}{|\Gamma|}. \quad (2.9)$$

En el caso Kepleriano ($\Omega = \Omega_k$), se tiene que:

$$\tau_{\text{mig}} = \frac{L_p}{2|\Gamma|}, \quad (2.10)$$

con L_p el momento angular orbital del planeta y perpendicular a su órbita.

Por último, una migración del planeta requiere de una fuerza, que a su vez, por las leyes de conservación de momento, requiere de un soporte para ejercerla. En efecto, el movimiento radial del planeta debido a un torque (o pérdida de momento angular) implica que una contraparte sienta un torque positivo ejercido

⁵Minimum Mass Solar Nebulae (MMSN) en inglés.

por el planeta, por lo que el proceso de migración puede entenderse en términos de una transferencia de momento angular entre dos partes. De forma resumida, por la ley de conservación del momento angular total, si el planeta recibe un torque positivo por parte del disco, el disco recibe un torque negativo por parte del planeta y viceversa.

2.5. Migración planetaria

Un planeta sumergido en un disco de gas axisimétrico excita estructuras asimétricas que conducen a la aparición de torques. Como consecuencia de estos torques, el planeta experimenta una migración, la cual está gobernada, en parte, por los mecanismos físicos dominantes en el disco de gas.

Como ya mencionamos, hay tres regímenes de migración bien determinados: la migración de tipo I, que ocurre para planetas de baja masa, la migración de tipo II, que ocurre para masas planetarias suficientemente grandes, y la migración de tipo III, la cual ocurre para planetas de masa intermedia, pero inmersos en discos suficientemente masivos.

Caracterizar estas migraciones de forma precisa, y entender la física subyacente es crucial para intentar conciliar estos resultados con algunas de las propiedades observacionales que describimos en el capítulo 1.

2.5.1. Migración de tipo I

La migración de tipo I fue descubierta por [Goldreich y Tremaine \(1979\)](#). Las conclusiones básicas de su trabajo son:

- El potencial externo (planeta) ejerce un torque sobre el disco sólo en las *resonancias de Lindblad* y en las *resonancias de corrotación*.
- El torque es positivo en las resonancias de Lindblad externas, mientras que es negativo en las internas.
- El torque de corrotación tiene un signo igual al gradiente de vortensidad⁶ y tiene el mismo orden de magnitud que el torque de Lindblad.

Una de las hipótesis fundamentales de su trabajo es la suposición de que un análisis lineal de las ecuaciones hidrodinámicas es válido. Esto es cierto para el torque de Lindblad en planetas de baja masa sin embargo, como se verá posteriormente, no puede ser extendido completamente al caso de la región de corrotación, el cual es un proceso no lineal en esencia ([Paardekooper y Papaloizou, 2009](#)).

El potencial gravitatorio de un planeta es:

$$\Phi_p(\vec{r}, \vec{r}_p, t) = -\frac{\mathcal{G}m_p}{|\vec{r} - \vec{r}_p(t)|}, \quad (2.11)$$

⁶También llamada vorticidad potencial o vorticidad dividida por la densidad.

que puede ser expandido en su serie de Fourier como:

$$\Phi_p(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(r) \cos\{m[\varphi - \varphi_p(t)]\}, \quad (2.12)$$

dónde ϕ_m es la amplitud correspondiente a cada modo acimutal m (ver por ejemplo Meyer-Vernet y Sicardy, 1987) y $\varphi_p(t)$ es la posición angular del planeta.

Torque en las resonancias de Lindblad

Para un planeta en órbita circular, la posición angular del planeta $\varphi_p(t)$ es $\Omega_k t$, con Ω_k la frecuencia orbital Kepleriana. Goldreich y Tremaine (1979) demostraron que el torque se ejerce en las resonancias de Lindblad, que son un caso particular de resonancias de movimientos medios entre el potencial perturbador y el gas. En una resonancia de Lindblad la relación de movimientos medios es igual a la frecuencia de epí ciclo κ del gas⁷. Así, las resonancias de Lindblad ocurren cuando la velocidad angular relativa de cada modo acimutal m del perturbador coincide con la frecuencia de epí ciclo, es decir:

$$\omega \equiv m[\Omega(r) - \Omega_p] = \pm\kappa. \quad (2.13)$$

Por lo tanto, la posición de las resonancias de Lindblad vienen dadas, de forma implícita, por:

$$\Omega(r_m) = \Omega_k(r_p) \pm \frac{\kappa(r)}{m}, \quad (2.14)$$

con r_m la posición nominal de la resonancia.

La frecuencia de epí ciclo ($\kappa^2 \equiv 4\Omega^2 + d\Omega^2/d\ln r$) en un disco Kepleriano es $\kappa = \Omega_k$, por lo que:

$$\Omega(r_m) = \left(\frac{m}{m \pm 1}\right) \Omega_k(r_p). \quad (2.15)$$

A priori, no es posible obtener la localización exacta de las resonancias de Lindblad si no conocemos la frecuencia orbital del disco en el cual está sumergido el perturbador. Si la rotación es estrictamente Kepleriana la localización de las resonancias de Lindblad es:

$$r_m^{\pm} = \left(\frac{m}{m \pm 1}\right)^{2/3} r_p. \quad (2.16)$$

Se observa que las resonancias más alejadas se encuentran para $m = 1$ (en el caso de las resonancias externas) y $m = 2$ (para las resonancias internas). Esto significa que las resonancias de Lindblad más externas al planeta orbitan a una frecuencia igual al doble o a la mitad de la frecuencia orbital del planeta, es decir, están en una resonancia de movimientos medios 2:1 o 1:2.

⁷Es decir, la frecuencia de oscilación de una partícula del disco a la cual se le aplica una pequeña perturbación.

Otro aspecto interesante es que el cociente $m/(m \pm 1)$ tiende a 1 por izquierda y por derecha a medida que $m \rightarrow \infty$, por lo que el torque cerca del planeta puede ser susceptible de diverger⁸. Sin embargo, esto no ocurre en la práctica al considerar los efectos de la presión.

Cuando la presión del disco es tenida en cuenta, la posición nominal de las resonancias se modifica (Kley y Nelson, 2012), de forma que:

$$m(\Omega - \Omega_p) = \pm \sqrt{\kappa^2(1 + \xi^2)}, \quad (2.17)$$

con $\xi = mc_s/(\Omega r)$. Esta expresión corregida tiende a una constante para grandes valores de m ($m \rightarrow \infty$), la cual depende sólo de la altura del disco:

$$r_L = r_p \pm \frac{2H}{3}, \quad (2.18)$$

con r_L la posición de acumulación de las resonancias.

Así, las posibles divergencias en el torque desaparecen. Además, el efecto de la acumulación de las resonancias de Lindblad permite un decrecimiento exponencial para el torque a medida que m aumenta, fenómeno conocido como *cut-off* del torque (Artymowicz, 1993).

Ward (1997) calculó de forma detallada la expresión correspondiente para el torque neto sobre las resonancias aisladas de Lindblad, y encontró que⁹:

$$\Gamma_m^\pm = \pm \frac{4}{3} q^2 \Sigma r_p^4 \Omega_p^2 \frac{m^2 (r/r_p)^{3/2} \psi^2}{\sqrt{1 + \xi^2} (1 + 4\xi^2)}, \quad (2.19)$$

con

$$\psi = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{m} |db_{1/2}^m(r/r_p)| + 2\sqrt{1 + \xi^2} b_m^{1/2}(r/r_p) \right), \quad (2.20)$$

donde $q = m_p/M_*$, con m_p la masa del planeta, M_* la masa de la estrella central y $\xi = mc_s/\kappa r$. Los subíndices p representan evaluación en la posición del planeta. $b_{1/2}^m$ son los coeficientes de Laplace (Izsak, 1963), que pueden escribirse de forma simplificada, en término de las función modificada de Bessel K_0 :

$$b_{1/2}^m \simeq \frac{2}{\pi} \frac{K_0(\eta)}{\sqrt{r/r_p}}, \quad (2.21)$$

con $\eta = (m|(r/r_p) - 1|)/\sqrt{(r/r_p)}$.

En la Fig. 2.3 mostramos una evaluación de esta expresión para las resonancias externas e internas para diferentes valores de la relación de aspecto del disco. Se observa cómo el máximo se alcanza para valores intermedios de m (5-30) y cómo la contribución de cada modo tiende a cero rápidamente a medida que las

⁸La distancia a la resonancia tiende a cero.

⁹Por simplicidad sólo consideramos el caso $f = 0$.

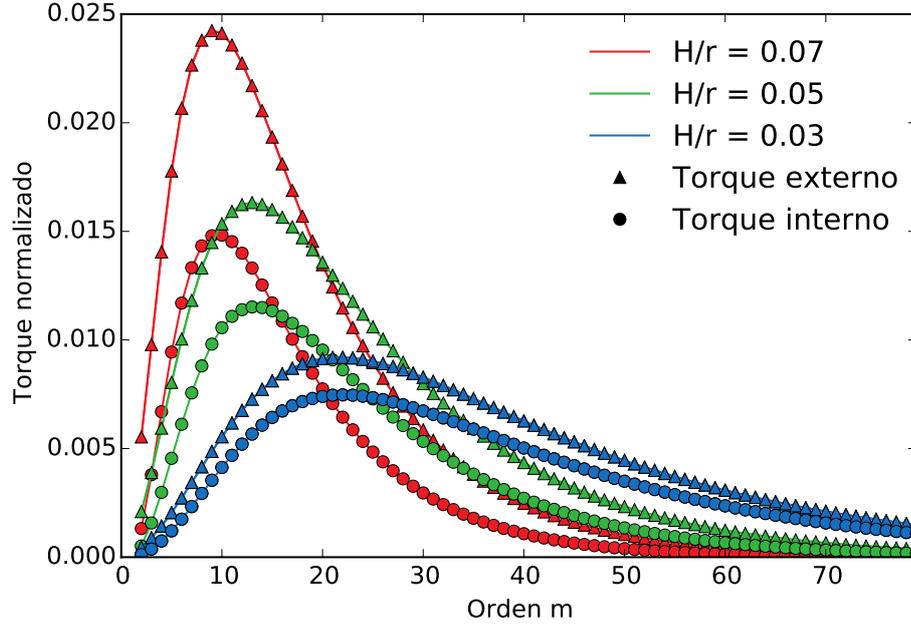


Figura 2.3: Valor absoluto del torque evaluado para cada modo acimutal m . El torque fue normalizado por el valor de referencia $\Gamma_0 = \pi q^2 \Sigma_p r_p^4 \Omega_p^2 h^{-3}$.

resonancias se vuelven más próximas al planeta ($m \rightarrow \infty$). En esta figura también puede verse un comportamiento que es sistemático: si definimos como torque diferencial de Lindblad a la suma del torque externo y el interno para cada m , entonces, el torque total es la suma sobre todos los modos del torque diferencial de Lindblad. De la figura queda claro que el torque diferencial de Lindblad es una cantidad negativa para todos los modos. De hecho, este comportamiento no es casual. El torque total será siempre una cantidad negativa.

Ward (1997) hizo una observación importante al respecto del valor del torque diferencial de Lindblad. La diferencia entre el torque externo y el interno no proviene de una diferencia de densidad entre las resonancias internas y externas. En efecto, el gradiente de densidad en el disco no impacta en el valor del torque diferencial de Lindblad. Curiosamente, un incremento en el gradiente de densidad trae asociado un cambio en el perfil de rotación del disco. Ambos efectos están relacionados y trabajan de forma opuesta. Mientras valores más grandes para σ son utilizados el contraste de densidad (o derivada de la densidad) incrementa la fuerza del torque que pueden producir las resonancias internas (ya que son más masivas) sin embargo, el gradiente de presión asociado con este cambio genera una rotación más lenta (ver ecuación 2.7), alejando a las resonancias internas fortalecidas e incrementando la fuerza relativa de las exteriores. Lo mismo es válido en el caso opuesto. Este efecto es denominado *Pressure buffer*.

Meyer-Vernet y Sicardy (1987) mostraron que el valor del torque producido es independiente de los procesos físicos que ocurran en el disco. Sin embargo,

el momento angular quitado al planeta durante el proceso de migración se debe transferir hacia otra región, y no sólo permanecer sobre las resonancias de Lindblad. Puede verse que diferentes procesos pueden dar cuenta del traspaso de momento angular desde las resonancias de Lindblad hacia el disco. Estos efectos pueden ser la presión, fuerzas viscosas o autogravedad. Con estos mecanismos en funcionamiento, es posible asegurar un estado estacionario para el torque.

Una propiedad muy importante del torque diferencial de Lindblad es que durante una simulación se establece hacia su valor de referencia de forma muy rápida (~ 1 órbita) (Meyer-Vernet y Sicardy, 1987), por lo que variaciones observadas en el comportamiento del torque no podrán ser atribuidos al torque de Lindblad (a no ser que varíen los perfiles medios del disco).

Las perturbaciones de densidad que producen el torque neto adoptan la forma de una estela espiral, la cual es la reacción natural del disco al potencial gravitatorio del planeta (ver sección 2.5.1).

Torque diferencial de Lindblad

Si bien la expresión provista por Ward (1997) dice mucho acerca del proceso de migración de tipo I, Tanaka *et al.* (2002) por medio de desarrollos semianalíticos da una expresión para el torque total en el caso globalmente isotermo y en régimen lineal. El torque total, que también suele llamarse torque diferencial de Lindblad, se corresponde con la suma del torque diferencial para todas las resonancias. Tanaka *et al.* (2002) dan una expresión para el torque diferencial de Lindblad, al igual que Ward (1997), en el caso bidimensional, pero lo extienden también al caso 3D:

$$\Gamma_L^{3D} = -(2,34 - 0,099\sigma)\Gamma_0 \quad (2.22)$$

$$\Gamma_L^{2D} = -(3,2 + 1,468\sigma)\Gamma_0, \quad (2.23)$$

con $\Gamma_0 = q^2 \Sigma \Omega_p^2 r_p^4 h^{-2}$. σ es el exponente de la ley de densidad (ver ec. 2.5).

Fórmulas más precisas fueron dadas con posterioridad. Por ejemplo, Paardekooper *et al.* (2010) proveen una fórmula para el torque en el caso bidimensional no isotermo, donde la temperatura es $\propto r^{-\beta}$:

$$\frac{\Gamma_L}{\Gamma_0} = -(2,5 + 1,7\beta - 0,1\alpha) \left(\frac{0,4}{\varepsilon/H} \right)^{0,71}. \quad (2.24)$$

En esta ecuación aparece un parámetro que es fundamental en cualquier estudio de migración en discos bidimensionales. Es sabido que para obtener valores de torque comparables con el caso tridimensional es necesario suavizar el potencial

gravitatorio del planeta, de la forma:

$$\phi_p = -\frac{\mathcal{G}m_p}{\sqrt{|r - r_p|^2 + \varepsilon^2}}. \quad (2.25)$$

Otros estudios del torque diferencial de Lindblad fueron realizados en otras situaciones físicas, como por ejemplo [Masset \(2011\)](#), quien calculó una fórmula para el torque diferencial de Lindblad cerca de transiciones de opacidad en el disco (gradientes de temperatura). Otro ejemplo es el trabajo de [Terquem \(2003\)](#), que incluye los campos magnéticos. En este caso particular, encuentra que las resonancias de Lindblad se desplazan por efectos de la presión magnética, y que el torque se vería disminuido respecto del caso estándar. El mecanismo sólo sería posible en discos tridimensionales, en donde el momento angular acumulado en las resonancias magnéticas puede ser transportado por ondas de Alfvén. Otro ejemplo más reciente es el de [Tsang \(2011\)](#), quien estudia los efectos de ondas reflejadas en la frontera interna del disco.

Así, el estudio del torque diferencial de Lindblad, si bien ha alcanzado un estado de maduración, aún es necesario poder describirlo en casos físicamente realistas. Determinar si es tan grande como predicen las teorías simplificadas aún es un tema importante de investigación. Por este motivo, la exploración numérica en este campo es muy necesaria.

Torque de corrotación

Otro conjunto de resonancias importantes son las resonancias corrotacionales, es decir, aquellos lugares del disco en los que el gas y el planeta están fijos uno respecto del otro.

Esta región presenta un especial interés, en parte porque los procesos físicos que aquí ocurren son bastante diferentes a los relacionados con las resonancias de Lindblad. Una característica muy importante es que en esta región sólo pueden existir ondas de densidad evanescentes, por lo que no se puede transportar momento angular a través de ellas ([Goldreich y Tremaine, 1979](#)).

Cuando se calcula de forma analítica en la aproximación lineal, el torque de corrotación también se calcula para cada modo m posible. [Tanaka et al. \(2002\)](#) derivaron una expresión para este torque producido por ondas en el plano en el caso globalmente isoterma:

$$\Gamma_{C,m} = \frac{\pi^2 m}{2} \left[\frac{|\eta_m + \phi_m|^2}{d\Omega/dr} \frac{d(\Sigma/B)}{dr} \right]_{r_c}, \quad (2.26)$$

dónde η_m es la m -ésima componente de la perturbación de entalpía¹⁰ y B es la se-

¹⁰Definida como $d\eta = dP/\Sigma$, que en el caso isoterma es $c_s^2 \log \Sigma + C$.

gunda constante de Oort (ver ec. 2.8). La expresión debe ser evaluada en el radio de corrotación r_c el cual, como ya se dijo con anterioridad, no se corresponde con la posición nominal del planeta debido al gradiente de presión del disco.

El torque de corrotación tiene el mismo factor de dependencia Γ_0 que el torque de Lindblad, aunque esto no sea explícito en la forma de (2.26). La constante de Oort es igual a la mitad de la vorticidad del fluido en la dirección vertical¹¹, por lo que el torque de corrotación es proporcional al gradiente de la *vortensidad* (vorticidad dividida por la densidad).

El torque de corrotación total, sumado sobre todos los modos, es una cantidad positiva y más pequeña que el torque de Lindblad. En particular, para un perfil de densidad $\Sigma \propto B$, el torque de corrotación se anula. En el caso Kepleriano se tiene que $B \propto r^{-3/2}$, por lo que un perfil de densidad con exponente $\sigma = 3/2$ anula esta componente de torque.

Tanaka et al. (2002) da una expresión para el torque total en el caso 2D y 3D:

$$\Gamma_L^{3D} = 0,64 \left(\frac{3}{2} - \sigma \right) \Gamma_0 \quad (2.27)$$

$$\Gamma_L^{2D} = 1,36 \left(\frac{3}{2} - \sigma \right) \Gamma_0, \quad (2.28)$$

donde se ve de forma explícita la anulación del torque para $\sigma = 3/2$.

El resultado del torque de corrotación en régimen lineal fue cuestionado recientemente por **Paardekooper y Papaloizou (2008)**, quienes dicen que el torque de corrotación sería un torque no lineal, sin importar el valor de la masa considerada para el perturbador. La razón de esto proviene del concepto de *horseshoe drag*, el cual es el torque que se calcula al considerar partículas en órbitas de herradura en torno a la región coorbital (**Ward, 1991**), y el problema radica en que tales órbitas no existen en un régimen lineal. **Ward (1991)** demostró que el horseshoe drag es:

$$\Gamma_C^{HS} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2} - \sigma \right) x_s^4 \Sigma_p \Omega_p^2, \quad (2.29)$$

con x_s el ancho de la región de herradura.

Utilizando que $x_s \propto r_p \sqrt{q/h}$ (**Masset et al., 2006a**), se tiene que $x_s^4 \Sigma_p \Omega_p^2 = \Gamma_0$, con lo que el horseshoe drag y el torque de corrotación lineal escalan de la misma forma. Esto es un hecho notable considerando que ambos provienen de procesos físicos diferentes. Ambos son positivos y el horseshoe drag es de mayor intensidad.

A diferencia del torque de Lindblad, en el cual el momento angular puede ser extraído de las resonancias por ondas, en la región coorbital este mecanismo no funciona (**Goldreich y Tremaine, 1979**). En un sistema cerrado, como lo es el sistema compuesto por las órbitas de herradura y el planeta, en ausencia de algún mecanismo de transporte de momento angular de o hacia la región, inevitable-

¹¹ $(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{e}_z$.

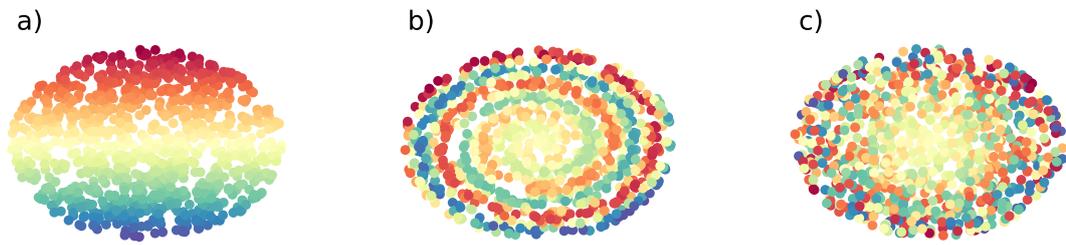


Figura 2.4: Esquema del mecanismo de saturación. Inicialmente *a)* las partículas están distribuidas con un cierto gradiente de una propiedad, por ejemplo vorticidad. Al cabo de un cierto tiempo *b)*, por los distintos tiempos de libración, empieza a mezclarse. Luego de varios tiempos de libración *c)*, el conjunto estará completamente mezclado y no habrá rastro del gradiente inicial de la propiedad.

mente el torque neto, en promedio será cero. Esto es lo que se llama *saturación* del torque.

Una forma de entender esto es con la vorticidad, lo cual es una cantidad que se conserva a lo largo de las líneas del fluido en discos barotrópicos (p.ej. globalmente isotermos) y no viscosos. Ya dijimos que el torque de corrotación depende del gradiente de vorticidad radial. Por otro lado, órbitas a diferente radio tienen una frecuencia orbital diferente, la cual varía de forma continua. El tiempo de cada una de estas órbitas se denomina tiempo de libración. Así, al cabo de algunos tiempos de libración de las órbitas que más contribuyen al torque, todas las otras órbitas se habrán mezclado (conservando su propia vorticidad inicial), produciendo una vorticidad plana en la región (Balmforth y Korycansky, 2001). Así, el gradiente de vorticidad es nulo, y el torque de corrotación (y el horseshoe drag) desaparecen (Ward, 1991). En la Fig. 2.4 puede verse un esquema simplificado del efecto de saturación.

El mecanismo para evitar la saturación es la viscosidad, la cual por medio de torques sobre la región de herradura inyecta momento angular adicional sobre la región, a la vez que sostiene el gradiente de vorticidad. La condición necesaria para evitar la saturación es que el tiempo de difusión a través de la región de herradura sea menor a los tiempos característicos de libración de las órbitas de la región.

Este tiempo se puede obtener mediante una estimación expandiendo la rotación Kepleriana en torno a la escala típica de esta región x_s y considerando que el período en este caso equivale a un desplazamiento de 4π (una ida y una vuelta

completa). Entonces, el tiempo de libración viene dado por:

$$\tau_{\text{lib}} \simeq \frac{4\pi}{x_s |d\Omega_k/dr|_p} = \frac{8\pi r_p}{3\Omega_p x_s}. \quad (2.30)$$

Utilizando que $x_s \simeq 1,2r_p\sqrt{q/h}$ (Masset *et al.*, 2006a), finalmente el tiempo de libración es:

$$\tau_{\text{lib}} \sim (1,1\sqrt{h/q})2\pi\Omega_p^{-1}, \quad (2.31)$$

que para planetas de baja masa es del orden de 100 órbitas.

Avances significativos se hicieron en los últimos años respecto de este problema. Paardekooper y Papaloizou (2009) encontraron que el horseshoe drag en régimen no saturado corresponde idénticamente con el torque de corrotación completo en régimen no lineal, por lo que una distinción entre ambos no sería adecuada (ver también Casoli y Masset, 2009). En el caso localmente isotermo, Masset y Casoli (2010) encontraron que el torque presenta una componente adicional que escala como el gradiente local de temperatura.

Además, Paardekooper y Mellema (2006) encontraron que el torque en discos radiativos tridimensionales es muy sensible a la eficiencia radiativa del disco, pudiendo en algunos casos, producirse una migración en el sentido opuesto, mostrando que el torque de la región coorbital es el responsable de tal comportamiento.

Baruteau y Masset (2008a) mostraron mediante simulaciones bidimensionales que el torque de corrotación también es sensible a los gradientes de entropía, y que en este caso, la difusión térmica es la responsable de mantener la componente entrópica del torque no saturada.

En todos los casos observados, el torque de corrotación proviene de la distribución de vortensidad en la región de herradura. Las contribuciones adicionales al torque provienen de la creación de vortensidad por los gradientes de temperatura y entropía en la región (Baruteau y Masset, 2013).

Forma de la estela

Rafikov (2002) y Ogilvie y Lubow (2002), linealizando las ecuaciones hidrodinámicas (ver cap. 3), mostraron que la estela espiral es el resultado de la interferencia constructiva de todos los modos excitados por el planeta, y que su localización en el disco puede ser escrita como:

$$\varphi = \epsilon \frac{2}{3} \left[\left(\frac{r}{r_p} \right)^{3/2} - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{r}{r_p} \right) - 1 \right] h^{-1}, \quad (2.32)$$

donde r_p corresponde con la posición del perturbador. ϵ toma el valor 1 para $r < r_p$ y -1 para $r > r_p$. En la Fig. 2.5 puede verse una comparación de esta expresión con una simulación realizada con el código que desarrollamos en este trabajo (ver

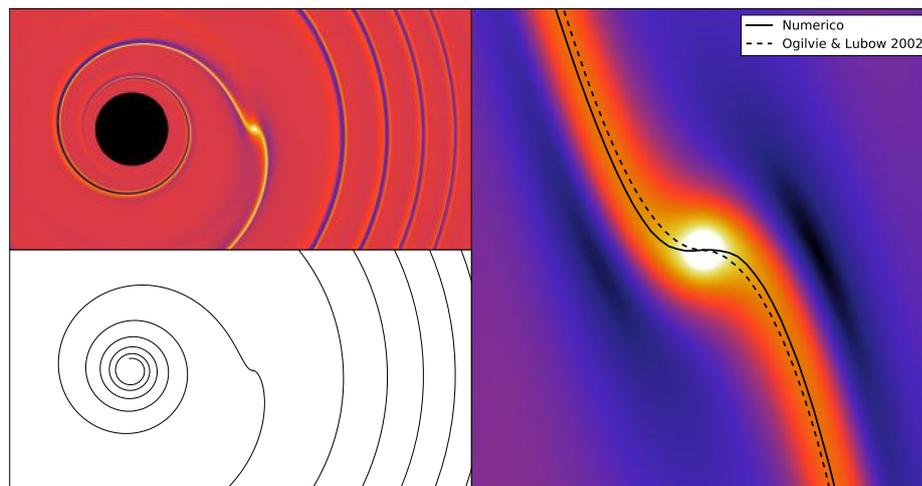


Figura 2.5: Forma de estela espiral generada por un planeta en una simulación hidrodinámica contrastada con la predicción de la teoría de [Ogilvie y Lubow \(2002\)](#). En el panel superior izquierdo se presenta el campo de densidad perturbado de una simulación. En el panel inferior izquierdo se muestra la predicción analítica. En el panel derecho se muestra una comparación directa entre la simulación y la teoría. La curva negra continua se construyó con los puntos que resultan de calcular el máximo de densidad en la simulación. La curva a trazos es el modelo analítico. Observamos la misma desviación de la estela que en el trabajo de [Duffell y MacFadyen \(2012\)](#).

capítulo 3). El acuerdo entre la teoría y la simulación es notable, aunque existe un pequeño apartamiento sistemático, que a grandes radios es corregido (ver p.ej. [Dong et al., 2011](#); [Duffell y MacFadyen, 2012](#)).

2.5.2. Migración de tipo II

Los resultados descritos en la sección anterior se aplican a casos en los que la perturbación del cuerpo planetario es suficientemente pequeña como para no alterar de forma significativa el perfil radial de densidad.

Cuando la masa del perturbador crece lo suficiente, las perturbaciones generadas sobre el gas circundante causa la formación de un surco alrededor de su órbita. En la Fig. 2.6 puede verse el mecanismo en proceso.

En el régimen lineal, todo el momento angular quitado (o entregado) al planeta por el disco es transportado por diversos mecanismos, por ejemplo ondas, como se describió en la sección anterior. Estas ondas terminan cediendo su momento angular al medio a través de procesos disipativos, los cuales pueden ser disipación viscosa, o por ejemplo, la evolución lineal de estas ondas hacia su estado no lineal (choque) lejos del planeta ([Goodman y Rafikov, 2001](#)).

Sin embargo, cuando el ritmo de transferencia de momento angular sobre las diferentes resonancias es superior al ritmo con el cual éste puede ser evacuado, inevitablemente la materia comenzará a desplazarse en su órbita, no permitiendo

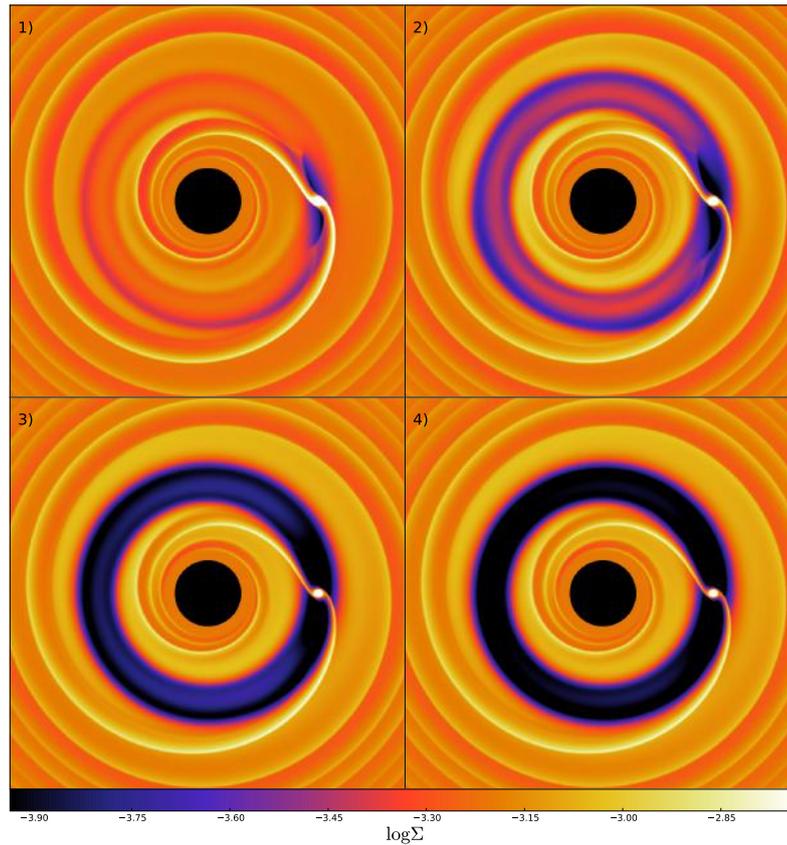


Figura 2.6: Apertura de un gap en un disco localmente isotermo. La relación de masa entre el planeta y la estrella central es $q = 10^{-3}$. Los tiempos son: 1) 10, 2) 30, 3) 80, 4) 100 órbitas.

un estado estacionario inicialmente. El torque ejercido por el planeta sobre la región externa es positivo, por lo que empuja al gas hacia afuera. Por el contrario, en la región interna es negativo, por lo que empuja al gas hacia adentro. Así, el resultado de este proceso será la expulsión de la materia de las resonancias que son capaces de ejercer un torque neto sobre éste.

Esto implica que el gas circundante al planeta terminará o bien en una órbita exterior o bien en una interior. Esto conducirá a una situación estacionaria en la que, en ausencia del algún mecanismo que reoqupe la región vaciada, la región coorbital del planeta quedará completamente limpia de materia.

En general, el estado estacionario que se pueda alcanzar al cabo del centenar de órbitas dependerá de la viscosidad del disco, la cual tiende a llenar el surco nuevamente, y la masa del planeta, la cual transfiere el momento angular al gas. Por lo tanto, la formación del gap es una competencia entre el torque que puede ejercer el planeta sobre el gas y el torque viscoso del disco. Sin embargo, también debe ser considerado el efecto de la presión. Para que la perturbación del planeta sea en efecto no lineal, se debe satisfacer la condición térmica $r_H \gtrsim H$, con r_H el radio de Hill y H la escala de altura del disco (Ward, 1997).

Crida *et al.* (2006) dan un criterio que combina ambos efectos. Según estos

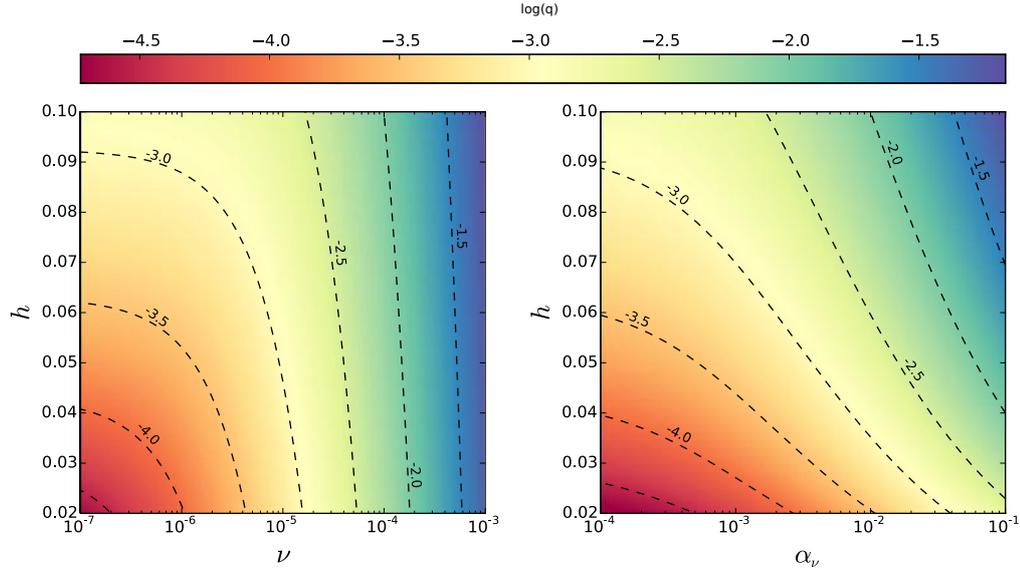


Figura 2.7: Relación de masa mínima q necesaria para la apertura del surco en función de la relación de aspecto h y de la viscosidad, en sus dos variantes: cinemática ν y viscosidad α . La masa se calculó utilizando la ecuación (2.33). Las curvas negras a trazos se corresponden con isocontornos de q .

autores, la condición para la apertura del gap es:

$$\frac{3}{4} \frac{H}{r_H} + \frac{50\nu}{qa_p^2\Omega_p} \leq 1, \quad (2.33)$$

dónde $q = m_p/M_*$. En la Fig. 2.7 puede verse una representación gráfica de este criterio.

La expresión para el criterio de apertura del surco ha sido contrastada con simulaciones, estando en muy buen acuerdo con ellas (Kley y Nelson, 2012). Un aspecto importante a tener en cuenta es que el criterio asume que el disco es viscoso, y que en ausencia de viscosidad incluso un planeta de baja masa será capaz de cavar un surco en la región coorbital.

En el caso de migración de tipo II, donde existe un vaciamiento de masa significativo en la región coorbital, el torque en la región de corrotación disminuye considerablemente, volviéndose irrelevante en esta clase de estudios. Por otro lado, a medida que el surco va creciendo en profundidad y en radio, las diferentes resonancias de Lindblad van quedando en su interior, provocando una disminución de su efecto sobre la dinámica del planeta y anulando el torque diferencial de Lindblad, en los términos escritos anteriormente.

Así, en un esquema *ideal*, el planeta deja de experimentar un torque neto y su migración se detiene. Si el disco es un disco de acreción, a medida que la frontera externa del disco migre, le ejercerá un torque negativo al planeta, empujándolo hacia adentro. Por este motivo el planeta migrará al tiempo que lo haga el disco

de gas, siempre dentro del surco. En este caso, el tiempo de migración del planeta será el tiempo viscoso $\tau_v \propto r_p^2/\nu$. Por lo tanto, estudiar esta migración de forma precisa requiere de modelos de discos de acreción, los cuales no pueden ser locales.

Trabajos recientes (Duffell *et al.*, 2014; Dürmann y Kley, 2015) cuestionan la idea de que el planeta permanezca *atado* a la cavidad, y que sea la evolución viscosa del disco la que gobierne su dinámica. En particular, encuentran que el planeta puede migrar a tasas superiores o inferiores al ritmo clásico de la migración de tipo II, y que el torque no depende de la velocidad de caída del gas hacia la estrella. Además, muestran que la idea de un disco interior y uno exterior, desconectados a través del surco, no es adecuada y que el gas puede cruzar de un lugar a otro.

2.5.3. Migración de tipo III

Los resultados anteriores sobre migración de tipo I y tipo II valen incluso cuando un planeta permanece en una órbita fija, y el valor del torque neto no depende de que se esté moviendo en el disco o no. La migración de tipo III, por el contrario, es una migración debida a un torque cuyo valor es función de la tasa de migración misma, y en algunas circunstancias particulares puede conducir a migraciones extremadamente rápidas (Masset y Papaloizou, 2003).

La idea general de este mecanismo es la siguiente. Consideremos un elemento localizado a una distancia x_s (la extensión de la órbita de herradura), el cual le entrega momento angular al planeta. Cada vez que un elemento de fluido de la región de herradura le entrega momento angular al planeta, la cantidad entregada es $\delta j = \Omega r_p^2 x_s$, es decir, el momento angular específico de la partícula relativo a la órbita del planeta. Por otro lado, cuando el planeta se encuentra migrando, la masa que atraviesa a lo largo de su órbita es $\dot{M} = 2\pi r_p \Sigma \dot{r}_p$. Así, el torque neto que puede sufrir el planeta por toda la masa que atraviesa cerca de su órbita es:

$$\Gamma = 2\pi \Sigma \Omega r_p^3 x_s \dot{r}_p. \quad (2.34)$$

Mientras el planeta migra en el disco arrastra material atrapado en las regiones de libración y en su esfera de Hill. Por lo tanto, el planeta debe ejercer un torque negativo sobre este material para continuar su migración. Así, la tasa de migración del planeta se relaciona con el torque de Lindblad que actúa sobre el planeta y el torque por el flujo de masa (ver ecuación 2.8):

$$M \Omega_p \dot{r}_p r_p = (4\pi r_p^2 x_s \Sigma) \dot{r}_p \Omega_p r_p + 2\Gamma_L, \quad (2.35)$$

con M la suma de la masa del planeta, la masa de la región de herradura (m_{HS}) y la masa contenida en la esfera de Hill del planeta. Considerando al planeta y a su esfera de Hill como un único sistema físico de masa m_{ph} , y calculando la masa efectiva δm que ejerce torque sobre el planeta ($\delta m = 4\pi r_p^2 x_s \Sigma_s - m_{HS}$), la tasa de

migración viene dada por:

$$\dot{r}_p = \frac{2\Gamma_L}{\Omega_p r_p (m_{ph} - \delta m)}. \quad (2.36)$$

Así, si $\delta m \sim m_p$, la migración puede ser extremadamente rápida. Cuando $\delta m > m_p$, se tiene que considerar el retraso con el cual el material que atraviesa la región de herradura actúa sobre el planeta, y se encuentra que la tasa de migración aumenta exponencialmente con el tiempo (hacia adentro o hacia afuera) y que posteriormente satura a un valor elevado.

2.6. Tiempos de migración

Lo más importante a partir de los torques calculados en las secciones anteriores es determinar las escalas de tiempo típicas sobre las cuales actúan. El tiempo de migración, como se vio al comienzo de este capítulo, está definido como:

$$\tau_I = \frac{m_p r_p^2 \Omega}{2|\Gamma|}, \quad (2.37)$$

con Γ el torque actuante. Aplicando esta definición al torque total (Lindblad + corrotacional), el tiempo característico encontrado por [Tanaka et al. \(2002\)](#), en el caso 3D, es:

$$\tau_I = (2,7 + 1,1\sigma) \frac{M_*}{m_p} \frac{M_*}{\Sigma_p r_p^2} \left(\frac{c_s}{r\Omega_p} \right) \Omega_p^{-1}, \quad (2.38)$$

mientras que en el caso 2D, es:

$$\tau_I = (2,32 + 5,7\sigma) \frac{M_*}{m_p} \frac{M_*}{\Sigma_p r_p^2} h^2 \Omega_p^{-1}. \quad (2.39)$$

Estos tiempos son $\sim 10^5$ años para planetas de baja masa, pero por la dependencia con la masa del planeta, decrece cuando m_p crece. Así, estos tiempos son bastante más cortos que el tiempo de vida media de los discos de gas.

En el caso de la migración de tipo II, asumiendo que la tasa de migración es el tiempo viscoso del disco:

$$\tau_{II} \simeq \tau_v = r|v_r|^{-1}, \quad (2.40)$$

con v_r la velocidad radial de deriva del disco, que en el caso estacionario y acretante ($v\Sigma = c$, ver sección 7.3.3), se reduce a $v_r = -3/2\nu/r$.

Por lo tanto,

$$\tau_{II} \simeq \frac{2r^2}{3\nu} = \frac{2}{3} \alpha_v^{-1} h^{-2} \Omega_p^{-1}, \quad (2.41)$$

donde se utilizó la viscosidad $\alpha_v = \nu/(H^2\Omega)$. Para un disco estándar $\alpha_v \sim 10^{-3}$ y $h \sim 5 \times 10^{-2}$, por lo que el tiempo de migración es del orden de 3×10^5 años.

A diferencia del caso de la migración de tipo I, este tiempo no depende ni de la masa del planeta ni de la densidad, lo cual obviamente es un resultado de la hipótesis de no interactuar con el disco.

En el caso de la migración de tipo III es más difícil determinar un tiempo característico de migración, debido a que necesitamos una estimación de la cantidad δ_m . Simulaciones numéricas muestran que en casos con $\delta_m \gg m_p$, el semi-eje mayor puede decrecer a la mitad en tan sólo 50 órbitas [Masset y Papaloizou \(2003\)](#).

2.7. Posibles mecanismos para detener la migración planetaria

Luego de estudiar los tiempos característicos de migración, parece difícil reconciliar, de forma adecuada, los resultados de las interacciones planeta-disco con las observaciones de los exoplanetas. En particular, hay una gran cantidad de exoplanetas gigantes y distantes de la estrella que durante su etapa de formación que, de acuerdo a la teoría presentada, deberían haber migrado hacia la estrella cuando sus núcleos se estaban formando.

Por otro lado, trabajos de síntesis de poblaciones planetarias que incluyen los efectos de las interacciones planeta-disco, como migraciones *ad hoc*, no son capaces de obtener la frecuencia de sistemas planetarios observados ([Cossou et al., 2014](#)).

El problema radica en que en la mayoría de los estudios realizados hasta ahora, el torque de corrotación escala igual que el torque diferencial de Lindblad, siendo en la mayoría de los casos prácticos, positivo el primero y negativo el segundo. Por otro lado, el torque de corrotación suele ser sistemáticamente menor que el de Lindblad, por lo que la migración no puede ser detenida.

Uno de los mayores retos de los estudios de migración planetaria consiste en hallar mecanismos que sean capaces de retardar de forma significativa la tasa de migración, o si es posible, de revertirla. En los últimos 15 años ha habido una serie de trabajos que atacaron este problema de diversas formas.

Por ejemplo, [Nelson y Papaloizou \(2004\)](#) mostraron que, cuando se realizan simulaciones turbulentas, la cual es generada por la inestabilidad magnetorotacional en un disco magnetizado tridimensional (ver sección 6.2), el torque sobre el planeta puede ser de gran magnitud y estocástico, quizás posibilitando migración hacia afuera en forma de un *random walk*. En el capítulo 6 atacamos este problema y mostramos que puede existir una componente adicional para el torque en el caso turbulento.

Posteriormente, [Masset et al. \(2006b\)](#) mostraron que el torque de corrotación puede incrementarse significativamente al considerar perfiles de densidad con gradientes importantes, como por ejemplo un disco con una cavidad interna. Mostraron que el salto en densidad tiene dos consecuencias principales: si el disco

esta vacío por la región interna, el torque diferencial de Lindblad se transforma enteramente en el torque negativo externo, sin embargo, el torque de corrotación, que depende fuertemente del gradiente de densidad, puede tornarse positivo y muy intenso si el salto en densidad ocurre en algunas escalas de altura del disco. Este mecanismo ha sido descrito como trampa planetaria, y ha sido ampliamente utilizado como receta para detener la migración en simulaciones que consideran la migración de tipo I.

[Paardekooper y Mellema \(2006\)](#) encontraron que el signo del torque es muy sensible a la habilidad que tiene el disco de radiar la energía generada en las inmediaciones del planeta. En el caso de discos de alta opacidad, correspondiente a regiones densas en el interior de los discos protoplanetarios, la migración es divergente, y es un efecto proveniente de la región coorbital.

Trabajos de [Baruteau y Masset \(2008a\)](#) y [Paardekooper y Papaloizou \(2008\)](#) mostraron que el torque presenta una componente que depende sensiblemente del gradiente radial de entropía. Un gradiente de entropía negativo genera un torque de corrotación positivo y no lineal producido por material en órbitas de herradura con entropía constante. Este torque puede ser suficientemente fuerte como para generar una migración divergente bajo ciertas condiciones, como lo son altas difusividades térmicas en el medio y una baja viscosidad cinemática.

Más recientemente [Benítez-Llambay et al. \(2015\)](#) mostraron que la consideración del calor liberado por un planeta bombardeado por planetesimales puede tener un impacto importante en la estructura del gas circundante al planeta, posibilitando la aparición de una nueva componente del torque. Este mecanismo se explica en detalle en el capítulo 5.

Por último, [Ogihara et al. \(2015\)](#) mostraron que cambios producidos por vientos en el perfil de densidad del disco pueden resultar en una alteración significativa de las tasas de migración en el disco, posibilitando una migración lenta en regiones interiores a 1 UA (si el viento es suficientemente fuerte).

2.8. Discusiones finales

A lo largo de este capítulo describimos el proceso de formación planetaria y vimos que obtener mediciones del torque de corrotación en casos que incluyan física más realista puede alterar de forma significativa la magnitud y el signo del torque de corrotación. Éste, al presentar una componente no lineal importante en casos físicamente más realistas, difícilmente pueda ser estudiado con el método lineal, al estilo de los trabajos de [Goldreich y Tremaine \(1979\)](#) o [Tanaka et al. \(2002\)](#). Por lo tanto, las posibilidades de estudio puramente analítico de este efecto pueden ser bastante limitadas o, al menos, muy desafiantes.

Como se vio en la sección 2.7, todos los trabajos que encontraron componentes adicionales para contrarrestar el conocido torque diferencial de Lindblad se basaron en exploraciones numéricas considerando diferentes efectos físicos, y en base a estas exploraciones, buscaron explicaciones a partir del modelado de los

efectos encontrados.

Por toda la evidencia recolectada a lo largo de los últimos 15 años, y los motivos expuestos hasta aquí, creemos que para avanzar en el entendimiento de los procesos de migración planetaria, una gran inversión de esfuerzo debe ser puesta en la experimentación numérica y, en particular, en el desarrollo de técnicas numéricas que permitan avanzar en la sofisticación y calidad de las simulaciones. Este tipo de estudios requiere de códigos hidrodinámicos o magnetohidrodinámicos que en general utilizan grandes recursos computacionales, como ser grandes centros de cómputo con nodos interconectados entre sí.

Sin embargo, los códigos desarrollados hasta el momento no son capaces de utilizar los últimos recursos computacionales disponibles, como ser la computación sobre placas de video o GPU's, las cuales han demostrado ser una herramienta muy potente para estudios de hidrodinámica en general.

Con esto en mente, un primer objetivo fue el desarrollo de un código magnetohidrodinámico, al que llamamos FARGO3D, para explotar las últimas tecnologías de supercómputo, en particular, las de cómputo sobre *clusters de GPU's*. Este código luego será utilizado en las secciones finales de este trabajo para la investigación de diferentes regímenes de migración planetaria, los cuales pueden conducir a una mejor descripción de las observaciones dentro del esquema de las interacciones planeta-disco.

En la siguiente sección detallamos la implementación básica de este nuevo código numérico.

Solución numérica: FARGO3D

3

3.1. Introducción y motivación

Como vimos en la sección anterior, si bien hay una gran variedad de resultados teóricos interesantes que arrojan gran cantidad de información relevante al problema de las interacciones entre un planeta y un disco de gas, éstos generalmente están limitados debido a la complejidad que presentan las ecuaciones involucradas. Más allá del régimen lineal, es muy difícil obtener algún avance teórico útil.

En la última década, gran cantidad de resultados han sido obtenidos mediante la exploración numérica del espacio de parámetros del problema. En particular, una gran cantidad de estudios fueron realizados mediante la utilización de códigos hidrodinámicos especialmente adaptados al problema de discos Keplerianos con rotación diferencial. Algunos códigos que han sido utilizados por la comunidad son: GENESIS (de Val-Borro *et al.*, 2006), RAMSES (Teyssier, 2002), NIRVANA (Ziegler, 2008), FARGO Masset (2000), ATHENA (Stone *et al.*, 2008), ZEUS (Stone y Norman, 1992a), entre otros.

Los códigos mencionados anteriormente datan, en promedio, de hace 10 años, y no son capaces de explotar las últimas tecnologías disponibles en materia de supercómputo, como son los nuevos procesadores Xeon Phi de Intel, o los procesadores gráficos, entre los cuales destacan los desarrollados por la empresa Nvidia por su facilidad de uso.

En particular, los procesadores gráficos presentan características que son muy interesantes, en especial al tratar con problemas computacionalmente intensivos y altamente paralelizables, como lo son los problemas hidrodinámicos.

Aunque las simulaciones bidimensionales son un recurso muy valioso en el estudio de los problemas de interacciones entre un planeta y un disco de gas, no deja de ser una sobre simplificación del problema, y muchos de los resultados actuales son tridimensionales. Por otro lado, el rol del campo magnético, y en particular de la magnetohidrodinámica (MHD), puede ser crucial en la etapa de formación planetaria, y su inclusión puede cambiar de forma drástica los mecanismos que hoy creemos dominantes. Por su naturaleza, en la mayoría de

los casos, la MHD no puede reducirse a un simple tratamiento bidimensional, por lo que simulaciones tridimensionales son requeridas. En estos casos el costo computacional crece de forma considerable.

El desarrollo del lenguaje de programación CUDA ha permitido el florecimiento de una nueva rama de supercómputo, llamada computación de propósito general sobre GPU's, que en inglés suele denominarse *GPGPU computing*. Esta nueva herramienta permite desarrollar códigos con un rendimiento notable respecto del mismo código ejecutado en una CPU normal. Se estima que la mejora en rendimiento de una GPU de alta gama ronda un factor ~ 40 respecto de una CPU de la misma generación. De hecho es el valor que nosotros observamos en las simulaciones realizadas a lo largo de este trabajo.

En muchos problemas de discos astrofísicos, la resolución necesaria en la dirección vertical es ~ 40 , por lo que disponer de un código con el rendimiento propuesto permite realizar simulaciones tridimensionales al mismo costo que tendría una simulación bidimensional sobre una CPU. Así, la utilización de esta tecnología nos permite atacar problemas de gran costo computacional en tiempos razonablemente cortos.

Con estas ideas y comparaciones en mente es que decidimos comenzar el proyecto del desarrollo de un código magnetohidrodinámico especializado al caso planetario y que sea capaz de explotar esta nueva tecnología. Sin embargo, como veremos a lo largo de este capítulo, el resultado fue un código de propósito general, el cual puede ser aplicado a diversos tipos de problemas astrofísicos.

3.2. Por qué desarrollar un nuevo código?

Vimos, en la introducción, que existe una gran variedad de códigos numéricos para tratar problemas astrofísicos. Muchos de estos códigos son descendientes más o menos directos de otros códigos escritos con anterioridad, y sólo una fracción muy pequeña de ellos hacen uso de las GPU's, lo cual es sorprendente siendo que ya ha habido tiempo suficiente para su desarrollo.

Entre los códigos que pudimos encontrar en la literatura se destacan dos: ENZO Y GAMER. El código de malla adaptativa ENZO (Bryan *et al.*, 2014) contiene ciertas partes escritas en CUDA. Estos autores utilizan a las GPU's como un acelerador para ciertas partes críticas, como ser el algoritmo para la resolución de la MHD o el método utilizado para calcular los flujos de ciertas cantidades a través de las celdas. El código GAMER (Schive *et al.*, 2010) también es de malla adaptativa, con partes implementadas en GPU. Ambos códigos están principalmente orientados a cosmología, aunque también pueden ser utilizados fuera de esta área. Ya que estos códigos no utilizan las GPU's para la resolución completa del problema, en general estarán lejos de alcanzar la aceleración que mencionamos en la introducción de esta sección.

Recientemente se desarrolló el código CHOLLA (Schneider y Robertson, 2015),

el cual es un código tipo Godunov¹ de alto orden y escrito en CUDA, el cual no es público. Otro código no público desarrollado recientemente es PEnGUIIn (Fung *et al.*, 2014), un código desarrollado para funcionar en GPU's, el cual está escrito en C y CUDA.

Así, vemos que de los códigos existentes y que sean públicos, ninguno reúne las características deseadas, y los que se aproximan a nuestro objetivo fueron desarrollados muy recientemente y no se encuentran disponibles para su utilización de forma libre. Estas razones por si solas ya justifican invertir un tiempo considerable en desarrollar una herramienta de trabajo nueva. Otra justificación, la cual suele ser implícita la mayoría de las veces, es que desarrollar un código numérico para resolver un problema en particular brinda todo el conocimiento necesario para poder adaptarlo a diversos problemas físicos que se presenten, no estando limitados al trabajo de otras personas. En particular, nos permite conocer a fondo como se hacen las cosas y en base a esto podemos diseñar nuevos métodos para resolver problemas más complicados.

Ahora bien, ya que la memoria de las GPU's y de las CPU's están en espacios físicos diferentes, y los nodos de cómputo por lo general disponen de una cantidad de RAM en CPU muy superior a la disponible sobre las GPU's, los códigos por lo general deben estar transfiriendo constantemente memoria entre la GPU y la CPU. Este proceso es muy costoso en general (y es uno de los grandes problemas cuando se programa en GPU), por lo que en la práctica, comunicaciones asíncronas deben realizarse a fin de ocultar los tiempos de transferencia, comúnmente llamado *latencia* en la jerga computacional.

Ya que los problemas en los que estamos interesados no son demasiado grandes en memoria, sino más bien están limitados por la velocidad de procesamiento, nuestro objetivo es desarrollar un código que evite al máximo las transferencias entre la GPU y la CPU. Esto implica que nuestros problemas deben adaptarse para llenar completamente la memoria RAM de la GPU para así, alcanzar la máxima eficiencia posible.

Por otro lado, la programación sobre GPU's involucra ciertas destrezas con las que uno no quiere lidiar generalmente. Las rutinas programadas en CUDA requieren que quien las modifique sepa programar en este lenguaje. La práctica nos enseña que la comunidad de usuarios de este tipo de códigos no está acostumbrada al uso de este lenguaje, por lo que un código de estas características es muy difícil de modificar o mejorar. Por este motivo, y con vistas hacia un uso por parte de una amplia comunidad de usuarios, hemos desarrollado una nueva y novedosa forma de trabajo, que involucra programación estándar, en un lenguaje de programación bien conocido como es C.

Desarrollamos algunas reglas sintácticas estrictas para las rutinas más costosas, que exponen el paralelismo de forma explícita, y cierta información relevan-

¹Método hidrodinámico que resuelve las ecuaciones en forma conservativa por medio de la solución exacta o aproximada de problemas de Riemann para cada interface de celda.

te en forma de comentarios, que luego puede utilizarse para traducir el código a CUDA de forma automática, por medio de un programa externo. En este trabajo no detallaremos mucho más al respecto de este tema, ya que es más bien técnico y no relacionado con los problemas aquí tratados, pero hay una breve exposición en el apéndice A y mayor información puede encontrarse en la documentación oficial del código: <http://fargo.in2p3.fr/Documentation>.

3.3. FARGO3D

El código que desarrollamos se llama FARGO3D, y es el sucesor del código FARGO (Masset, 2000), un código bien conocido en la comunidad, dedicado al estudio de las interacciones planeta-disco.

FARGO3D, al igual que FARGO, está basado en el código ZEUS (Stone y Norman, 1992a). Esta clase de código es comúnmente llamado código de diferencias finitas, para diferenciarlos de los códigos de volúmenes finitos y los códigos tipo *Godunov* o los llamados *Riemann Solvers*, los cuales aparecieron en la comunidad astrofísica en los últimos 20 años.

En principio, los códigos de diferencias finitas, tienen propiedades de conservación más deficientes respecto de los de tipo *Godunov*, por lo que ciertas comunidades en astrofísica suelen desestimarlos. Sin embargo, como veremos en las siguientes secciones, muchas operaciones dentro de nuestro código se hacen directamente sobre los elementos de volumen. Esto tiene ciertas implicancias, como ser la conservación de la masa y el momento (lineal y angular) a precisión de máquina.

Nuestro desarrollo está basado en el código público FARGO, el cual fue ampliamente utilizado en problemas de interacciones entre planetas sumergidos en discos de acreción, en un extenso rango de masas para los perturbadores, desde cuerpos de muy baja masa, en los cuales son necesarias condiciones de equilibrio rotacional y advección de entropía muy precisas, hasta problemas que involucran planetas gigantes, de masa considerable. Estos últimos inducen la propagación de ondas de choque en la vecindad del planeta, y se ha visto mediante comparaciones que los códigos *Godunov*, los cuales resuelven de forma precisa estos choques, obtienen resultados comparables a los que se pueden obtener con códigos de diferencias finitas como FARGO3D.

En la siguiente sección presentamos el sistema de ecuaciones que se desea resolver.

3.4. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica

El código que diseñamos resuelve un conjunto muy particular de ecuaciones. Estas son las ecuaciones de la MHD ideal², que en un sistema de coordenadas

²Aunque términos no ideales han sido implementados como términos fuente, ver Krapp y Benítez Llambay (2015).

arbitrario se escriben como:

- La ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.1)$$

donde ρ es la densidad de masa y \vec{v} es la velocidad del fluido.

- La ecuación de momento o de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = & -\nabla P + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \nabla \cdot \vec{T} + \vec{F}_{\text{ext}} \\ & - [2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}] \rho, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde P es la presión térmica del gas, μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, \vec{B} es el campo magnético, \vec{F}_{ext} es cualquier fuerza (por unidad de volumen) externa al sistema (p.ej. gravedad). El término que involucra al campo magnético es conocido como *fuerza de Lorentz*, y solo se encuentra presente en el caso MHD.

En la ecuación (3.2) se incluyen explícitamente términos no inerciales (aceleración de Coriolis, centrífuga y tangencial) que permiten la descripción del problema desde un marco de referencia que rota aceleradamente, con velocidad angular $\vec{\Omega}$. Esta propiedad será de importancia para el problema planetario. \vec{T} es el tensor viscoso, y viene dado por:

$$\vec{T} = \rho \nu \left[\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{I} \right], \quad (3.3)$$

dónde ν es la viscosidad cinemática del gas. \vec{I} es el tensor identidad de rango igual a $\nabla \vec{v}$. En vez de la ecuación de energía total, utilizamos (ver sección 3.3) la ecuación para la energía interna (por unidad de volumen):

$$\partial_t e + \nabla \cdot (e \vec{v}) = -P \nabla \cdot \vec{v}. \quad (3.4)$$

Cuando se incluye la MHD, además debe resolverse la ecuación de evolución para el campo magnético \vec{B} , conocida como ecuación de inducción magnética:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B} - \eta \nabla \times \vec{B}), \quad (3.5)$$

donde η es conocida como resistividad óhmica. Si bien este término difusivo no forma parte de la MHD ideal, por ahora lo incluimos porque nos ayudará a explicar los algoritmos que utilizaremos para su posterior inclusión, de forma más general (ver sección 3.17.4).

El sistema de ecuaciones hasta aquí presentado contiene más incógnitas que ecuaciones. Para cerrar el sistema es necesario incluir lo que se conoce como ecuación de estado, la cual establece una relación entre la energía interna (o tem-

peratura), la densidad y la presión. Las ecuaciones de estado más comúnmente utilizadas en el área de interacciones planeta-disco son:

$$P = c_s^2 \rho, \quad (3.6)$$

y

$$P = (\gamma - 1) e, \quad (3.7)$$

donde c_s es la velocidad del sonido en el medio (también llamada velocidad del sonido isoterma), y γ es el cociente entre el calor específico del gas a presión y volumen constante.

La ecuación (3.6) es comúnmente llamada ecuación de estado isoterma ya que es utilizada cuando se fija el campo $c_s(\vec{r})$ a una constante en el tiempo. En efecto, por la ecuación de estado de los gases ideales, la temperatura $T \propto c_s^2$, por lo que fijar, o bien la velocidad del sonido, o bien la temperatura, es equivalente. En este caso, una consecuencia importante es que la ecuación de evolución para la energía interna queda desacoplada del sistema, por lo que no es necesario resolverla.

La ecuación (3.7), es conocida como ecuación de estado adiabática, y es resuelta en la mayoría de los casos en los que la ecuación de la energía debe ser incluida.

A lo largo de este trabajo asumiremos un gas ideal, por lo que la relación entre la presión y la temperatura vendrán dadas por:

$$c_s^2 = \frac{k_B T}{\mu m_H}, \quad (3.8)$$

con k_B la constante de Boltzmann, m_H la masa del átomo de hidrógeno y μ el peso molecular medio.

Otras ecuaciones de estado son fácilmente aplicables, como por ejemplo la ecuación de estado politrópica, la cual establece que $P \propto \rho^\gamma$, dónde γ en este caso es conocido como *índice politrópico*. Si bien no detallaremos sobre la implementación de esta ecuación particular, es trivial luego de los desarrollos que mostraremos.

Por último, es necesario que para todo tiempo se satisfaga la propiedad de divergencia nula para el campo magnético:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.9)$$

Además del sistema de ecuaciones presentado hasta aquí, se ha implementado un módulo para resolver la transferencia radiativa, el cual es brevemente descrito en la sección 5.2.

3.5. Discretización del dominio

Para resolver las ecuaciones de la MHD, es necesario discretizar el dominio de alguna forma. En la aproximación que nosotros utilizamos, la discretización se hace sobre una malla euleriana, en la que las cantidades se definen en ciertas regiones particulares de los cubos elementales que la componen.

Algunas ecuaciones se discretizan en su forma diferencial, mientras que otras se discretizan en su forma volumétrica o integrada. En general, una discretización arbitraria tendrá la forma:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial f(a, t)}{\partial x} \rightarrow \frac{a_{i+1/2, j, k}^{n+1} - a_{i+1/2, j, k}^n}{t^{n+1} - t^n} = \frac{f_{i+1, j, k}^{n+1/2} - f_{i, j, k}^{n+1/2}}{x_{i+1} - x_i}, \quad (3.10)$$

donde se asume que el índice i se corresponde con la dirección x , y que el resultado de una diferencia centrada pertenece a la mitad del intervalo (tanto en tiempo como en espacio).

Una vez discretizado el dominio en esta forma, hallar el valor de la cantidad a en el tiempo avanzado se hace mediante una operación algebraica sencilla.

3.5.1. Localización de las cantidades físicas

Para completar la discretización, es necesario adoptar alguna convención sobre dónde se localizan las cantidades dentro de la malla, lo cual es mostrado en la Fig. 3.1. Las cantidades vectoriales se centran en las caras del cubo. Siempre la componente j -ésima del vector estará ubicada en las caras de la dirección j correspondiente. Por otro lado, las cantidades escalares se definen en los centros de la celda. Excepciones a esta regla son las fuerzas electromotrices (ver sección 3.17.1) y las componentes del tensor viscoso.

A lo largo de este trabajo, adoptaremos la notación de índice mitad para las cantidades localizadas en las caras correspondientes, mientras que índices enteros representan los centros.

Cuando una cantidad Q se encuentra en el centro de la celda i, j, k , representaremos el valor de esa cantidad con la notación Q_{ijk} . Por el contrario, cuando la cantidad Q se encuentre en la cara posterior a la celda i , es decir, entre la celda i e $i + 1$, y centrada en las otras direcciones, su valor vendrá dado por $Q_{i+1/2jk}$.

3.6. Sistemas de coordenadas

Tres aproximaciones son comúnmente utilizadas para el estudio de las interacciones planeta-disco y los efectos MHD en discos de acreción.

Cuando las simulaciones involucran un disco completo y el potencial gravitatorio es estratificado, es decir varía con la altura, la geometría más natural para su tratamiento es la esférica. Por otro lado, cuando el potencial no es estratificado, o bien la simulación es bidimensional, la descripción más natural es utilizando

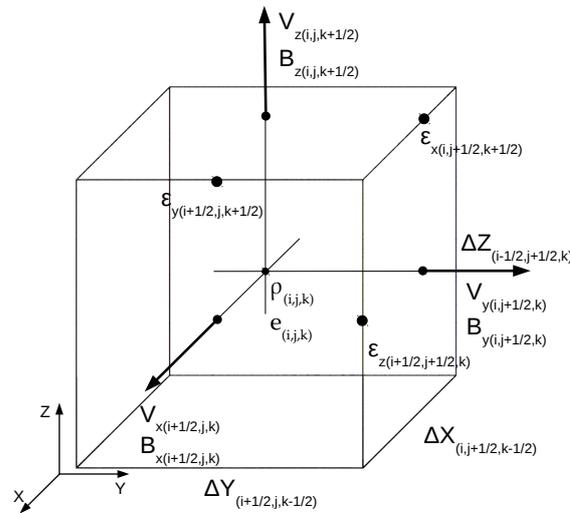


Figura 3.1: Aspecto de una celda cúbica utilizada para la resolución de las ecuaciones. Las componentes vectoriales $V_x, V_y, V_z, B_x, B_y, B_z$, están definidas en las caras del cubo y las cantidades escalares e, ρ se localizan en el centro. Las fuerzas electromotrices ϵ se definen en el medio de las aristas (ver sección 3.17.1). También se incluyen en la figura las longitudes de la celda ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$), las cuales son cantidades geométricas utilizadas en el proceso de discretización. Estas cantidades en general son función de la posición, por lo que incluyen el correspondiente índice, relacionado con la arista a la cual corresponden.

una geometría cilíndrica.

Por estos motivos, el desarrollo de un código para el estudio de esta clase de problemas debe incluir la posibilidad de resolver las ecuaciones en diversos sistemas de coordenadas. Nuestra implementación fue realizada en estos sistemas de coordenadas:

- Sistema cartesiano.
- Sistema cilíndrico.
- Sistema esférico.

3.7. Construcción de la malla

La discretización del dominio puede ser realizada de formas diferentes. Nosotros adoptamos la utilización de mallas regulares, en las cuales las coordenadas de la malla tridimensional se producen mediante el producto cartesiano de tres vectores unidimensionales, cada uno con las coordenadas correspondientes a cada dirección.

Esto tiene ventajas importantes en cuanto a la forma en que puede ser almacenada la información geométrica del código. En particular, esta elección permite que las coordenadas puedan ser almacenadas como arreglos monodimensionales

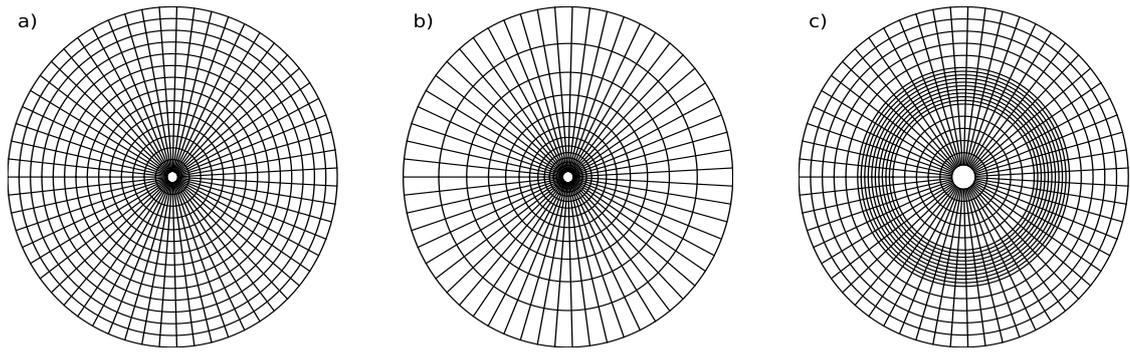


Figura 3.2: Malla polar representada en una base cartesiana. El espaciamento angular siempre es constante y el radial puede adoptar un espaciamento uniforme *a)*, un espaciamento uniforme en el logaritmo *b)* o un espaciamento arbitrario *c)*.

que ocupan muy poco espacio en memoria, a saber, $3N$ en vez de N^3 , con N el número medio de celdas por dirección.

Es importante notar que aunque la malla sea regular, no necesariamente es equiespaciada, por lo que en principio con nuestra implementación es posible construir geometrías no triviales para beneficiar la precisión de la solución en ciertos lugares estratégicos.

Esta cualidad no aplica a la dirección acimutal, ya que por el algoritmo de advección utilizado, una hipótesis fundamental es que el espaciamento de la malla sea regular y uniforme (ver sección 3.16).

En la versión actual del código, están implementados los espaciamentos:

- Uniforme
- Logarítmico
- Libre

En la Fig. 3.2 se muestran ejemplos de los espaciamentos posibles en una simulación en coordenadas cilíndricas bidimensional. La división en acimut es uniforme y regular, al igual que la radial en el panel *a)*. Sin embargo, en la dirección radial, esta condición puede ser relajada para obtener distribuciones de celdas más interesantes y útiles a ciertos problemas (ejemplos *b)* y *c)*.

En la Fig. 3.3, se muestra la misma representación pero para una malla cartesiana (también vale para una cilíndrica en el plano rz o esférica en el plano $r\theta$), en la cual es posible aplicar un espaciamento no uniforme en dos direcciones simultáneas.

3.8. Técnica del operador splitting

Antes de explicar en detalle los métodos que utilizamos para la resolución de las ecuaciones de la MHD, explicaremos la esencia de la técnica conocida como *operador splitting* u operador de separación o partición en español.

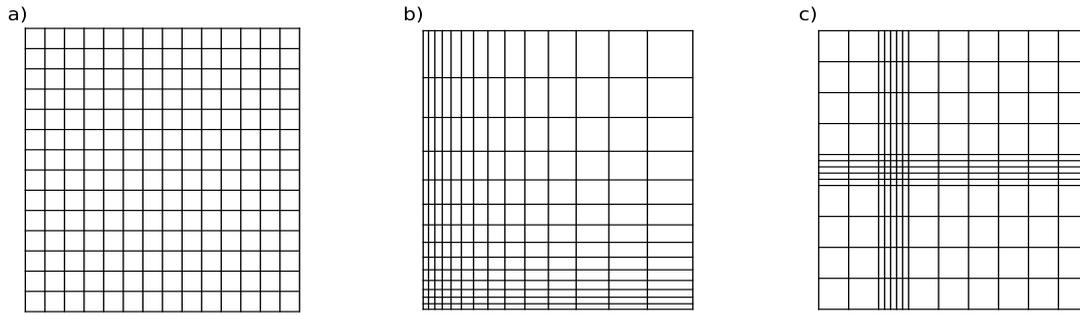


Figura 3.3: Ejemplo de una malla cartesiana en el plano yz o cilíndrica en el plano rz o esférica en el plano $r\theta$. El espaciamento en estas direcciones puede ser uniforme *a)*, un uniforme en el logaritmo *b)* o un espaciamento arbitrario *c)*.

Esta es una técnica que permite simplificar un problema de condición inicial, separándolo en sub problemas independientes, los cuales se asume que pueden ser resueltos de forma separada.

Supongamos que se busca la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{df}{dt} + A(f) = 0, \quad f(0) = f_0, \quad (3.11)$$

donde A es un operador arbitrario que aplica sobre f .

Si por alguna razón el operador A se puede descomponer como una superposición lineal de operadores más sencillos, es decir, $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, resolver (3.11) será equivalente a resolver:

$$\frac{df}{dt} + \sum_{j=1}^n A_j(f) = 0, \quad f(0) = f_0. \quad (3.12)$$

Este problema puede descomponerse en n problemas más sencillos:

$$\frac{df^j}{dt} + A_j(f^j) = 0 \quad \text{para } j=1, \dots, n, \quad (3.13)$$

donde el supra índice j se utilizó para remarcar que la solución f hallada es dependiente de j . Finalmente, la solución del problema vendrá dada por la suma de las soluciones de estos n problemas más simples.

En la siguiente sección veremos que las ecuaciones de la hidrodinámica involucran la resolución de ecuaciones que tienen un término advectivo y otros términos que dan cuenta de posibles fuentes o sumideros para las cantidades involucradas.

En general, las ecuaciones de la hidrodinámica se pueden escribir como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot (Q\vec{v}) - S(Q, \vec{v}, t) = 0. \quad (3.14)$$

En este caso, aplicar la técnica del operador splitting es directa:

$$A_1 = -S(Q, \vec{v}, t), \quad (3.15)$$

$$A_2 = \nabla \cdot (Q\vec{v}). \quad (3.16)$$

Así, la solución completa de una ecuación hidrodinámica por medio de este método involucrará dos pasos:

1. Una actualización parcial de la cantidad Q , de un paso $Q(t_0) = Q^0$ hacia Q^1 , por el operador A_1 .
2. Una actualización parcial desde el estado Q^1 hacia un estado $Q^2 = Q(t_0 + \Delta t)$, realizada en el paso del transporte, donde la advección es resuelta.

Eventualmente, un paso adicional debe incluirse cuando consideramos la ecuación de inducción en el caso MHD, pero esto será tratado en la sección 3.17.

3.9. MPI - Descomposición de dominio

El código fue diseñado para poder funcionar en paralelo, incluyendo la posibilidad de fraccionar el problema y repartirlo en múltiples procesadores. Para lograr esto es necesario desarrollar alguna estrategia para dividir el problema antes de asignarlo a cada procesador.

En nuestra implementación, adoptamos la posibilidad de dividir nuestro cubo de datos a lo largo de dos direcciones, las cuales llamaremos Y y Z . La dirección X en general no se divide ya que estamos interesados en problemas con geometría periódica en una dirección (ángulo acimutal) y utilizamos un algoritmo muy particular para el cálculo del transporte en esta dirección (ver sección 3.16), por lo que una subdivisión en esta dirección podría llegar a degradar el rendimiento. De todos modos, lo que explicaremos a continuación es igualmente aplicable para la dirección X .

En el razonamiento que sigue, obviaremos siempre la dirección X , ya que a fines de la división será una dirección muda.

Supongamos que disponemos de n procesadores para realizar una simulación de una malla que contiene $N_y \times N_z$ celdas. El problema que queremos resolver es:

¿Cuál es el fraccionamiento óptimo de la malla en n partes similares?

Aquí, lo importante es el significado de *óptimo* en este problema. En nuestro problema definimos como división óptima a la división que minimiza la superficie

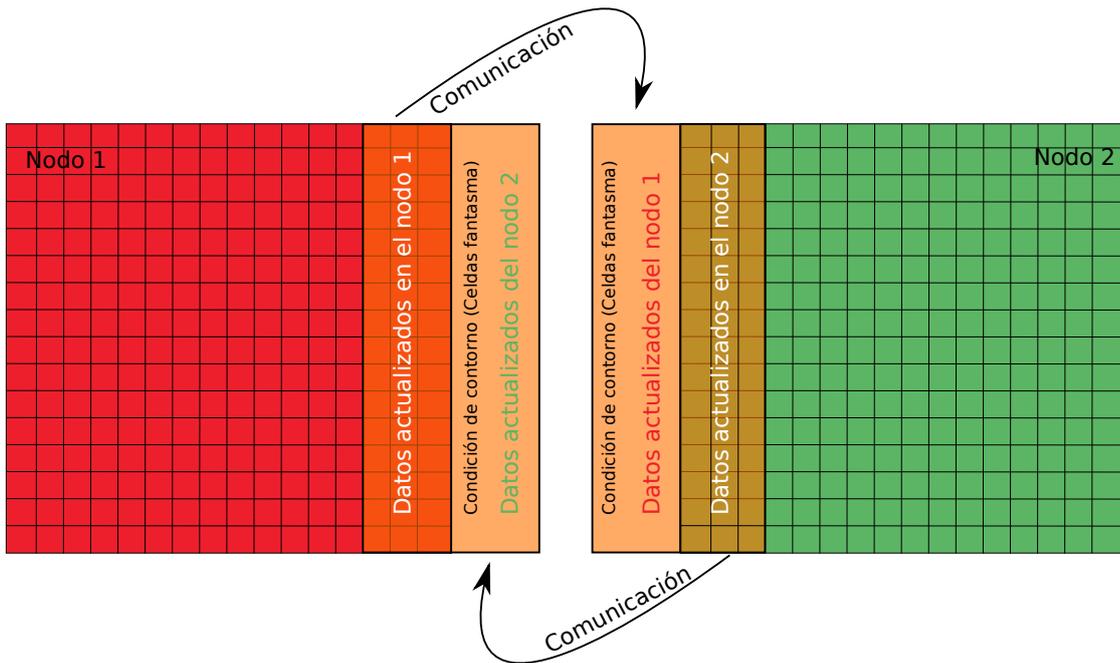


Figura 3.4: Esquema de las comunicaciones realizadas entre dos nodos consecutivos. La condición de contorno de un nodo es actualizada con una porción de malla activa del otro, y viceversa.

de contacto total entre las porciones de malla dividida. Esto es así porque el costo del paralelismo viene dado por las comunicaciones que hay que realizar entre los diferentes nodos de cómputo y las comunicaciones deben ser realizadas por medio de celdas de malla vecinas, ya que el problema debe ser continuo.

Al pedir una superficie de contacto mínima entre las caras, estamos diciendo que queremos minimizar la cantidad de datos que deben ser transmitidos entre todos los nodos, los cuales son necesarios para actualizar las condiciones de contorno del problema tratado por cada nodo de forma independiente.

En la Fig. 3.4 se muestra un esquema muy sencillo con la estrategia utilizada por dos nodos vecinos para actualizar sus condiciones de contorno y mantenerse sincronizados de un paso de tiempo al otro.

El costo de las comunicaciones puede ser calculado como el perímetro total de las interfaces entre los procesadores. Suponiendo que separamos el problema de $N_y \times N_z$ celdas en n procesadores, cada uno de los cuales se organiza en una malla de tamaño $n_y \times n_z$, el costo será:

$$\text{costo} \propto N_y \times n_z + N_z \times n_y, \quad (3.17)$$

con la condición $n = n_y \times n_z$. El mínimo de este costo puede calcularse derivando e igualando a cero:

$$n_z^2 = \frac{N_z}{N_y} n, \quad (3.18)$$

y, n_y puede determinarse de forma unívoca.

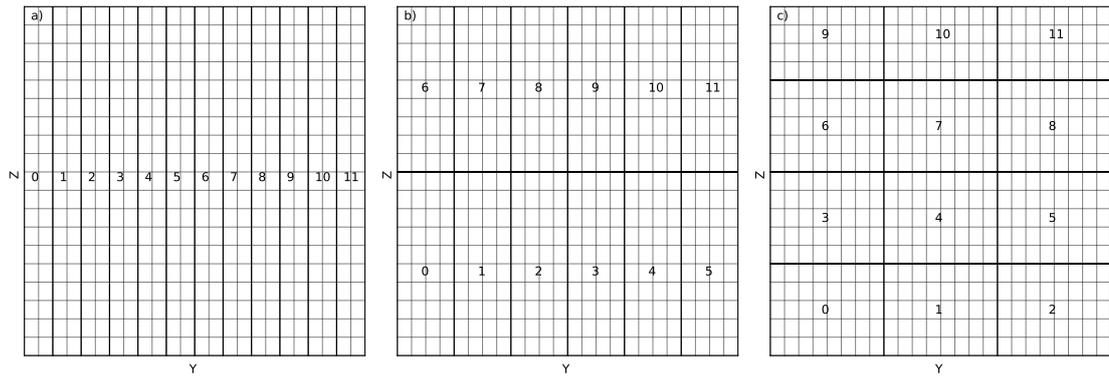


Figura 3.5: División de una malla de 25×20 celdas en 12 partes. Para este ejemplo hay 5 divisiones posibles: 1×12 , 2×6 , 3×4 , 4×3 , 6×2 y 12×1 , de las cuales mostramos sólo tres.

En la práctica, sin embargo, la expresión anterior no puede ser utilizada de forma directa ya que el número de procesadores es un número fijo, y $N_z \times n$ no es, en general, un múltiplo de N_y o, en caso de serlo, no suele ser un cuadrado perfecto.

Por este motivo, nosotros adoptamos el siguiente algoritmo:

- Descomponemos en factores primos el número de procesadores.
- Calculamos el costo de las comunicaciones para las posibles combinaciones de estos factores.
- Dividimos la malla de acuerdo a la combinación de n_y , n_z que minimiza el costo.

Un ejemplo de las posibles opciones para dividir una malla de 25×20 celdas con 12 procesadores se muestra en la Fig. 3.5. En ella pueden verse las posibilidades no redundantes de fraccionamiento posible cuando n , N_y y N_z son dados. Para decidir cuál de las posibilidades es óptima en el sentido que minimice la cantidad de *bytes* (o celdas) comunicados, necesitamos calcular la función costo, dada por la ecuación (3.17). En la Fig. 3.6 puede verse la forma de la función costo para el ejemplo de la Fig. 3.5.

El costo como función de n_y o n_z (ecuación 3.17) es mostrado en el panel de la izquierda de la Fig. 3.6. Por haber considerado un ejemplo asimétrico, la curva negra y roja difieren. Los valores discretos que son utilizables en la práctica son: $(n_y, n_z) = (12, 1)$, $(6, 2)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(2, 6)$, $(1, 12)$.

En este caso particular, puede verse que considerando la combinación $(4, 3)$, el costo alcanza un valor muy cercano al mínimo ideal sobre la curva, aunque una solución igualmente buena podría ser la combinación $(3, 4)$.

En el panel de la derecha de la Fig. 3.6 se observa la misma función, pero utilizando n_y, n_z como variables independientes. La función costo, normalizada, se gráfica como un mapa de color. Además, se incluyen sus curvas de nivel, con su correspondiente valor asociado.

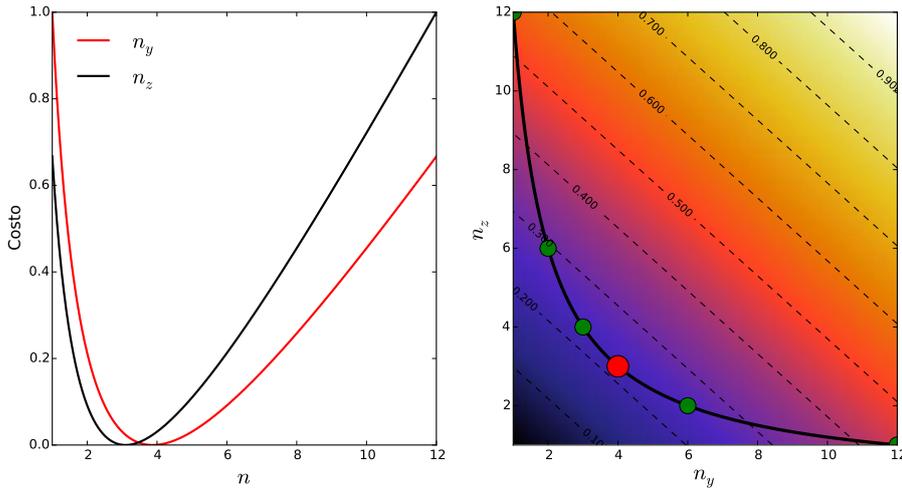


Figura 3.6: Función de costo para una malla de tamaño $n_y \times n_z = 25 \times 20$. En el gráfico de la izquierda puede verse la función de costo, evaluada en función de n_y o n_z . Como se espera de la asimetría del problema, el mínimo *ideal* (asumiendo n continuo) se alcanza en lugares diferentes según sea el caso. En el panel de la derecha se observa la función costo como una función bidimensional. El problema de la división de la malla puede entenderse como la minimización de esta función sujeta a la condición impuesta por la curva continua negra ($n = n_y \times n_z$). En líneas a trazos se observan las curvas de nivel de la función costo normalizada. En verde, se marcan los puntos correspondientes a las soluciones posibles cuando $n = 16$, es decir, todas las factorizaciones posibles de $n = n_y \times n_z$.

El problema consiste en hallar el mínimo sobre este espacio, restringido a la curva negra continua, la cual es la condición de restricción $n = n_y n_z$. Los puntos verdes representan todas las combinaciones de n_y, n_z cuyo producto es igual a n . Puede verse que el mínimo valor posible sobre esta curva se alcanza en (4,3), para un costo normalizado $\sim 0,2$. Otra solución posible es la combinación (3,4), aunque su valor es levemente superior debido a la asimetría natural de la malla.

En nuestra implementación, esta descomposición de dominio se hace de forma exclusiva en dos direcciones, las cuales dependen del sistema de coordenadas utilizado:

- Cartesianas: y, z .
- Cilíndricas: r, z .
- Esféricas: r, θ .

3.10. Operador Splitting en la práctica

En la sección 3.8 vimos que una técnica para resolver ecuaciones de la forma (3.14) es el método del operador splitting. En esta sección describiremos como hacemos en la práctica para realizar esta separación en las ecuaciones de la hidrodinámica reales.

Como vimos en la sección 3.4, las ecuaciones de evolución para las cantidades hidrodinámicas son: la ecuación de continuidad, la ecuación de momento, y la ecuación de la energía interna, las cuales deben ser escritas de forma adecuada para poder descomponerlas en los términos de fuentes y transporte respectivamente.

Antes de proceder, una decisión importante debe ser tomada. El operador splitting se basa en la elección adecuada de una cantidad que deberá ser integrada mediante la resolución de una ecuación de advección, la cual proviene de considerar sólo A_2 en la sección 3.8. De forma genérica, la ecuación a resolver es:

$$\partial_t Q + \nabla \cdot (Q\vec{v}) = 0. \quad (3.19)$$

Integrando en el volumen de referencia, puede escribirse como:

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = \mathcal{F}_{x_{i-1/2}}^{n+1/2} - \mathcal{F}_{x_{i+1/2}}^{n+1/2}, \quad (3.20)$$

donde, por simplicidad consideramos el flujo a lo largo de la dirección X . $Q = \int Q dV$ y $\mathcal{F}_x = Qv_x S$, con S la superficie con vector normal en la dirección de X . Si suponemos que el dominio está formado por N celdas, sumando sobre todas ellas, se tiene que:

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\sum_{i=0}^{N-1} Q_i^{n+1} - \sum_{i=0}^{N-1} Q_i^n \right) = (\mathcal{F}_{x_{-1/2}} - \mathcal{F}_{x_{N+1/2}}). \quad (3.21)$$

Por lo tanto, si el flujo de Q es nulo por las fronteras de la malla, la cantidad Q será conservada a precisión de máquina.

Esto nos enseña que la elección de la cantidad a adveccionar será muy importante. En general, la elección de cantidades que tengan que ver con el momento (lineal o angular), lo cual es una cantidad físicamente conservada, tendrá importantes consecuencias sobre las leyes de conservación del sistema físico resuelto. Por este motivo, elegimos adveccionar siempre los momentos del sistema, ya sean lineales o angulares.

Para explicar el procedimiento, debemos referirnos a un sistema de coordenadas particular. De forma anticipada, anunciamos que los términos que aparezcan en color, deberán ser considerados como términos fuente (término A_1 en el método del operador splitting).

Es importante notar que no incluiremos los términos magnéticos y viscosos en esta sección porque ellos serán tratados posteriormente. De todos modos, los métodos aquí presentados no pierden validez en esos casos.

3.10.1. Coordenadas cartesianas

En coordenadas cartesianas, por razones geométricas, no incluimos la posibilidad de un marco de referencia rotante, por lo que $\Omega = 0$. Una forma de escribir la ecuación de momento en coordenadas cartesianas es:

$$D_t \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi. \quad (3.22)$$

Utilizando la ecuación de continuidad, se tiene que:

$$\partial_t(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla P - \rho \nabla \Phi. \quad (3.23)$$

Así, llegamos a una ecuación de advección (o transporte) para los momentos lineales $\rho \vec{v}$. Claramente, el miembro de la derecha, en color, debe ser considerado como términos fuente.

3.10.2. Coordenadas cilíndricas

La ecuación de momento en coordenadas cilíndricas, puede ser escrita componente a componente como:

$$D_t v_r = \frac{(v_\phi + \Omega r)^2}{r} - \frac{\partial_r P}{\rho} - \partial_r \Phi, \quad (3.24)$$

$$D_t v_\phi = -\frac{v_r v_\phi}{r} - \dot{\Omega} r - 2\Omega v_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial_\phi P}{r} - \frac{\partial_\phi \Phi}{r} \quad (3.25)$$

$$D_t v_z = -\frac{\partial_z P}{\rho} - \partial_z \Phi. \quad (3.26)$$

En este sistema de coordenadas, la derivada Lagrangiana D_t se define como:

$$D_t \equiv \partial_t + \partial_r + \frac{1}{r} \partial_\phi + \partial_z. \quad (3.27)$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser reescritas de forma más conveniente por medio de la ecuación de continuidad. La ecuación radial, en términos del momento lineal, puede ser escrita como:

$$\partial_t(\rho v_r) + \nabla \cdot (\rho v_r \vec{v}) = \rho \frac{(v_\phi^t)^2}{r} - \partial_r P - \rho \partial_r \Phi, \quad (3.28)$$

con $v_\phi^t = v_\phi + r\Omega$, que es la velocidad acimutal en el marco de referencia inercial. Los términos en color, nuevamente son los que deben ser considerados como términos fuente. En este caso particular, a diferencia del caso cartesiano, aparece un término geométrico asociado con la fuerza centrífuga.

La ecuación acimutal, escrita en términos del momento angular $j = r v_\phi + r^2 \Omega$

es:

$$\partial_t(\rho j) + \nabla \cdot (\rho j \vec{v}) = -\partial_\phi P - \rho \partial_\phi \Phi, \quad (3.29)$$

lo cual es equivalente al caso de la advección de momento en coordenadas cartesianas. Esta es una propiedad muy interesante. En este esquema, el momento angular específico se comporta de la misma forma que el momento lineal en un sistema de coordenadas cartesianas.

Por último, la ecuación para el momento lineal z tiene la misma forma que la componente z de la ecuación (3.23) del caso cartesiano.

3.10.3. Coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas, la ecuación de momento puede ser escrita componente a componente como:

$$D_t v_r = \frac{v_\theta^2 + (v_\phi + r \sin \theta \Omega_f)^2}{r} - \frac{\partial_r P}{\rho} - \partial_r \Phi, \quad (3.30)$$

$$D_t v_\phi = -r \sin \theta \dot{\Omega}_f - \frac{v_r v_\phi + v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} - 2\Omega_f (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) - \frac{\partial_\phi P}{r \sin \theta} - \frac{\partial_\phi \Phi}{r \sin \theta}, \quad (3.31)$$

$$D_t v_\theta = -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{(v_\phi + r \sin \theta \Omega_f)^2}{r} \cot \theta - \frac{\partial_\theta P}{r \rho} - \frac{\partial_\theta \Phi}{r}, \quad (3.32)$$

donde la derivada Lagrangiana o total D_t se define como:

$$D_t \equiv \partial_t + v_r \partial_r + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \partial_\phi + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta. \quad (3.33)$$

Al igual que en las otras geometrías, las ecuaciones anteriores pueden ser reescritas de forma más conveniente utilizando la ecuación de continuidad.

La ecuación para el momento radial es:

$$\partial_t(\rho v_r) + \nabla \cdot (\rho v_r \vec{v}) = \rho \frac{v_\theta^2 + (v_\phi^t)^2}{r} - \partial_r P - \rho \partial_r \Phi, \quad (3.34)$$

donde definimos $v_\phi^t = v_\phi + r \sin \theta \Omega_f$, que es la velocidad acimutal en un marco de referencia no rotante. Del mismo modo, definiendo $j = r \sin \theta v_\phi + r^2 \sin^2 \theta \Omega_f$, lo cual es el momento angular específico en este sistema, la ecuación (3.31) puede ser reescrita como:

$$\partial_t(\rho j) + \nabla \cdot (\rho j \vec{v}) = -\partial_\phi P - \rho \partial_\phi \Phi. \quad (3.35)$$

Lo que es análogo al resultado obtenido en el caso cilíndrico. Por último, en la

coordenada polar, si definimos el momento angular meridional específico como rv_θ , se tiene que:

$$\partial_t(\rho rv_\theta) + \nabla \cdot (\rho rv_\theta \vec{v}) = \rho (v_\phi^t)^2 \cot \theta + \partial_\theta P + \rho \partial_\theta \Phi. \quad (3.36)$$

Así, las ecuaciones (3.34), (3.35) y (3.36) ya están en la forma deseada para aplicar el operador splitting. Los términos en color, al igual que en los casos previos, corresponden a los términos fuente, que serán utilizados para el avance parcial de la velocidad.

3.10.4. Densidad y energía

Al conjunto anterior de ecuaciones, se le debe agregar la ecuación de evolución de la energía:

$$\partial_t e + \nabla \cdot (e \vec{v}) = -P \nabla \cdot \vec{v}, \quad (3.37)$$

y la ecuación de continuidad:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.38)$$

la cual no presenta término fuente alguno. Ambas ecuaciones ya están en la forma adecuada y son válidas para cualquier sistema de coordenadas.

3.10.5. Resumen

En esta sección hemos visto de forma explícita cuales son los términos hidrodinámicos que deben ser incluidos en el avance parcial debido a las fuentes al aplicar el método del operador splitting. Por completitud, colocamos todos los resultados juntos:

Avance parcial por transporte:

Coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v_x) + \nabla \cdot (\rho v_x \vec{v}) &= 0, \\ \partial_t(\rho v_y) + \nabla \cdot (\rho v_y \vec{v}) &= 0, \\ \partial_t(\rho v_z) + \nabla \cdot (\rho v_z \vec{v}) &= 0, \end{aligned}$$

donde los términos en azul se corresponden con el momento lineal en cada dirección.

Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v_r) + \nabla \cdot (\rho v_r \vec{v}) &= 0, \\ \partial_t[\rho r(v_\phi + r\Omega)] + \nabla \cdot [\rho r(v_\phi + r\Omega)\vec{v}] &= 0, \\ \partial_t(\rho v_z) + \nabla \cdot (\rho v_z \vec{v}) &= 0, \end{aligned}$$

donde los términos en azul se corresponden con el momento lineal radial, el momento angular acimutal y el momento lineal vertical.

Coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v_r) + \nabla \cdot (\rho v_r \vec{v}) &= 0, \\ \partial_t[\rho r \sin \theta (v_\phi + r \sin \theta \Omega)] + \nabla \cdot [\rho r \sin \theta (v_\phi + r \sin \theta \Omega) \vec{v}] &= 0, \\ \partial_t(\rho r v_\theta) + \nabla \cdot (\rho r v_\theta \vec{v}) &= 0, \end{aligned}$$

donde los términos en azul se corresponden con el momento lineal radial, el momento angular acimutal y el momento angular meridional.

A estas cantidades hay que agregar el transporte de la densidad (ecuación de continuidad), y la ecuación para el transporte de la energía:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.39)$$

$$\partial_t e + \nabla \cdot (e \vec{v}) = 0 \quad (3.40)$$

Avance parcial por fuentes:

Coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial_x P}{\rho} - \partial_x \Phi, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial_y P}{\rho} - \partial_y \Phi, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial_z P}{\rho} - \partial_z \Phi. \quad (3.43)$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial_\phi P}{r} - \frac{\partial_\phi \Phi}{r} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial_r P}{\rho} - \partial_r \Phi + \frac{(v_\phi^t)^2}{r} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial_z P}{\rho} - \partial_z \Phi \quad (3.46)$$

Coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial_\phi P}{r \sin \theta} - \frac{\partial_\phi \Phi}{r \sin \theta} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial_r P}{\rho} - \partial_r \Phi + \frac{(v_\phi^t)^2 + v_\theta^2}{r} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial_\theta P}{r \rho} - \frac{\partial_\theta \Phi}{r} + \frac{(v_\phi^t)^2 \cot \theta}{r} \quad (3.49)$$

dónde en todos los casos, los términos de la derecha corresponden con los términos que aparecen en color magenta en las páginas anteriores, adecuados a la ecuación original con los factores geométricos correspondientes. Finalmente, agregamos el trabajo de la presión, como fuente para la energía:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -P \nabla \cdot \vec{v}. \quad (3.50)$$

Esta ecuación es válida en todas las geometrías.

Es interesante notar que con la implementación escogida, la fuerza de Coriolis y todas las fuentes que involucran el producto de diferentes componentes de la velocidad están tenidas en cuenta en el transporte. Esto es importante en problemas relacionados con planetas en discos de gas. Por ejemplo, [Kley \(1998\)](#) mostró que la inclusión de la fuerza de Coriolis en una forma no conservativa puede conducir a errores en la densidad superficial de surcos abiertos por planetas.

3.11. Incorporando las fuentes numéricamente

Los términos fuente vistos en la sección anterior pueden ser aplicados directamente a cada componente de la velocidad. Por la definición del centrado de las velocidades y de los campos escalares, el cálculo del gradiente de la presión y del potencial (gradiente de dos cantidades centradas), está correctamente centrado. En efecto, en coordenadas cilíndricas, por ejemplo, el cambio de velocidad radial por el gradiente de presión radial es:

$$\frac{\partial v_{r_{ij+\frac{1}{2}k}}}{\partial t} = -\frac{P_{ij+1k} - P_{ijk}}{r_{j+1} - r_j}, \quad (3.51)$$

donde el término a izquierda tiene el mismo centrado que el término a derecha $(i, j + 1/2, k)$. Lo mismo puede probarse para todas las demás componentes y geometrías. De hecho, esta es una propiedad de cualquier fuerza conservativa que se derive de una cantidad centrada en la malla.

Sin embargo, los demás términos fuente (y factores) deben ser centrados correctamente antes de poder realizar la actualización correspondiente de la velo-

cidad. Por ejemplo, la velocidad acimutal, utilizada como término fuente para la velocidad radial, se centra de la siguiente forma:

$$v_{\phi_{ij-\frac{1}{2}k}}^t = \frac{1}{4} \left[v_{\phi_{i+\frac{1}{2}j-1k}}^t + v_{\phi_{i-\frac{1}{2}j-1k}}^t + v_{\phi_{i-\frac{1}{2},j,k}}^t + v_{\phi_{i+\frac{1}{2},j,k}}^t \right]. \quad (3.52)$$

lo cual es el promedio de los cuatro vecinos más próximos:

Por otro lado, para la actualización de la velocidad, también es necesario dividir por la densidad de masa ρ , cuyo centrado es diferente respecto del de la velocidad. En este caso, con un simple promedio aritmético del vecino más cercano hacia atrás es suficiente:

$$\rho_{ij-\frac{1}{2}k} = \frac{1}{2} (\rho_{ijk} + \rho_{ij-1k}). \quad (3.53)$$

El mismo procedimiento debe realizarse con los términos restantes.

Como ejemplo, consideremos la adición de un término fuente en la ecuación de momento. Salvo procedimientos de centrado, la implementación de un término fuente genérico S en la ecuación de momento en la dirección x será:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = S, \quad (3.54)$$

se hace como:

$$v_{x_{i+1/2,j,k}}^{n+1} = v_{x_{i+1/2,j,k}}^n + \frac{2\Delta t}{\rho_{i+1jk}^n + \rho_{ijk}^n} S_{i+1/2,j,k}^n, \quad (3.55)$$

con $S_{i+1/2,j,k}$ el término fuente correctamente centrado en la posición $(i+1/2, j, k)$. Notar que el centrado de la densidad será una característica común en todos los casos.

De forma resumida, la incorporación de las fuentes involucra tres pasos intermedios:

1. Actualizar la velocidad por la fuerza de la presión, fuerzas gravitatorias externas y fuerzas viscosas. Aquí también incluimos la fuerza ejercida por la presión magnética (ver sección 3.17).
2. Añadir una viscosidad artificial, llamada de von Neumann-Richtmyer y su correspondiente término de calentamiento en la misma forma en la que lo hacen Stone y Norman (1992a) (ver sección 3.11.1).
3. Añadir el trabajo de la presión, el trabajo de la fuerza viscosa y términos de calentamiento provenientes de la MHD.

3.11.1. Viscosidad artificial

En regiones de discontinuidades, las ecuaciones de la hidrodinámica en diferencias finitas no son bien comportadas. Esto se puede solucionar mediante la

adición de una viscosidad artificial. Ésta tiene por objetivo suavizar las regiones en donde existen discontinuidades o saltos grandes de las cantidades hidrodinámicas, es decir, choques. La idea es esparcir estos saltos sobre un número suficiente de celdas para asegurar un comportamiento adecuado.

La viscosidad utilizada es implementada en la forma de una presión viscosa, la cual actúa sólo bajo compresión, lo cual resulta en un correcto salto de la entropía a través del choque.

La viscosidad de Neumann & Richtmyer se define como un término fuente de la forma:

$$D_t \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{Q}, \quad (3.56)$$

y se implementa de forma independiente en cada dirección, por lo que el tensor \vec{Q} es diagonal. En la dirección x se define como:

$$q_x = \begin{cases} l^2 \rho (\partial v_x / \partial x)^2 & \text{si } \partial v_x / \partial x < 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

donde l determina la intensidad de la viscosidad. Una forma usual de reescribir esta expresión en diferencias finitas es:

$$q_x = \begin{cases} C^2 \rho (v_{xi+1} - v_{xi})^2 & \text{si } v_{xi+1} - v_{xi} < 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

con $C = l/\Delta x$. C^2 mide sobre qué número de celdas se esparcirá el choque. En nuestra implementación, utilizamos $C^2 \sim 2$. La extensión hacia las otras coordenadas es directa.

Por último, añadir el trabajo de esta *pseudo presión* en la ecuación de la energía es totalmente análogo al trabajo de la presión térmica:

$$\partial_t e = -q_x \nabla \cdot \vec{v} - q_y \nabla \cdot \vec{v} - q_z \nabla \cdot \vec{v}. \quad (3.57)$$

La inclusión de esta viscosidad artificial asegura que se satisfagan las relaciones de Rankine - Hugoniot³ en torno al choque, por lo que la física estará correctamente resuelta, como así también la velocidad del choque. Sin embargo, la extensión del choque será finita (Stone *et al.*, 1992), por lo que estudiar su estructura detallada no es posible.

A pesar de todas estas consideraciones realizadas, en los problemas que estudiamos a lo largo de este trabajo, nunca fue vista una diferencia significativa al activar o desactivar esta viscosidad.

³Relaciones entre estados a izquierda y derecha en un choque. Son expresiones análogas a la conservación de la masa, la energía y el momento a través de un choque.

3.11.2. Conservación del momento

En esta sección mostraremos que el momento se conserva en ausencia de fuerzas externas, aunque consideremos la presión P como un término fuente.

Asumiendo un problema monodimensional, durante el paso de fuentes se tiene que:

$$v_{y_j}^{n+1} = v_{y_j}^n - \frac{2\Delta t}{\rho_{j+1}^n + \rho_j^n} \frac{P_{j+1}^n - P_j^n}{y_{j+1} - y_j}. \quad (3.58)$$

Definiendo el momento como $M_j = v_{y_j} < \rho > \equiv v_{y_j} (\rho_{j+1} + \rho_j)/2$, lo cual es una cantidad definida en la interface de la celda, el momento total del dominio en el tiempo avanzado será:

$$\mathcal{M}^{n+1} = \sum_{j=0}^{N-1} M_j (y_{j+1} - y_j), \quad (3.59)$$

que puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{n+1} &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} v_{y_j}^{n+1} (\rho_{j+1}^{n+1} + \rho_j^{n+1}) (y_{j+1} - y_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left[v_{y_j}^n - \frac{2\Delta t}{\rho_{j+1}^n + \rho_j^n} \frac{P_{j+1}^n - P_j^n}{y_{j+1} - y_j} \right] (\rho_{j+1}^n + \rho_j^n) (y_{j+1} - y_j) \\ &= \mathcal{M}^n - \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} (P_{j+1}^n - P_j^n) \\ &= \mathcal{M}^n - \Delta t (P_{N+1}^n - P_0^n). \end{aligned}$$

Por lo tanto el momento lineal se conservará en caso de que las condiciones de borde lo permitan. En el caso periódico, esto se satisface idénticamente. El único requisito para esta demostración fue el hecho de que la presión es una cantidad centrada y que la densidad aparece en el denominador, por lo que el resultado encontrado aplica para cualquier fuerza conservativa que se derive de un campo escalar centrado y se dividida por la densidad. La consecuencia del análisis realizado es que el momento angular (en el caso cilíndrico y esférico) se conservará a precisión de máquina durante la etapa de adición de términos fuente, ya que la actualización de la velocidad no incluye términos fuente distintos a los aquí tratados. Otra consecuencia es que en coordenadas cartesianas, el momento lineal se conservará en todas las direcciones.

Notar que este resultado, sumado a la conservación del momento en la advección conservativa (ver sección 3.10), asegura la conservación del momento angular a precisión de máquina.

Es importante notar que la conservación del momento implica que las condiciones de Rankine-Hugoniot se satisfagan en el caso isoterma, por lo que los

choques son correctamente descriptos con esta implementación (véase arriba).

3.12. Transportando las cantidades

En la sección 3.8 vimos que para resolver las ecuaciones de la hidrodinámica hay que resolver la ecuación de advección con términos fuente. La parte referida a las fuentes fue tratada en la sección anterior. Aquí, se verá en detalle como deben tratarse la etapa denominada de *transporte*.

Nos interesa resolver la ecuación:

$$\partial_t Q + \nabla \cdot (Q\vec{v}) = 0, \quad (3.60)$$

lo cual es una ecuación de conservación. La forma integral de esta ecuación es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{\mathcal{V}} Q d\mathcal{V} + \int \int_{\partial\mathcal{V}} Q\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3.61)$$

donde asumimos que el volumen de control no tiene una dependencia explícita con el tiempo y hemos utilizado el teorema de la divergencia de Gauss. Una forma en la que suele enunciarse (3.61) es que la variación de Q dentro del volumen V está dada por el flujo de esa cantidad a través de la superficie que rodea a dicho volumen, es decir, la cantidad Q no se crea ni desaparece, sino que viene o va hacia algún lugar.

En diferencias finitas, esta ecuación es:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{ijk}^{n+1} - Q_{ijk}^n}{\Delta t} \mathcal{V} = & - \left[\mathcal{F}_{X_{i+\frac{1}{2}jk}} - \mathcal{F}_{X_{i-\frac{1}{2}jk}} \right. \\ & + \mathcal{F}_{Y_{ij+\frac{1}{2}k}} - \mathcal{F}_{Y_{ij-\frac{1}{2}k}} \\ & \left. + \mathcal{F}_{Z_{ijk+\frac{1}{2}}} - \mathcal{F}_{Z_{ijk-\frac{1}{2}}} \right]^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde \mathcal{V} es el volumen de la celda y \mathcal{F} es el flujo de Q a través de la cara de la celda. Los flujos se definen como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{X_{ij+\frac{1}{2}k}}^{n+1/2} &= [v_X QS]_{ij+\frac{1}{2}k}^{n+1/2} \\ \mathcal{F}_{Y_{ij+\frac{1}{2}k}}^{n+1/2} &= [v_Y QS]_{ij+\frac{1}{2}k}^{n+1/2} \\ \mathcal{F}_{Z_{ijk+\frac{1}{2}}}^{n+1/2} &= [v_Z QS]_{ijk+\frac{1}{2}}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

En el caso de advección multidimensional, el problema puede separarse en tres problemas de advección monodimensionales a lo largo de cada eje. Así, pue-

de realizarse una actualización parcial de las cantidad Q:

$$\left[Q_{ijk}^{n+a} - Q_{ijk}^n \right] \mathcal{V}_{ijk} = -\Delta t \left[\mathcal{F}_{X_{i+\frac{1}{2}jk}} - \mathcal{F}_{X_{i-\frac{1}{2}jk}} \right]^{n+1/2} \quad (3.64)$$

$$\left[Q_{ijk}^{n+b} - Q_{ijk}^{n+a} \right] \mathcal{V}_{ijk} = -\Delta t \left[\mathcal{F}_{Y_{ij+\frac{1}{2}k}} - \mathcal{F}_{Y_{ij-\frac{1}{2}k}} \right]^{n+1/2} \quad (3.65)$$

$$\left[Q_{ijk}^{n+1} - Q_{ijk}^{n+b} \right] \mathcal{V}_{ijk} = -\Delta t \left[\mathcal{F}_{Z_{ijk+\frac{1}{2}}} - \mathcal{F}_{Z_{ijk-\frac{1}{2}}} \right]^{n+1/2}. \quad (3.66)$$

Es importante notar que los flujos en la expresión anterior están evaluados en pasos intermedios, llamados a, b y c . Así, la ecuación (3.65) permite obtener Q en el paso de tiempo intermedio $n + a$, y de la misma forma, la (3.66), permite obtener Q en el tiempo $n + b$ a partir del estado parcial anterior. Al final de la advección en la tercer dimensión, se tiene una representación de la cantidad Q luego del transporte completo.

En principio, la solución depende del orden en el cual se realizan los pasos intermedios anteriores, lo cual es una característica de este tipo de esquema numérico (Stone y Norman, 1992a), aunque no se espera un cambio en la física resuelta.

En la práctica, el cálculo del flujo se hace utilizando un método *upwind* (corriente arriba en español), el cual permite estimar el valor de la cantidad Q en la interface donde debe ser computado el flujo. A diferencia de un método de *Riemann*, el cual calcula los flujos a través de un problema de *Riemann* local, nosotros utilizamos el hecho de tener un campo de velocidad alternado y asumimos, al igual que Stone y Norman (1992a), que la cantidad Q se advecta sobre una sola característica⁴ a velocidad v , la cual coincide con la velocidad en la interface en el tiempo t^n . La Fig. 3.7 y su leyenda, complementan esta explicación.

En otras palabras, el flujo puede ser expresado como:

$$\mathcal{F}_{X_{i+1/2jk}}^{n+1/2} = v_{X_{i+1/2jk}}^n Q_{i+1/2jk}^{*x} \mathcal{S}_{i+1/2jk}, \quad (3.67)$$

donde el subíndice X representa la dirección normal a la cara de la celda por la cual fluye Q y $Q_{i+1/2}^{*x}$ es el valor de Q interpolado en x hacia la posición de la cara $i + 1/2$ en la mitad del paso de tiempo, extrapolado temporalmente utilizando la propagación a lo largo de la característica v .

Para encontrar su valor, es necesario encontrar el lugar preciso de donde proviene el campo $Q^{n+1/2}$. En otras palabras, es necesario encontrar la posición x^* tal que:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x^* + v_{X_{i+\frac{1}{2}}}^n \frac{\Delta t}{2} \quad (3.68)$$

Así, el valor final de Q^{*x} vendrá dado por una adecuada representación de $Q(x_*)$, lo cual es función exclusivamente de las variables en el tiempo n . Ya que esta cantidad en general no pertenece a la discretización efectuada, una interpo-

⁴Dirección de propagación de la señal en un diagrama espacio-tiempo

3.12.2. Método de van Leer

El método de **van Leer (1977)** consiste en encontrar la cantidad Q^* con una interpolación lineal de la forma:

$$Q_{i+1/2}^{*x} = \begin{cases} Q_i + a_i (\Delta X_i - v_{xi+1/2} \Delta t) / 2 & \text{si } v_{xi+1/2} \geq 0 \\ Q_{i+1} - a_{i+1} (\Delta X_i + v_{xi+1/2} \Delta t) / 2 & \text{si } v_{xi+1/2} < 0, \end{cases}$$

donde a_i son las pendientes de van Leer, dadas por:

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta Q_{i+1/2} \Delta Q_{i-1/2} < 0 \\ 2 \frac{\Delta Q_{i+1/2} \Delta Q_{i-1/2}}{\Delta Q_{i+1/2} + \Delta Q_{i-1/2}} & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\text{con } \Delta Q_{i+1/2} = \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta X_i}.$$

Esta es la reconstrucción que utilizamos para la mayoría de los pasos. Sin embargo, para parte del transporte acimutal decidimos incrementar el orden, utilizando el método PPA, a fin de ganar en precisión y disminuir la difusión en problemas dominados rotación, como son los discos de acreción.

3.12.3. Método PPA

El método PPA o método de advección parabólica, se basa en las mismas ideas discutidas anteriormente, pero la interpolación en vez de ser lineal es parabólica. Cuando el espaciamiento de la malla es uniforme, los cálculos se simplifican notablemente respecto del caso general, además de verse reducido el costo computacional. Los valores de Q se obtienen como:

$$Q_{i+1/2}^{*x} = \begin{cases} Q_{R,i} + \xi (Q_i - Q_{R,i}) \\ + \xi (1 - \xi) (2Q_i - Q_{R,i} - Q_{L,i}) & \text{si } v_{xi+1/2} \geq 0 \\ Q_{L,i+1} + \xi (Q_{i+1} - Q_{L,i+1}) \\ + \xi (1 - \xi) (2Q_{i+1} - Q_{R,i+1} - Q_{L,i+1}) & \text{si } v_{xi+1/2} < 0 \end{cases}$$

donde $\xi = v_{i+1/2} \Delta t / \Delta x$, y $Q_{L/R}$ son los valores a izquierda y derecha (monotonizados) de Q , que se calculan como:

Con $\delta Q_i = (Q_{i+1} - Q_{i-1}) / 2$, se definen las pendientes monotinizadas centradas sobre cada celda:

$$\delta_m Q_i = \begin{cases} 0 & \text{si } (Q_{i+1} - Q_i)(Q_i - Q_{i-1}) \leq 0 \\ \text{mín}(2|Q_i - Q_{i-1}|, 2|Q_{i+1} - Q_i|, |\delta Q_i|) \times \text{sgn}(\delta Q_i) & \text{c.c.,} \end{cases}$$

Este procedimiento corresponde al mismo realizado por **Colella y Woodward (1984)** con un tamaño de celda uniforme en la dirección deseada. En una segunda etapa, la interpolación parabólica es utilizada para reconstruir la cantidad en las

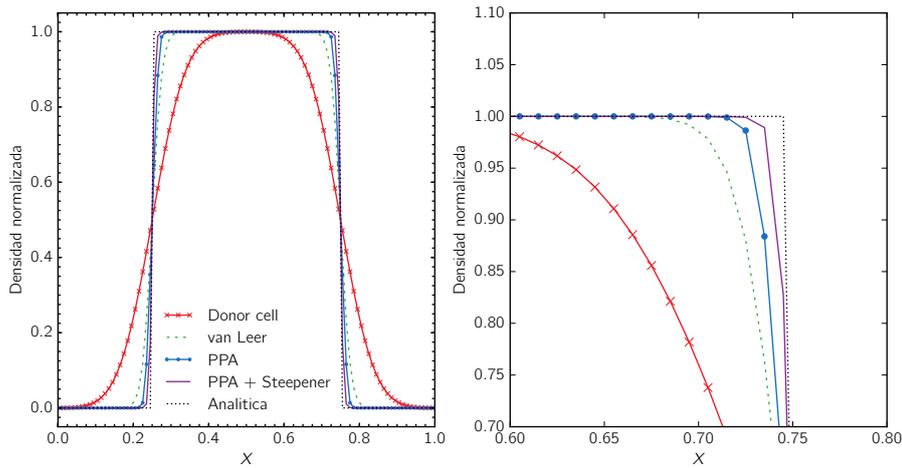


Figura 3.8: Advección pura de un perfil monodimensional cuadrado. Puede verse como la difusión numérica disminuye a medida que se incluyen reconstructores de mayor orden. La condición de contorno es periódica y se muestra el resultado de la advección luego de una unidad de tiempo. La simulación se realizó con 100 celdas uniformemente espaciadas. Comparamos los métodos de Donor cell, van Leer y PPA. El método PPA es el mejor de todos, sin embargo el método de van Leer presenta un parecido muy bueno a menor costo computacional.

interfaces:

$$Q_{i+1}^L = Q_i^R = Q_i + \frac{1}{2}(Q_{i+1} - Q_i) - \frac{1}{6}(\delta_m Q_{i+1} - \delta_m Q_i), \quad (3.69)$$

y unas comprobaciones finales son necesarias para remover la existencia de posibles extremos que se hayan creado con el método:

$$\begin{cases} Q_i^L = Q_i^R = Q_i & \text{si } (Q_{i+1} - Q_i)(Q_i - Q_{i-1}) \leq 0 \\ Q_i^L = 3Q_i - 2Q_i^R & \text{si } \Delta_i C_i > \Delta_i^2/6 \\ Q_i^R = 3Q_i - 2Q_i^L & \text{si } -\Delta_i^2/6 > \Delta_i C_i, \end{cases}$$

dónde $\Delta_i = Q_i^R - Q_i^L$ y $C_i = Q_i - (Q_i^L + Q_i^R)/2$. La utilización de este método requiere más celdas adicionales que el método de van Leer presentado en la sección anterior.

En nuestra implementación, lo utilizamos de forma exclusiva para el avance de la velocidad residual fraccionaria durante el paso de advección orbital (ver sección 3.17.5), de la misma forma que se hace en el trabajo de [Mignone et al. \(2012\)](#).

También hemos utilizado la versión *steepened* del método PPA, como es descrito en [Colella y Woodward \(1984\)](#), (ecuaciones 1.15 a 1.17). Este método no es adecuado para discos Keplerianos, donde se observa la aparición de vórtices de pequeña escala.

3.12.4. Transporte consistente

[Norman et al. \(1980\)](#) señalaron que transportar cantidades, como por ejemplo

el momento angular, de forma desacoplada al flujo de masa, conduce a inconsistencias, las cuales producen soluciones erróneas (ver Norman, 1980; Stone y Norman, 1992a). Este problema puede solucionarse fácilmente si el flujo de momento angular se calcula por medio del flujo de masa. Para esto, hay que obtener una estimación del flujo de momento angular específico, para luego multiplicarlo por el flujo neto de masa. De esta forma, se obtiene *consistencia* entre ambos flujos.

En nuestra implementación utilizamos la noción de transporte consistente para todas las cantidades transportadas. Esta se lleva a cabo dividiendo a todas las cantidades por la densidad, antes de evaluar su valor utilizando los métodos *upwind* descritos anteriormente.

3.12.5. Advección del momento

Es importante notar que toda la discusión realizada anteriormente asume que la cantidad que se interpola sobre la interface es Q , la cual es una cantidad centrada. Por lo tanto, hay dos formas posibles para transportar el momento: o bien interpolarlo hacia el centro de una celda y transportarlo como se hizo anteriormente, o bien desarrollar un método alternativo para esta cantidad. Aquí optamos por la segunda opción.

En coordenadas cartesianas, transportamos las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned}\Pi_i^- &= \rho_i v_i \\ \Pi_i^+ &= \rho_i v_{i+1},\end{aligned}\tag{3.70}$$

las cuales están asociadas con el momento a izquierda y el momento a derecha de una celda en particular (lo mismo debe hacerse para el resto de las direcciones), y *declaramos* a estas cantidades como centradas en la celda, por lo que podemos aplicar sobre ellas todo el mecanismo de transporte ya desarrollado.

Una vez concluido el transporte, la velocidad actualizada se calcula como:

$$v_i^{n+1} = \frac{\Pi_{i-1}^{+n+1} + \Pi_i^{-n+1}}{\rho_{i-1}^{n+1} + \rho_i^{n+1}},\tag{3.71}$$

Notar que esta definición es consistente en el sentido que si aplicamos las definiciones (3.70) a las cantidades sin transportar, recuperamos la velocidad original:

$$\begin{aligned}v_i^n &= \frac{\Pi_{i-1}^{+n} + \Pi_i^{-n}}{\rho_{i-1}^n + \rho_i^n} \\ &= \frac{\rho_{i-1}^n v_i^n + \rho_i^n v_i^n}{\rho_{i-1}^n + \rho_i^n} \\ &= \frac{\rho_{i-1}^n + \rho_i^n}{\rho_{i-1}^n + \rho_i^n} v_i^n = v_i^n\end{aligned}\tag{3.72}$$

En los otros sistemas de coordenadas, transportamos los momentos como ya han sido definidos en la sección 3.10, los cuales incluimos aquí por completitud:

Coordenadas cilíndricas:

- Momento en X:

$$\begin{aligned}\Pi_{x_{ijk}}^- &= \rho_{ijk} y_j (v_{x_{ijk}} + \Omega y_j) \\ \Pi_{x_{ijk}}^+ &= \rho_{ijk} y_j (v_{x_{i+1jk}} + \Omega y_j),\end{aligned}$$

- Momento en Y:

$$\begin{aligned}\Pi_{y_{ijk}}^- &= \rho_{ijk} v_{y_{ijk}} \\ \Pi_{y_{ijk}}^+ &= \rho_{ijk} v_{y_{ij+1k}},\end{aligned}$$

- Momento en Z:

$$\begin{aligned}\Pi_{z_{ijk}}^- &= \rho_{ijk} v_{z_{ijk}} \\ \Pi_{z_{ijk}}^+ &= \rho_{ijk} v_{z_{ijk+1}},\end{aligned}$$

Coordenadas esféricas:

- Momento en X:

$$\begin{aligned}\Pi_{x_{ijk}}^- &= \rho_{ijk} y_j \sin \theta_k (v_{x_{ijk}} + y_j \sin \theta_k \Omega) \\ \Pi_{x_{ijk}}^+ &= \rho_{ijk} y_j \sin \theta_k (v_{x_{i+1jk}} + y_j \sin \theta_k \Omega),\end{aligned}$$

- Momento en Y:

$$\begin{aligned}\Pi_{y_{ijk}}^- &= \rho_{ijk} v_{y_{ijk}} \\ \Pi_{y_{ijk}}^+ &= \rho_{ijk} v_{y_{ij+1k}},\end{aligned}$$

- Momento en Z:

$$\begin{aligned}\Pi_{z_{ijk}}^- &= \rho_{ijk} y_j v_{z_{ijk}} \\ \Pi_{z_{ijk}}^+ &= \rho_{ijk} y_j v_{z_{ijk+1}},\end{aligned}$$

Como ya fue discutido con anterioridad, durante el transporte se conservan las cantidades Π^+ y Π^- , por lo que su promedio aritmético también se conserva:

$$M_i = \frac{\Pi_i^+ + \Pi_i^-}{2} = \rho_i \frac{v_i + v_{i+1}}{2} \quad (3.73)$$

lo cual es el momento *centrado* de la celda.

3.12.6. Velocidad del marco de referencia

La velocidad del marco de referencia debe ser actualizada de un paso de tiempo a otro. En nuestra implementación, ya que utilizamos la velocidad en el marco no inercial, calculamos variaciones en la velocidad angular como $\delta\Omega = \Omega^+ - \Omega^-$, donde Ω^+ es la nueva velocidad y Ω^- la anterior, y actualizamos la velocidad acimutal debido a este cambio en la velocidad de rotación:

$$v_{\phi}^+ = v_{\phi}^- - |\delta\vec{\Omega} \times \vec{r}|, \quad (3.74)$$

donde v_{ϕ}^+ es la velocidad en el nuevo marco de referencia, actualizada a partir de la velocidad original v_{ϕ}^- .

De esta definición vemos que si $\delta\Omega > 0$, es decir, el marco de referencia se acelera, la velocidad acimutal disminuye en valor absoluto.

Ya que la actualización es una operación axisimétrica, conserva el momento angular intacto.

3.13. Condición CFL

La solución explícita de las ecuaciones de la MHD implica ciertas restricciones sobre el paso de tiempo a utilizar. En general, éste debe ser limitado para asegurar la estabilidad de la solución.

La condición de estabilidad es conocida como *condición de Courant-Friedrichs-Levy* o simplemente condición CFL. Esta condición puede ser interpretada físicamente como que la información proveniente de una celda de la malla no puede atravesar más de una celda por un paso de tiempo.

El paso de tiempo deben ser determinado para cada tipo de proceso que ocurra dentro del problema, por lo que para cada proceso físico se deberá determinar un paso de tiempo que permita resolverlo de forma estable. En la práctica, este paso de tiempo se obtiene a partir de un análisis de estabilidad de von Neumann.

En nuestra implementación utilizamos el método sugerido por [Stone y Norman \(1992a\)](#), el cual puede ser escrito como:

$$\Delta t = C \min \left\{ \left(\sum_i \Delta t_i^{-2} \right)^{-1/2} \right\}, \quad (3.75)$$

donde C es un parámetro real, menor que la unidad, llamado número de Courant. El mínimo debe calcularse sobre todo el dominio hidrodinámico. Nosotros adoptamos $C=0.44$ como un valor que mantiene un buen compromiso entre longitud del paso de tiempo y estabilidad para los problemas de interés.

Los diferentes Δt_i corresponden al límite del paso de tiempo permitido por diferentes procesos físicos, los cuales limitan de forma individual el paso de tiempo global. Aquí incluimos una lista de los posibles procesos físicos que aparecen

dentro de nuestra implementación.

En la siguiente lista, el índice j representa cada dirección de la malla ($xyz, \varphi r z, \varphi r \theta$), o un subconjunto de ellas en dimensiones menores. En el caso multidimensional, se tiene que $\Delta t_i = \min_j \{\Delta t_{i,j}\}$.

Los límites en el paso de tiempo se deben a:

1. Ondas de sonido o magnetosónicas: $\Delta t_1 = \Delta_j / C_w$, donde C_w es la velocidad máxima de las ondas que se pueden propagar en el medio. En el caso MHD, esta es la onda magnetosónica rápida $C_w^2 = C_s^2 + v_A^2$, donde C_s es la velocidad del sonido en el medio y v_A es la velocidad de Alfvén, definida como $v_A^2 = B^2 / (\mu_0 \rho)$. En el caso hidrodinámico puro $C_w = C_s$.
2. Movimiento del fluido: $\Delta t_2 = \Delta_j / |V_j|$.
3. Viscosidad artificial: $\Delta t_3 = C_2 |\Delta_j / \Delta v_j|$, donde elegimos el valor $C_2 = 4\sqrt{2}$. Δv_j es la diferencia entre los valores adyacentes en la celda a lo largo de la dirección j (e.g. $\Delta v_x = v_{xi+1/2} - v_{xi-1/2}$).
4. Viscosidad: $\Delta t_4 = \Delta_j^2 / (4\nu)$, con ν la viscosidad cinemática.
5. Resistividad: $\Delta t_5 = \Delta_j^2 / (4\eta)$, con η la resistividad.

En la práctica, cada nuevo módulo físico que se agregue al código deberá incluir su correspondiente restricción en el criterio CFL.

3.14. Integrador orbital

Ya que el código FARGO3D fue escrito principalmente para el tratamiento de problemas relacionados con planetas en órbita, incluye un integrador orbital, con la posibilidad de simular un sistema de n cuerpos.

Para avanzar los sistemas planetarios, utilizamos un integrador de orden 5, conocido como el método de Cash-Karp (Cash y Karp, 1990). Este integrador se basa en un método de Runge-Kutta con paso de tiempo fijo, el cual está gobernado por la condición CFL. Ya que la elección del paso de tiempo está desacoplada de la interacción gravitatoria entre los cuerpos (o de la aceleración intrínseca de cada uno de ellos), este método no puede ser adecuado para el tratamiento de encuentros cercanos entre cuerpos, y en general la solución obtenida para esta clase de casos no será buena.

Sin embargo, este integrador, y las soluciones alcanzadas, serán suficientemente buenas para planetas suficientemente aislados, en los cuales las interacciones de corto alcance no sean dominantes.

De todos modos, en caso de ser necesaria una mayor precisión durante un encuentro cercano, se puede realizar un refinamiento del paso de tiempo, desacoplado de la condición CFL, para capturar de forma más adecuada las interacciones gravitatorias entre los cuerpos.

Tabla 3.1: Tabla de Butcher para el método de Cash-Karp.

0						
1/5	1/5					
3/10	3/40	9/40				
3/5	3/10	-9/10	6/5			
1	-11/54	5/2	-70/27	35/27		
7/8	1631/55296	175/512	575/13824	44275/110592	253/4096	
	37/378	0	250/621	125/594	0	512/1771

El módulo de integración orbital está prácticamente desacoplado del resto del código, por lo que en caso de ser necesario, fácilmente se puede implementar otro integrador.

Debajo detallamos el algoritmo utilizado para la construcción del integrador orbital. La ecuación diferencial que dicta la evolución del sistema puede ser escrita como:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y}), \quad (3.76)$$

donde \vec{y} es el vector de $6N$ componentes (N planetas con tres componentes de velocidad y tres de posición). La solución aproximada al problema utilizando el método de Cash-Karp es:

$$\vec{y}^{n+1} = \vec{y}^n + h \sum_i^6 b_i \vec{k}_i \quad (3.77)$$

con $\vec{k}_i = \vec{f}\left(t_n + c_i h, \vec{y}^n + h \sum_{j=1}^6 a_{ij} \vec{k}_j\right)$, donde los coeficientes pueden encontrarse en la tabla (3.1).

La fuerza ejercida por el gas sobre los planetas es evaluada una vez por paso de tiempo hidrodinámico, y es utilizada para actualizar las velocidades de los planetas. Esta es evaluada de dos formas:

- Por suma directa de la fuerza ejercida sobre todas las celdas
- Removiendo antes de la suma, la parte axisimétrica de la densidad, obtenida luego de un promedio acimutal. Detalles sobre este punto pueden verse en la sección 7.3.4.

3.15. Suavizado de perfiles

Para algunos cálculos se hace necesaria la inclusión de funciones de corte, o suavizado. En nuestra implementación utilizamos esta clase de funciones en dos circunstancias:

1. Crecimiento suave de la masa planetaria a fin de evitar perturbaciones fuertes inicialmente.

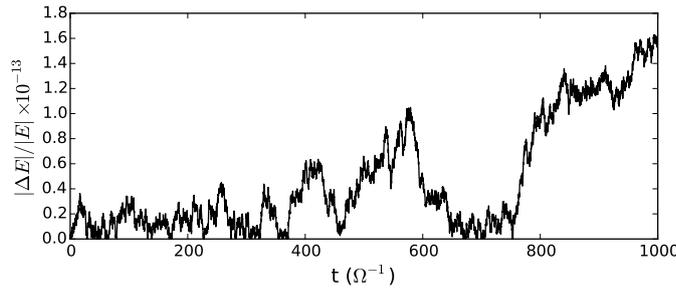


Figura 3.9: Rendimiento del integrador orbital para un paso de tiempo $\Delta t = 10^{-3}\Omega^{-1}$. Este es el orden de magnitud del paso de tiempo devuelto por la condición CFL para resoluciones moderadas ($\sim 512^2$) y una extensión radial que incluya las resonancias de movimientos medios 1:2,2:1 con el planeta. Puede verse que el error relativo cometido es bastante bajo, por lo que es esperable una solución razonablemente buena para el problema orbital, sobre todo si la variación de energía debida a los torques del disco es órdenes de magnitud más grande.

2. Exclusión de la fuerza gravitatoria de una determinada región alrededor del planeta, conocida como radio de Hill o lóbulo de Roche.

En todos los casos decidimos utilizar funciones trigonométricas que unieran los estados inicial y final de forma suave y con derivada continua nula.

El primero de los items anteriores es importante en el sentido de que permite obtener resultados bastante más limpios sin necesidad de esperar a que las fuerzas disipativas, como la viscosidad, suavicen las perturbaciones transitorias generadas por un planeta masivo. Para minimizar este efecto, utilizamos una función de la forma:

$$M_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi t}{\tau_m}\right) \right] & \text{si } t < \tau_m \\ 1 & \text{si } t \geq \tau_m \end{cases}$$

El segundo de los items es importante cuando la masa del disco circumplanetario es significativa y no es considerada la autogravedad. En estos casos, aparece una discrepancia entre la fuerza neta que debería sentir el sistema planeta+disco circumplanetario, los cuales son un sistema ligado, y la que realmente siente. Así, este es un problema de inconsistencia en el tratamiento de las fuerzas.

Para mitigar esta discrepancia sin necesidad de utilizar autogravedad, una función de corte debe aplicarse en torno al planeta, que limite la fuerza que hace el gas que forma parte del disco circumplanetario sobre el mismo planeta (Crida *et al.*, 2009). Se calcula que excluir la masa contenida dentro de $\sim 0,5r_H$, con r_H el radio de Hill del planeta⁵, permite obtener resultados satisfactorios. En nuestra

⁵Definido como $r_H = r_p (m_p/3M_*)^{1/3}$

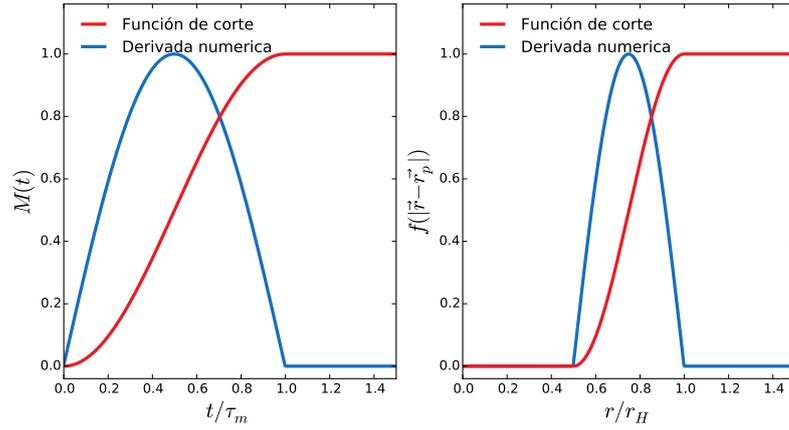


Figura 3.10: Gráfico de las funciones de suavizado o corte utilizadas en nuestra implementación. En rojo se ve la gráfica de la función y en azul se observa la derivada numérica de dicha función. Puede verse que ambas tienen derivada bien definida en todo el intervalo, es decir, son funciones suaves.

implementación, la función de corte utilizada es:

$$f(|\vec{r} - \vec{r}_p|) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\vec{r} - \vec{r}_p| < r_H/2 \\ \sin^2 \left[\pi \left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}_p|}{r_H} - \frac{1}{2} \right) \right] & \text{si } r_H/2 \leq |\vec{r} - \vec{r}_p| < r_H \\ 1 & \text{si } r_H/2 \leq |\vec{r} - \vec{r}_p| \leq r_H \end{cases}$$

con r_p es la posición del planeta.

En la Fig. 3.10 puede verse la forma de las funciones de corte utilizadas, con su derivada numérica incluida. En ambos casos se ve que las funciones utilizadas son suaves y derivables en todo el dominio. En la Fig. 3.11 se observa una comparación entre dos simulaciones de un planeta embebido en un disco de gas. En el panel de la izquierda se coloca al planeta con su masa final, igual a la masa de Júpiter, como condición inicial, mientras que en el panel de la derecha vemos lo mismo pero con un planeta que aumenta su masa gradualmente.

3.16. Algoritmo FARGO y advección orbital

En esta sección presentaremos un algoritmo que permite incrementar de forma significativa el paso de tiempo en una simulación hidrodinámica de un disco protoplanetario.

Durante la fase de transporte, se presentan dos problemas importantes:

1. Una velocidad de fondo uniforme y grande, sobre la cual se pueden desarrollar perturbaciones, limita el paso de tiempo permitido de forma considerable (ver sección 3.13).

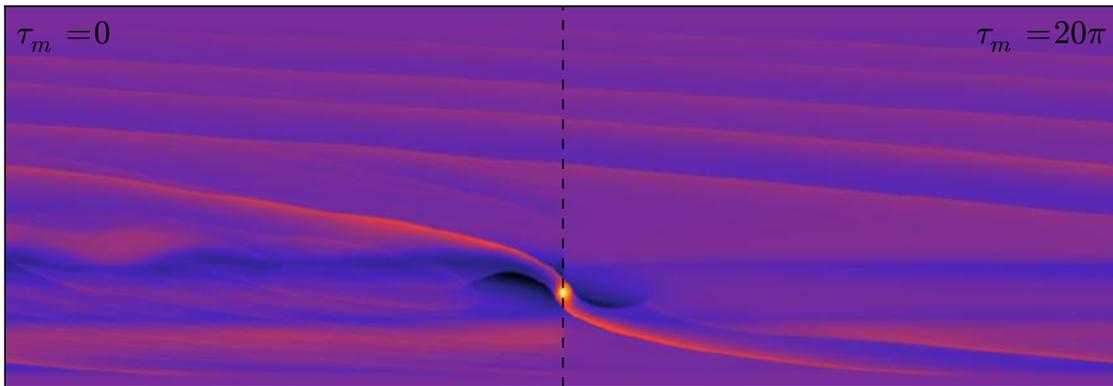


Figura 3.11: Simulación de un planeta de masa igual a la masa de Júpiter en un disco de gas. En la mitad izquierda se observa una simulación en la que el planeta es depositado instantáneamente en el disco. En la mitad derecha, se observa una imagen en el mismo instante de tiempo ($t = 20\pi\Omega^{-1} = 10$ órbitas) pero con un crecimiento suave de la masa. Las diferencias son importantes, siendo mucho más limpia la simulación en la que la masa crece suavemente.

2. Los errores de truncamiento dependen del marco de referencia (Robertson *et al.*, 2010).

El primer problema, radica en el hecho de que el criterio CFL presenta una condición de la forma $\Delta t < \Delta/|V + C_s|$, lo cual es un requisito para evitar que ondas propagándose en el medio a la velocidad del fluido atraviesen más de una celda en un paso de tiempo, lo cual parece inevitable si no estamos en un marco de referencia comovil con el fluido.

El segundo problema guarda una relación con el primero. Los errores numéricos que se producen al resolver las ecuaciones, dependen del número de actualizaciones que se realizan. Así, de dos simulaciones con un paso de tiempo diferente, la que tenga el paso más pequeño realizará un número mayor de actualizaciones para llegar a un tiempo determinado.

En la Fig. 3.12 se muestra un ejemplo de los problemas mencionados. La simulación corresponde con el desarrollo de una inestabilidad conocida como inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (ver capítulo 4 para detalles). En el panel *a*, se muestra el perfil de densidad a un cierto tiempo. La simulación para este caso se realizó en una caja en reposo respecto del observador. En el panel *b*, se muestra la misma simulación, en el mismo instante de tiempo, pero realizada en una caja con una gran velocidad hacia la derecha. El tiempo necesario para resolver el panel *b* fue muy superior al necesario para el *a*. De hecho, si la velocidad de fondo tiende a infinito, el tiempo de integración también lo hará, ya que el paso de tiempo tiende a cero. Además, se observa el reconocible efecto de los errores de truncamiento, expresados en forma de difusión numérica. Claramente existe una diferencia en la calidad de los detalles entre el panel *a* y *b*, aún cuando el sistema físico es el mismo.

Masset (2000) mostró que ambos problemas pueden ser resueltos de forma

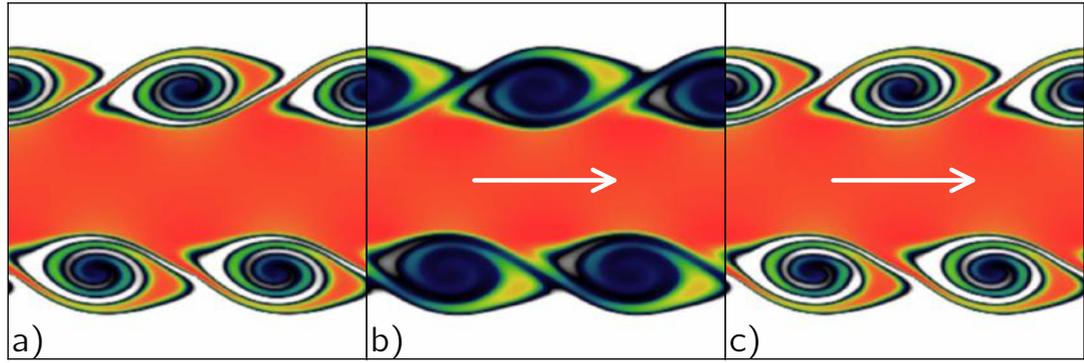


Figura 3.12: Simulación de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz para el caso de una caja en reposo (a), una caja en movimiento hacia la derecha a una gran velocidad (b), y la misma simulación b, pero utilizando el algoritmo de advección orbital FARGO (c). Los errores de truncamiento, traducidos en difusión numérica, son evidentes en la simulación (b).

muy sencilla si se descompone a la velocidad en una parte uniforme, llamada velocidad de fondo, y una velocidad residual.

Para simplificar la presentación del método, consideremos la ecuación de advección monodimensional a lo largo de la dirección x :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Qv)}{\partial x} = 0, \quad (3.78)$$

donde v es la velocidad del fluido. Realicemos la descomposición de v en dos términos, de la forma:

$$v(x) = v^0 + \delta v(x), \quad (3.79)$$

donde $\delta v(x)$ es todo apartamiento de v respecto de v^0 , la cual asumimos como constante⁶. Con esta descomposición (3.78) puede ser escrita como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + v^0 \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial(Q\delta v)}{\partial x} = 0. \quad (3.80)$$

Utilizando la técnica del operador splitting (ver sección 3.8), es posible resolver (3.80) en dos pasos:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + v^0 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q\delta v)}{\partial x} = 0. \quad (3.82)$$

La ecuación (3.82) se resuelve utilizando los métodos vistos anteriormente para advección no lineal (ver sección 3.12). La ecuación (3.82) es una ecuación de

⁶Notar que esto no es una elección particular.

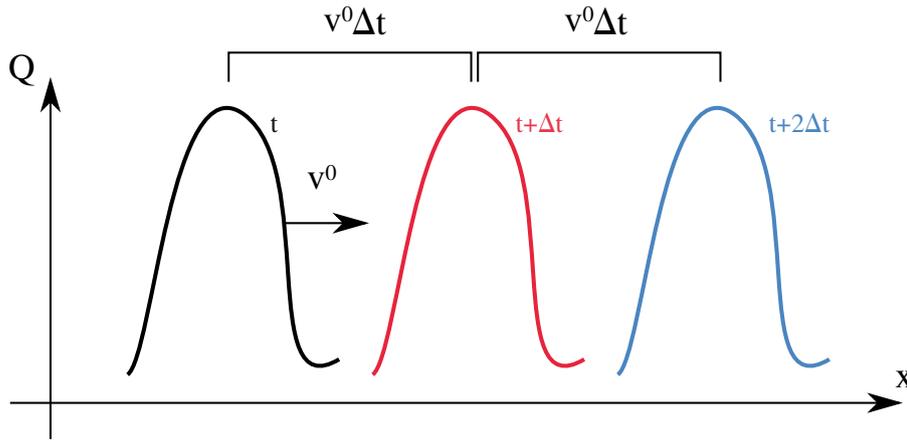


Figura 3.13: Esquema de advección lineal, en el cual un perfil inicial se propaga de forma inalterada una cantidad $v^0\Delta t$.

advección con velocidad constante, la cual tiene solución analítica exacta:

$$Q(x, t + \Delta t) = Q(x - v^0\Delta t, t), \quad (3.83)$$

lo cual significa que la cantidad Q avanzada en el tiempo es Q en el tiempo anterior, pero en otra posición. Es decir, para avanzar la cantidad Q en el tiempo, alcanza con realizar un simple corrimiento de ésta en el espacio (ver Fig. 3.13).

En la práctica, la cantidad $v^0\Delta t$ no es una cantidad entera de celdas, por lo que el corrimiento debe hacerse en dos partes. Primero, se determina el número entero de celdas que hay que desplazar la solución:

$$N = \text{parte entera de} \left(\frac{v^0\Delta t}{\Delta x} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.84)$$

lo cual es el entero más próximo al número continuo de celdas a desplazar. La velocidad asociada a este desplazamiento es:

$$v_{\text{shift}} = \frac{N\Delta x}{\Delta t} \quad (3.85)$$

Así, la solución para Q debido al corrimiento será:

$$Q_i^{n+1} = Q^n(x_i - v_{\text{shift}}\Delta t) = Q^n(x_i - N\Delta x) = Q_{i-N}^n, \quad (3.86)$$

lo cual si Q es periódico, corresponde con una simple permutación.

Luego, se define la velocidad residual como:

$$\delta v_{\text{shift}} = v^0 - v_{\text{shift}} = v^0 - N \frac{\Delta X}{\Delta t}, \quad (3.87)$$

y se resuelve

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q\delta v_{\text{shift}})}{\partial x} = 0, \quad (3.88)$$

utilizando los métodos de advección ya presentados.

Hasta aquí parecería que no se ganó nada. Sin embargo, hay que observar que el corrimiento del perfil se hace de forma exacta, por lo que no se introducen errores numéricos.

La única fuente de error en este algoritmo proviene de los pasos de advección no constante. Por otro lado, y lo más importante, es que hacer un simple corrimiento no requiere condición de estabilidad alguna.

Por este motivo, ya que la velocidad de fondo era la velocidad dominante en el problema, luego de la descomposición y advección lineal, la velocidad que debe ser considerada para el criterio CFL es más pequeña. Por construcción, $\delta v_{\text{shift}}\Delta t < 1/2$, por lo esta velocidad tampoco debe ser tenida en cuenta para el criterio de estabilidad.

Por lo tanto, la velocidad que se utiliza para evaluar la condición de estabilidad es δv , la cual en la mayoría de los casos prácticos es mucho menor que v . En el panel *c* de la Fig. 3.12 puede verse la ganancia con este método.

En particular, en el caso planetario, v corresponde con la velocidad acimutal, prácticamente Kepleriana. Dada la velocidad v , hay muchos métodos posibles para calcular v^0 . Matemáticamente, la solución óptima es la que minimiza la distancia máxima, dada por:

$$v_{jk}^0 = \frac{1}{2} [\max(v_{ijk}) - \min(v_{ijk})], \quad (3.89)$$

donde el máximo y el mínimo deben ser considerados sobre todo i para j, k fijos, con i, j, k los índices de la malla. Otra elección posible para la velocidad v^0 es el promedio aritmético de la v , el cual es el método que utilizan todas las implementaciones de este algoritmo hasta la fecha (Masset, 2000; Mignone *et al.*, 2012; Kley *et al.*, 2009; Stone y Gardiner, 2010)

$$v_{jk}^0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N v_{ijk}. \quad (3.90)$$

Por último, si el disco no está demasiado perturbado, adoptar la velocidad Kepleriana corregida por el gradiente de presión como v^0 también sería una posibilidad (ver ecuación 2.7).

3.16.1. Corrección al criterio CFL

En el caso de discos keplerianos delgados, en los que el número de Mach es muy grande, o dicho de otro modo, $h = c_s/v_K \ll 1$, la gran velocidad orbital es la que limita el paso de tiempo, por medio de la condición CFL. Por lo tanto, con la

técnica de advección orbital, el paso de tiempo puede incrementarse en un factor $h^{-1} \sim 10$ para perturbaciones pequeñas.

Sin embargo, una condición limitante adicional debe ser considerada a fin de mantener la consistencia entre celdas de anillos concéntricos vecinos. Esta condición consiste en evitar que dos celdas vecinas correspondientes a anillos contiguos se desconecten físicamente de un paso de tiempo al siguiente como motivo de una advección lineal descontrolada.

Una celda localizada a un radio r , por la advección, en un paso de tiempo se desplaza una cantidad angular $\delta\varphi(r) = v_\phi(r)\delta t/r$. Por lo tanto, la condición de que dos celdas vecinas radialmente se mantengan conectadas luego de un paso de tiempo es:

$$|\delta\varphi(r+dr) - \delta\varphi(r)| < \Delta\varphi, \quad (3.91)$$

con $\Delta\varphi$ la separación angular entre todas las celdas de la malla. En forma discreta, el criterio es:

$$\Delta t \left| \frac{v_{\phi j}}{r_j} - \frac{v_{\phi j+1}}{r_{j+1}} \right| < \Delta\varphi. \quad (3.92)$$

Por lo tanto, el criterio de conectividad entre celdas es:

$$\Delta t_f = C \left| \frac{v_{\phi j}}{\Delta\varphi r_j} - \frac{v_{\phi j+1}}{\Delta\varphi r_{j+1}} \right|^{-1}, \quad (3.93)$$

con C una constante menor que la unidad.

En un disco Kepleriano, la velocidad limitante luego de la implementación de la advección orbital es la velocidad del sonido, con paso de tiempo asociado $\Delta t_{c_s} = r\Delta\varphi/c_s$.

Veamos en que caso el paso de tiempo encontrado es inferior al límite impuesto por la velocidad del sonido. La ecuación (3.93) es equivalente a su versión diferencial, en la forma:

$$\Delta t_f = C \left| \frac{d\Omega(r)}{\Delta\varphi} \right|^{-1} = C \left| \frac{3\Omega}{2r\Delta\varphi} dr \right|^{-1}, \quad (3.94)$$

por lo tanto, para que el tiempo encontrado sea inferior al tiempo impuesto por la velocidad del sonido ($\Delta t_f < \Delta t_{c_s}$), debe satisfacerse:

$$\Delta r > \frac{2}{3}H, \quad (3.95)$$

lo cual, como se vio en el capítulo 2, es la escala de presión del disco, fundamental para el estudio de las resonancias de Lindblad. Así, esta longitud siempre deberá estar resuelta con un número suficiente de celdas. Por lo tanto, en los casos prácticos, esta condición no es un limitante para el paso de tiempo.

3.17. MagnetoHidrodinámica

En esta sección explicaremos los algoritmos utilizados para la implementación de la MHD.

Para evolucionar el campo magnético es necesario resolver la ecuación de inducción, aunque también debe considerarse el acople del campo magnético con el fluido a través de la Fuerza de Lorentz.

El primer requisito del método a utilizar es que debe mantener la divergencia del campo magnético nula durante todo el tiempo de integración. Hay muchos métodos que permiten esto, por ejemplo, resolviendo para el potencial vector A en vez del campo magnético en si mismo. Otro método popular es agregar una corrección luego de cada paso de tiempo (o cada algunos) que se encargue de limpiar los excesos de divergencia que pudieran crearse.

Nosotros adoptamos el *Método de características* (CT) desarrollado por [Evans y Hawley \(1988\)](#), el cual asegura que la divergencia del campo magnético se mantenga constante a precisión de máquina a lo largo del tiempo de integración.

Otra dificultad que surge al considerar el campo magnético es la existencia de una nueva familia de ondas a considerar. En efecto, el campo magnético es capaz de soportar ondas transversales incompresibles, las cuales son muy diferentes al caso hidrodinámico, en donde sólo existen las ondas compresivas.

Esta nueva familia de ondas podrían ser resueltas utilizando los mismos algoritmos que utilizamos para la hidrodinámica, sin embargo [Stone y Norman \(1992b\)](#) mostraron que los algoritmos estándar de la hidrodinámica producen errores grandes en la relación de dispersión para estas ondas.

A fin de resolver este inconveniente, [Stone y Norman \(1992b\)](#) desarrollaron un método de características más sofisticado (MOC⁷), el cual utiliza la información de la propagación de las ondas de Alfvén (a lo largo de las curvas características de estas ondas) para reconstruir las cantidades por medio de un método *upwind* o corriente arriba, análogo al caso hidrodinámico (ver sección 3.12).

La forma de conectar ambos métodos, CT+MOC, es detallada en extenso por [Hawley y Stone \(1995\)](#), y es el método que seguiremos en nuestra implementación.

3.17.1. Transporte restringido (CT)

La idea del método CT de [Evans y Hawley \(1988\)](#) es asegurar que la divergencia del campo magnético se mantenga constante a lo largo del tiempo a precisión de máquina, por medio de una formulación conservativa para su flujo.

Para lograr esto, se utilizan las fuerzas electromotrices como campos auxiliares intermedios.

⁷*Method of characteristics*

La forma integral de la ecuación de inducción es:

$$\frac{\partial \mathcal{F}^B}{\partial t} = \int_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B} - \eta \nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}, \quad (3.96)$$

donde \mathcal{F}^B es el flujo magnético a través de la superficie S limitada por ∂S . Una aproximación discreta para el flujo a lo largo de cada dirección es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_X^B{}_{i+1/2jk} &= B_{X_{i+1/2jk}} \mathcal{S}_{i+1/2jk} \\ \mathcal{F}_Y^B{}_{ij+1/2k} &= B_{Y_{ij+1/2k}} \mathcal{S}_{ij+1/2k} \\ \mathcal{F}_Z^B{}_{ijk+1/2} &= B_{Z_{ijk+1/2}} \mathcal{S}_{ijk+1/2}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

El método para satisfacer la conservación del flujo está basado en el cálculo de la variación temporal del flujo mismo, a partir de las fuerzas electromotrices (EMF), definidas como $\vec{\varepsilon} = \vec{v} \times \vec{B}$.

Las componentes X , Y y Z de las EMF están definidas en el medio de las aristas, a lo largo de la dirección X , Y y Z (ver Fig. 3.1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij+1/2k+1/2}^X &= -(v_Y B_Z - v_Z B_Y)_{ij+1/2k+1/2}^* \Delta X_{ij+1/2k+1/2} \\ \varepsilon_{i+1/2jk+1/2}^Y &= -(v_Z B_X - v_X B_Z)_{i+1/2jk+1/2}^* \Delta Y_{i+1/2jk+1/2} \\ \varepsilon_{i+1/2j+1/2k}^Z &= -(v_X B_Y - v_Y B_X)_{i+1/2j+1/2k}^* \Delta Z_{i+1/2j+1/2k}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

donde el símbolo $*$ significa que el interior del paréntesis debe estar correctamente centrado en espacio y tiempo, al igual que se hizo en el cálculo de los flujos en la etapa del transporte hidrodinámico (ver sección 3.12), lo cual se discutirá más adelante (ver sección 3.17.2).

Con estas definiciones, la evolución del flujo puede calcularse:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_X^{B^{n+1}}{}_{i+1/2jk} - \mathcal{F}_X^{B^n}{}_{i+1/2jk}}{\Delta t} &= \varepsilon_{i+1/2jk+1/2}^Y \Delta Y_{i+1/2jk+1/2} \\ &- \varepsilon_{i+1/2jk-1/2}^Y \Delta Y_{i+1/2jk-1/2} \\ &- \varepsilon_{i+1/2j+1/2k}^Z \Delta Z_{i+1/2j+1/2k} \\ &+ \varepsilon_{i+1/2j-1/2k}^Z \Delta Z_{i+1/2j-1/2k}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

El resto de relaciones se puede obtener por permutación circular de los índices:

$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X, i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i:$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_Y^{B^{n+1}} - \mathcal{F}_Y^{B^n}}{\Delta t} = & - \varepsilon_{ij+1/2k+1/2}^X \Delta_{Xij+1/2k+1/2} \\ & + \varepsilon_{ij+1/2k-1/2}^X \Delta_{Xij+1/2k-1/2} \\ & + \varepsilon_{i+1/2j+1/2k}^Z \Delta_{Zi+1/2j+1/2k} \\ & - \varepsilon_{i-1/2j+1/2k}^Z \Delta_{Zi-1/2j+1/2k} \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_Z^{B^{n+1}} - \mathcal{F}_Z^{B^n}}{\Delta t} = & - \varepsilon_{i+1/2jk+1/2}^Y \Delta_{Yi+1/2jk+1/2} \\ & + \varepsilon_{i-1/2jk+1/2}^Y \Delta_{Yi-1/2jk+1/2} \\ & + \varepsilon_{ij+1/2k+1/2}^X \Delta_{Xij+1/2k+1/2} \\ & - \varepsilon_{ij-1/2k+1/2}^X \Delta_{Xij-1/2k+1/2}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

La conservación de la divergencia de B es:

$$\frac{d}{dt} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \frac{d\mathcal{F}^B}{dt} = 0, \quad (3.102)$$

Así, sumando (3.99), (3.100) y (3.101), se prueba que la divergencia de B se conserva para todo t . Por lo tanto, si la divergencia del campo inicial es nula, esta se mantendrá nula para todo tiempo futuro.

Si bien este método asegura la conservación de $\nabla \cdot \vec{B}$, en la demostración nunca se especificó algún método para el cálculo de las EMF. Por lo que en principio, podríamos utilizar cualquier valor para actualizar B y su divergencia seguiría siendo nula. Por lo tanto, una aclaración importante debe hacerse: sólo mantener la divergencia del campo magnético en niveles nulos o razonables, no implica en absoluto que la MHD sea bien resuelta.

El capítulo que sigue trata sobre el método para estimar de forma apropiada y suficientemente precisa las EMF's.

3.17.2. Método de características

En la sección anterior vimos que para el cálculo de flujo magnético, es necesario calcular las EMFs centradas en el tiempo $n+1/2$, por lo que una extrapolación debe hacerse para v, B . Por otro lado, debido a que el centrado de las EMFs no coincide con el de los campos involucrados en su cálculo, una interpolación espacial también es necesaria.

Ambos procedimientos bien podrían ser realizados, como ya se discutió en la sección 3.12, mediante un método upwind como los utilizados en hidrodinámica, sin embargo, es sabido que esto no arroja resultados satisfactorios más allá de

problemas dominados principalmente por advección [Stone y Norman \(1992b\)](#).

El método de las características, entonces, consiste en extrapolar en tiempo los campos a lo largo de las características de de Alfvén a fin de reconstruir las cantidades deseadas. Para ello, se utiliza información de las ondas generadas en cada celda. Para la formulación de este método se desprecian los términos resistivos en la ecuación de inducción, los cuales no contribuyen a la propagación de ondas.

En el formalismo del MOC, el operador $*$ se distribuye hacia todas las componentes:

$$\varepsilon Z_{i+1/2j+1/2k}^{n+1/2} = -\left(v_{X i+1/2j+1/2k}^* B_{Y i+1/2j+1/2k}^* - v_{Y i+1/2j+1/2k}^* B_{X i+1/2j+1/2k}^*\right),$$

donde los valores $*$ se calculan utilizando un método corriente arriba con velocidad de propagación dada por las características de Alfvén.

Para encontrar estas nuevas características, las cuales son propias de ondas transversales incompresibles, escribimos las ecuaciones que deben satisfacer en el caso más sencillo 1.5D (considerando solo XY).

Así, solo consideramos la ecuación de momento con único término fuente igual a la fuerza de Lorentz, y la ecuación de inducción. Aquí detallaremos los cálculos para la componente Y , aunque lo mismo se hace para la componente X .

La ecuación de momento e inducción juntas son:

$$\frac{\partial v_Y}{\partial t} + v_X \frac{\partial v_Y}{\partial X} = \frac{B_X}{\mu_0 \rho} \frac{\partial B_Y}{\partial X}, \quad (3.103)$$

$$\frac{\partial B_Y}{\partial t} + v_X \frac{\partial B_Y}{\partial X} = B_X \frac{\partial v_Y}{\partial X}. \quad (3.104)$$

Sumando y restando $(\mu_0 \rho)^{-1/2}$ veces la ecuación (3.104) a la ecuación (3.103), se puede escribir al sistema como:

$$\partial_t \psi_{\pm} + C_{\pm} \partial_X \psi_{\pm} = 0, \quad (3.105)$$

donde C_{\pm} es la velocidad característica, definida por:

$$C_{\pm} = v_X \mp \frac{B_X}{\sqrt{\mu_0 \rho}}, \quad (3.106)$$

y donde el autovalor ψ_{\pm} es:

$$\psi_{\pm} = v_Y \pm \frac{B_Y}{\sqrt{\mu_0 \rho}}. \quad (3.107)$$

Es interesante notar que los autovalores ψ_+ y ψ_- se conservan a lo largo de las características C_{\pm} .

La ecuación (3.105) es conocida como la ecuación de las características de

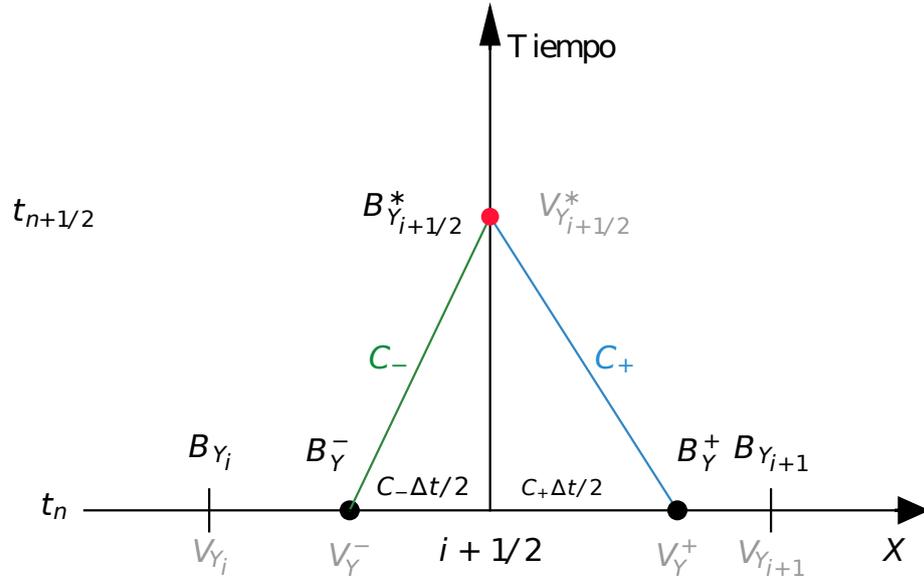


Figura 3.14: Diagrama espacio tiempo que muestra las características de Alfvén utilizadas para extrapolar las componentes de la EMF, para el caso $B_X > 0$, en particular, el campo magnético en la dirección Y. En gris claro, a fin de evitar confusiones, se muestra el mismo procedimiento para el campo de velocidad en la dirección Y. Ambos procedimientos son independientes.

Alfvén. Una forma muy atractiva para escribir esta ecuación es:

$$\frac{Dv_Y}{Dt} \pm \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \frac{DB_Y}{Dt} = 0, \quad (3.108)$$

donde D/D_t se define como:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(v_X \mp \frac{B_X}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial X}$$

Una vez encontrada la ecuación de las características, es posible obtener el valor de ψ^\pm en el tiempo $n + 1/2$, proyectándolo hacia atrás a lo largo de esta curva e interpolando, de forma totalmente análoga a lo que se ilustró en la Fig 3.7, y con los mismos métodos que fueron utilizados en hidrodinámica. La mayor diferencia es que la velocidad característica ya no es simplemente v y que ahora deben ser consideradas dos de ellas para cada valor deseado.

Al igual que en hidrodinámica, utilizamos el método de van Leer para la MHD (ver sección 3.12.2). Este procedimiento se ilustra en la Fig. 3.14, lo cual es un caso más general de la Fig. 3.7.

Lo que se observa en esta figura, formalmente puede calcularse diferenciando (3.108):

$$\Delta v \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_0\rho}} \Delta B = 0 \quad (3.109)$$

lo cual conduce a un par de ecuaciones para los valores * buscados:

$$\begin{aligned} v^* - v^+ + \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho}} (B^* - B^+) &= 0 \\ v^* - v^- - \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho}} (B^* - B^-) &= 0, \end{aligned}$$

los símbolos \pm representan el valor del campo en el lugar desde donde los campos parten, siguiendo la correspondiente característica \pm ⁸.

Resolviendo el sistema de ecuaciones para las cantidades *, se tiene que:

$$v_Y^* = \frac{1}{2}(\psi_+ + \psi_-) = \frac{1}{2} \left(v_Y^+ + v_Y^- + \frac{B_Y^+ - B_Y^-}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \right) \quad (3.110)$$

$$B_Y^* = \frac{\sqrt{\mu_0 \rho}}{2}(\psi_+ - \psi_-) = \frac{1}{2} [B_Y^+ + B_Y^- + \sqrt{\mu_0 \rho}(v_Y^+ - v_Y^-)]. \quad (3.111)$$

En nuestras pruebas vimos que utilizar un reconstructor de bajo orden (por ejemplo Donor cell) para los campos \pm conduce a un suavizado excesivo del campo magnético, por lo que métodos de alto orden deben ser utilizados.

Por último, a fin de evitar EMFs anómalas cerca de discontinuidades rotacionales del campo magnético, utilizamos los valores * sólo con los términos que son consistentes con ellos, los cuales son obtenidos por medio de un método corriente arriba, o estimación advectada (Hawley y Stone, 1995).

Así, por ejemplo, la fuerza electromotriz Z es:

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{2} (v_X^* B_Y^u + B_Y^* v_X^u - v_Y^* B_X^u - B_X^* v_Y^u). \quad (3.112)$$

donde u significa que el valor es obtenido mediante un método corriente arriba.

Finalmente, el campo magnético es calculado sumando las EMF's correspondientes, multiplicándolas por el paso de tiempo correspondiente y dividiendo por la superficie utilizada para calcular los flujos.

3.17.3. Términos fuente

Para completar la actualización del campo magnético, hay que añadir la fuerza de Lorentz. Esta puede ser separada en dos términos de naturaleza diferente. Por ejemplo, para la actualización de v_X en coordenadas cartesianas, se tiene que:

$$\partial_t v_X = \frac{1}{\mu_0 \rho} (B_Y \partial_Y B_X + B_Z \partial_Z B_X - B_Y \partial_X B_Y - B_Z \partial_X B_Z), \quad (3.113)$$

en donde el término de tensión $B_X \partial_X B_X$ que proviene de $\vec{B} \cdot \nabla B_X$ se canceló con un término de presión similar, proveniente de $-\partial_X B^2/2$.

⁸Nota: análogo a la cantidad $Q(x^*)$, inmediatamente posterior a la ecuación 3.68.

Los últimos dos términos del miembro derecho corresponden a la presión magnética, y son agregados de la misma forma que la presión térmica, ya que su comportamiento y efectos es prácticamente el mismo.

Un especial cuidado debe tenerse con los dos primeros. Nuevamente, para evaluar estos términos hay que centrarlos en tiempo y en espacio hacia lugares en los cuales no están definidos. Esto debe hacerse con especial cuidado para estos términos porque son los que introducen la física transversal al problema, y son la razón de toda la complicación adicional existente en los algoritmos para la resolución de la MHD.

Esto se hace utilizando nuevamente el método de las características:

$$\frac{v_{X_{i-1/2jk}}^c - v_{X_{i-1/2jk}}^b}{\Delta t} = \frac{2}{\rho_{ijk} + \rho_{i-1jk}} \times \left(\frac{B_{X_{i-1/2j+1/2k}}^* - B_{X_{i-1/2j-1/2k}}^*}{B_Y \Delta Y_{i-1/2k}} + \frac{B_{X_{i-1/2jk+1/2}}^* - B_{X_{i-1/2jk-1/2}}^*}{B_Z \Delta Z_{i-1/2j}} \right), \quad (3.114)$$

donde se puso de forma explícita el hecho de que la actualización de la velocidad es parcial, de $b \rightarrow c$. Para el caso de la actualización del momento, no es necesario calcular el valor del campo magnético \overline{B}_Y y \overline{B}_Z mediante un método corriente arriba, ya que en esta etapa no ocurren actualizaciones cruzadas. Por esta razón, simplemente alcanza con calcular el promedio aritmético de cuatro cantidades adyacentes.

Para el método de características empleado en esta parte, una última consideración debe hacerse. La actualización de la velocidad en la forma dada por la ecuación 3.114 es en el marco de referencia comovil con el fluido (ya que es un paso independiente al transporte), por lo que la velocidad característica es simplemente $\pm B_X / \sqrt{\mu_0 \rho}$ (se quitó la velocidad del fluido). Esto es lo que en la literatura se define como un paso lagrangiano (Hawley y Stone, 1995).

Cuando la geometría no es cartesiana, aparecen nuevos términos fuente que deben ser tenidos en cuenta, como se hizo con los términos geométricos para la velocidad en el caso hidrodinámico.

Estos son:

Caso cilíndrico:

$$\partial_t v_\phi = \frac{1}{\mu_0 \rho} \frac{B_r B_\phi}{r} \quad (3.115)$$

$$\partial_t v_r = -\frac{1}{\mu_0 \rho} \frac{B_\phi^2}{r} \quad (3.116)$$

Caso esférico:

$$\partial_t v_\phi = \frac{1}{\mu_0 \rho} \frac{B_r B_\phi + B_\theta B_\phi \cot \theta}{r} \quad (3.117)$$

$$\partial_t v_r = -\frac{1}{\mu_0 \rho} \frac{B_\phi^2 + B_\theta^2}{r} \quad (3.118)$$

$$\partial_t v_\theta = \frac{1}{\mu_0 \rho} \frac{B_r B_\theta - B_\phi^2 \cot \theta}{r} \quad (3.119)$$

Estos términos son completamente análogos a los términos de curvatura que aparecen al expandir el operador $(\vec{v} \cdot \nabla)$ en las ecuaciones de Euler.

3.17.4. Términos resistivos

Agregar el término resistivo correspondiente a la difusión Óhmica es muy sencillo.

Una vez realizado el cálculo del término $\vec{v} \times \vec{B}$ para obtener las EMFs, se agrega de forma directa el término $\eta \nabla \times \vec{B}$, donde \vec{B} es el campo original (ver ecuación 3.5).

$\nabla \times B$ debe ser calculado en cada sistema de coordenadas, y un cuidado especial debe tenerse al añadir dichos términos en nuestro código. La orientación de las ternas de coordenadas no es constante de un sistema de coordenadas a otro.

En coordenadas cartesianas, la terna es derecha, en cilíndricas es a izquierda y en esféricas, por una doble permutación de las componentes es nuevamente derecha.

Krapp y Benítez Llambay (2015) implementaron términos no ideales conocidos como efecto Hall y difusión ambipolar en el código, los cuales son dos efectos que aparecen al considerar la fuerza de arrastre en electrones, iones y neutros.

La ecuación de inducción incluyendo todos los términos resistivos es:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \nabla \times (\eta_O \vec{J} + \eta_H \vec{J} \times \hat{B} + \eta_A \vec{J}_\perp), \quad (3.120)$$

donde $\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}$ y \vec{J}_\perp es la corriente perpendicular a \vec{B} . Así, la EMF correspondiente a los términos resistivos es:

$$\varepsilon = \eta_O \vec{J} + \eta_H \vec{J} \times \hat{B} + \eta_A \vec{J}_\perp, \quad (3.121)$$

lo cual puede sumarse de forma directa a la EMF correspondiente al término $\vec{v} \times \vec{B}$.

Para todos los casos se observó que una aproximación muy simple en diferencias finitas es suficiente, aunque un especial cuidado debe tenerse con el término de Hall, el cual es inestable con esta implementación. Sin embargo, mediante la utilización de un método semi-implícito descrito por Bai (2014) se obtuvieron

resultados satisfactorios.

3.17.5. Advección orbital del campo magnético

En esta sección discutiremos la implementación del algoritmo de advección orbital (ver sección 3.16) a la ecuación de inducción magnética.

La generalización de este algoritmo a la MHD fue realizada en una primer instancia por [Johnson *et al.* \(2008\)](#). Posteriormente, un método que generaliza el método CT fue realizado por [Stone y Gardiner \(2010\)](#).

Como en hidrodinámica, el algoritmo de advección orbital para la MHD consiste en separar las ecuaciones en su versión dependiente de δv y de v^0 , que en el caso Kepleriano, corresponde con la velocidad orbital, la cual tiene componente exclusivamente acimutal y es axisimétrica.

Los términos correspondientes a δv se resuelven de la forma estándar, como se explicó en las secciones anteriores.

Luego de la separación, la ecuación de inducción que debe resolverse es:

$$\partial_t \vec{B} - \nabla \times (v_0 \times \vec{B}) = 0, \quad (3.122)$$

En el caso bidimensional cartesiano, la ecuación (3.122) es:

$$\begin{aligned} \partial_t B_X + v_0 \partial_X B_X &= q B_Y \\ \partial_t B_Y + v_0 \partial_X B_Y &= 0, \end{aligned} \quad (3.123)$$

donde $q = \partial_Y v_0$ y donde se utilizó el hecho $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ en la primer ecuación.

La solución de este sistema puede ser escrita como:

$$B_X(x, t) = B_X(x - v_0 t, 0) + \int_0^t q(t') B_Y(x, t') dt' \quad (3.124)$$

$$B_Y(x, t) = B_Y(x - v_0 t, 0), \quad (3.125)$$

Utilizando (3.125) y que $q(t)$ es constante durante un paso de tiempo, puede escribirse que:

$$B_X(x, t) = B_X(x - v_0 t, 0) + q t B_Y(x - v_0 t, 0) \quad (3.126)$$

$$B_Y(x, t) = B_Y(x - v_0 t, 0). \quad (3.127)$$

Para cualquier intervalo de tiempo Δt , se define el siguiente promedio:

$$\overline{E_z}(x, t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-v_0 \Delta t}^x v_0 B_Y(s, t) ds, \quad (3.128)$$

donde $\Delta x = v_0 \Delta t$. Derivando (3.128) respecto de x , se tiene que:

$$\partial_x \bar{E}_z(x, t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta x} v_0 [B_y(x, t) - B_y(x - v_0 \Delta t, t)], \quad (3.129)$$

lo cual puede ser reescrito utilizando la ecuación (3.125) como:

$$\partial_x \bar{E}_z(x, t, \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} [B_y(x, t + \Delta t) - B_y(x, t)]. \quad (3.130)$$

De forma similar:

$$\partial_y \bar{E}_z(x, t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-v_0 \Delta t}^x q B_y(s, t) ds - \frac{1}{\Delta t} [B_x(x, t) - B_x(x - \Delta x, t)], \quad (3.131)$$

donde se utilizó $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Utilizando la ecuación (3.124), este resultado puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \partial_y \bar{E}_z(x, t, \Delta t) &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x}^x q(t) B_y(s, t) ds + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} q(t') B_y(x, t') dt' \\ &+ \frac{1}{\Delta t} [B_x(x, t + \Delta t) - B_x(x, t)]. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Es simple demostrar que las integrales cancelan durante un paso de tiempo, en donde $q(t)$ es constante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} q(t') B_y(x, t') dt' &= \frac{q}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} B_y(x - v_0 t', t) dt' \\ &= -\frac{q}{\Delta t v_0} \int_{x-v_0 \Delta t}^x B_y(s, t) ds \\ &= -\frac{q}{\Delta x} \int_{x-\Delta x}^x B_y(s, t) ds \end{aligned} \quad (3.133)$$

Así, en un paso de tiempo, el promedio espacial de las cantidades corriente arriba coincide con el promedio temporal de la misma cantidad:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x-\Delta x} B_y(s, t) ds = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} B_y(x, t') dt', \quad (3.134)$$

por lo que:

$$\partial_y \bar{E}_z(x, t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} [B_x(x, t + \Delta t) - B_x(x, t)]. \quad (3.135)$$

Así, las ecuaciones (3.130) y (3.135) dicen que el promedio de las EMFs puede ser utilizado para obtener el valor exacto de la variación del campo magnético, sin importar que tan grande sea Δt . Por lo tanto, calcular la integral (3.128) sobre

Factor	Cartesiano	Cilíndrico	Esférico
$s_x^j(j)$	$Y_{\max} - Y_{\min}$	$Y_{\max} - Y_{\min}$	$\frac{1}{2}(Y_{\max}^2 - Y_{\min}^2)$
$s_x^k(k)$	$Z_{\max} - Z_{\min}$	$Z_{\max} - Z_{\min}$	$Z_{\max} - Z_{\min}$
$s_y^j(j)$	1	$Y_{\min}\Delta x$	$Y_{\min}^2\Delta x$
$s_y^k(k)$	$\Delta x(Z_{\max} - Z_{\min})$	$Z_{\max} - Z_{\min}$	$\cos(Z_{\min}) - \cos(Z_{\max})$
$s_z^j(j)$	$\Delta x(Y_{\max} - Y_{\min})$	$\frac{1}{2}\Delta x(Y_{\max}^2 - Y_{\min}^2)$	$\frac{1}{2}\Delta x(Y_{\max}^2 - Y_{\min}^2)$
$s_z^k(k)$	1	1	$\sin(Z_{\min})$
$V_j(j)^{-1}$	$(Y_{\max} - Y_{\min})^{-1}$	$2/[(Y_{\max}^2 - Y_{\min}^2)\Delta x]$	$3/[(Y_{\max}^3 - Y_{\min}^3)\Delta x]$

Tabla 3.2: Coeficientes utilizados para los cálculos geométricos en las tres geometrías implementadas. El significado de las coordenadas X, Y y Z está de acuerdo a las convenciones especificadas a lo largo de este capítulo.

la longitud $\Delta X = v_0\Delta t$ permite obtener la variación del campo magnético.

Solo las componentes Y y Z del campo magnético no se anulan. Ya que v_0 no está centrada en la misma posición, un promedio es necesario.

A diferencia de la advección orbital hidrodinámica, en este caso es necesario calcular los promedios. La mayoría de ellos se cancelan, lo cual produce un simple corrimiento de índices. En los casos donde el corrimiento no representa un número entero de índices, la EMF sobre el arco residual se evalúa utilizando el método PPA (ver sección 3.12.3).

3.18. Coeficientes geométricos

A lo largo de las integraciones numéricas se hace necesaria la utilización de cantidades geométricas, como ser longitudes, superficies y volúmenes. A fin de controlar el consumo de memoria de esta información, lo cual es muy importante en la versión GPU del código, definimos unos arreglos monodimensionales con información geométrica relevante y utilizamos el producto de ellos para obtener superficies y volúmenes. A continuación describimos como se calculan las superficies a partir de los arreglos mostrados en la Tabla 3.2

Superficies

$$S_x(j, k) = s_x^j(j)s_x^k(k) \quad (3.136)$$

$$S_y(j, k) = s_y^j(j)s_y^k(k) \quad (3.137)$$

$$S_z(j, k) = s_z^j(j)s_z^k(k), \quad (3.138)$$

donde $S_A(j, k)$ es la superficie en la cara inferior de la celda con índices (i, j, k) ,

perpendicular a la dirección A , para todo índice i .

Volumen

$$V^{-1}(j,k) = \frac{V_j(j)^{-1}}{s_{\psi}^k(k)}, \quad (3.139)$$

donde V es el volumen de la celda.

3.19. Tensor viscoso

Por completitud incluimos la expresión expandida del tensor viscoso en las tres geometrías utilizadas (ver [Tassoul, 1978](#)).

Coordenadas cartesianas:

$$\tau_{ij} = -\rho\nu \left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{v} \right).$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \tau_{\phi\phi} &= -\rho\nu \left[2 \left(\frac{1}{r} \partial_{\phi} v_{\phi} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right] \\ \tau_{rr} &= -\rho\nu \left(2 \partial_r v_r - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right) \\ \tau_{zz} &= -\rho\nu \left(2 \partial_z v_z - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right) \\ \tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} &= -\rho\nu \left(\partial_r v_{\phi} - \frac{v_{\phi}}{r} + \frac{1}{r} \partial_{\phi} v_r \right) \\ \tau_{rz} = \tau_{zr} &= -\rho\nu \left(\partial_r v_z + \partial_z v_r \right) \\ \tau_{\phi z} = \tau_{z\phi} &= -\rho\nu \left(\partial_z v_{\phi} + \frac{1}{r} \partial_{\phi} v_z \right). \end{aligned}$$

Coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -\rho\nu \left(2 \partial_r v_r - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right) \\ \tau_{\phi\phi} &= -\rho\nu \left[2 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\phi} v_{\phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_{\theta} \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right] \\ \tau_{\theta\theta} &= -\rho\nu \left[2 \left(\frac{1}{r} \partial_{\theta} v_{\theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right] \\ \tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} &= -\rho\nu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\phi} v_r + \partial_r v_{\phi} - \frac{v_{\phi}}{r} \right) \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= -\rho\nu \left(\partial_r v_{\theta} - \frac{v_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \partial_{\theta} v_r \right) \\ \tau_{\phi\theta} = \tau_{\theta\phi} &= -\rho\nu \left[\frac{\sin \theta}{r} \partial_{\theta} \left(\frac{v_{\phi}}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\phi} v_{\theta} \right]. \end{aligned}$$

Las componentes del tensor están posicionadas en diferentes lugares. Los términos diagonales se encuentran en los centros de celda, mientras que los términos

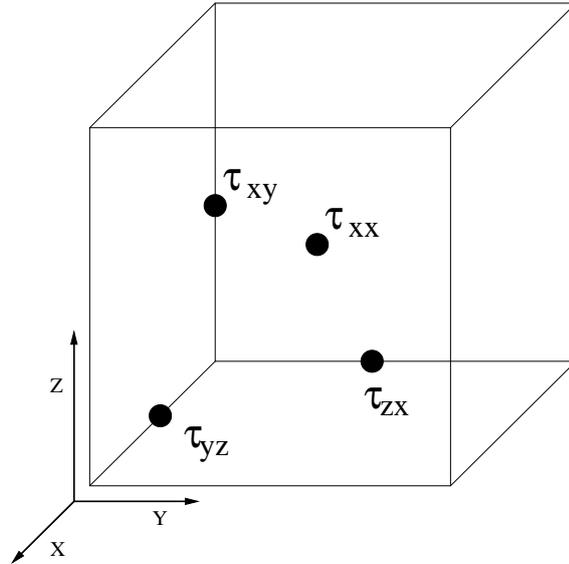


Figura 3.15: Posición de las diferentes componentes del tensor viscoso.

cruzados están en diferentes aristas. La posición de cada término se muestra en la Fig. 3.15.

Estas componentes se utilizan para actualizar la velocidad, al igual que se hizo con los demás términos fuente, como la presión y gravedad. La forma en que esto se realiza se describe a continuación:

Coordendas cartesianas:

$$\partial_t v_i = -\partial_j \tau_{ij}.$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \partial_t v_\phi &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \tau_{\phi r}) + \frac{1}{r} \partial_\phi \tau_{\phi\phi} + \partial_z \tau_{\phi z} \right] \\ \partial_t v_r &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \partial_\phi \tau_{r\phi} - \frac{\tau_{\phi\phi}}{r} + \partial_z \tau_{rz} \right] \\ \partial_t v_z &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \partial_\phi \tau_{\phi z} + \partial_z \tau_{zz} \right]. \end{aligned}$$

Coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \partial_t v_\phi &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \tau_{\phi r}) + \frac{1}{r} \partial_\theta \tau_{\phi\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \tau_{\phi\phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2\tau_{\theta\phi} \cot \theta}{r} \right] \\ \partial_t v_r &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \tau_{r\phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right] \\ \partial_t v_\theta &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{r^3} \partial_r (r^3 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \tau_{\theta\phi} - \frac{\tau_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \right]. \end{aligned}$$

3.20. Diagrama de flujo

En esta sección incluimos un diagrama de flujo del código en su estado actual, el cual permite entender de forma simple cómo se relacionan las diferentes partes de los algoritmos explicados durante todo este capítulo.

Por simplicidad y por motivos de espacio, el diagrama se divide en dos. En la Fig. 3.16 se muestra el diagrama de flujo correspondiente al sector de inicialización del código, mientras que en la Fig. 3.17 se muestra el diagrama correspondiente a lo que denominamos una actualización completa, es decir, un lazo magnetohidrodinámico completo, desde que entran los campos iniciales, hasta que salen avanzados en un tiempo $t + dt$.

3.20.1. Inicialización

Describimos la Fig. 3.16. El código comienza con una etapa de inicialización, en dónde se interpretan todas las características que el usuario desea del código y las condiciones iniciales del problema. En particular, en una etapa temprana de la ejecución, se obtienen todos los parámetros físicos correspondientes al problema deseado, se realiza la partición de la malla mediante el algoritmo descrito en la sección 3.9 y se reserva toda la memoria necesaria para el problema.

Posteriormente se toma una decisión. Si se desea resimular una simulación previa. En caso positivo, se leen los datos del disco duro; caso contrario, se generan condiciones iniciales a partir de los archivos de configuración del problema en cuestión. Una vez que está todo el problema iniciado, se realiza una comunicación, la cual corresponde con una sincronización con datos actualizados entre todas las CPU's de los nodos vecinos.

Luego de la sincronización, se escribe en disco toda la información del problema, incluyendo los campos hidrodinámicos primitivos y cantidades auxiliares que se calculen en tiempo de ejecución, como por ejemplo, el torque sufrido por algún planeta, la magnitud del tensor de Maxwell, etc. Una vez completada esta etapa, se decide si continuar con la simulación o no. En caso de continuar, se pasa directamente a la Fig. 3.17.

3.20.2. Actualización completa

La actualización completa corresponde, en la práctica, con el lazo principal dentro del código, y es donde se actualizan todas las cantidades ingresadas en el tiempo t hacia su valor nuevo en el tiempo $t + dt$.

El primer paso consiste en calcular la velocidad media acimutal, la cual será utilizada para el paso de advección lineal mediante el algoritmo FARGO (ver sección 3.16). Posteriormente, de forma independiente, se calcula la presión y el potencial gravitatorio, el cual, si bien no considera la autogravedad del gas, debe ser calculado a cada paso de tiempo, porque los planetas están en movimiento con respecto al gas.

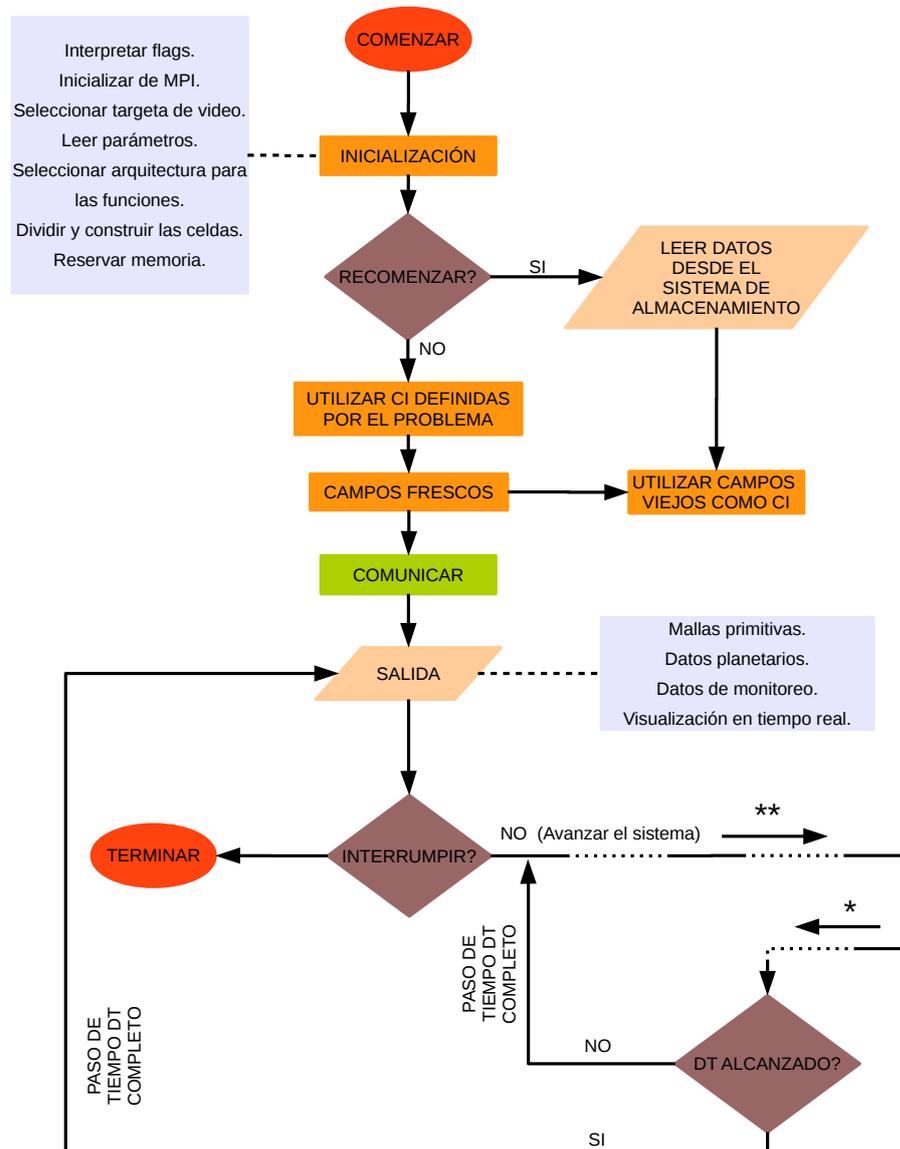


Figura 3.16: Diagrama de flujo que muestra la forma en la que se inicializa todo el código antes de comenzar a resolver el problema físico.

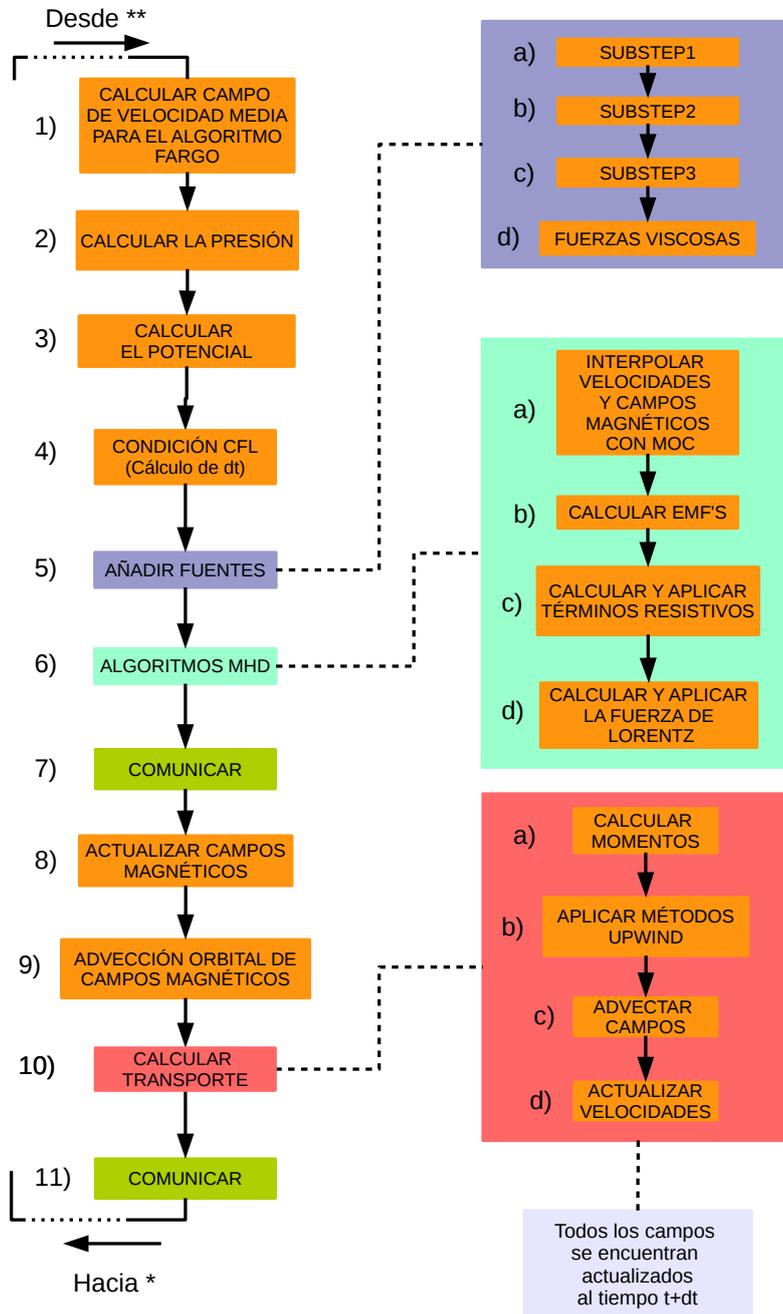


Figura 3.17: Diagrama de flujo para el núcleo del código, donde se resuelven las ecuaciones la MHD completas. Se realizaron anotaciones sobre cada elemento individual para simplificar la explicación en el texto.

Posteriormente, en el paso 3 se calcula el paso de tiempo óptimo mediante la receta vista en la sección 3.13. Con este paso de tiempo, se pasa directamente a incrementar el campo de velocidad por medio de las funciones fuentes (ver 3.10.5). Aquí dentro, en *substep1* se incorporan los términos de presión térmica, magnética, el potencial gravitatorio y términos fuente de curvatura, tanto para el campo de velocidad como para el campo magnético. Posteriormente, en *substep2* incorporamos los términos de viscosidad artificial y su correspondiente aporte a la energía interna. En *substep3* incorporamos el trabajo de la presión en la energía, y toda otra fuente de calor externa. Finalmente, añadimos las fuerzas viscosas.

Luego ingresamos en el núcleo del módulo que resuelve la magnetohidrodinámica. Aquí, como primer tarea se calculan las velocidades y los campos magnéticos en sus correspondientes posiciones * y avanzados medio paso en tiempo, mediante el método de características (ver sección 3.17.2). Con estos campos interpolados se calculan las EMF's, a las cuales posteriormente se le añaden los términos resistivos. Finalmente, se calcula la fuerza de Lorentz, (nuevamente por medio del método de características) y se la aplica al campo de velocidad como una fuente adicional.

Antes de calcular los campos magnéticos nuevos a partir de las EMF's calculadas en el paso anterior, es necesario sincronizar las fronteras de cada procesador, por lo que se envía y solicita información de borde a todos los vecinos. Con todas las mallas de cada proceso actualizadas, se procede al cálculo del campo magnético a partir de las EMF's.

Posteriormente, de forma independiente, se procede a advectar el campo magnético con la velocidad de fondo no considerada hasta aquí.

Ahora es el momento de calcular el transporte de las cantidades, lo que corresponde con el segundo paso del operador splitting. Aquí calculamos los momentos que serán advectados, los cuales son funciones de las variables primitivas del código. Una vez calculados, se procede a advectarlos mediante las técnicas *upwind* descritas en este capítulo. La densidad y energía se actualizan de forma trivial, ya que son las variables primitivas utilizadas, y luego de advectar los momentos, se reconstruyen las velocidades, con lo que se tiene disponible una nueva condición avanzada para repetir el ciclo desde el principio nuevamente.

Antes del próximo paso de tiempo, es necesaria nuevamente una comunicación entre los procesadores vecinos para compartir la información de las fronteras, al igual que se hizo en la etapa de inicialización, antes de ingresar al lazo de la actualización completa.

3.21. Conclusiones

En este capítulo hemos presentado todos los algoritmos necesarios para la resolución de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica mediante métodos de malla explícitos, y se explica en cada caso cómo se realiza su implementación.

Aquí incluimos algunas de las características principales de nuestro código y

ventajas respecto de otras aproximaciones:

- Hacemos un avance de forma separada en cada dimensión espacial. Esto tiene grandes consecuencias en cuanto a la utilización de memoria, ya que no necesitamos almacenar una gran cantidad de datos antes de actualizar los campos completamente.
- A diferencia de los códigos tipo Godunov, nuestra implementación, la cual utiliza mallas alternadas, no presenta grandes dificultades para construir condiciones estacionarias para flujos con términos fuente adicionales. Esto es de importancia en nuestro problema, en el cual el equilibrio rotacional estricto es muy importante para cierta clase de mediciones (p. ej. medición de flujos de masa o momento angular). Otro ejemplo es la obtención de equilibrios hidrostáticos verticales en simulaciones tridimensionales.
- El costo computacional de un paso de tiempo es significativamente menor al utilizado en un código de tipo Godunov, ya que no se resuelve el problema de Riemann para cada interface.
- Los códigos de tipo Godunov utilizan la energía total en su formulación, asegurando una estricta conservación a lo largo del tiempo para esta cantidad. Nosotros, sin embargo, utilizamos la energía interna, la cual no se conserva, y por consiguiente no podemos asegurar tampoco la conservación de la energía total. Si bien esto puede ser visto como una desventaja frente a los códigos Godunov, no lo es. En efecto, en los discos de acreción la velocidad de rotación es muy superior a la velocidad del sonido en el medio, lo que implica números de Mach muy grandes (ver por ejemplo 2.3). Así, la energía cinética es órdenes de magnitud más grande que la energía interna del gas. Por lo tanto, errores de truncamiento en la energía cinética se propagan muy rápido hacia la energía interna del gas. Esto es conocido como el problema de número de Mach grande (Ryu *et al.*, 1993; Trac y Pen, 2004). Como vimos en el capítulo 2, un correcto tratamiento de la entropía en la región coorbital es necesario.
- A diferencia de los códigos tipo Godunov, en los que por cada término físico nuevo hay que reescribir el módulo para hallar la solución al problema de Riemann correspondiente, en nuestro caso añadir física nueva es prácticamente trivial. En la mayoría de los casos probablemente sólo alcance con añadirse un término fuente nuevo.
- Hemos demostrado a lo largo de las secciones que el momento es una cantidad que se conserva mediante las técnicas utilizadas, y que en particular, el momento angular de los discos se conservará a precisión de máquina, lo cual es una propiedad necesaria para la correcta resolución de la dinámica de estos sistemas.

- De forma adicional, como la velocidad de propagación de los choques es bien resuelta por los métodos utilizados, podemos asegurar que las condiciones de Rankine-Hugoniot se satisfacen, por lo que las características dinámicas importantes en torno al choque son resueltas, aunque el choque en si mismo no sea resuelto.
- El método utilizado para la actualización del campo magnético a través de las EMF's permite mantener la divergencia del campo constante para todo tiempo a precisión de máquina, por lo que si es inicialmente nula, se mantendrá así.

En el capítulo siguiente se verán todas estas características en acción, por medio de diferentes pruebas hidrodinámicas y magnetohidrodinámicas llevadas a cabo con el objetivo de validar nuestra implementación.

4.1. Introducción

Con el objetivo de validar la implementación del código numérico que desarrollamos, en este capítulo presentamos una serie de pruebas numéricas.

Estas pruebas consisten en la resolución de problemas muy sencillos, algunos de los cuales ya han sido resueltos con muchos otros códigos hidrodinámicos y magnetohidrodinámicos, por lo que disponemos de material de comparación.

El capítulo se organiza de la siguiente forma. Las pruebas presentadas se dividen en dos. Por un lado presentamos pruebas puramente hidrodinámicas, y posteriormente introducimos las pruebas que incluyen campos magnéticos, que permiten validar nuestra implementación de la magnetohidrodinámica.

4.2. Prueba de Sod

La prueba de Sod, o comúnmente conocida como *Sod Shock Tube test*, es una prueba clásica que consiste en resolver un problema de Riemann a lo largo de una dirección (Sod, 1978). Esta prueba permite medir la capacidad del código de resolver discontinuidades en el fluido.

Otra característica interesante de esta prueba es que permite estudiar qué tan bien comportados son los algoritmos empleados para la solución del transporte y las fuentes, a partir de una comparación directa entre una solución exacta conocida y la obtenida de forma numérica.

El problema consiste en definir una discontinuidad inicial entre dos estados, localizada en algún lugar del dominio. Los estados, los cuales llamaremos a izquierda y derecha, deben ser uniformes en todas sus cantidades, pero no iguales entre ellos.

El dominio de la malla es $0 \leq z \leq 10$ y utilizamos 300 celdas uniformemente distribuidas.

La condición inicial es:

$$P = \begin{cases} 1 & z \leq 5 \\ 0,1 & z > 5 \end{cases} \quad (4.1)$$

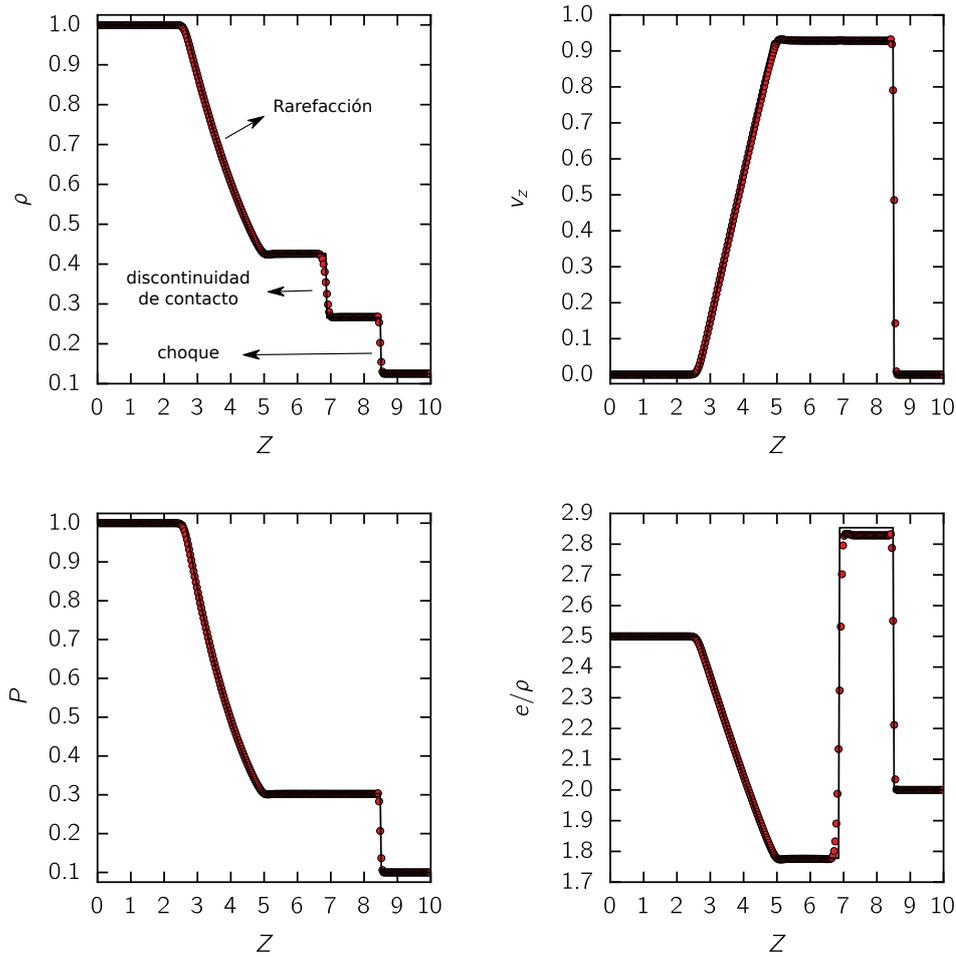


Figura 4.1: Prueba de Sod, utilizando 300 celdas en un dominio espacial de 10 unidades. La solución corresponde a un tiempo $t = 2$. El choque, localizado en torno a $z = 8,5$ es resuelto por ~ 3 celdas, mientras que la discontinuidad de contacto en torno a $z = 7$ es resuelta con 7 celdas. La línea negra continua es la solución exacta.

$$\rho = \begin{cases} 1 & z \leq 5 \\ 0,125 & z > 5 \end{cases} \quad (4.2)$$

La velocidad inicial es nula para todo el espacio. Utilizamos la ecuación de estado adiabática (ver ecuación 3.7), por lo para iniciar el problema debemos calcular la energía interna correspondiente con la presión dada por (4.1). El factor γ en este caso es $\gamma = 1,4$.

La solución para $t = 2$ puede verse en la Fig. 4.1, la cual es contrastada con la solución exacta calculada con el programa HE-E1RPEXACT (Toro, 1999).

La solución muestra la típica onda de choque localizada en $Z \sim 8,5$, seguido por una onda discontinuidad de contacto, centrada en $Z \sim 7$, y finalmente se observa la onda de rarefacción.

A pesar de obtener pequeñas desviaciones para el valor de la energía específi-

ca en el intervalo $7 < Z < 9$, el comportamiento de la solución es muy bueno en todo el dominio. Esta desviación en la energía fue interpretada por [Stone y Norman \(1992a\)](#) como un problema del tipo de variables fundamentales utilizadas para la actualización de los campos. Este fenómeno ocurre por el hecho de que las variables naturales para este problema son la densidad y la presión, mientras que en nuestro código estamos resolviendo para la densidad y la energía interna específica.

Esta prueba puede ser comparada directamente con la figura 11 de [Stone y Norman \(1992a\)](#), y los resultados son prácticamente indiscernibles. Con esta prueba también se demuestra la habilidad del código para tratar los choques.

4.3. Difusión de un anillo gas

Una prueba para verificar la validez de nuestra implementación del tensor viscoso es el problema de la difusión de un anillo de gas (ver [Pringle, 1981](#); [Speith y Riffert, 1999](#)).

Un disco delgado axisimétrico orbitando alrededor de un potencial central, experimenta una deriva radial como consecuencia de la fuerza viscosa. En coordenadas cilíndricas, integrando las ecuaciones de la hidrodinámica en Z y despreciando fuerzas de presión, la ecuación de evolución para la densidad es:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \sqrt{r} \Sigma) \right]. \quad (4.3)$$

Ya que la presión es despreciada, el perfil de rotación del disco es Kepleriano, mientras que la velocidad radial es:

$$r \Sigma v_r = -3 \sqrt{R} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \sqrt{r} \Sigma). \quad (4.4)$$

[Lynden-Bell y Pringle \(1974\)](#) encontraron que si la condición inicial es de la forma:

$$\Sigma(r, t = 0) = \frac{M}{2\pi R_0} \delta(r - R_0), \quad (4.5)$$

y si la viscosidad ν es una constante, entonces la densidad superficial Σ evoluciona como:

$$\Sigma(r, t) = \frac{M}{\pi R_0^2} \frac{1}{\tau u^{1/4}} I_n \left(\frac{2u}{\tau} \right) \exp \left(-\frac{1+u^2}{\tau} \right), \quad (4.6)$$

A partir de este resultado, la velocidad radial evoluciona como:

$$v_r(r, t) = \frac{6\nu}{\tau} \left[r - \frac{I_{n-1}(2u/\tau)}{I_n(2u/\tau)} \right], \quad (4.7)$$

donde $u = r/R_0$ y $\tau = 12\nu_0 t/R_0^2$.

Para probar que somos capaces de obtener la solución dada por la ecuación

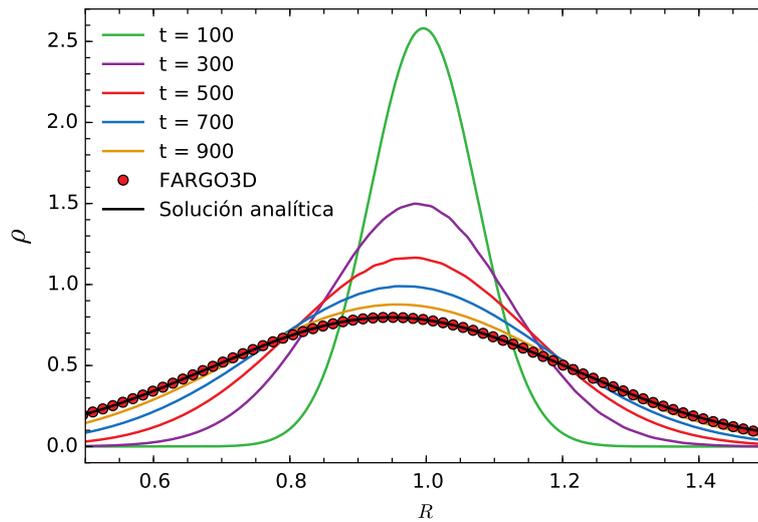


Figura 4.2: Prueba de difusión de un anillo de gas Kepleriano por acción de la viscosidad. Se muestra el perfil de densidad superficial. Las líneas de color corresponden con diferentes instantes de tiempo, los cuales pueden leerse en la leyenda de la figura. La curva negra se corresponde con la solución analítica en $t = 1100$, mientras que los puntos rojos muestran la solución calculada con FARGO3D en el mismo instante temporal. El parecido entre ambas soluciones es notable.

(4.6), iniciamos un disco Kepleriano delgado y axisimétrico, con perfiles de densidad superficial y velocidad radial dados por las fórmulas (4.6) y (4.7), evaluadas en $t = 100$. De este modo nos aseguramos una inicialización suficientemente suave, esparcida sobre un gran número de celdas.

La viscosidad adoptada es $\nu_0 = 10^{-5}$. La extensión radial de la simulación es $0,1 \leq r \leq 1,6$ y utilizamos 512 celdas uniformemente distribuidas en el dominio. La geometría de la malla es cilíndrica, y las condiciones de contorno se eligen como de gradiente cero sobre la densidad y las velocidades.

En la Fig. 4.2 mostramos el perfil de densidad a medida evoluciona el tiempo. El acuerdo entre la solución analítica y la numérica es muy bueno.

La conclusión de esta prueba es que la implementación del tensor viscoso es correcta y que tiene la habilidad de reproducir la dinámica difusiva de los discos de acreción. En la Fig. 7.4 puede verse una extensión de esta prueba para el caso de deriva viscosa de un disco Kepleriano completo, la cual no reproducimos aquí para evitar redundancia.

4.4. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es una inestabilidad que ocurre cuando hay una diferencia de velocidad relativa entre dos capas de fluido con densidades diferentes.

La presencia de imperfecciones en la interface entre los fluidos es amplificada y transformada en un movimiento rotacional (vorticidad).

En esta prueba inicializamos el mismo problema realizado por McNally *et al.* (2012). Este trabajo en particular es muy interesante ya que realiza de forma homogénea una comparación sistemática de este problema para diversos códigos hidrodinámicos, tanto de mayor como de menor orden al código que nosotros desarrollamos en nuestro trabajo.

Según McNally *et al.* (2012), la condición inicial para el problema vienen dada por:

$$\rho = \begin{cases} \rho_1 - \rho_m \exp\left(\frac{y - 1/4}{s}\right) & 1/4 > y \geq 0 \\ \rho_2 + \rho_m \exp\left(\frac{-y + 1/4}{s}\right) & 1/2 > y \geq 1/4 \\ \rho_2 + \rho_m \exp\left(\frac{-(3/4 - y)}{s}\right) & 3/4 > y \geq 1/2 \\ \rho_1 - \rho_m \exp\left(\frac{-(y - 3/4)}{s}\right) & 1 > y \geq 3/4 \end{cases} \quad (4.8)$$

dónde $\rho_m = (\rho_1 - \rho_2)/2$. ρ_1 y ρ_2 son las densidades de cada estado, y son inicializadas con valor $\rho_1 = 1,0$, $\rho_2 = 2,0$. De la misma forma, se define la velocidad a lo largo de la dirección X:

$$v_x = \begin{cases} v_{x1} - v_m \exp\left(\frac{y - 1/4}{s}\right) & 1/4 > y \geq 0 \\ v_{x2} + v_m \exp\left(\frac{-y + 1/4}{s}\right) & 1/2 > y \geq 1/4 \\ v_{x2} + v_m \exp\left(\frac{-(3/4 - y)}{s}\right) & 3/4 > y \geq 1/2 \\ v_{x1} - v_m \exp\left(\frac{-(y - 3/4)}{s}\right) & 1 > y \geq 3/4 \end{cases} \quad (4.9)$$

dónde $v_m = (v_{x1} - v_{x2})/2$.

Las velocidades de cada estado son $v_{x1} = 0,5$, $v_{x2} = -0,5$. s es un parámetro de suavizado, que es elegido como $s = 0,025$ para todo el problema.

La perturbación inicial es una velocidad armónica en la dirección vertical, de la forma:

$$V_y = 0,01 \sin(4\pi x). \quad (4.10)$$

En la Fig. 4.3 se puede observar la evolución temporal de la densidad, a intervalos de tiempo constante.

El aspecto de la inestabilidad puede ser comparado con las figuras 2, 9 y 12 de McNally *et al.* (2012). A tiempos tempranos, la inestabilidad, aún no desarrollada, comienza a exhibir el patrón característico de esta inestabilidad, y posteriormente, con un crecimiento acelerado, se forman los cuatro vórtices correspondientes al número de onda utilizado para iniciar esta prueba.

Cada vórtice, con el correr del tiempo, se enrolla en si mismo, hasta que en

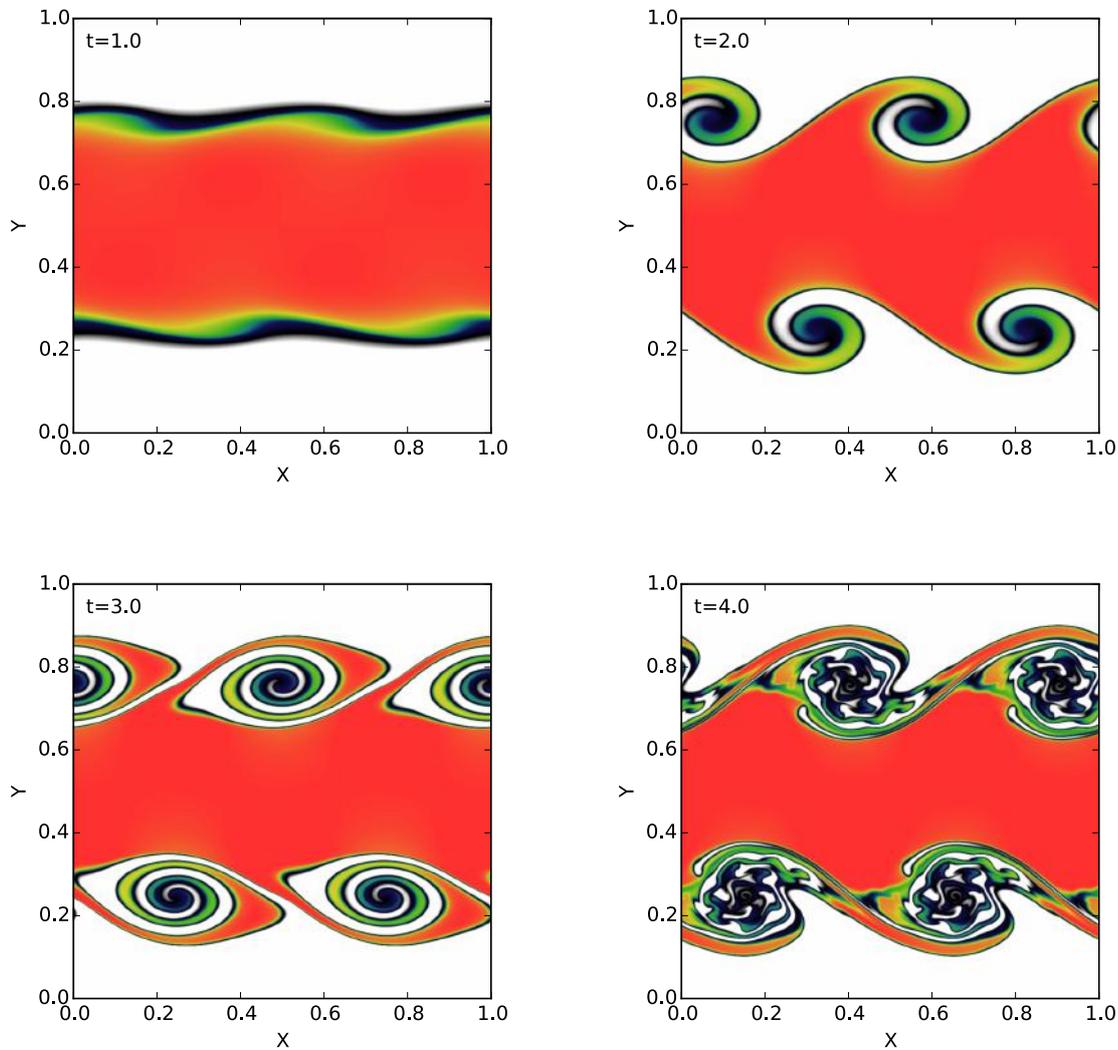


Figura 4.3: Aspecto de la evolución temporal para la prueba bidimensional de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz sobre una malla cartesiana. En los paneles se muestra el campo de densidad para diferentes instantes de tiempo. Puede verse como a tiempos tempranos la densidad perturbada comienza a desarrollar un movimiento rotatorio, el cual desencadena en vórtices que van creciendo en tamaño, hasta que los mismos vórtices desarrollan la misma inestabilidad en estructuras menores.

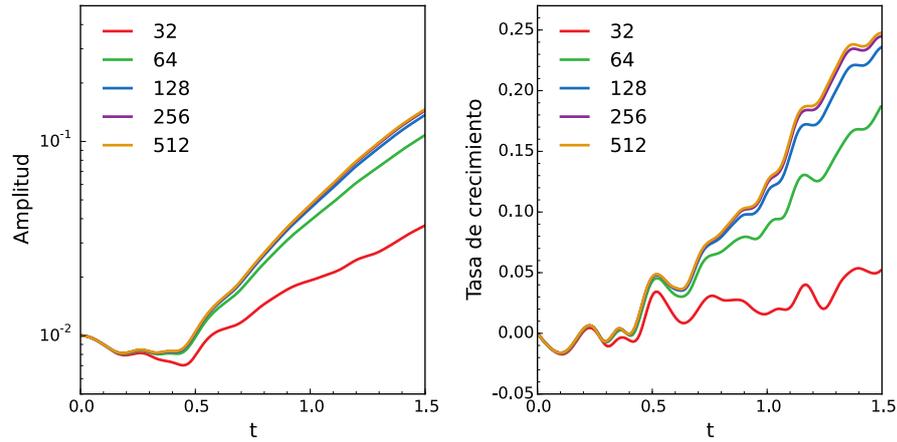


Figura 4.4: Amplitud del modo inestable (panel izquierdo) y tasa de crecimiento de dicho modo (panel derecho) en función del tiempo. Se realiza el cálculo para 5 resoluciones diferentes, las cuales difieren una de otra en un factor 2. Vemos que se alcanza una convergencia muy buena para resoluciones superiores a 128^2 , lo cual es levemente inferior a la alcanzada por el código PENCIL, el cual es de muy alto orden. La comparación con el resto de códigos nos muestra que las propiedades difusivas de nuestro código son muy buenas, y que somos capaces de resolver la inestabilidad de forma comparable al resto de códigos, en iguales condiciones.

un cierto punto, se desarrollan sub inestabilidades de Kelvin-Helmholtz en el interior de cada uno de ellos.

Otro aspecto interesante de ser calculado y comparado con el trabajo de McNally *et al.* (2012) es la amplitud del modo inestable en función del tiempo y tu tasa de crecimiento.

La amplitud del modo inestable se calcula como:

$$M = 2\sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^N s_i}{\sum_{i=1}^N d_i}\right)^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^N c_i}{\sum_{i=1}^N d_i}\right)^2}, \quad (4.11)$$

donde la suma es sobre todas las celdas de la malla, y s , c y d vienen dados por:

$$s_i = \begin{cases} V_y \sin(4\pi x) \exp(-4\pi|y - 0,25|) & y < 0,5 \\ V_y \sin(4\pi x) \exp(-4\pi|(1 - y) - 0,25|) & y \geq 0,5 \end{cases}$$

$$c_i = \begin{cases} V_y \cos(4\pi x) \exp(-4\pi|y - 0,25|) & y < 0,5 \\ V_y \cos(4\pi x) \exp(-4\pi|(1 - y) - 0,25|) & y \geq 0,5 \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} \exp(-4\pi|y - 0,25|) & y < 0,5 \\ \exp(-4\pi|(1 - y) - 0,25|) & y \geq 0,5 \end{cases}$$

En el panel izquierdo de la Fig. 4.4 se muestra el resultado del cálculo de la amplitud M del modo inestable. Además, en el panel derecho de la misma figura se muestra la tasa de crecimiento de M , definida simplemente como la derivada

temporal de $M(t)$.

La comparación con la Fig. 7 de McNally *et al.* (2012) muestra que la inestabilidad es bien resuelta a resoluciones moderadas. A diferencia de códigos de más alto orden, como por ejemplo PENCIL, la convergencia con la resolución es más pobre en nuestro caso, aunque se alcanza un muy buen valor de convergencia a resoluciones moderadas.

También utilizamos esta prueba para demostrar la ventaja del algoritmo FARGO, utilizado para la advección orbital, la cual puede verse en la Fig. 3.12.

4.5. Problema de Riemann MHD

El problema de Riemann MHD, conocido como el problema del tubo de choque de Brio y Wu (Brio y Wu, 1988) es un tubo de choque estándar, similar al problema de Sod (1978), donde los efectos de una discontinuidad en el campo magnético transversal son estudiados. Por experiencia, vimos que este test es de mucha ayuda para detectar problemas de implementación en la MHD.

Stone y Norman (1992b) dan una discusión interesante sobre la utilidad de esta prueba. Ellos argumentan que los flujos MHD pueden tener ondas compuestas, las cuales pueden incluir una onda de rarefacción atada a una onda de choque de la misma familia, y dan como ejemplo, una onda de rarefacción atada a una onda de choque, por lo que comportamientos muy diferentes respecto del caso hidrodinámico puro pueden esperarse.

En esta sección realizamos la versión 1.5D de esta prueba, a lo largo de la dirección Z , utilizando las mismas condiciones iniciales y resolución que Stone y Norman (1992b).

La prueba de Brio y Wu se inicia a partir de dos estados uniformes ($-$ & $+$), separados por una discontinuidad entre ellos.

El dominio del problema es $0 \leq z \leq 800$ y la discontinuidad se localiza en $z = 400$. En $t = 0$ iniciamos las demás cantidades como:

$$P = \begin{cases} 1 & z \leq 400 \\ 0,1 & z > 400 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\rho = \begin{cases} 1 & z \leq 400 \\ 0,1 & z > 400 \end{cases} \quad (4.13)$$

$$B_y = \begin{cases} 1 & z \leq 400 \\ -1 & z > 400 \end{cases} \quad (4.14)$$

$B_z = 0,75$ para todo el dominio.

Utilizamos la ecuación de estado adiabática con índice $\gamma = 2,0$ y 800 celdas uniformemente espaciadas. La condición de contorno adoptada es reflectante en ambas fronteras.

En la Fig. 4.5 se observan las cantidades fundamentales para $t = 80$:

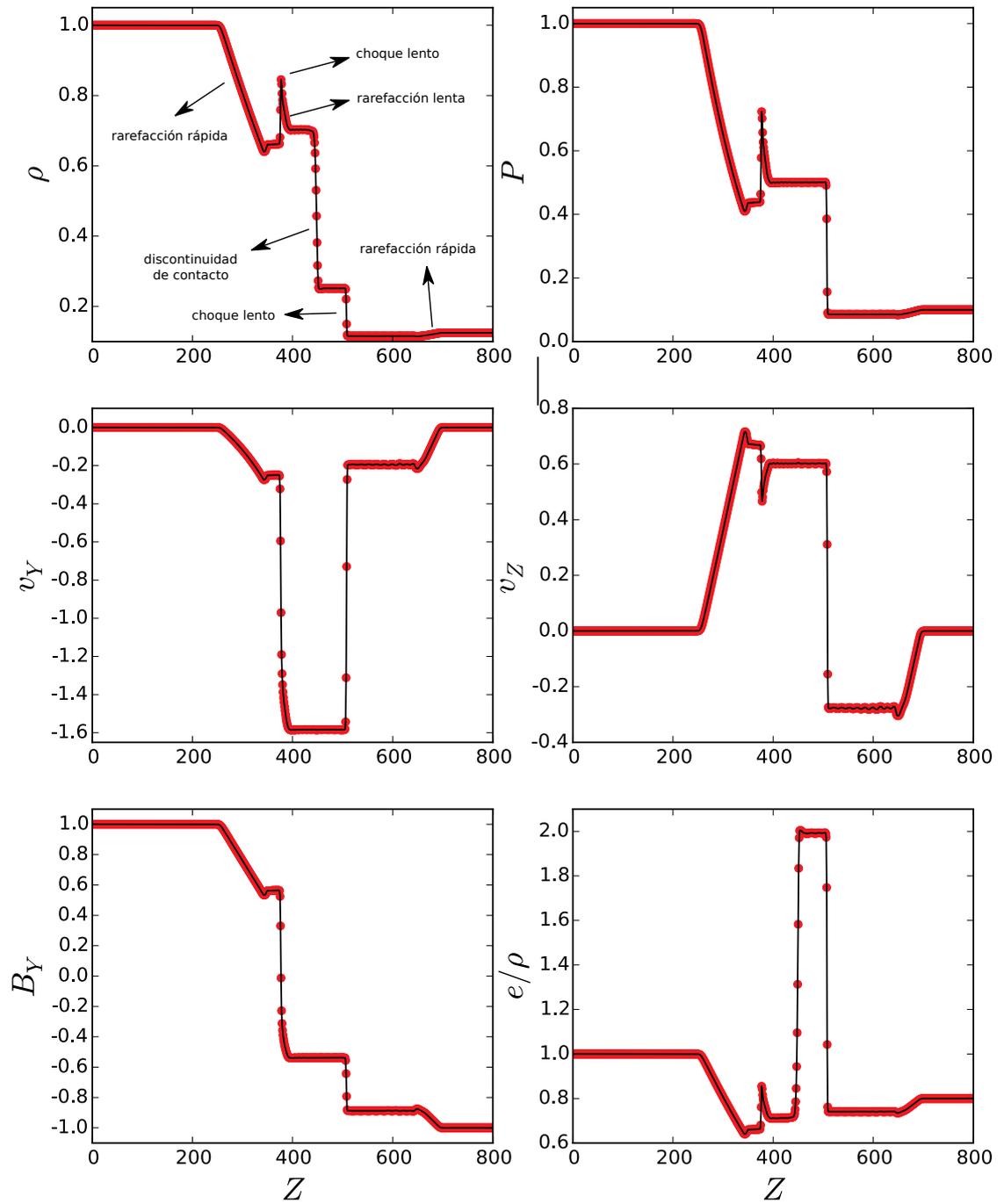


Figura 4.5: Problema de Riemann MHD. Esta figura puede ser comparada con la figura 6 de [Stone y Norman \(1992b\)](#) y la figura 2 de [Brio y Wu \(1988\)](#).

Lo que se observa en esta prueba, al igual que en la prueba de Sod, es la existencia de ondas que viajan a izquierda y derecha respectivamente. Las que van hacia la izquierda son una onda de rarefacción rápida y una onda compuesta lenta, formada por una rarefacción lenta combinada con un choque lento (marcados en la figura). Las ondas que viajan a derecha son, una discontinuidad de contacto, un choque lento y una rarefacción rápida.

A pesar de unas pequeñas oscilaciones en torno a $Z \sim 600$ para la velocidad en z , el comportamiento de la solución es el esperado e indiscernible a simple vista con la prueba presentada en la figura 6 de Stone y Norman (1992b).

4.6. Difusión de una hoja de corriente

Al igual que lo hicimos con el módulo viscoso, el módulo resistivo también debe ser verificado para asegurar que los tiempos difusivos son los esperados.

Para esto, estudiamos la difusión de una hoja de corriente. Este es un proceso gobernado exclusivamente por el término resistivo, por lo que es una prueba ideal para nuestro propósito.

El problema es 1.5 dimensional, y se define formalmente como:

$$B_y(z) = \begin{cases} B_0 & z > 0 \\ -B_0 & z < 0, \end{cases}$$

B_z, v_y, v_z son nulos para todo el dominio. La condición anterior equivale a una δ de Dirac en la corriente, razón por la cual se la llama *hoja de corriente*¹. La resistividad η se asume constante.

Si se desprecia la fuerza de Lorentz, el campo magnético se desacopla de la materia, por lo que sólo debe resolverse la ecuación de inducción magnética. La presión inicial para la prueba es uniforme e igual a la unidad, por lo que la velocidad se mantendrá nula durante toda la integración.

Ya que la velocidad es nula, la ecuación de inducción se reduce a una ecuación de difusión para la corriente, y su solución será:

$$B_y(z, t) = B_0 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4\eta t}} \right). \quad (4.15)$$

Para resolver este problema utilizamos una malla con 512 celdas uniformemente espaciadas sobre un dominio espacial definido como $-1 \leq z \leq 1$. Consideramos un campo magnético inicial $B_0 = 1$ y un valor para la resistividad $\eta = 0,25$.

Con el objetivo de obtener una solución suficientemente suave, al igual que en la prueba del anillo de gas, en vez de iniciar una δ de Dirac en la corriente, utilizamos un perfil suave para el campo magnético, dado por la ecuación (4.15) evaluada en $t_0 = (5\Delta z/2)^2$, con Δz el tamaño de una celda y obtenemos B_y . Esta

¹La corriente se define como $\vec{j} = \nabla \times \vec{B}/\mu_0$.

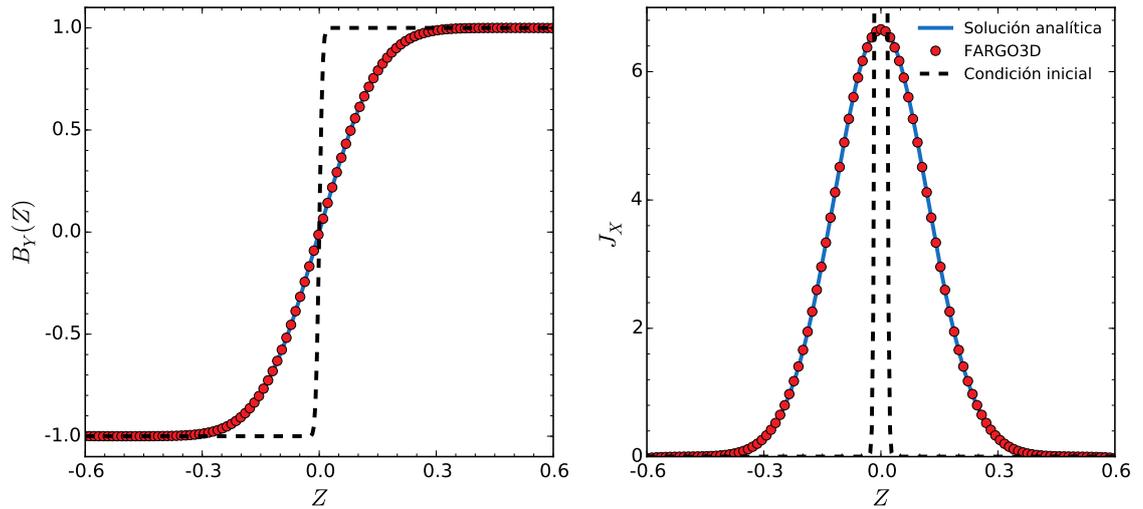


Figura 4.6: Prueba de la difusión de una hoja de corriente bajo los efectos de la resistividad magnética η . En el panel de la izquierda se muestra la evolución del campo magnético mientras que en el de la derecha se muestra la corriente, definida como $J_X = \partial_Z B_Y$. Las líneas a trazos negras corresponden con la condición inicial. Los puntos rojos son la solución numérica obtenida a tiempo $t = 30t_0$. La solución analítica esperada, dada por la ecuación (4.15) se muestra con una línea sólida azul. Notar la similitud entre la solución numérica y la analítica.

prescripción suaviza el perfil de B_y sobre 10 celdas.

En la Fig. 4.6 mostramos una comparación entre la solución numérica y analítica en un tiempo igual a $t = 30t_0$, tanto para el campo magnético B_Y como para su derivada, la cual define a la corriente J_X .

La similitud entre la solución numérica y el cálculo analítico es notable. Esta prueba fue de gran ayuda durante el desarrollo y algunas simulaciones realizadas para descartar la existencia de problemas en el módulo resistivo. Por ejemplo, esto es de importancia en las simulaciones realizadas en el capítulo 6.

4.7. Cilindro magnético rotante

En este apartado realizamos la prueba sugerida por Balsara y Spicer (1999), conocida como *MHD rotor test* o prueba del cilindro magnético rotante.

Esta prueba fue diseñada para verificar la propagación de ondas torcionales de Alfvén, las cuales son de importancia en problemas de formación estelar Balsara y Spicer (1999). La prueba consiste en generar un cilindro de materia que rote rápidamente en torno a su centro, sumergido en un ambiente de fondo poco denso. Por la simetría del problema, esta prueba es una gran oportunidad para comparar dos geometrías diferentes resolviendo el mismo problema, como son, la geometría cilíndrica y la cartesiana.

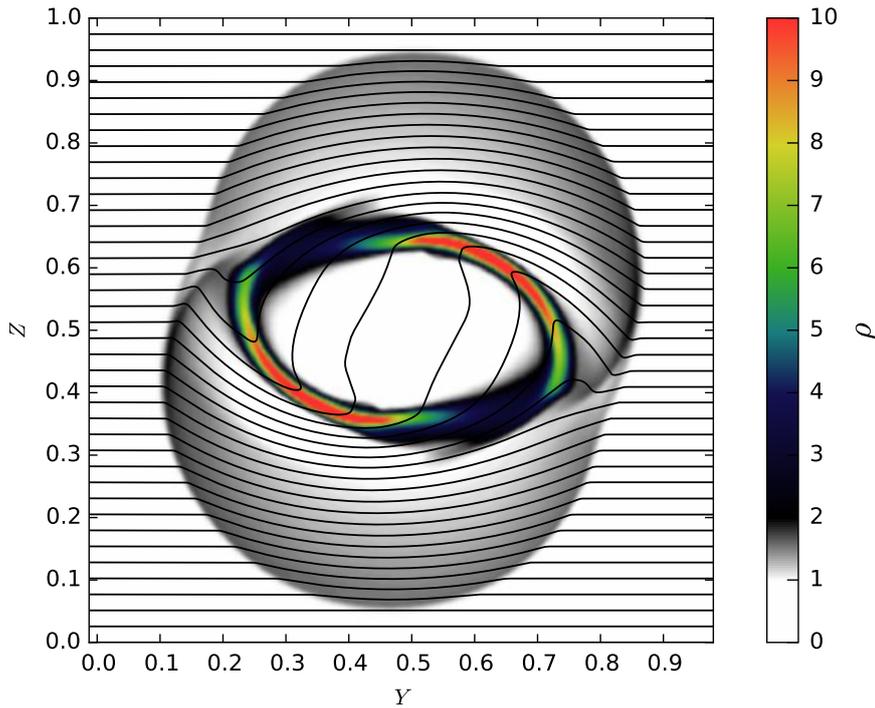


Figura 4.7: Resultado de la prueba del cilindro magnético rotante en $t = 0,15$. Las líneas sólidas se corresponden con la líneas de campo magnético, mientras que el color de fondo representa el campo de densidad.

En coordenadas cartesianas, la condición inicial para este problema es:

$$\rho(y, z) = \begin{cases} 1 & r < r_0 \\ 10 & r_0 \leq r \leq r_1 \\ 1 + 9f(r) & r_1 < r < r_2 \\ 1 & r \geq r_2 \end{cases}$$

$$v_y(y, z) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ -v_0(z - 0,5)/r_1 & r_0 \leq r \leq r_1 \\ -f(r)v_0(z - 0,5)/r_1 & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r \geq r_2 \end{cases}$$

$$v_z(y, z) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ v_0(y - 0,5)/r_1 & r \leq r_1 \\ f(r)v_0(y - 0,5)/r_1 & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r \geq r_2 \end{cases} ,$$

donde $r = \sqrt{(y - 1/2)^2 + (z - 1/2)^2}$ y la función de suavizado f se define como $f(r) = (r_1 - r)/(r_1 - r_0)$. Nosotros fijamos $r_0 = 0,1$, $r_1 = 0,115$, $v_0 = 2$, $\gamma = 1,4$, una presión uniforme $P = 1,0$ un campo magnético inicial uniforme, cuyo valor es $B_y = 5/\sqrt{4\pi}$ y $B_z = 0$. Para esta prueba utilizamos una malla con 512^2 celdas uni-

formemente distribuidas sobre un dominio espacial $Y \in [-0,5, 0,5], Z \in [-0,5, 0,5]$.

Para la versión cilíndrica de esta prueba, la condición inicial que utilizamos es la misma para la densidad; la velocidad radial se define nula en todo el dominio, y la velocidad acimutal v_φ es:

$$v_\varphi(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ v_0 r / r_1 & r \leq r_1 \\ f(r) v_0 r / r_1 & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r \geq r_2 \end{cases},$$

Utilizamos una malla con 256 celdas en radio y 1024 celdas en acimut, ambas uniformemente distribuidas sobre una malla polar con dominio $r \in [0,01, 0,5], \varphi \in [0, 2\pi]$.

En ambos casos, cartesiano como cilíndrico, las condiciones de contorno son reflectantes, y la ecuación de estado utilizada es adiabática.

Un primer resultado es mostrado para la prueba cartesiana en la Fig. 4.7, en donde escogió una paleta de alto contraste para poder observar con detalle la estructura de la región comprimida. En líneas negras también se observan las líneas de campo magnético, las cuales fueron refractas por la rotación del fluido y alteradas con la propagación los frentes de onda de color gris oscuro. Esta figura puede ser comparada con la figura 2 de [Balsara y Spicer \(1999\)](#).

Una comparación entre el caso cilíndrico y cartesiano puede verse en la Fig. 4.8. Una comparación entre ambos paneles de dicha figura nos permite concluir que la implementación de la MHD en ambos sistemas de coordenadas es totalmente comparable.

Hay que notar que en nuestra versión de esta prueba hemos introducido un cambio respecto de la literatura, y consistió en agregar un hueco en la región interna del cilindro para aliviar posibles problemas en la frontera interna en el caso cilíndrico.

Por último, una comparación precisa de nuestros resultados, a pesar del hueco central, puede hacerse con el resultado obtenido para esta prueba por los desarrolladores del código FLASH, ya que nosotros utilizamos la misma condición inicial. (<http://flash.uchicago.edu>).

4.8. Vórtice de Orszag-Tang

Aquí realizamos la famosa prueba MHD conocida como vórtice de Orszag-Tang ([Orszag y Tang, 1979](#)). Esta prueba se convirtió en una prueba estándar para códigos MHD, por lo que hay una gran cantidad de material de comparación disponible. La condición inicial se transforma, con el correr del tiempo, en un vórtice inestable, el cual es un punto inestable y muy sensible a cualquier perturbación, por lo que al cabo de un cierto tiempo, termina saliéndose de su posición inicial en el centro de la malla.

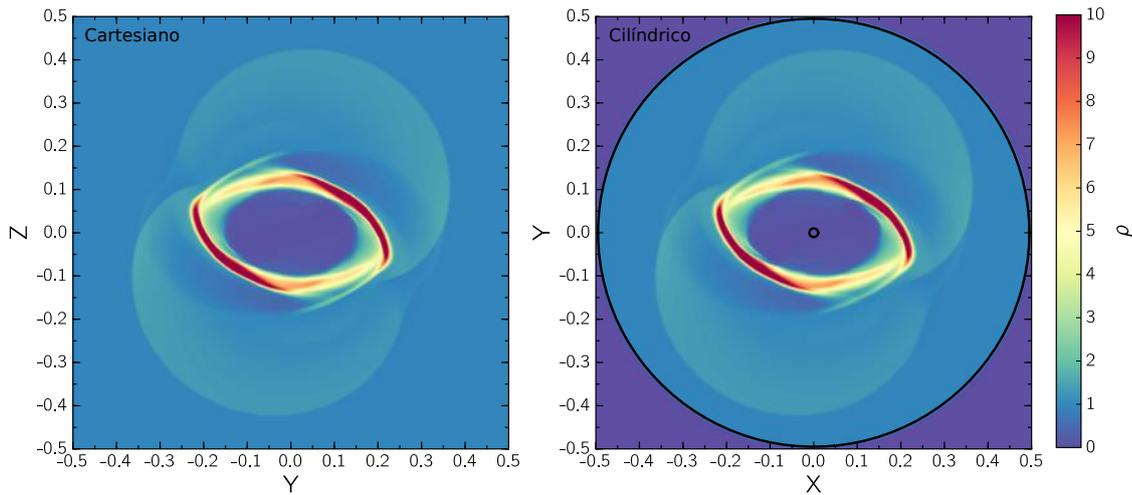


Figura 4.8: Comparación entre el resultado cartesiano y cilíndrico de la prueba (representado sobre una base cartesiana). Con líneas sólidas negras se demarca el límite del dominio hidrodinámico en la simulación cilíndrica. Ambos paneles se encuentran en muy buen acuerdo.

Otra propiedad interesante de la prueba es que según sea el grado del método utilizado para resolver las ecuaciones, o dicho de otra forma, según sean las propiedades difusivas del código, aparecerán un número diferente de sub vórtices, los cuales tienen una vida media muy corta comparada con la del vórtice central de la simulación. Así, esta prueba puede permitir comparar las propiedades difusivas de los diversos métodos existentes para resolver la MHD.

El problema se define sobre un dominio físico $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, y la condición inicial es:

$$\begin{aligned}
 v_y(z) &= -\sin(2\pi z) \\
 v_z(z) &= \sin(2\pi y) \\
 B_y &= -B_0 \sin(2\pi z) \\
 B_z &= B_0 \sin(4\pi y) \\
 P &= 5/(12\pi),
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

con $B_0 = (4\pi)^{-1/2}$.

La presión y la densidad se inician uniformes en todo el dominio, con valor $25/(36\pi)$ y $5/(12\pi)$.

Para este test utilizamos una ecuación de estado adiabática, con índice $\gamma = 5/3$. La Fig. 4.9 puede ser comparada de forma directa con las figuras 10 y 11 de [Londrillo y Del Zanna \(2000\)](#). Observamos un acuerdo excelente para esta prueba respecto de la solución encontrada por otros autores. Por otro lado, observamos una buena tendencia hacia la convergencia con la resolución en el panel inferior de la Fig. 4.9.

Como último comentario diremos que esta prueba fue crucial durante el desa-

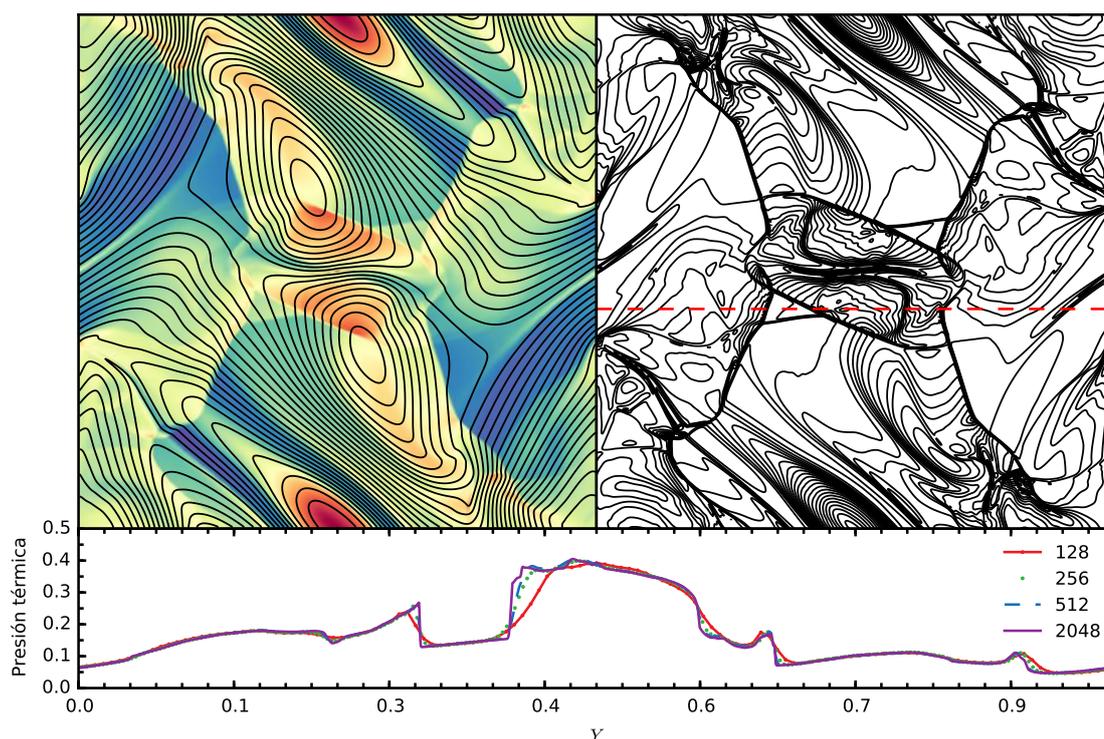


Figura 4.9: Prueba de Orszag-Tang a $t=0.5$. El panel superior izquierdo muestra la densidad, en dónde se incluyen las líneas de campo magnético. El panel superior de la derecha muestra los contornos de presión térmica (sin incluir presión magnética). El panel inferior muestra el valor de la presión a lo largo de la curva a trazos roja del panel superior derecho, localizada a una altura $z = 0,4277$. Este corte es hecho por varios autores en la misma posición, por lo que sirve de comparación.

rollo del código. Observamos que esta prueba es extremadamente sensible a los errores de programación, y nos permitió encontrar muchos de ellos, pequeños pero suficientemente importantes.

4.9. Lazo magnético

Esta es una prueba bidimensional, propuesta por [Gardiner y Stone \(2005\)](#) y basada en la advección pura de un lazo magnético cerrado sobre un fondo de densidad y velocidad uniformes.

La prueba se realiza en el límite $\beta \gg 1^2$, donde la presión magnética es despreciable respecto de la presión del gas, por lo que el lazo magnético debe ser advectado de forma pura y sin distorsiones por el campo de velocidad de fondo. Así, se dice que el lazo debe ser un trazador pasivo del flujo.

La condición inicial que utilizamos es similar a realizada por [Gardiner y Stone \(2005\)](#) y [Fromang et al. \(2006\)](#).

Para iniciar un campo magnético no divergente, utilizamos el potencial vector

² $\beta = P_G/P_M$

\vec{A} . Como el problema es en el plano YZ , el potencial vector se reduce al caso escalar:

$$A_x(r) = \begin{cases} A_0(R-r) & \text{si } r < R \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

con $A_0 = 10^{-3}$, $R = 0,3$ y $r = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Utilizamos una malla cartesiana sobre el dominio $-1 \leq y \leq 1$, $-0,5 \leq z \leq 0,5$, con 128 celdas en la dirección y y 64 celdas en la dirección z . Las condiciones de contorno utilizadas son periódicas en las dos direcciones.

Para esta prueba realizamos dos simulaciones, una de ellas con $v_y = \sqrt{5}/2$, $v_z = 0$ y la segunda $v_y = 1,0$, $v_z = 0,5$, lo cual permite probar el caso de advección a lo largo de un eje y , la advección compuesta, a lo largo de ambos ejes en simultáneo.

En la figura 4.10 mostramos la evolución de la energía magnética media de la malla y la forma que adquiere el lazo (inicialmente circular) luego de una advección completa sobre el dominio para ambos casos. El decaimiento de energía magnética para el caso horizontal puede ser comparado de forma directa con la figura 5 de [Fromang et al. \(2006\)](#). Ya que estos autores poseen una velocidad

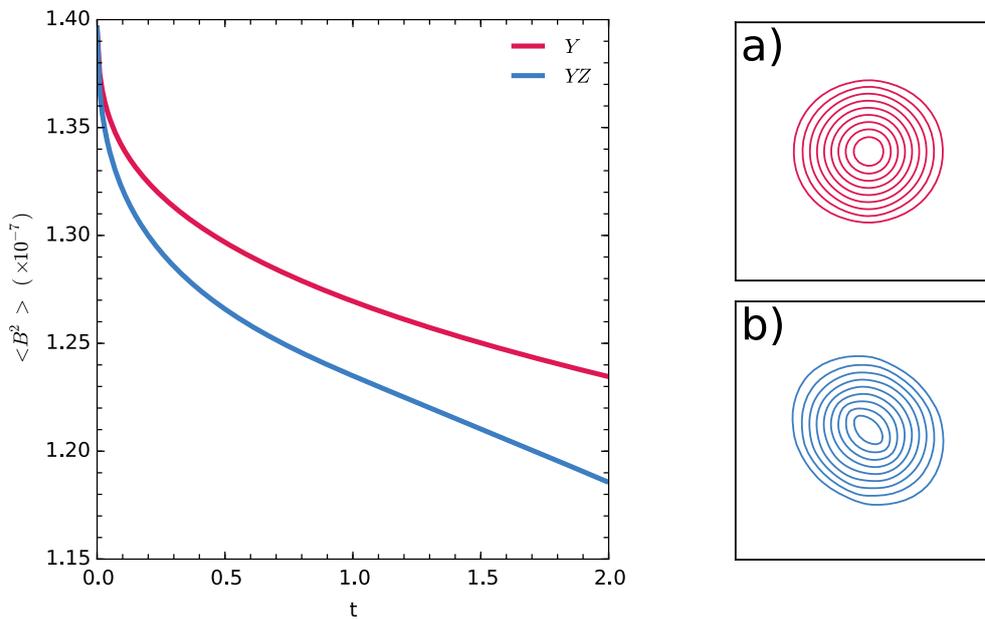


Figura 4.10: El panel principal muestra la evolución temporal de la energía magnética el lazo magnético mientras es advechado por el campo de velocidad de fondo, y nos permite entender las propiedades difusivas del código. En los paneles de la derecha mostramos la forma que tienen los lazos magnéticos (a través de sus líneas de campo magnético). El panel *a*) se corresponde con una instantánea del lazo luego de hacer el primer recorrido completo por la malla, para el caso de advección horizontal pura. Lo mismo es mostrado pero para el caso de advección oblicua en el panel *b*).

igual al doble que la utilizada por nosotros, la comparación debe realizarse en un tiempo $t = 2$. En nuestro caso. ($E_m \approx 1,235 \cdot 10^{-7}$), mientras que ellos a $t = 1$ miden $E_m \approx 1,225 \cdot 10^{-7}$ para el método de Roe y $E_m \approx 1,19 \cdot 10^{-7}$ para el método de Lax-Friedrichs.

Esta prueba demuestra que los métodos de advección que implementamos son comparables con el método de Roe para el caso magnético.

4.10. Hoja de corriente

Una prueba que permite observar las propiedades difusivas de la implementación realizada para la resolución de la MHD es la prueba conocida como *current sheet* (hoja de corriente en español).

Este es un problema bidimensional en el cual se consideran estados iniciales discontinuos para el campo magnético, los cuales crean hojas de corriente.

Los detalles de esta prueba se encuentran en [Gardiner y Stone \(2005\)](#), aunque esta prueba ha sido realizada también por otros autores, como por ejemplo [Fromang et al. \(2006\)](#).

En este caso, a diferencia de la prueba presentada en la sección 4.6, no incluimos resistividad, por lo que la evolución de las hojas de corriente estará gobernada por la *resistividad numérica*, o también llamada, difusión numérica.

Utilizamos exactamente la misma configuración de [Gardiner y Stone \(2005\)](#) y [Fromang et al. \(2006\)](#). El dominio de la malla es $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ y utilizamos 256 celdas en cada dirección. La densidad inicial es uniforme, con valor $\rho = 1$, la presión también se inicia de forma uniforme, con valor $P = 0,1$ y el campo magnético es nulo para sus componentes x e y .

B_z se inicia como:

$$B_z(y) = \begin{cases} +1 & \text{si } |y - 1| < 0. \\ -1 & \text{si } |y - 1| \geq 0. \end{cases}$$

La velocidad inicial vertical es nula para toda la malla y la velocidad horizontal es iniciada como $v_y = v_0 \sin(\pi z)$. Consideramos el valor $v_0 = 0,1$. La ecuación de estado utilizada es la adiabática, con índice $\gamma = 5/3$.

En la Fig. 4.11 se observa el resultado de esta prueba para diferentes instantes de tiempo. Los contornos negros son las líneas de campo magnético.

El comportamiento observado es muy similar al reportado por [Fromang et al. \(2006\)](#). A gran tiempo ($t > 2,5$), se forman cuatro islas magnéticas sobre lo que inicialmente era una discontinuidad en el campo.

En el caso de la prueba de [Gardiner y Stone \(2005\)](#), ellos observan sólo dos islas. Algo remarcable de nuestra implementación es que conserva la simetría central respecto de los nodos de velocidad, al igual que el código RAMSES ([Fromang et al., 2006](#)). Esto no ocurre para [Gardiner y Stone \(2005\)](#).

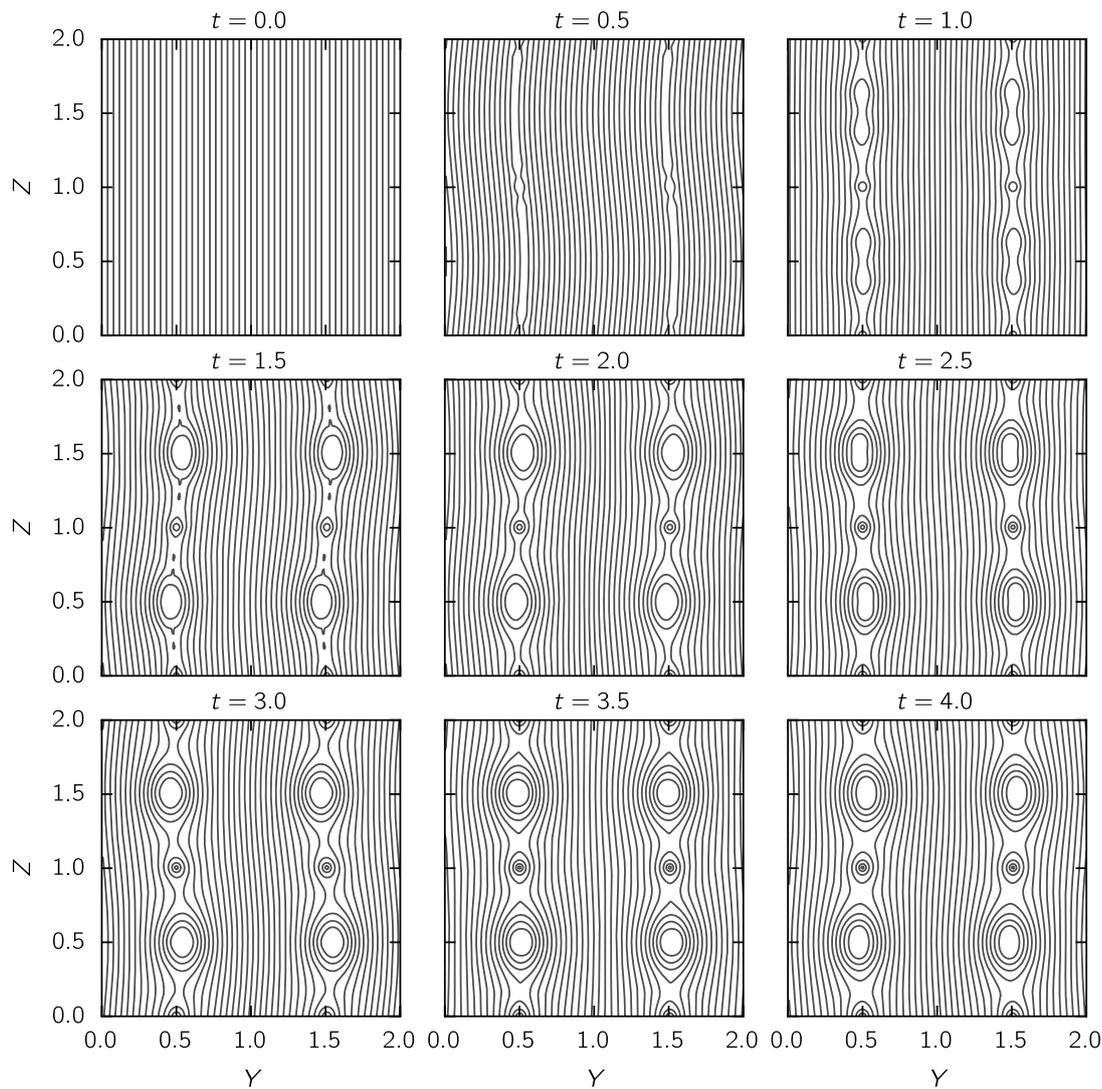


Figura 4.11: Se muestran las líneas de campo magnético para el problema de las hojas de corriente en diferentes instantes de tiempo. Una de las principales características de esta figura es la conservación de la simetría para todo tiempo, lo cual no es una característica común a todos los códigos.

4.11. MRI en discos no estratificados

En esta sección, como una prueba tridimensional con campos magnéticos, mostramos algunas propiedades de nuestro código para resolver la inestabilidad magnetorotacional en coordenadas cilíndricas.

Realizamos una implementación muy similar a la realizada por [Baruteau *et al.* \(2011\)](#), en la cual no se consideran fuerzas en la dirección Z . Consideramos el caso isoterma, por lo que no evolucionamos la ecuación de la energía interna. La velocidad del sonido es iniciada como $c_s(r) = 0,1v_k(r)$, con $v_k(r)$ la velocidad de rotación Kepleriana y utilizamos una malla cilíndrica con una extensión

radial $r \in [1, 8]$, una extensión vertical $z \in [-0,3, 0,3]$, y una extensión acimutal $\varphi \in [0, \pi]$. La densidad es iniciada como una ley de potencia con índice $-0,5$. El campo magnético inicial es puramente toroidal, y su intensidad es tal que su presión es 50 veces menor que la presión térmica ($\beta = 50$).

Para desarrollar la inestabilidad, introducimos ruido en la componente radial y vertical de la velocidad, con una amplitud del 5% de la velocidad del sonido.

Las condiciones de contorno son periódicas en Z y reflectantes en r . Para minimizar efectos de borde con el campo magnético, implementamos zonas de alta resistividad en anillos cercanos a las fronteras. ($r = 1$ a $r = 2$ y $r = 7$ a $r = 8$). Utilizamos un marco de referencia corrotante con $r = 3$.

La duración total de la simulación es de 300 órbitas a $r=1$.

En la Fig. 4.12 mostramos el valor del parámetro α de Shakura y Sunyaev (1973), en función del radio y promediado entre la órbita 120 y 300 del radio interno. α se calcula como:

$$\alpha(r, t) = \alpha_{\text{Reynolds}}(r, t) + \alpha_{\text{Maxwell}}(r, t), \quad (4.17)$$

con,

$$\alpha_{\text{Reynolds}}(r, t) = \frac{\iint \rho \delta v_r \delta v_\phi d\phi dz}{c_s^2(r) \iint \rho d\phi dz}, \quad (4.18)$$

$$\alpha_{\text{Maxwell}}(r, t) = -\frac{\iint B_r B_\phi d\phi dz}{\mu_0 c_s^2(r) \iint \rho d\phi dz}. \quad (4.19)$$

donde δv_r y δv_ϕ son las fluctuaciones de la velocidad respecto del campo de velocidad medio a cada radio.

Vemos en dicha figura que el valor de *alpha* es sistemáticamente menor para el caso de advección estándar salvo en el radio de corrotación, en donde al tener campos de velocidad de magnitud más pequeña, la difusión numérica es menor.

En el panel izquierdo (a) de la Fig. 4.13 mostramos la evolución temporal de α , en donde se obtuvo a partir de promediarlo desde $r = 2,1$ a $r = 6,5$. Como se evidenciaba en la figura anterior, el valor de α es menor en el caso estándar ya que presenta mayores propiedades difusivas. Esta figura puede ser comparada de forma directa con la figura 6 de Baruteau *et al.* (2011), en particular con la curva que muestra el resultado obtenido con el código NIRVANA. Nuestro resultado muestra un valor de α significativamente más plano, pero al no considerar resistividad en las fronteras, la saturación de la turbulencia se sostiene durante más tiempo.

En el panel central de (b) la Fig. 4.13 mostramos el valor promedio $\bar{\theta}_B$ del ángulo de inclinación del campo magnético, definido por Sorathia *et al.* (2012) o

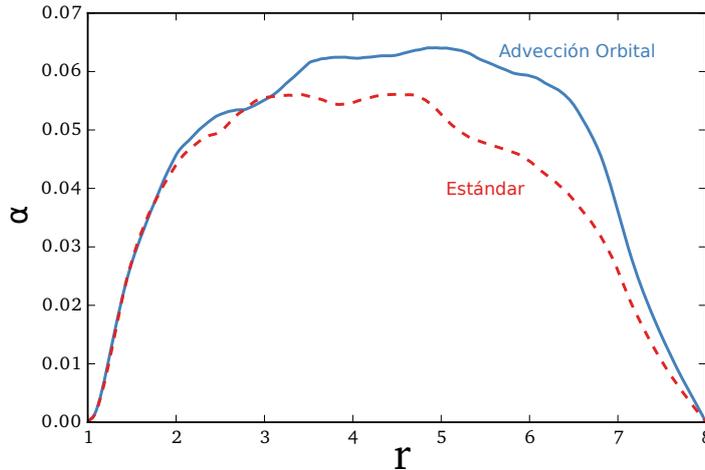


Figura 4.12: Valor del parámetro α de [Shakura y Sunyaev \(1973\)](#) en función de la distancia para el caso en el que se utiliza la advección orbital (FARGO-MHD), representado por la curva continua azul, y el caso estándar, representado por una curva a trazos roja. La caída del parámetro se debe a regiones de alta resistividad colocadas con el objetivo de minimizar efectos de borde sobre la región central.

[Mignone et al. \(2012\)](#) como:

$$\sin 2\theta_B = \frac{|B_\phi B_r|}{P_{\text{mag}}}. \quad (4.20)$$

Este valor converge hacia un valor oscilatorio alrededor de los 15° en el caso que considera el método de advección orbital y levemente inferior para el caso estándar, evidenciando mayores propiedades difusivas.

Por último, en el tercer panel (c) de la Fig. 4.13 mostramos el espectro de la componente acimutal del campo magnético, tanto para el caso de advección orbital como estándar, para dos casos diferentes. Por un lado consideramos un anillo sobre la corrotación, y en el otro, uno localizado hacia afuera en el disco.

El espectro se define como:

$$mB_\phi(m) = m \sum_{k=0}^{N_z-1} \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \left| \sum_{i=0}^{N_\phi-1} B_{ijk} e^{\sqrt{-1} \frac{2\pi}{N_\phi} im} \right|, \quad (4.21)$$

donde j_{\min} y j_{\max} son los índices de los bordes de las regiones radiales consideradas para el cálculo de cada espectro. En ambos espectros se observa de forma sistemática que la advección orbital muestra mayor señal para modos acimutales altos, evidenciando nuevamente las mejores propiedades difusivas del algoritmo utilizado.

De esta serie de pruebas, concluimos que nuestra implementación del algoritmo de advección orbital permite obtener resultados de turbulencia con una

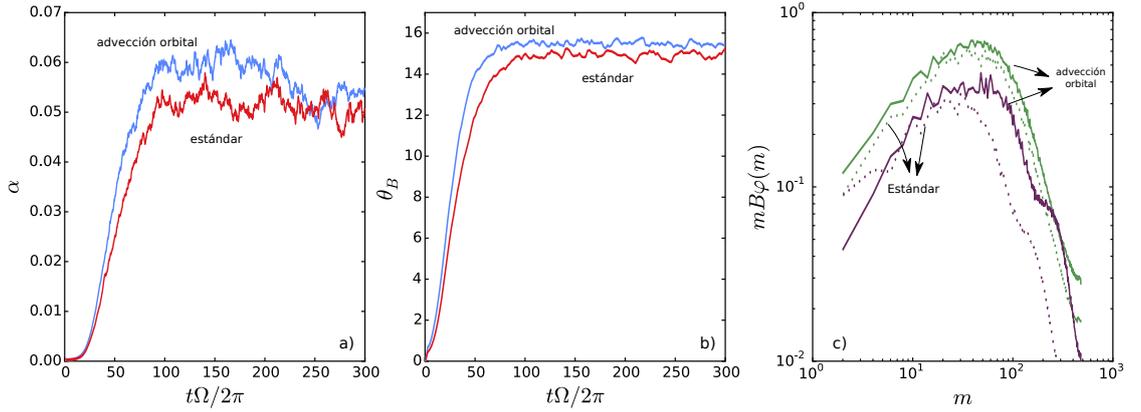


Figura 4.13: Propiedades El panel *a* muestra el valor del parámetro α en función del tiempo para el caso de advección orbital (curva azul), y para el caso estándar (curva roja). El panel *b* muestra la evolución temporal del ángulo de inclinación del campo magnético (en grados). Se compara el caso con advección orbital (curva azul) con el caso estándar (curva roja). En el panel *c* se muestra el espectro la componente acimutal del campo magnético en función del número de onda m . Las líneas sólidas se calculan considerando la advección orbital, mientras que las líneas de puntos utilizan el algoritmo estándar. Las curvas verdes se corresponden con un anillo delgado que abarca la región de corrotación ($r = 2,76$ a $r = 3,24$) mientras que las curvas violetas corresponden a un anillo externo ($r = 6,00$ a $r = 6,48$). Ambos espectros son calculados a un tiempo $t=100$ órbitas del borde interno de la malla.

menor difusión numérica.

4.12. Vórtice en un disco Kepleriano

En esta sección realizaremos el test descrito por [Mignone *et al.* \(2012\)](#), en el cual estudian la evolución dinámica de un vórtice sumergido en un disco Kepleriano, en coordenadas polares.

La condición inicial se caracteriza por tener una densidad constante de fondo, igual a $\rho = 1$ y una presión uniforme, calculada como $P = \mathcal{M}^{-2}/\gamma$, con \mathcal{M} el número de Mach, cuyo valor es igual a 10. El disco es Kepleriano ($\Omega \propto r^{-3/2}$) y rota alrededor de una estrella de masa unitaria.

El dominio abarca $r \in [0,4,2]$, $\phi \in [0,2\pi]$ y se utiliza una malla uniforme en ambas direcciones, pero de tamaño variable según la prueba realizada (los detalles están en las leyendas de las figuras).

Se inicia un vórtice sumergido en el disco, mediante la expresión:

$$\begin{pmatrix} \delta v_R \\ \delta v_\phi \end{pmatrix} = \kappa \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{h^2}\right) \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

dónde $h = H_0/2$, es el tamaño del vórtice en función de la altura del disco a $R = R_0 = 1$, que para esta prueba se fija en $H_0 = 1$. $\kappa = -1$ es la amplitud del vórtice. $x = R \cos \phi - R_0 \cos \phi_0$ e $y = R \sin \phi - R_0 \sin \phi_0$ son las coordenadas cartesianas del

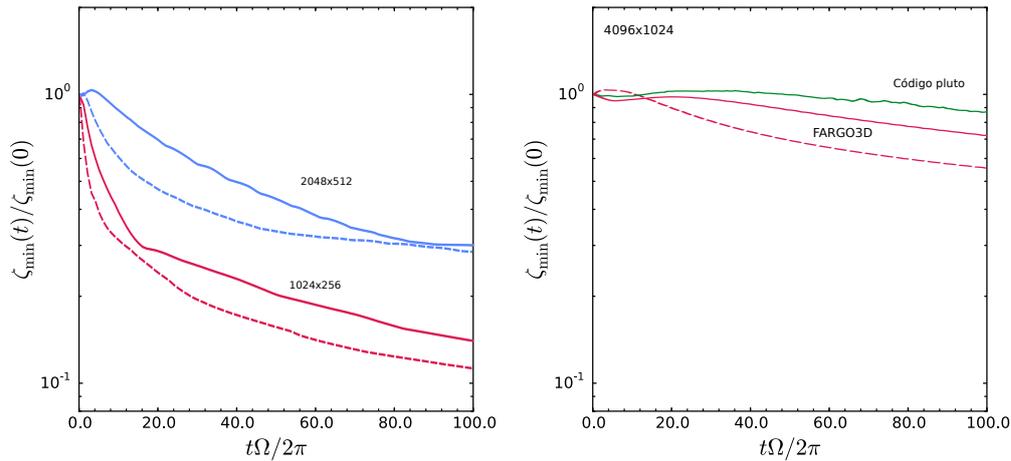


Figura 4.14: En el panel de la izquierda se muestra el decaimiento de la vortensidad mínima como función del tiempo para dos resoluciones diferentes. Las líneas continuas representan resultados obtenidos utilizando la advección orbital, mientras que las líneas a trazos representan los resultados del método estándar. En el panel de la derecha se observa lo mismo, pero a mayor resolución, y comparada con el resultado obtenido con otro código (PLUTO). Las curvas rojas representan los resultados obtenidos con nuestro código, y la verde con el código de comparación.

vórtice medidas desde el centro del vórtice, inicialmente localizado en $r = 1$.

La prueba consiste en medir el decaimiento de la vortensidad mínima en el tiempo, lo cual nos da una idea de las propiedades disipativas de los algoritmos utilizados.

Los resultados de la prueba se muestran en la Fig. 4.14. Se observa que nuestro código, al igual que el código de referencia utilizado, mejoran de forma considerable la conservación de la vortensidad mediante la utilización del algoritmo de advección orbital, y esto ocurre para todas las resoluciones utilizadas.

4.13. Conclusiones

A lo largo de este capítulo hemos realizado diversas pruebas para demostrar la validez de la implementación de los diferentes métodos para resolver las ecuaciones de la magnetohidrodinámica. En particular, realizamos pruebas en múltiples dimensiones y considerando diferentes algoritmos y efectos físicos. Las comparaciones de cada prueba con las soluciones encontradas por otros autores nos muestra que nuestra implementación es correcta.

Hemos visto que las propiedades conservativas de nuestro esquema son suficientemente buenas, y mostramos que nuestro código puede atacar una gran variedad de problemas, alcanzando soluciones adecuadas para cada uno de ellos.

Estas pruebas, además de habernos permitido encontrar diversas fallas que se introducen de forma involuntaria durante el proceso de programación, nos permitieron avanzar sobre *terreno firme* durante la posterior aplicación del código a problemas concretos.

Migración de planetas calientes

5

5.1. Introducción

Como se introdujo en el Capítulo 1, los planetas son un subproducto del proceso de formación estelar. Ellos se forman a partir de la aglomeración de fragmentos de roca y polvo, presentes en el disco de gas primordial. A medida que los fragmentos van ganando en tamaño, la gravedad comienza a ser una fuerza significativa, y la acreción se ve incluso más favorecida (Safronov, 1972).

Cuando los planetas adquieren un tamaño considerable, la fuerza gravitatoria que ejerce sobre el gas es tal que genera estructuras de gran escala en el disco, las cuales impactan de forma profunda en la posterior evolución de estos cuerpos (ver capítulo 2). Como se discutió en los primeros capítulos, tanto la teoría como las simulaciones numéricas predicen para estos cuerpos tasas de migración extremadamente rápidas, en particular para masas comprendidas en el rango de algunas masas terrestres (Tanaka *et al.*, 2002). Trabajos previos de modelos de síntesis de poblaciones planetarias (por ejemplo Levison *et al.*, 2010; Cossou *et al.*, 2014) muestran que la formación de planetas gigantes a distancias suficientemente grandes es poco probable, y argumentan que para obtener resultados comparables con las observaciones, algún mecanismo de reducción para la tasa de migración debería ser encontrado.

Por otro lado, como ya vimos en el capítulo 2, estudios de migración en discos adiabáticos encontraron una componente de torque que es sensible a los gradientes de entropía en la región coorbital (Paardekooper y Papaloizou, 2008; Baruteau y Masset, 2008a). Así, algún mecanismo que fuese capaz de alterar de forma significativa la entropía de la región coorbital podría, en principio, producir una nueva componente para el torque. Un ejemplo de tal mecanismo es el calentamiento por radiación.

Durante la etapa de formación, los planetas adquieren su masa a través de un proceso de acreción de sólidos (Pollack *et al.*, 1996), y esto conlleva un proceso de transformación de energía. Las partículas sólidas, que contienen una cierta cantidad de energía cinética y potencial respecto del planeta en formación, durante el proceso de acreción transformarán su energía en calor. Este calor será irradiado

desde la superficie del protoplaneta y podrá, así, calentar el gas circundante. Dependiendo de la magnitud del calor generado, la variación de entropía en dicha región será más o menos significativa, pudiendo alterar la tasa de migración del planeta.

Basados en estas ideas, en este capítulo estudiamos el impacto que tiene la acreción de sólidos sobre la tasa de migración de un embrión planetario en formación. Para esto, desarrollamos un modelo muy sencillo de la acreción sobre un planeta. Ésta es modelada como una energía radiativa que emerge desde la superficie del planeta e inyecta una determinada cantidad de energía térmica en el medio circundante.

Un aspecto importante a tener en cuenta en esta clase de estudios es el impacto de la tasa de absorción y emisión de energía del gas circundante. Así, la efectividad de transferencia de energía entre el planeta en formación y el gas circundante será dependiente de la opacidad del gas en las longitudes de onda de los fotones emergentes. Para calcular estas absorciones y emisiones de forma precisa, se desarrolló un módulo de transferencia radiativa en el código, el cual es brevemente descrito en la siguiente sección.

5.2. Transferencia radiativa

El módulo de transferencia radiativa se desarrolló siguiendo el trabajo de [Bitsch et al. \(2013\)](#). Las ecuaciones se resuelven en la aproximación de dos temperaturas. Las ecuaciones de evolución involucradas son:

$$\frac{\partial E_R}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = \rho \kappa_P (B - cE_R) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \epsilon = -P \nabla \cdot \vec{v} - \rho \kappa_P (B - cE_R) + Q^+, \quad (5.2)$$

donde E_R es la energía radiativa, y se evoluciona a partir de la energía térmica de forma independiente. El vínculo entre la energía térmica y radiativa viene a través de la función de Planck $B \equiv B(T) = 4\sigma T^4$, con T la temperatura y σ la constante de Stefan-Boltzmann. κ_P es la opacidad de Planck, la cual es constante en nuestra implementación. La energía térmica ϵ se calcula como $\epsilon = \rho c_v T$, con c_v el calor específico a volumen constante (asumido constante en nuestra implementación). \vec{v} es la velocidad del gas y P la presión térmica. Q^+ corresponde con la función de calentamiento viscoso, la cual se calcula de forma análoga a como se calculó el trabajo de la fuerza de presión. \vec{F} es el flujo radiativo. A fin de no considerar una ecuación adicional para la evolución de F , se utiliza la aproximación conocida como difusión de flujo limitada, la cual permite cerrar el sistema. Esta aproximación proviene del desarrollo de una teoría difusiva para la radiación, y el flujo está limitado al no permitirse una magnitud para éste mayor que el producto de la densidad por la máxima velocidad de transporte ([Levermore y](#)

Pomraning, 1981). \vec{F} adopta la forma:

$$\vec{F} = -D\nabla E_R, \quad (5.3)$$

con D el coeficiente de difusión, definido como $D = \frac{\lambda c}{\rho \kappa_R}$. κ_R es la opacidad media de Rosseland, la cual también asumimos constante e igual a la opacidad de Planck (ver Fig. 1 de Bitsch *et al.*, 2013). λ es el llamado limitador de flujo (Levermore y Pomraning, 1981), y viene definido por (Kley, 1989):

$$\lambda = \begin{cases} \frac{2}{3 + \sqrt{9 + 10R^2}} & \text{si } R \leq 2,0 \\ \frac{10}{10R + 9 + \sqrt{81 + 180R}} & \text{si } R > 2,0 \end{cases} \quad (5.4)$$

donde R se define como:

$$R = \frac{1}{\rho \kappa_R} \frac{|\nabla E_R|}{E_R}. \quad (5.5)$$

La aproximación de difusión de flujo limitada permite estudiar de forma simultánea gas ópticamente grueso y delgado, reproduciendo correctamente los comportamientos límite en ambos extremos (Dobbs-Dixon *et al.*, 2010), por lo que es una aproximación razonable para el estudio de discos protoplanetarios.

En este estudio despreciamos el calentamiento por irradiación estelar, el cual es una fuente de calor adicional en la ecuación 5.1.

La implementación en diferencias finitas para la resolución de las ecuaciones (5.1) y (5.2) se hace siguiendo la implementación de Bitsch *et al.* (2013), quienes dan el método de forma implícita. Aquí reproducimos las ideas básicas, pero mayores detalles pueden encontrarse en el trabajo original.

La ecuación de evolución para la energía radiativa, en diferencias finitas y en la aproximación implícita, se escribe como:

$$\frac{E_R^{n+1} - E_R^n}{\Delta t} = G(E_R^{n+1}, T^{n+1}), \quad (5.6)$$

con G la expansión del término difusivo en diferencias finitas, avanzado en el tiempo y que depende de los coeficientes de difusión correctamente centrados sobre las celdas de la malla. G depende de la temperatura como su cuarta potencia, por lo que no puede ser despejada directamente para construir el método implícito. Asumiendo que la temperatura varía poco de un paso de tiempo al siguiente, puede ser desarrollada en serie (Commerçon *et al.*, 2011):

$$(T^{n+1})^4 \simeq 4(T^n)^3 T^{n+1} - 3(T^n)^4. \quad (5.7)$$

Con esta expresión, utilizando el operador splitting (ver sección 3.8) para la ecua-

ción de la energía térmica, sin considerar el transporte y el calentamiento por compresión (ver ecuación 3.50), se obtiene una expresión para la temperatura:

$$T^{n+1} = \eta_1 + \eta_2 E_R^{n+1}. \quad (5.8)$$

con

$$\eta_1 = \frac{T^n + 12\Delta t \frac{\kappa_P}{c_V} \sigma (T^n)^4 + \frac{\Delta t S}{\rho c_V} + \frac{\Delta t Q^+}{\rho c_V}}{1 + 16\Delta t \frac{\kappa_P}{c_V} \sigma (T^n)^3} \quad (5.9)$$

$$\eta_2 = \frac{\Delta t \frac{\kappa_P}{c_V} c}{1 + 16\Delta t \frac{\kappa_P}{c_V} \sigma (T^n)^3}. \quad (5.10)$$

Finalmente, combinando todo esto en la ecuación (5.6) y resolviendo para E_R , se obtiene un sistema matricial de la forma:

$$\begin{aligned} &\beta_{1,i,j,k} E_{R,i+1,j,k} + \beta_{2,i,j,k} E_{R,i-1,j,k} + \beta_{3,i,j,k} E_{R,i,j+1,k} + \beta_{4,i,j,k} E_{R,i,j-1,k} \\ &+ \beta_{5,i,j,k} E_{R,i,j,k+1} + \beta_{6,i,j,k} E_{R,i,j,k-1} + \Gamma_{i,j,k} E_{R,i,j,k} = R_{i,j,k}, \end{aligned}$$

con todo el miembro izquierdo evaluado en $n + 1$. Este problema puede ser invertido mediante un método iterativo, con lo que se obtiene la energía radiativa del problema. Una vez obtenida E_R , se calcula la temperatura utilizando 5.8 y finalmente se calcula la energía térmica $\epsilon = \rho c_V T$.

5.3. Descripción del modelo

Este estudio es realizado utilizando coordenadas esféricas tridimensionales y con el módulo de transferencia radiativa descrito en la sección anterior activado. Por simplicidad, la radiación estelar no es incluida¹.

Para la densidad de masa, se adoptó una fórmula para el equilibrio hidrostático vertical: [Masset y Benítez-Llambay \(2015\)](#):

$$\rho(r, \theta) = \frac{\Sigma_0}{R_0 h_0 \sqrt{2\pi}} \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-\xi} \sin^{-(\xi+\beta)}(\theta) \exp\left(\frac{1 - \sin^{-2f} \theta}{2f h^2(r)} \right), \quad (5.11)$$

con $\beta = 1 - 2f$, y $\xi = 1 + \sigma + f$. σ , como de costumbre, es el exponente de la densidad superficial Σ , y f el índice de *flare*, el cual corresponde con el exponente de la relación de aspecto del disco (ver Fig. 2.2), y no podrá ser determinado de forma precisa debido a las propiedades termodinámicas del modelo que conside-

¹Como se verá más adelante, por la propiedad diferencial de este estudio, incluir o no la radiación de la estrella no debería ser significativo

raremos² (ver ecuación 5.20).

La velocidad radial y vertical (*colatitud*) son nulas inicialmente y la velocidad de rotación es:

$$v_\phi(r, \theta) = \Omega_k r \left[\sin^{-2f}(\theta) - (\beta + \xi) h^2(r) \right]^{1/2} - \Omega_f r \sin \theta, \quad (5.12)$$

donde Ω_f es la velocidad angular del marco de referencia, el cual en esta investigación es rotante, con frecuencia igual a la frecuencia Kepleriana del planeta.

La energía interna inicial del modelo se calcula a partir de la velocidad del sonido isoterma ($P = c_s^2 \rho$), con $c_s = h v_k$, utilizando la ecuación de estado adiabática (ver sección 2.3 y 3.4):

$$e(r, \theta) = \frac{\rho c_s^2}{\gamma - 1} = \frac{\rho h^2 v_k^2}{\gamma - 1}; \quad (5.13)$$

La energía radiativa se inicializa de forma aproximada a través de la fórmula de Planck, con el objetivo de anular inicialmente los términos radiativos de las ecuaciones (5.1) y (5.2):

$$E_r = \frac{4\sigma}{c} T^4, \quad (5.14)$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann, c es la velocidad de la luz en el vacío y T es la temperatura del gas, calculada a partir de la energía térmica:

$$T = \left(\frac{\gamma - 1}{\rho \mathcal{R}} \right) \mu e, \quad (5.15)$$

con \mathcal{R} la constante de los gases ideales y μ el peso molecular medio de la nube de gas.

Para este problema asumimos que el embrión planetario se encuentra en su etapa de crecimiento, y que acreta masa a un ritmo \dot{M} . Así, si asumimos que toda la energía acreta es liberada en forma de energía térmica, la tasa de liberación de energía del planeta se calcula como:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{GM_p}{R_p} \frac{dM_p}{dt}. \quad (5.16)$$

Esta expresión puede ser escrita en función del tiempo característico de crecimiento de la masa, definido como:

$$\tau = \left(\frac{1}{M_p} \frac{dM_p}{dt} \right)^{-1}. \quad (5.17)$$

Este tiempo es exactamente el tiempo en el que el cuerpo duplica su masa. En

²En general será función de r (ver Fig. 5.1).

efecto, si asumimos una tasa de acreción constante:

$$M(t_0 + \tau) = M_p + \frac{dM_p}{dt} \tau = 2M_p, \quad (5.18)$$

y despejando τ se obtiene (5.17). Por este motivo nos referiremos a τ como el tiempo en el que el cuerpo duplica su masa o tiempo de doblamiento de la masa. Así, (5.16) es:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\tau} \frac{GM_p^2}{R_p}. \quad (5.19)$$

Por último, una receta adicional se utilizó con el objetivo de acelerar la convergencia hacia un estado de equilibrio numérico. La relación de aspecto h del disco no puede ser forzada por fuera, ya que el disco debe alcanzar su equilibrio térmico, el cual refleja el balance entre el enfriamiento radiativo y el término de calentamiento viscoso. Bitsch *et al.* (2013) prueban que el balance entre ambos produce:

$$h(r) = \left[\frac{9}{32} \Sigma_0^2 \kappa \nu \frac{\mathcal{R}^4}{\mu^4} \frac{1}{G^3 M_\star^3 \sigma} \right]^{1/8} r^{(1-2s)/8} \quad (5.20)$$

En la práctica, como no sabemos si ésta es la solución de equilibrio numérica, es decir, el equilibrio al que convergerá el método empleado para la resolución de las ecuaciones con los parámetros usados, utilizamos un valor un poco mayor para la relación de aspecto, pero cercano. A medida que la simulación avance, el disco se enfriará y tenderá de forma asintótica hacia el equilibrio térmico. En la Fig. 5.1, puede verse la tendencia de h a converger hacia dicho equilibrio.

5.3.1. Condición inicial

En la Fig. 5.2 puede verse la evolución del modelo analítico (panel izquierdo) hacia un estado de cercano al equilibrio térmico, luego de una decena de órbitas (panel derecho).

Una vez alcanzado el estado de equilibrio térmico para el disco, utilizamos este estado para realizar el resto de las simulaciones, las cuales incluyen un planeta en su interior, como se describirá posteriormente.

En la siguiente sección se dan detalles más globales sobre la implementación.

5.4. Planteo del problema y metodología

El torque actuante sobre un planeta es algo que depende de los procesos físicos involucrados. En este capítulo, estamos interesados en estudiar cómo puede ser afectada la tasa de migración cuando es considerado el calentamiento del gas circundante debido al calor emanado por un cuerpo, el cual es calentado como consecuencia de la acreción de sólidos sobre su superficie. Con el objetivo de aislar una nueva componente del torque, procederemos a utilizar un método de

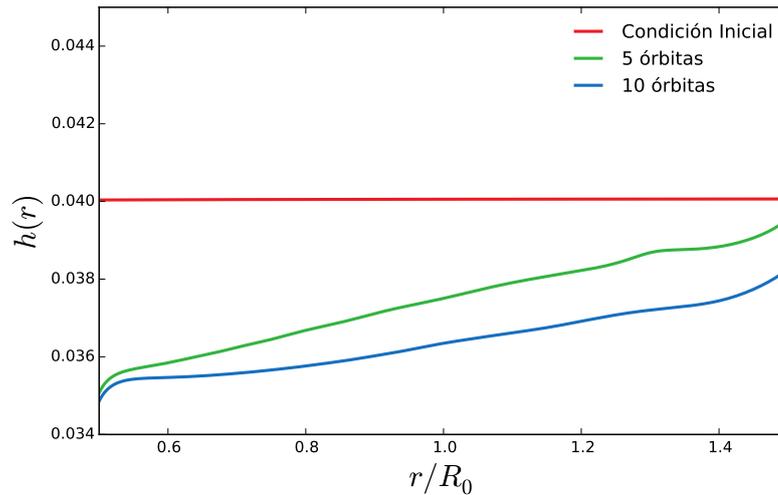


Figura 5.1: Relación de aspecto del disco en función del tiempo. El exponente para el perfil de densidad en este caso se eligió $\sigma = 0,5$, por lo que inicialmente, y de acuerdo con la ecuación (5.20), es un perfil plano. Con el correr del tiempo, este perfil adopta una forma que tiende hacia el equilibrio térmico del código, cercano al valor inicial considerado. Aunque no se haya alcanzado una convergencia absoluta, es suficiente para las mediciones que realizaremos en este trabajo.

comparación, y calcularemos una cantidad a la cual llamaremos *exceso de torque* (ver ecuación 5.23).

El exceso de torque, se define como la diferencia entre el torque calculado con una cierta característica física nueva (el calor liberado por el planeta) y un caso de referencia (el cual para nosotros será una simulación que no incluya este efecto). Es importante que ambas simulaciones utilizadas para medir el exceso de torque sean idénticas a excepción de la nueva contribución.

La simulación de referencia se corresponde con una simulación adiabática que incluye calentamiento viscoso y transferencia radiativa, pero no el calor generado por el planeta. La segunda simulación corresponde al caso radiativo completo, en donde se incluye además la energía térmica irradiada por el planeta.

Con el objetivo de realizar una medición suficientemente limpia del proceso, y cerca de un caso estacionario y en equilibrio, utilizamos como condición inicial un disco muy cerca del equilibrio hidrostático y térmico, tal cual fue descrito en la sección anterior. Como en la práctica es difícil obtener estados de equilibrio precisos de forma numérica, partimos de la condicional inicial descrita y realizamos una simulación bidimensional (axisimétrica sobre un plano meridional), dejando que el disco evolucione en el tiempo, durante algunas órbitas. Luego de un cierto tiempo, el cual tampoco puede ser demasiado grande por restricciones de tiempo computacional, controlamos su estado, y lo utilizamos como condición inicial para las simulaciones tridimensionales completas. En las simulaciones aquí presentadas, vimos que 10 órbitas es un tiempo razonable para esta inicialización.

Antes de poder utilizar estas simulaciones como condiciones iniciales en un

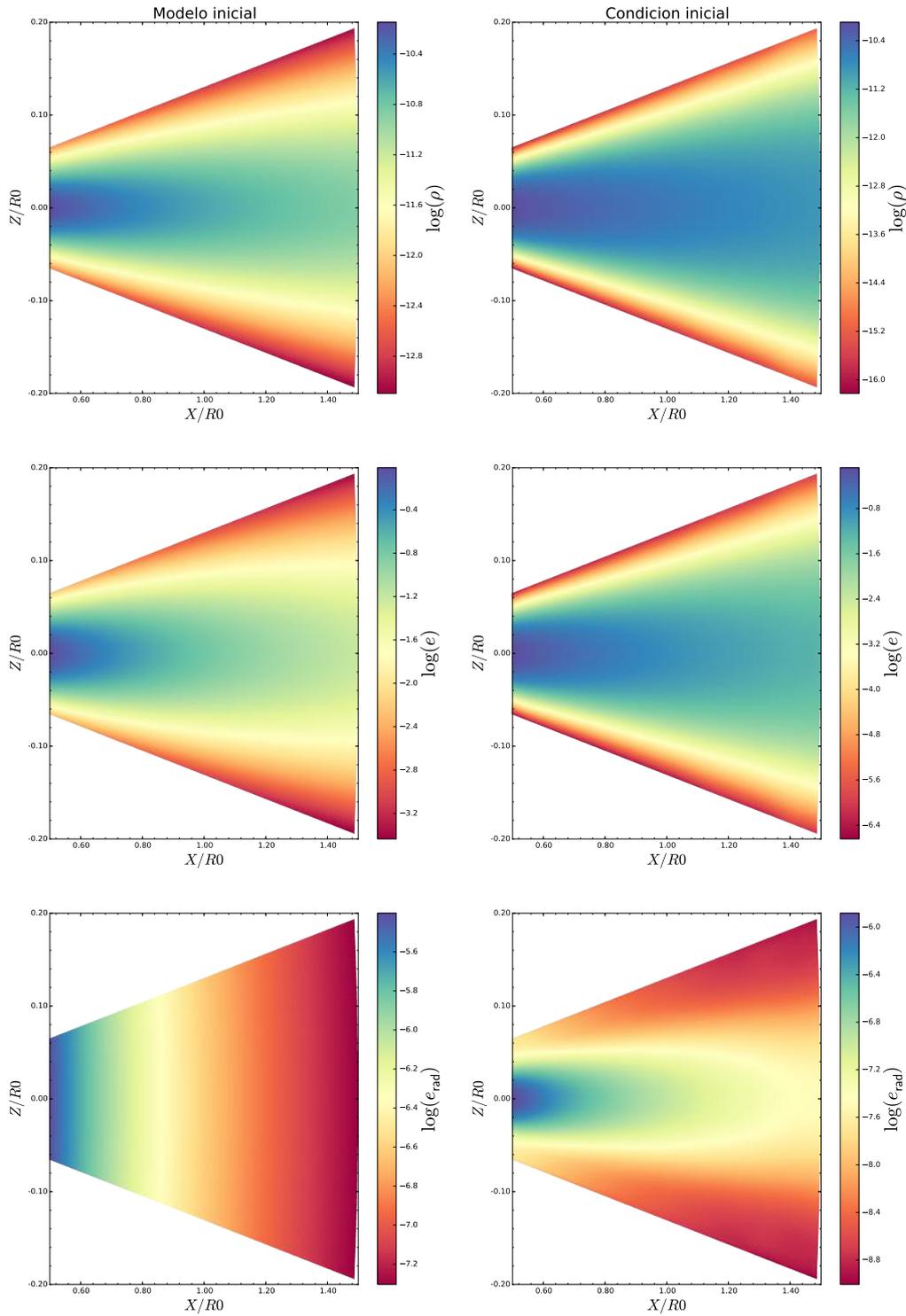


Figura 5.2: Evolución del modelo de disco descrito en 5.3. La diferencia temporal entre los paneles de la izquierda y derecha es de 10 órbitas. Puede verse un cambio significativo para todos los campos. Si bien los cambios en órdenes de magnitud no son importantes, los perfiles iniciales se encontraban lejos del equilibrio numérico. Los campos obtenidos en el perfil de la derecha (incluyendo los campos de velocidad, que aquí se omiten), son expandidos en acimut y utilizados como condición inicial para el resto del estudio. Este proceso debe ser llevado a cabo para cada uno de los parámetros que se varíe. Las unidades para las cantidades están en el sistema cgs.

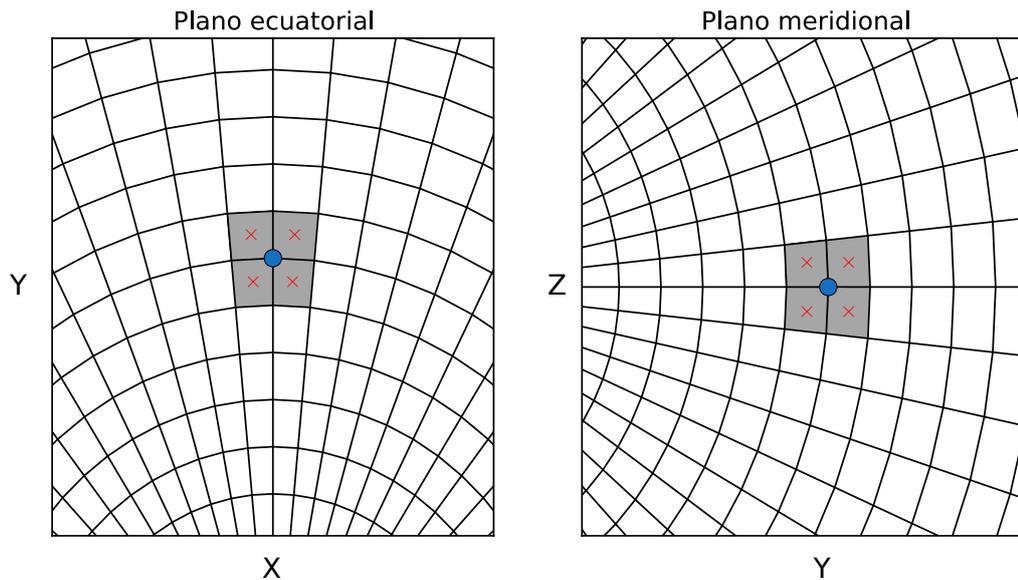


Figura 5.3: Esquema que muestra la forma en la que se deposita calor en la malla. El planeta, representado en este esquema por un círculo azul, se inicializa en un vértice rodeado por 8 celdas cúbicas (en realidad 4 al usar reflexión en Z), y la energía térmica es liberada a una tasa constante desde los puntos marcados con cruces rojas, posiciones correspondientes a sus vecinos más cercanos, representados por celdas grises. Un especial cuidado es tenido durante toda la simulación para que el planeta no se mueva de forma significativa respecto de este vértice.

caso tridimensional, es necesario expandir la malla en acimut y generar la grilla tridimensional completa.

5.5. Liberación de energía en la malla

La liberación de energía sobre la malla debe hacerse de forma muy cuidadosa. Un defecto en el procedimiento utilizado puede inducir asimetrías en torno al planeta, y esto puede conducir a un efecto espurio sobre el torque neto sufrido por éste.

En este trabajo optamos por realizar la liberación de energía de forma cúbica, y utilizando los vecinos más cercanos a un vértice de celda. Así, el planeta es localizado sobre este vértice.

En la Fig. 5.3 se observa un esquema de la configuración utilizada sobre la malla. El planeta se localiza en el vértice demarcado por un círculo azul, y el calor es depositado a una tasa constante en la posición demarcada por las cruces rojas, que se corresponden con los centros de las celdas grises.

El cálculo de la tasa de calentamiento se hace a partir del parámetro de doblamiento de la masa, con lo cual se obtiene \dot{E} . Una vez calculado este parámetro, se procede a calcular la posición del planeta sobre la malla, se determinan los

vecinos y se añade directamente el calor en la forma:

$$E^{n+1} = E^n + \frac{\dot{E}/8}{V_{ijk}} \Delta t, \quad (5.21)$$

dónde el factor 8 proviene de desparramar la energía en los ocho vecinos más cercanos y V_{ijk} es el volumen de la celda ijk .

5.6. Simulación de referencia

Con el objetivo de establecer un punto de referencia para la exploración del espacio de parámetros, definimos un conjunto de parámetros base o fiducial, el cual será el punto pivote para la exploración posterior.

Los parámetros utilizados son medianamente conservativos respecto de las condiciones físicas en las regiones en donde se espera que los planetas sean formados (ver por ejemplo [Pollack *et al.*, 1996](#)). El conjunto de parámetros se lista en la tabla 5.1, y la nomenclatura utilizada para cada uno de ellos es la misma que la descrita en la sección 5.3.

A lo largo de todas las simulaciones hemos utilizados un conjunto de parámetros que permanecieron constantes, por lo que serán obviados en las descripciones de las secciones siguientes. Los parámetros fijos son: longitud de suavizado ϵ para el potencial gravitatorio (ver ecuación 2.25), el factor γ , los bordes de la malla R_{min} , R_{max} , el número de celdas utilizadas N_r, N_ϕ, N_θ (a menos que se especifique lo contrario).

En la Fig. 5.4 mostramos la medición de torque efectuada para el caso de referencia. En línea roja vemos el torque que sufre un planeta cuando la acreción de planetesimales (es decir, la liberación de calor) es considerada. En azul, podemos ver la misma medición pero para el caso sin acreción. Además, se observan dos tipos de curvas, unas continuas, y otras a trazos. En línea continua, se muestra el torque medido sin excluir el 50% de la esfera de Hill en el cálculo, es decir considerando las fuerzas en las proximidades del planeta, mientras que en línea a trazos, se muestra el resultado con la exclusión. La diferencia entre ambas existe, pero a lo largo del trabajo se vio que considerar o no esta exclusión, no afecta de forma sustancial a los resultados. Es notable el hecho de que la inclusión de energía en una vecindad del planeta genere un efecto tan drástico en la fuerza neta que éste siente. Motivados por este resultado, en las secciones siguientes realizaremos un estudio del espacio de parámetros para caracterizar de forma más detalla a este efecto.

Una cantidad fundamental que mediremos en las secciones siguientes es el *exceso de torque*, el cual es marcado de forma cualitativa (e instantánea) con flechas, para ambos casos. Este exceso, como se introdujo anteriormente, se define como la diferencia de torque existente entre el caso con y sin calentamiento, siempre manteniendo los mismos parámetros físicos.

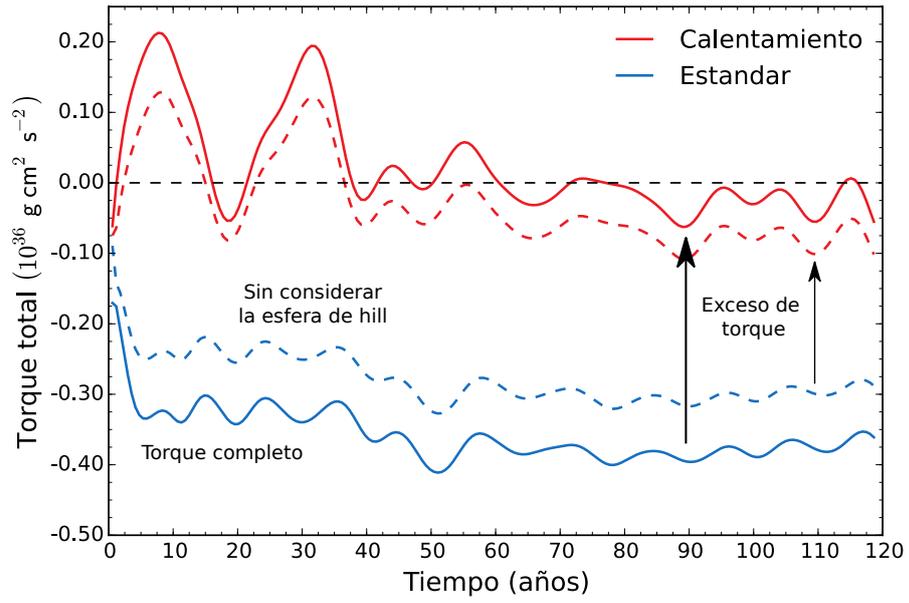


Figura 5.4: Torque medido en la simulación de referencia. En línea roja se observa el torque medido en el caso que incluye liberación de energía en el entorno del planeta, mientras que en línea azul, el caso sin esta propiedad. En línea continua, se muestra el torque medido sin excluir el 50% de la esfera de Hill en el cálculo, mientras que en línea a trazos, se muestra el resultado con la exclusión. La diferencia entre ambas existe, pero a lo largo del trabajo se vio que considerar o no esta exclusión, no afecta de forma sustancial a los resultados. El exceso de torque es marcado de forma cualitativa con flechas, para ambos casos.

Tabla 5.1: Conjunto de parámetros para la simulación fiducial. En color se marcan aquellos que serán variados lo largo de toda la exploración.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
Σ_0	200 g cm ⁻²	N_ϕ	1024
σ	0,5	N_r	512
ν	10 ¹⁵ cm ² s ⁻¹	N_θ	64
M_p	3 M _⊕	R_{\min}	0.5 R ₀
τ	10 ⁵ años	R_{\max}	1.5 R ₀
κ	1.0 cm ² g ⁻¹	θ_{\min}	1.44
R_0	5.2 UA	θ_{\max}	$\pi/2$
ϵ	0,1H	γ	1.4

Para compactar los resultados que presentaremos en las secciones siguientes, directamente mostraremos el exceso de torque, el cual será calculado como el promedio del torque en una ventana temporal, de la forma:

$$\Delta\Gamma_e = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Delta\Gamma(t) dt, \quad (5.22)$$

con t_0 un tiempo de referencia inicial, y T la cantidad de tiempo sobre la cual se realiza el promedio. $\Delta\Gamma_e$ representa el exceso de torque, y $\Delta\Gamma(t)$ se define como:

$$\Delta\Gamma(t) = \Gamma_C(t) - \Gamma_{NC}(t), \quad (5.23)$$

es la diferencia entre el torque medido en el caso con calentamiento y el caso estándar.

En este trabajo, el tiempo total de las simulaciones que incluyen un planeta es de 10 órbitas, y los promedios se harán desde la órbita 5 hasta la órbita 10, por lo que $T = 5$ órbitas.

En la sección siguiente, estudiaremos la dependencia de este exceso con diferentes parámetros del disco.

5.7. Exploración del espacio de parámetros

Con el objetivo de caracterizar el nuevo efecto encontrado, estudiamos con detalle el espacio de parámetros, realizando un barrido sistemático y restringiéndonos a aquellos relevantes para el torque.

Variamos la viscosidad desde 4×10^{14} cm²/s hasta 4×10^{15} cm²/s. La densidad superficial se explora en el rango 100 g/cm² a 1000 g/cm², el tiempo de doblamiento para la masa se mueve desde 3×10^4 a 3×10^5 años y la opacidad se varía entre 0,1 cm²/g y 10 cm²/g. La masa del planeta adopta valores comprendidos entre $1/3M_{\oplus}$ a $7M_{\oplus}$, y el exponente σ de la ley de densidad se considera en el rango de -2 a 1.5.

5.7.1. Dependencia con el tiempo de doblamiento de la masa

Uno de los parámetros fundamentales de este nuevo efecto, como se verá en esta sección, es el tiempo de doblamiento de la masa del planeta o tasa de acreción de sólidos. De hecho, esta es la causa que produce el efecto observado, ya que la cantidad de calor que se genera en un entorno depende directamente de este tiempo (ver ecuación 5.19). Es decir, este parámetro es el encargado de definir cuanto calor es irradiado al medio. El valor adoptado en nuestra simulación de referencia es conservativo pero razonable. Realizamos cinco simulaciones, manteniendo todos los parámetros de referencia fijos, y variando τ desde un valor de 3×10^4 años hasta 3×10^5 años. Estos valores nos permiten estudiar el nuevo efecto en condiciones muy favorables para la formación de un núcleo planetario como así también, en aquellas condiciones más conservadoras (Fig. 5.5).

5.7.2. Dependencia con la densidad superficial

En esta sección estudiamos como depende el exceso de torque con la densidad superficial de masa.

En la Fig. 5.6 mostramos la dependencia del exceso de torque en función de la densidad superficial considerada. El exceso de torque no depende sensiblemente

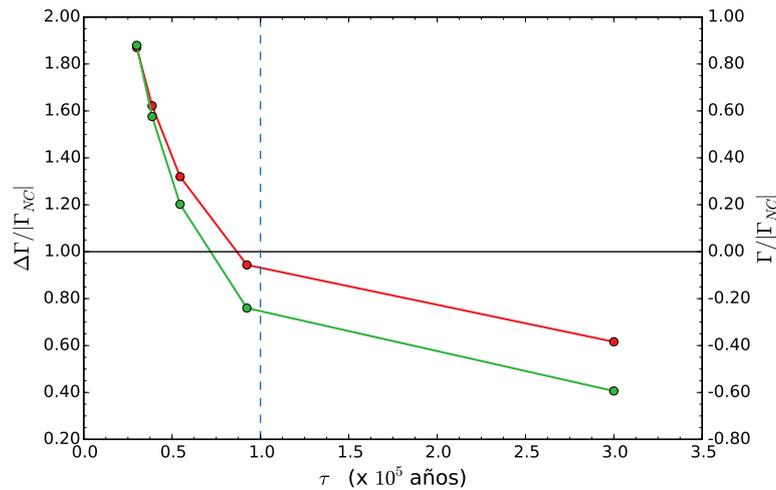


Figura 5.5: Exceso de torque normalizado para diferentes tiempos de doblamiento de la masa o tasas de acreción. La curva roja corresponde con la medición del torque medio sin excluir la vecindad del planeta en el cálculo de la fuerza, mientras que la curva verde si la excluye. En línea azul a trazos se muestra el valor de este parámetro en la simulación de referencia. Se observa una gran dependencia del exceso de torque con la tasa de acreción impuesta, escalando linealmente para tiempos de doblamiento de la masa suficientemente pequeños.

de este parámetro, aunque sí el valor absoluto del torque sobre el planeta, los cuales curiosamente se compensan bastante bien para arrojar una curva prácticamente plana.

5.7.3. Dependencia con la masa del planeta

Estudiamos la dependencia del exceso de torque con la masa considerada para el planeta. La masa del planeta es la responsable de cambiar entre diferentes regímenes las perturbaciones generadas en el disco. Por este motivo, es esperable observar una dependencia significativa con ella.

En la Fig. 5.7 vemos las curvas de exceso de torque para esta exploración. El exceso de torque alcanza un máximo para masas $2M_{\oplus}$, para luego decrecer hacia masas mas altas. A masas grandes observamos la aparición de una inestabilidad en el torque (ver sección 5.8).

Esta dependencia muestra que un planeta en crecimiento experimentará un máximo en el frenado de su tasa de migración, lo cual puede traducirse en una migración hacia afuera en caso de que los demás parámetros del modelo lo permitan.

5.7.4. Dependencia con el perfil de densidad

La dependencia con el perfil de densidad es importante porque permite estudiar la relación existente entre el nuevo mecanismo y la distancia a la corrotación. La corrotación, como se discutió en la el capítulo 2, es la región del espacio

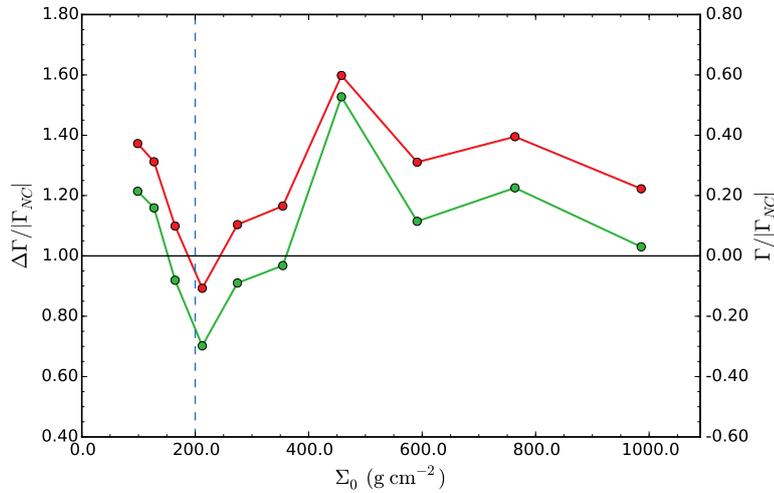


Figura 5.6: Exceso de torque normalizado para diferentes densidades superficiales. La curva roja corresponde con la medición del torque medio sin excluir la vecindad del planeta en el cálculo de la fuerza, mientras que la curva verde si la excluye. En línea azul a trazos se muestra el valor de este parámetro en la simulación de referencia. No se observa una dependencia significativa del exceso de torque con la densidad superficial.

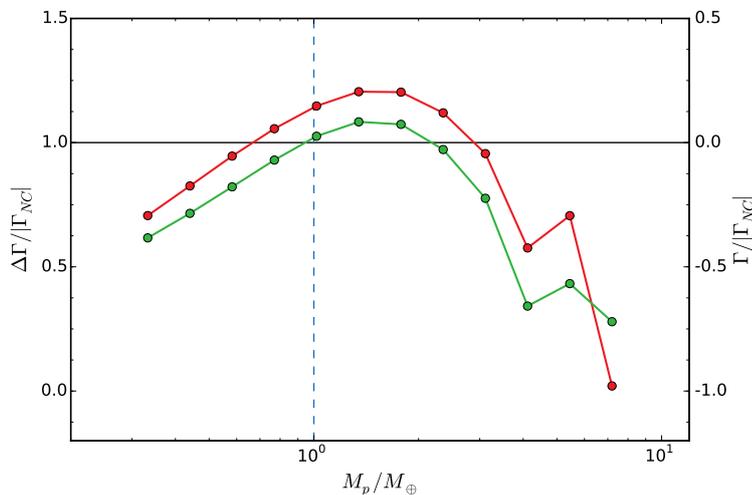


Figura 5.7: Exceso de torque normalizado para diferentes masas planetarias consideradas. La curva roja se corresponde con la medición del torque medio realizada sin excluir la vecindad del planeta en el cálculo de la fuerza. La curva verde, por el contrario, corresponde a la medición que resulta de excluir tal región. En línea azul a trazos se marca el valor de este parámetro en la simulación de referencia. El máximo se observa para masas alrededor de $2 M_\oplus$, para luego decrecer. Para masas mayores a $4 M_\oplus$ aparecen signos de una inestabilidad (ver 5.8), por lo que el valor medido posee un error significativo.

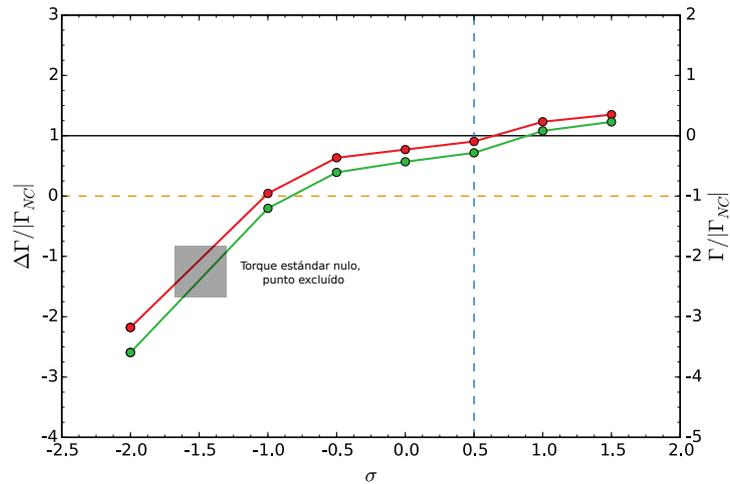


Figura 5.8: Exceso de torque normalizado para diferentes exponentes para el perfil de densidad inicial. La curva roja se corresponde con la medición del torque medio realizada sin excluir la vecindad del planeta en el cálculo de la fuerza. La curva verde, por el contrario, corresponde a la medición que resulta de excluir tal región. En línea azul a trazos se marca el valor de este parámetro en la simulación de referencia. La curva a trazos anaranjada representa el lugar en donde el exceso de torque invierte su signo, lo cual se produce en el caso súper Kepleriano. Para perfiles de densidad suficientemente grandes, el exceso se torna superior al valor estándar. El recuadro gris denota una región en donde no nos fue posible realizar una medición precisa del torque normalizado debido a que el torque medio de referencia era muy próximo a cero, por lo que preferimos excluirlo de la figura (aunque su valor es negativo)

en donde el gas se mueve a la misma velocidad que el planeta. Como el disco presenta un gradiente radial de presión, es decir, una fuerza radial adicional que el planeta no siente, la posición de la corrotación en general no está en la órbita del planeta.

En la Fig. 5.8 se muestra el exceso de torque para diferentes exponentes del perfil de densidad. Vemos como el efecto escala de forma sistemática con la distancia a la corrotación (o variaciones de σ), invirtiendo su signo para perfiles de densidad que crecen con la distancia ($\sigma < 0$), lo cual es un caso no realista. Esto nos permite concluir que el exceso se produce por la distancia relativa entre el calor emanado por el planeta de forma simétrica respecto de su órbita y la asimetría inducida por el movimiento simétrico del gas en torno a la corrotación.

5.7.5. Dependencia con la opacidad

Realizamos un estudio sistemático de la dependencia del exceso con la opacidad del gas. Este parámetro se relaciona directamente con la transparencia del medio a la radiación, por lo que gobierna la cantidad de fotones que podrán ser absorbidos por el gas. Un disco de opacidad nula sería equivalente a una simulación sin transferencia radiativa, mientras que uno muy opaco no permitiría el paso de los fotones a través de él.

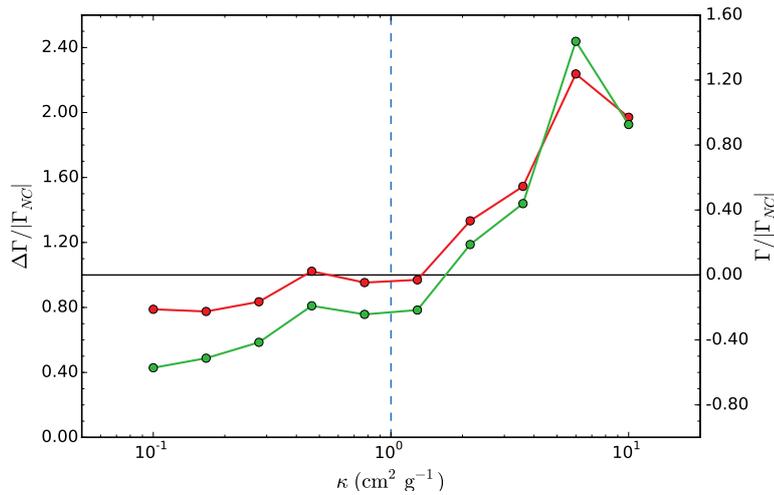


Figura 5.9: Exceso de torque normalizado para diferentes opacidades del gas. La curva roja corresponde con la medición del torque medio sin excluir la vecindad del planeta en el cálculo de la fuerza, mientras que la curva verde si la excluye. En línea azul a trazos se muestra el valor de este parámetro en la simulación de referencia. La dependencia del exceso de torque con la opacidad es notable. Opacidades moderadas a altas posibilitan una migración hacia afuera extremadamente veloz del planeta en formación

En la Fig. 5.9 vemos la dependencia del exceso de torque con la opacidad del gas. El exceso de torque depende fuertemente de la opacidad del medio, generando un exceso extremadamente grande para discos suficientemente opacos. La simulación de referencia se realizó con un valor de opacidad en el medio de los valores considerados en esta exploración, y además es un valor conservativo.

En algunos casos físicos realistas, la opacidad puede ser tan grande como $10 \text{ cm}^2/\text{g}$, por lo que el exceso de torque podría ser el mecanismo dominante para la migración temprana.

5.7.6. Dependencia con la viscosidad

También realizamos una exploración del espacio de parámetros variando la viscosidad del gas, cuyos resultados se observan en la Fig. 5.10. En este caso, es interesante como el exceso de torque depende de forma muy leve a cambios en las propiedades difusivas del medio. Esto muestra que el exceso de torque no es una propiedad que tenga una relación directa con las propiedades difusivas de la materia. Aunque pobre, la dependencia presenta un comportamiento interesante al posibilitar el crecimiento de la nueva componente de torque al incrementarse la viscosidad.

5.8. Inestabilidad

En los casos analizados anteriormente, para algunos parámetros, encontramos un comportamiento oscilatorio y creciente para el torque, el cual presenta carac-

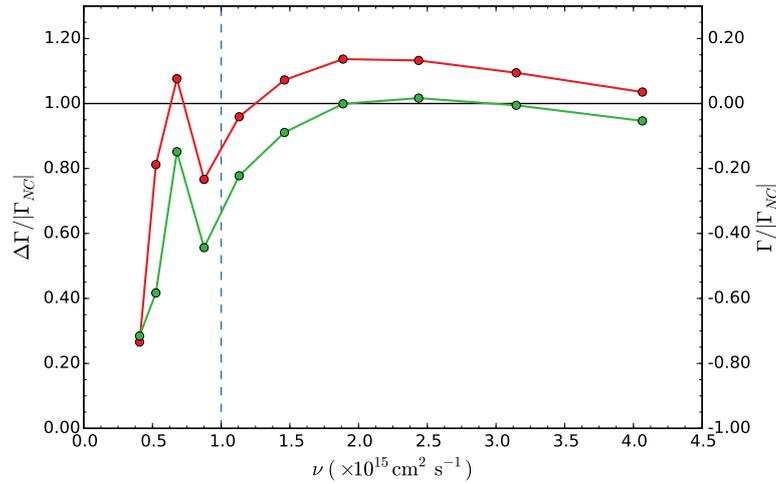


Figura 5.10: Exceso de torque normalizado para diferentes viscosidad consideradas. La curva roja corresponde con la medición del torque medio sin excluir la vecindad del planeta en el cálculo de la fuerza, mientras que la curva verde, por el contrario, si la incluye. En línea azul a trazos se muestra el valor de este parámetro considerado en la simulación de referencia. El exceso de torque depende muy pobremente de la viscosidad. Para viscosidades menores al valor considerado como valor de referencia, la curva oscila debido a la aparición de una inestabilidad (ver 5.8). Es interesante el leve incremento del exceso de torque a viscosidades un poco más grandes respecto de la simulación de referencia.

terísticas compatibles con una inestabilidad. Los parámetros que favorecían la aparición de tal inestabilidad fueron (siempre sobre la simulación de referencia), opacidades menores $0.17 \text{ cm}^2/\text{g}$, masas planetarias mayores a $4M_{\oplus}$ y viscosidades inferiores a $\sim 10^{15} \text{ cm}^2/\text{s}$.

En la Fig. 5.11, se muestra un ejemplo de este comportamiento a baja viscosidad. El comportamiento inestable es evidente a partir del crecimiento exponencial del torque medido. Por otro lado, al tener una simulación de referencia, podemos descartar que se deba a un error de implementación. Observando las diferentes curvas obtenidas para el torque (no incluidas en este trabajo), se observa que la velocidad de crecimiento de la inestabilidad es función de los parámetros utilizados, y una vez encontrado el parámetro crítico, por ejemplo la viscosidad ν_c a la cual aparece este comportamiento, para $\nu < \nu_c$, la inestabilidad no hará más que incrementar su ritmo de crecimiento.

Lamentablemente no disponemos de un muestreo temporal suficiente para los campos hidrodinámicos, por lo que no podemos estudiar el crecimiento de este fenómeno con detalle. Sin embargo, al observar el campo de velocidad, hay indicios de que este comportamiento puede estar relacionado con el movimiento del punto de acreción observado en la sección 5.11.

Entender la fuente real de esta inestabilidad y comprender si es un artificio numérico o realmente tiene causas físicas, podría abrir la puerta hacia una po-

tente fuente de excentricidad (y posiblemente de inclinación) para los cuerpos planetarios en formación dentro de un disco de gas. Este efecto podría también alterar las tasas de amortiguación para la excentricidad, lo cual podría tener impactos sustanciales en la forma en la que se acoplan múltiples cuerpos en formación. El estudio detallado de este efecto supera a los objetivos de este trabajo, y quedará como un objetivo futuro.

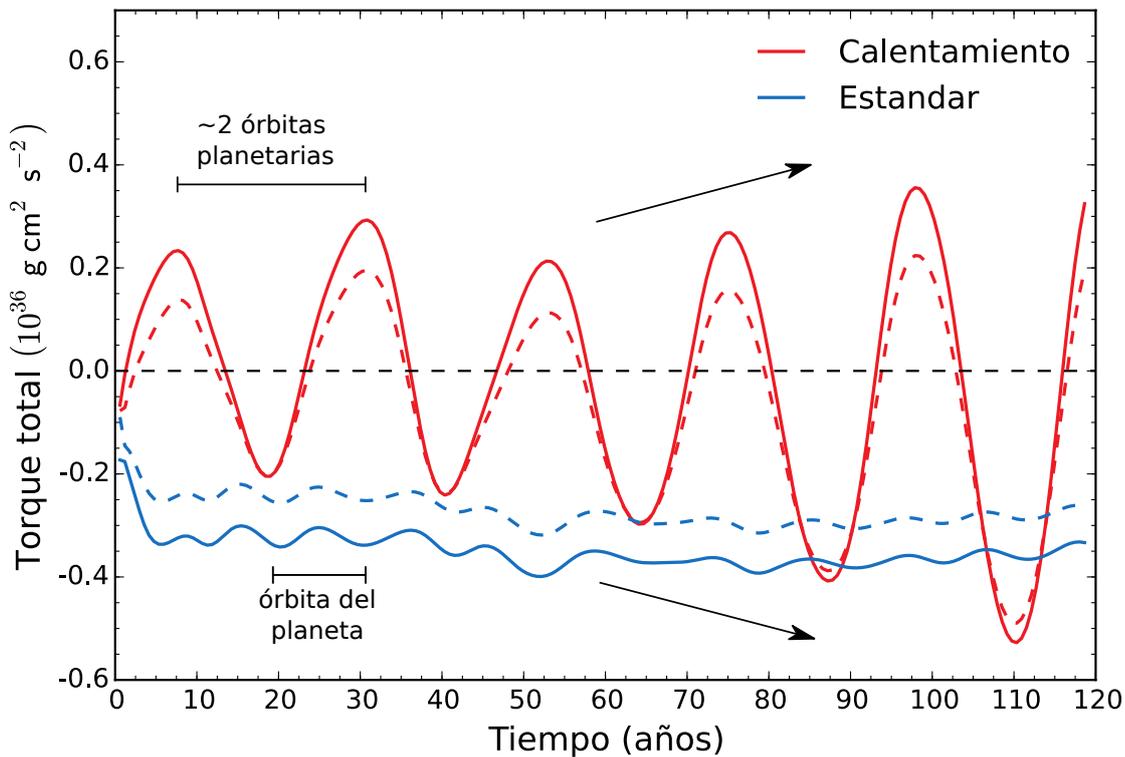


Figura 5.11: Torque medido en la exploración de parámetros de la viscosidad ν . Estas curvas se corresponden con el caso $\nu \simeq 9 \times 10^{14} \text{ cm}^2/\text{s}$. Las líneas sólidas corresponden con el torque medido considerando toda la contribución del disco. Las curvas a trazos consideran sólo el disco más allá del 50% del radio de Hill. En azul se muestra el torque para el caso estándar, es decir, sin calentamiento del medio por parte del planeta. En rojo, se muestra el caso con calentamiento incluido. Se observan dos frecuencias muy claras en la señal del torque; por un lado, la curva roja presenta una oscilación creciente, y una frecuencia principal asociada con el doble de la frecuencia orbital del planeta, la cual es claramente distinguible sobre la curva azul.

5.9. Integración de largo período

Con el objetivo de asegurar que nuestros resultados no son un efecto transitorio en el disco, realizamos una integración adicional por una gran cantidad de órbitas. Los parámetros para esta simulación se dan en la tabla 5.2. La metodología utilizada es la misma que ya se describió en las secciones anteriores.

El resultado de la integración a largo tiempo puede verse en la Fig. 5.12.

Tabla 5.2: Conjunto de parámetros para la simulación a largo plazo.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
Σ_0	$197,2 \text{ g cm}^{-2}$	N_ϕ	512
σ	0,5	N_r	256
ν	$10^{15} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$	N_θ	32
M_p	$3,3 M_\oplus$	R_{\min}	$0,5R_0$
ϵ	$0,1H$	R_{\max}	$1,5R_0$
κ	$1.0 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$	θ_{\min}	1.44
τ	$7 \times 10^5 \text{ años}$	θ_{\max}	$\pi/2$

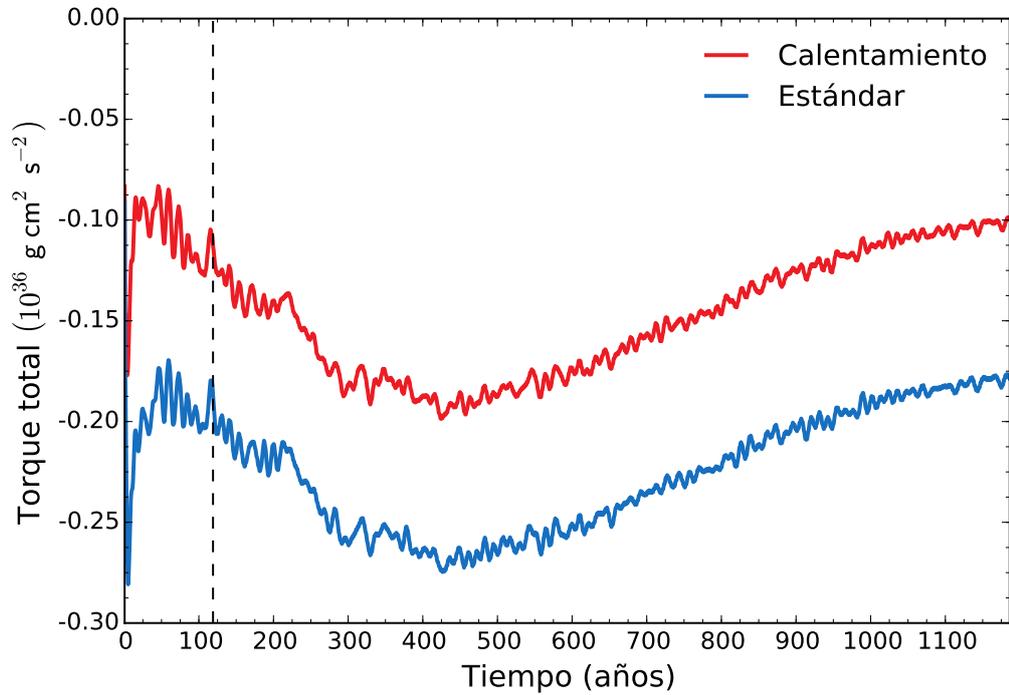


Figura 5.12: Simulación a largo plazo similar a la simulación fiducial considerada a lo largo de este capítulo. Puede verse una oscilación de largo período, típica para el tiempo de libración en la región de herradura. Se observa de forma clara que el exceso de torque respecto del caso estándar es una característica robusta, que se mantiene durante todo el tiempo de la simulación. La línea negra a trazos marca el tiempo de integración de la exploración sistemática del espacio de parámetros. Si bien el valor del torque neto es oscilatorio en el tiempo, el exceso de torque es una cantidad que se mantiene prácticamente constante en el tiempo, lo cual es una característica notable, y muestra que el efecto encontrado no es un fenómeno transitorio en el disco.

Vemos que la diferencia entre la curva roja superior y la azul inferior se mantiene prácticamente constante durante todo el tiempo de integración, mostrando que el exceso de torque no es una característica transitoria. Incluso mantienen en común la oscilación de largo período, asociada al tiempo de libración de la región de herradura.

5.10. Densidad de torque

Una cantidad frecuentemente calculada en la literatura es el torque generado por los diferentes anillos de materia del disco de gas. Esta cantidad, comúnmente denominada *densidad de torque* o *distribución radial de torque*, permite estudiar de dónde proviene la mayor contribución al torque neto y comprender, por ejemplo, si el torque observado es una característica local o es debido a la estela generada por el planeta.

La distribución de torque se define a partir de la contribución diferencial de éste al torque total:

$$\Gamma_{\text{total}} = \int_{r_0}^{r_1} d\Gamma_r dr, \quad (5.24)$$

$d\Gamma_r$ es la densidad o distribución de torque, dada por:

$$d\Gamma_r = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\Gamma r d\varphi dz, \quad (5.25)$$

con $d\Gamma$ el torque ejercido por un elemento de volumen sobre el planeta.

Supongamos que calculamos el torque en cada celda de la malla, y que lo representamos por la cantidad $\Delta\Gamma_{ijk}$, igual al torque que ejerce cada celda de masa $m_{ijk} = \rho_{ijk} V_{ijk}$ sobre el planeta³. Por construcción, el torque total sobre el planeta será:

$$\Gamma_{\text{total}} = \sum_j \sum_k \sum_i \Delta\Gamma_{ijk}. \quad (5.26)$$

Ahora bien, para compatibilizar esta definición con la dada por (5.24), escribimos:

$$\Gamma_{\text{total}} = \sum_j \sum_k \sum_i \frac{\Delta\Gamma_{ijk}}{\Delta r} \Delta r, \quad (5.27)$$

con lo que la densidad de torque numérica será:

$$\Delta\Gamma_{rj} = \frac{1}{\Delta r} \left(\sum_k \sum_i \Delta\Gamma_{ijk} \right)_j, \quad (5.28)$$

donde se resaltó la dependencia con el índice j . A partir de esta definición, el torque total calculado numéricamente es:

$$\Gamma_{\text{total}} = \sum_{j=0}^{n_r-1} \Delta\Gamma_{rj} \Delta r, \quad (5.29)$$

lo cual es la versión discreta de (5.25).

³ i es el índice acimutal, j el radial y k el polar

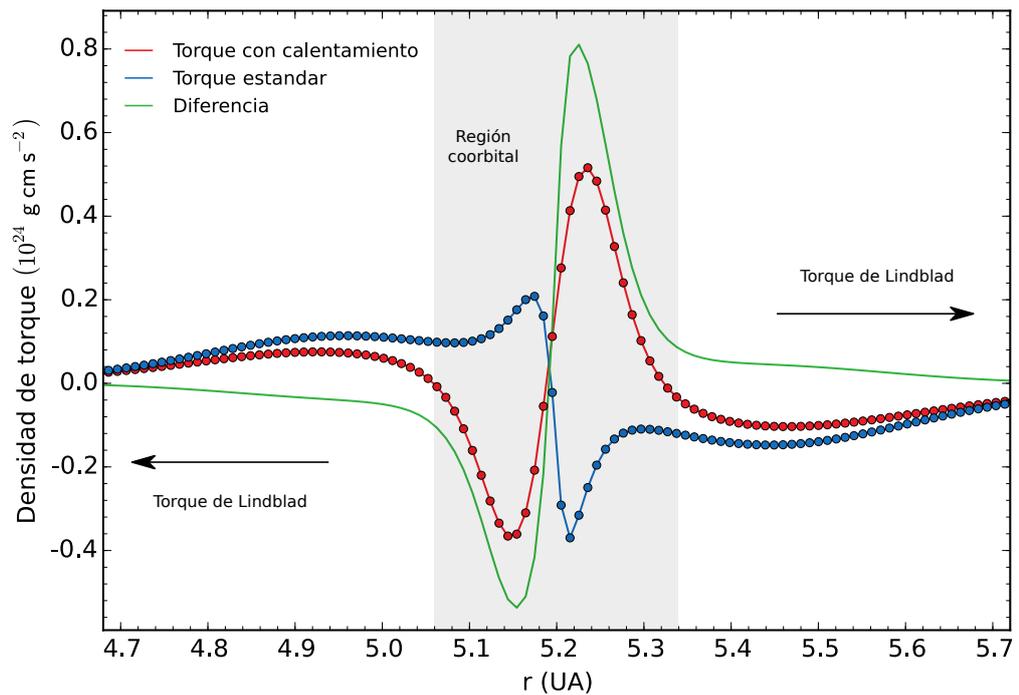


Figura 5.13: Densidad de torque calculada de forma numérica para la simulación de referencia. En rojo se muestra la densidad de torque para la simulación que incluye calentamiento por parte del planeta. En azul, se muestra el torque en el caso estándar, sin incluir el calor liberado por el planeta. En verde, se muestra la diferencia entre ambas curvas, cuya integral es igual al exceso de torque. En un recuadro gris se marca de forma cualitativa la región correspondiente a la región coorbital del planeta. Se ve que las mayores alteraciones del torque provienen de esta región. El torque de Lindblad es producido por las regiones exteriores a la región coorbital y se debe a la fuerza producida por la estela generada por el planeta. El planeta se localiza en $r=5.2$ UA.

En la Fig. 5.13 se muestra el resultado de la medición realizada para la densidad de torque con los parámetros de referencia. En rojo, se observa la densidad de torque para el caso en el que el planeta libera calor al medio, y en azul el caso estándar. El exceso de torque instantáneo, correspondiente a la diferencia entre ambas curvas e integrado en r , claramente es una función positiva. La mayor contribución al torque se produce en las cercanías de la región coorbital, mientras que hay una leve modificación en radios exteriores, aunque no demasiado significativa.

El estudio de la densidad de torque nos permite concluir que los cambios en la magnitud del torque provienen de la región coorbital. Por otro lado, el torque producido por la estela espiral prácticamente no cambia su magnitud.

5.11. Líneas de corriente y lóbulos de densidad

Realizamos un último estudio para obtener ideas de cual podría ser el origen de esta nueva componente de torque descubierta. En la Fig. 5.14 mostramos la perturbación de densidad para la simulación de referencia, al cabo de 20 órbitas.

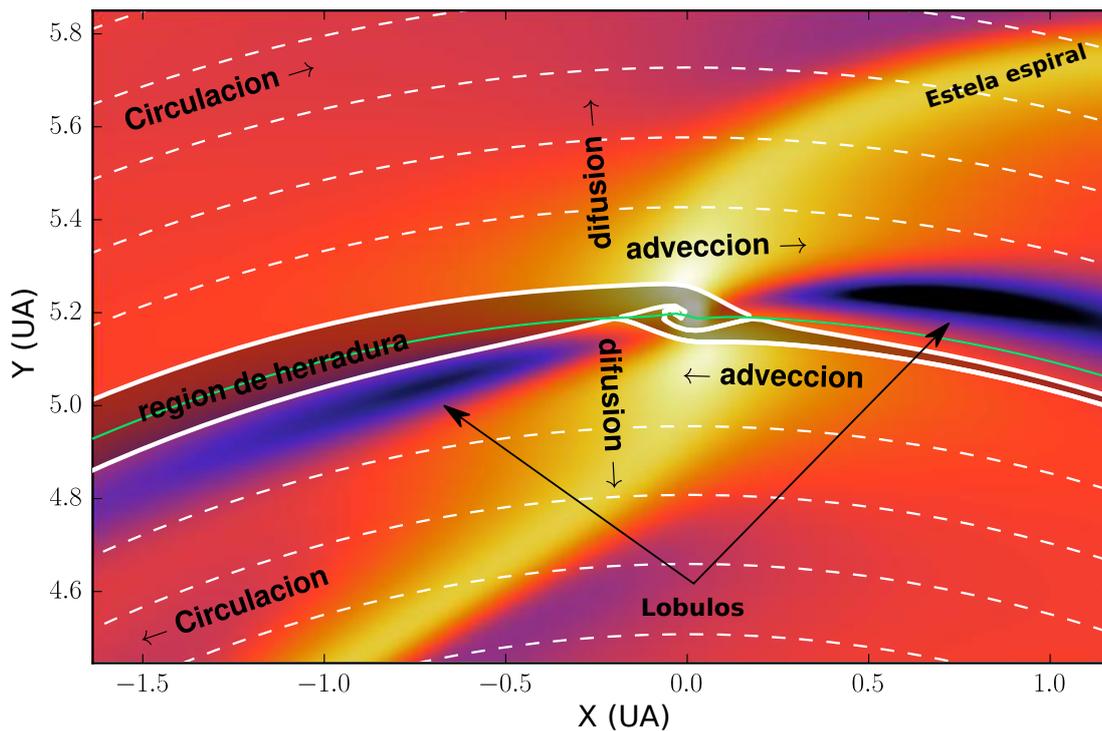


Figura 5.14: Representación cartésiana de la perturbación del campo de densidad en el plano ecuatorial para la simulación de referencia, considerando calentamiento. Con líneas blancas se muestra el campo de velocidad asociado. Se distinguen dos regímenes bien diferentes. En línea a trazos se dibujan las líneas de corriente de la región de circulación, es decir, órbitas 2π -periódicas. La región sombreada, entre las curvas blancas continuas corresponde con las órbitas del material atrapado en la región coorbital.

La razón para mostrar el campo de densidad es que en última instancia, es el responsable de ejercer fuerza sobre el planeta por medio de su fuerza gravitatoria.

En esta figura se encuentran marcadas ciertas cantidades dinámicamente importantes, como ser las órbitas de circulación (líneas a trazos), de herradura (sombreada) y curva de corrotación (línea verde). Las órbitas de circulación son aquellas que describe el gas cuando se encuentra suficientemente lejos de las perturbaciones del planeta, y son prácticamente Keplerianas, a excepción de una ligera corrección por el gradiente de presión (ver por ejemplo 5.7.4). Las órbitas de la región de herradura (que en este caso particular es un poco más compleja que las órbitas de herradura del problema restringido de los tres cuerpos), son aquellas que se encuentran fuertemente perturbadas por la presencia del planeta, y poseen una amplitud radial significativa. Por último, la curva de corrotación es la región del disco de velocidad rotacional nula del gas en el marco de referencia corrotante con el planeta. Así, esta curva es el lugar del disco que efectivamente corrota con el planeta.

Dos características notables aparecen al observar la Fig. 5.14. Por un lado, hay dos regiones subdensas claramente visibles, y quizás lo más importante de to-

do, son asimétricas en su profundidad absoluta, aunque su distribución respecto de la corrotación es simétrica. Ya que el planeta libera energía térmica de forma simétrica respecto de su posición, pero no respecto de la corrotación, habrá material calentado de forma asimétrica en el disco. El material más alejado respecto del planeta recibirá menor cantidad de calor a lo largo de una órbita, por lo que se expandirá menos que su contraparte más cercana, por lo que será más denso. Esto es lo que ocurre en el lóbulo de la izquierda de la Fig. 5.14, el cual es más frío y denso que aquel localizado a la derecha del planeta.

El balance neto de las fuerzas ejercidas por ambos lóbulos apunta claramente hacia la izquierda, al ser el lóbulo allí localizado más denso. Esta dirección coincide con la dirección de movimiento, por lo que el efecto de esta fuerza es aumentar el momento angular neto sobre el planeta. El resultado de esta fuerza será entonces, en última instancia, una disminución o inversión de la tasa de migración.

Por motivos de comparación, realizamos un gráfico similar para el caso estándar, en el cual no es considerado el calentamiento de la vecindad del planeta. Como se puede ver claramente en la Fig. 5.15, la ausencia de liberación de calor impide la formación de los lóbulos subdensos en este caso. Además, se puede observar claramente la estela generada por el planeta.

Las órbitas de circulación son prácticamente idénticas entre ambos casos, sin embargo en la región de herradura hay diferencias importantes. La diferencia que más se destaca es la aparición de un punto con forma de espiral en el caso con calentamiento, completamente ausente en el caso estándar. Este es un punto de acreción de materia, y no disponemos de suficiente información como para determinar si es una estructura estable o es un punto transitorio del fluido. Al observar de forma muy superficial algunas simulaciones que presentaban la inestabilidad mostrada en la sección 5.8, parecería haber indicios de que la inestabilidad podría estar provocada por movimientos de este punto notable en torno al planeta, aspecto que debe ser estudiado con más detalle.

5.12. Conclusiones

En esta sección hemos presentado mediciones del exceso de torque en el caso de planetas en discos radiativos bajo la consideración del calor emanado por el cuerpo como consecuencia de la acreción de planetesimales.

Encontramos que el exceso de torque con respecto al caso estándar no radiativo es sistemáticamente positivo, invirtiendo su signo sólo en casos en los que el perfil de densidad adopta pendientes irrealistas.

Demostramos mediante medición de la densidad de torque que el efecto proviene de la región de corrotación, y mediante una inspección gráfica vimos que la causa es la aparición de lóbulos subdensos alrededor del planeta.

También realizamos comprobaciones para descartar que el efecto encontrado se deba a un posible estado transitorio en el disco, las cuales mostraron que el

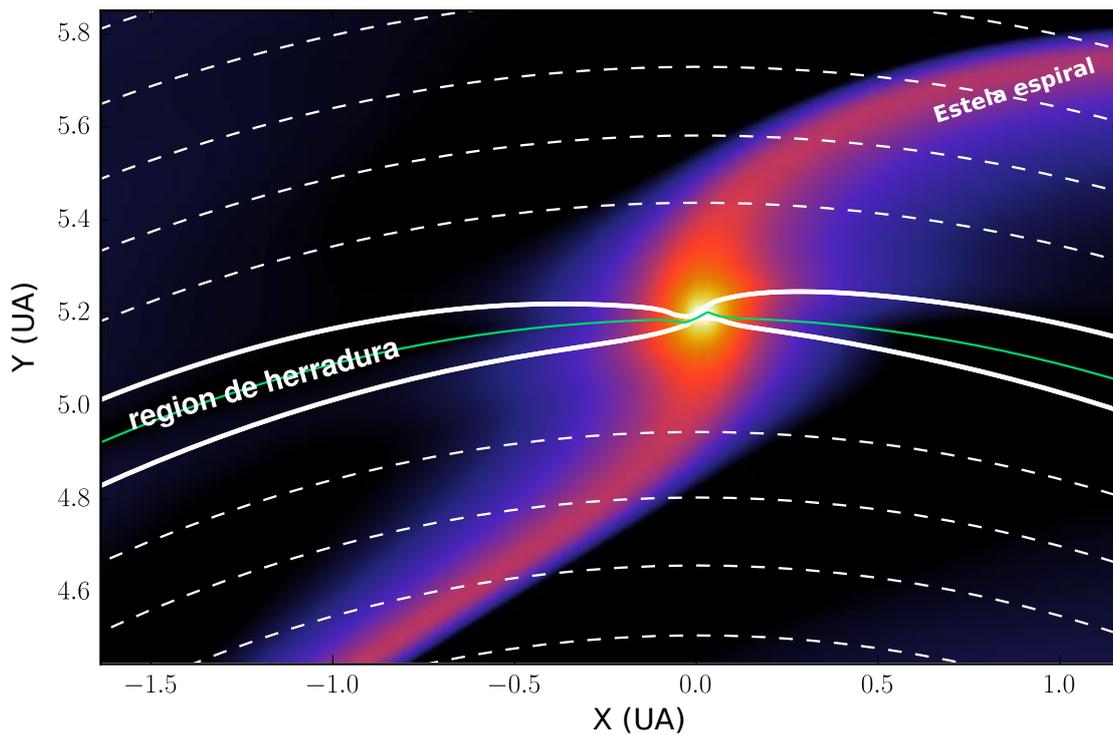


Figura 5.15: Representación cartesiana de la perturbación del campo de densidad en el plano ecuatorial para la simulación de referencia sin considerar el calentamiento. Con líneas blancas se muestra el campo de velocidad asociado. Al igual que en la Fig. 5.14, en línea a trazos se dibujan las líneas de corriente de la región de circulación, y con líneas blancas gruesas se delimita la región de herradura. La curva verde corresponde con la región de velocidad acimutal cero (donde el gas efectivamente corrotta con el planeta). La estela espiral generada por el planeta es claramente visible.

efecto se sostiene a lo largo del tiempo.

En el caso de tasas de acreción suficientemente altas encontramos que la nueva componente del torque es proporcional a la tasa de acreción, y domina sobre cualquier otra componente del torque. Ya que la tasa de migración depende linealmente con el torque, y este a su vez es proporcional a la tasa de acreción, necesariamente la posición final del planeta será función de la masa que este acrete.

La alta dependencia de la nueva componente del torque con la tasa de acreción puede arrojar pistas sobre el origen de la correlación entre la frecuencia de planetas con la metalicidad estelar. En efecto, ya que la nueva componente de torque escala con la tasa de acreción, y ésta a su vez escala con la cantidad de contenido sólido en la nebulosa, discos más metálicos (más densos) podrían, en principio, favorecer la eficiencia de este mecanismo, posibilitando así, por ejemplo, la formación de planetas gigantes y distantes a la estrella central.

Por otro lado, en ambientes de baja metalicidad, la eficiencia de este mecanismo debería verse reducida, por lo que los planetas no podrían detener su mi-

gración. Así, la formación de planetas gigantes se vería desfavorecida y podrían quedar como resultado un mayor número de planetas del tipo súper tierras, los cuales, de acuerdo a este razonamiento, podrían ser más frecuentes alrededor de estrellas pobres en metales.

Un hecho notable debe ser remarcado. En principio, el torque que encontramos no guarda ninguna relación aparente con el torque ejercido por la estela del planeta o por el horseshoe drag. Es una función solamente de la opacidad del gas y de la tasa de acreción, mientras que el torque estándar depende de la densidad superficial del disco y la temperatura. El hecho de que ambos torques sean de la misma magnitud es muy sorprendente, y más que lo sean para parámetros físicos conservativos como los utilizados en este trabajo.

Finalmente, hemos encontrado una fuente de inestabilidad para el torque, la cual debería ser estudiada en detalle en el futuro. Esta inestabilidad, en caso de tratarse de una inestabilidad física, podría ser el camino hacia posibles excitaciones de inclinación y excentricidad en sistemas altamente disipativos.

Todas estas características en conjunto podrían contribuir de forma significativa a la reconciliación entre los modelos de migración por interacciones planeta-disco y la baja frecuencia de planetas formados mediante la utilización de modelos de síntesis de poblaciones planetarias. En particular, hemos encontrado un mecanismo suficientemente robusto para disminuir, detener o revertir la tasa de migración en las etapas en la que los núcleos se están formando. De esta forma relajamos la necesidad de formar planetas de forma extremadamente rápida, a la vez que posibilitamos la aparición de dos familias de exoplanetas diferentes.

Por último, ciertamente este efecto pone en evidencia la sensibilidad existente en la región coorbital frente a efectos físicos nunca antes considerados, por lo que las posibilidades de encontrar efectos capaces de competir con la migración clásica podrían ser significativas.

Migración en discos magnetizados

6

6.1. Introducción

Observacionalmente, sabemos que los discos en donde deberían estar formándose los planetas son discos de acreción. Además, es posible determinar con un alto grado de precisión el valor para la tasa de acreción. Así, un problema de relevancia en la astrofísica actual consiste en explicar cual es el mecanismo que hace posible el transporte de masa (y momento angular) dentro de estos discos.

Hoy en día es común explicar la acreción observada a partir del efecto descrito por [Balbus y Hawley \(1991\)](#) y [Balbus y Hawley \(1998\)](#). Estos autores describieron una inestabilidad muy potente generada por los campos magnéticos presentes en un disco con rotación diferencial, conocida como Inestabilidad MagnetoRotacional (MRI).

La manifestación más importante de esta inestabilidad es el desarrollo de turbulencia en todas las magnitudes físicas del disco, incluyendo, entre otras, a la distribución de masa. Estos movimientos turbulentos de masa obviamente alterarán a la dinámica de un planeta en formación y, entender cómo se distribuye esta masa en el disco, y en particular, como se distribuye alrededor de los planetas en formación, es crucial para comprender la dinámica del sistema, y al fin de cuentas, explicar su proceso de formación.

Como se describió en los capítulos [1](#) y [2](#), la migración planetaria se debe al balance delicado entre diferentes mecanismos que compiten entre sí, y entenderlos y describirlos adecuadamente en un estado turbulento es una tarea desafiante.

Dos problemas fundamentales aparecen al considerar este tipo de estudios:

- Por la naturaleza tridimensional de la MRI, las simulaciones deben ser, en efecto, tridimensionales, por lo que el costo computacional es muy elevado.
- Por la naturaleza estocástica del proceso, para obtener mediciones con una señal considerable, se requiere de la realización de promedios temporales.

Para relajar la primera condición, autores previos optaron por simular la turbulencia a través de potenciales estocásticos (en espacio y en tiempo), los cuales

son añadidos de forma *ad hoc* sobre simulaciones hidrodinámicas bidimensionales y laminares (Laughlin *et al.*, 2004; Baruteau y Lin, 2010). En estos casos se encuentra que el torque ejercido por la región coorbital (ver sección 2.5.1) puede ser sostenido debido a la difusión producida por los movimientos turbulentos y estocásticos. Sin embargo, esta afirmación depende, naturalmente, de la intensidad de la turbulencia involucrada. Así, esto permitiría, en principio, explicar una reducción de la tasa de migración en un caso turbulento respecto de uno no viscoso y laminar, en donde el torque de corrotación satura y rápidamente desaparece.

Nelson y Papaloizou (2004) realizaron el primer estudio sistemático del impacto de la turbulencia MRI sobre un planeta, y encontraron que en todos los casos, el torque presenta fluctuaciones importantes, las cuales oscilan para generar torques positivos o negativos, en escalas temporales de tan sólo una órbita. El proceso sería similar a una caminata aleatoria. Además, por medio de promedios temporales, estos autores encontraron que el torque medio al que se encuentra sometido un planeta en formación dentro de un disco turbulento sería algo diferente al torque ejercido en el caso laminar. Sin embargo, el ruido presente en sus simulaciones no permite obtener convergencia de los resultados.

Más recientemente, Uribe *et al.* (2011) mostraron mediante simulaciones tridimensionales estratificadas que puede existir una componente de torque de corrotación no saturada en tales casos.

Por medio de simulaciones bidimensionales Guilet *et al.* (2013) mostraron que el torque se modifica de forma dramática por medio de la inclusión de un campo magnético acimutal débil, y que el signo del exceso de torque dependería del signo del acimut (respecto del planeta) de un punto muy particular en el fluido, conocido como punto de velocidad cero o *stagnation point* en inglés.

Posteriormente Uribe *et al.* (2015) concluyeron mediante simulaciones numéricas bidimensionales, tridimensionales y un análisis lineal que en el torque ejercido en el caso magnético existiría una componente de torque asociada con el ejercido en el caso no magnetizado, la cual retarda la migración, pero en ningún caso puede revertirla.

La mayor dificultad para comparar el torque en el caso 3D turbulento respecto del caso laminar bidimensional es que las simulaciones turbulentas no alcanzan nunca un estado estacionario en el tiempo, por lo que los perfiles nunca dejan de variar. Esta es una diferencia enorme a la hora de calcular lo mismo en el caso laminar.

En esta sección nosotros utilizaremos el código numérico que desarrollamos para intentar atacar este problema haciendo uso de la potencia de un cluster de GPU's. Realizaremos cientos de simulaciones tridimensionales de discos magnetizados y turbulentos, con el objetivo de incrementar la señal y poder obtener una medición suficientemente convergida para el torque. Incrementando la señal lo suficiente, podremos realizar una comparación suficientemente limpia entre un

caso turbulento y un caso laminar.

6.2. Inestabilidad MagnetoRotacional

En esta sección, por completitud, se introducirá de forma muy breve una explicación del mecanismo responsable de la inestabilidad magnetorotacional. Entender correctamente las bases del mecanismo, y la forma en la éste actúa será de utilidad para el posterior desarrollo de las simulaciones.

Para entender el funcionamiento del mecanismo fundamental de la MRI seguiremos los desarrollos de [Balbus y Hawley \(1998\)](#).

Partimos de la ecuación de inducción:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (6.1)$$

En el caso no resistivo, las líneas de campo magnético y del campo de velocidad son paralelas entre sí, por lo que si el campo magnético tiene divergencia nula, lo mismo ocurre para el campo de velocidad (incompresible). Además, supongamos que B es uniforme. Por lo tanto:

$$\nabla(\vec{v} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{v}. \quad (6.2)$$

Supongamos que la velocidad está perturbada en Z , y puede descomponerse en sus modos fundamentales verticales. Considerando un modo aislado y asumiendo \vec{B} uniforme en la dirección Z , se tiene que:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = B \partial_z \vec{v} = ik \vec{v} B \longrightarrow \delta \vec{B} = ik B \vec{v} \delta t, \quad (6.3)$$

lo cual da una expresión para calcular la perturbación de campo magnético (en el plano) debido a las perturbaciones de la velocidad, o de forma más precisa, debido a pequeños desplazamientos $\vec{\Delta} = \vec{v} \delta t$:

La fuerza de Lorentz, la cual acopla al campo magnético con la materia, y despreciando la presión magnética, es:

$$\vec{F}_L = \frac{(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}}{\mu_0 \rho}, \quad (6.4)$$

que a primer orden en $\delta \vec{B}$ es:

$$\vec{F}_L = \frac{(\vec{B} \cdot \nabla)\delta \vec{B}}{\mu_0 \rho} \quad (6.5)$$

$$= -\frac{k^2 B^2}{\mu_0 \rho} \vec{\Delta} \quad (6.6)$$

$$(6.7)$$

Así, en este caso tan simplificado, la fuerza de Lorentz se reduce a la ecuación de un oscilador armónico.

Ahora calculemos el desplazamiento sufrido por un elemento de fluido, inicialmente en órbita circular, a una distancia r_p del origen, sometido a la fuerza magnética F_L . Las ecuaciones del movimiento para este elemento de fluido, en el marco corrotante son:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\Omega_p \frac{dy}{dt} = r(\Omega_p^2 - \Omega(r)^2) + F_{Lx} \quad (6.8)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\Omega_p \frac{dx}{dt} = F_{Ly} \quad (6.9)$$

Donde se asume que x apunta en la dirección radial e y en la dirección acimutal creciente. Los términos de la derecha se corresponden, de izquierda a derecha, con la fuerza centrífuga y centrípeta respectivamente.

Para un pequeño desplazamiento $\vec{\Delta} = (\Delta_x, \Delta_y)$ respecto de la órbita circular inicial, las ecuaciones de movimiento, a primer orden en Δ , son:

$$\frac{d^2\Delta_x}{dt^2} - 2\Omega_p \frac{d\Delta_y}{dt} = -\left(\frac{d\Omega^2}{d\ln r} + k^2 v_a^2\right)\Delta_x, \quad (6.10)$$

$$\frac{d^2\Delta_y}{dt^2} + 2\Omega_p \frac{d\Delta_x}{dt} = -k^2 v_a^2 \Delta_y, \quad (6.11)$$

donde v_a es la velocidad de Alfvén, definida como $v_a = B/\sqrt{\mu_0\rho}$.

La relación de dispersión que satisfacen estas ecuaciones es (suponiendo $\vec{\Delta} \propto e^{-i\omega t}$):

$$\omega^4 - \omega^2(\kappa^2 + 2\mathcal{K}^2) + \mathcal{K}^2\left[\mathcal{K}^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln r}\right] = 0, \quad (6.12)$$

con $\kappa = 4\Omega^2 + d\Omega^2/d\ln r$ la frecuencia de oscilación para pequeños desplazamientos en el caso el caso no magnetizado (frecuencia de epicyclo), y $\mathcal{K} = kv_a$.

(6.12) es una parábola en ω^2 , y la raíz negativa se corresponde con la inestabilidad magnetorotacional:

$$\omega_{\text{mri}}^2 = \frac{\kappa^2 + 2\mathcal{K}^2 - \sqrt{\kappa^4 + 16\mathcal{K}^2\Omega^2}}{2} \quad (6.13)$$

Así, la inestabilidad se produce cuando el tercer término supera a los otros dos:

$$\mathcal{K}^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln r} < 0, \quad (6.14)$$

Ya que el número de onda puede elegirse arbitrariamente pequeño, la condición

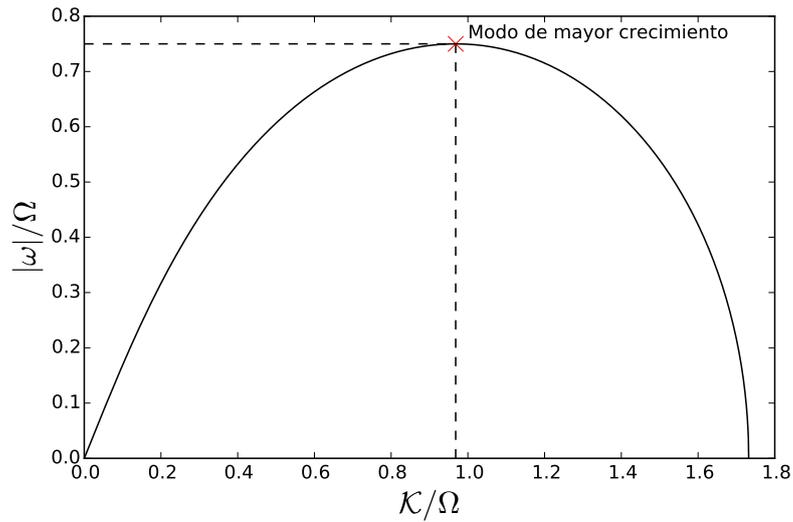


Figura 6.1: Relación de dispersión dada por la ecuación (6.13) (normalizada). Con una cruz, se marca la posición de la frecuencia de máximo crecimiento. También, se observa la existencia de una frecuencia de corte, la cual viene dada por un cero del numerador de (6.13).

de estabilidad suele escribirse como:

$$\frac{d\Omega^2}{d \ln r} < 0. \quad (6.15)$$

El máximo de la ecuación (6.13), se produce en:

$$\kappa_{\max}^2 = -\left(\frac{1}{4} + \frac{\kappa^2}{16\Omega^2}\right) \frac{d\Omega^2}{d \ln r}, \quad (6.16)$$

que se corresponde con una frecuencia de oscilación:

$$\omega_{\max}^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{d\Omega}{d \ln r} \right| \quad (6.17)$$

En el caso Kepleriano, $\kappa = \Omega$, por lo que $\omega_{\max} = 3/4\Omega$, y ocurre en $\kappa_{\max} = \sqrt{15}/4\Omega$, lo cual significa que la inestabilidad crece exponencialmente en escalas de tan solo una órbita.

En la Fig. 6.1, se muestra una representación de la relación de dispersión (normalizada por la frecuencia de rotación) para el caso Kepleriano. Se observa claramente la existencia de una frecuencia de máximo crecimiento, como así también la existencia de una frecuencia de corte.

6.3. Estrategia de trabajo

Asumiendo que la turbulencia que se genera a partir de la MRI es un proceso estocástico, debe existir un tiempo finito de decorrelación para dos simulaciones que parten de condiciones iniciales similares.

Así, con el objetivo de realizar mediciones instantáneas del torque sufrido por un planeta en un disco tridimensional turbulento, realizaremos cientos de simulaciones y posteriormente las promediaremos.

Para ello, debemos asegurarnos de promediar simulaciones descorrelacionadas, con el fin de incrementar efectivamente la relación señal-ruido. Éste será el objetivo de las siguientes secciones.

6.4. Implementación numérica

Para el estudio llevado a cabo en este capítulo se utilizó el código en su versión cilíndrica, y se resuelven las ecuaciones de la MHD completas, tal cual fueron presentadas en el capítulo 3.

Utilizamos una malla cilíndrica de tamaño $(N_r, N_\phi, N_z) = (450, 210, 40)$. La estrella es modelada por medio de un potencial puntual en el origen, de masa $M_* = 1M_0$, con M_0 la unidad de masa, la cual no es relevante en este estudio.

Cuando el planeta es incluido en las simulaciones, se lo considera como un potencial estático y suavizado en un marco de referencia corrotante. Por simplicidad, se desprecian los términos indirectos del potencial, y resolvemos el problema no estratificado para poder realizar comparaciones limpias con el caso bidimensional.

Con estas consideraciones, el potencial al que está sujeto el disco adopta la forma:

$$\phi = -\frac{GM_*}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{Gm_p}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + \varepsilon^2}}, \quad (6.18)$$

donde x, y son las coordenadas cartesianas de un elemento de volumen de gas, y x_p, y_p son las coordenadas cartesianas del planeta. ε es el parámetro de suavizado, y es incluido con el fin de considerar la tercer dimensión en el potencial para obtener torques comparables con los casos tridimensionales estratificados (ver ecuación 2.25). Su valor impacta en el tamaño de la región de herradura del planeta, y por lo tanto también tiene un impacto significativo sobre el torque. Es importante aclarar que si bien nuestras simulaciones son tridimensionales, al ser no estratificadas, no consideran la tercer dimensión para el potencial gravitatorio. Sin embargo, ya que en nuestro estudio, como se verá más adelante, realizaremos una comparación entre simulaciones realizadas exactamente de la misma forma, el valor exacto de ε no será relevante.

La malla utilizada se extiende sobre un dominio $\varphi \in [0, \pi]$, $r \in [R_0, 8R_0]$, $z \in [-0, 3R_0, 0, 3R_0]$, de forma similar a la configuración empleada por Baruteau *et al.* (2011). R_0 es la unidad de longitud, cuyo valor numérico se fijó como la unidad, pero no tiene importancia en nuestro estudio. En todos los casos en los que haya un planeta, la masa considerada es $m_p = 3 \times 10^{-4}M_*$.

6.4.1. Condición inicial

Antes de poder insertar un planeta en un disco turbulento, realizamos una simulación base, partiendo de un estado laminar perturbado.

El perfil de densidad utilizado es una ley de potencia de la forma:

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-\sigma},$$

con $\sigma = 1/2$. La relación de aspecto del disco adopta la forma:

$$h(r) = h_0 \left(\frac{r}{R_0} \right)^f, \quad (6.19)$$

con $f = 0$. A partir de la relación de aspecto, iniciamos la velocidad del sonido $c_s = h(r)v_k$, donde $v_k = \sqrt{GM_*/r}$ es la velocidad Keplerina.

La perturbación en la velocidad inicial se produce mediante la adición de un ruido uniforme sobre los campos de velocidad, de la forma:

$$\begin{aligned} v_\phi^2 &= v_k^2 [1 - h^2 (2f - 1 - \sigma)], \\ v_r &= \alpha c_s \omega_r, \\ v_z &= \alpha c_s \omega_z, \end{aligned}$$

con ω_r, ω_z una variable aleatoria y uniforme entre $[-1,1]$, que depende de la posición. α es la amplitud de la perturbación inicial, fijada en $2,5 \times 10^{-2}$. Los términos multiplicados por h^2 son considerados para mantener el balance rotacional, el cual es alterado por los gradientes de presión internos. El término correctivo por presión magnética no ha sido tenido en cuenta ya que trabajaremos con campos magnéticos débiles. De todos modos, debido a la naturaleza turbulenta del problema, no es necesario considerar una condición inicial exactamente equilibrada.

El campo magnético inicial tiene sólo componente ϕ , y se calcula a partir del parámetro β , el cual mide la relación entre la presión magnética y la presión térmica:

$$\beta = \frac{P_t}{P_m} = \frac{2\mu_0 c_s^2 \rho}{B^2}, \quad (6.20)$$

con lo que:

$$B_\phi = c_s \sqrt{\frac{2\mu_0 \rho}{\beta}} \quad (6.21)$$

En este trabajo realizamos dos simulaciones principales, una con $\beta = 200$ (B2) y otra con $\beta = 400$ (B4). Notar que por la forma de iniciar B_ϕ , β es inicialmente uniforme sobre todo el disco.

6.4.2. Condición de contorno

Con el objetivo de minimizar la propagación de efectos de borde sobre el planeta, se optó por utilizar condiciones de amortiguación para la densidad y el campo de velocidad sobre una fracción de la malla activa. El campo magnético permanece inalterado en estas regiones, y por construcción, su divergencia permanece nula durante toda la integración.

La amortiguación se aplica siguiendo el procedimiento descrito por [de Val-Borro *et al.* \(2006\)](#). La amortiguación es aplicada sobre anillos, que abarcan el dominio $[R_0, 1,35R_0]$ para la amortiguación interna y $[7,3R_0, 8R_0]$ para la amortiguación externa.

La forma en la que se aplica la amortiguación sobre un campo ψ arbitrario es:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\psi - \psi_0}{\tau} P(r), \quad (6.22)$$

τ está parametrizado por el período orbital a la distancia r y P es una función parabólica que va desde 1 en la frontera hasta 0 en el borde de la región de amortiguación.

Para las cantidades localizadas en el último anillo activo, se aplican condiciones de contorno reflectantes. Esta condición también incluye al campo magnético, por lo que su flujo se conserva de forma estricta.

Ya que el potencial utilizado no es estratificado, el problema es invariante en la dirección Z , y condiciones de contorno periódicas para todas las cantidades son aplicadas en sus fronteras.

En la Fig. 6.2 puede verse un bosquejo de la configuración utilizada en este estudio.

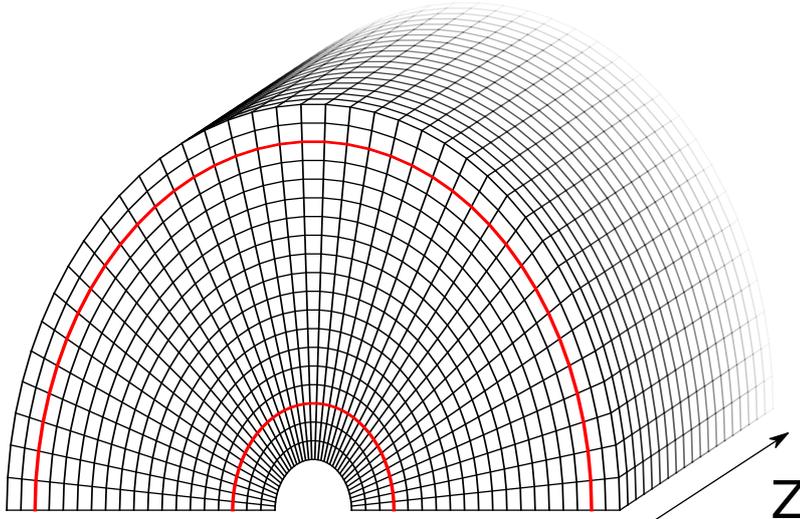


Figura 6.2: Aspecto de la malla en las simulaciones MRI realizadas. La transparencia en la dirección creciente de Z representa la periodicidad en dicha dirección. En rojo se muestra una representación de las regiones de amortiguación empleadas.

6.5. Propiedades de la la turbulencia

En esta sección discutiremos aspectos relacionados a las propiedades de la turbulencia MRI que son de interés para nuestras mediciones, como ser el tiempo en el que satura completamente, la forma de reutilizar estados turbulentos previos, los tiempos de coherencia y el tiempo de muestreo óptimo para incrementar la señal del torque.

6.5.1. Saturación de la turbulencia

El primer objetivo de nuestro trabajo consiste en la obtención de un estado base, completamente turbulento. Para ello, realizamos simulaciones de larga duración para modelos con diferente intensidad de campo magnético. Como parámetro de control para la turbulencia desarrollada, realizamos mediciones de los tensores de Reynold y Maxwell, y con ellos determinamos la viscosidad efectiva actuante sobre el disco.

La viscosidad α_ν , definida como $\nu = \alpha_\nu c_s H$ (Shakura y Sunyaev, 1973), puede ser calculada como:

$$\alpha_\nu = \left\langle \frac{\delta v_r \delta v_\phi}{c_s^2} - \frac{B_r B_\phi}{\mu_0 \rho c_s^2} \right\rangle_\rho, \quad (6.23)$$

donde la expresión entre llaves corresponde con el tensor de esfuerzos del fluido (diferencia entre el tensor de Reynolds y el tensor de Maxwell) y debe ser promediada en el espacio y pesada por la densidad (su cálculo puede verse en la sección 4.11).

En la Fig. 6.3 puede verse la evolución temporal de α_ν para tres valores diferentes de intensidad de campo magnético inicial. A medida que el campo se intensifica (β decrece) α_ν crece en valor absoluto.

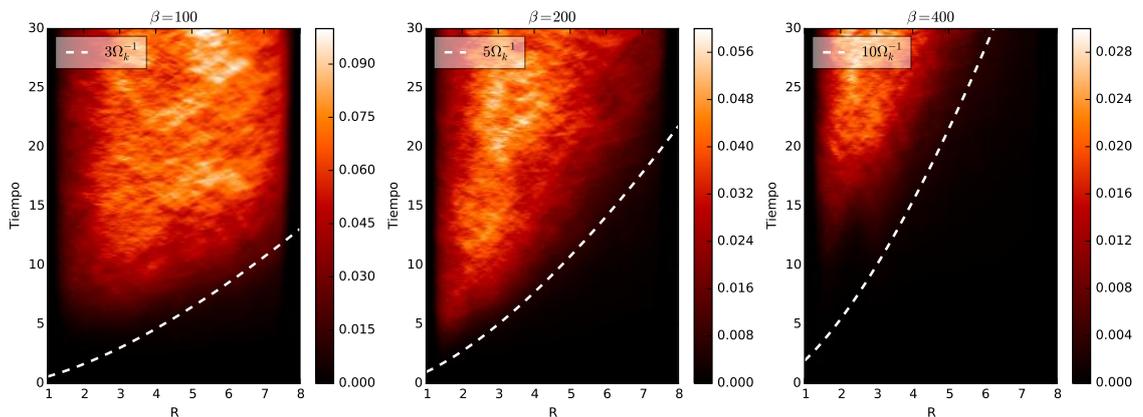


Figura 6.3: Evolución temporal del parámetro α_ν para diferentes intensidades de campo magnético inicial. En cada figura se sobrepone una curva proporcional a la frecuencia Kepleriana local a cada radio. La unidad de tiempo del eje vertical es en órbitas a $R = 3R_0$. A medida que la intensidad del campo magnético disminuye, el tiempo de saturación de la turbulencia se incrementa.

También se observa claramente como el tiempo en el que el disco se vuelve completamente inestable es función también de la intensidad inicial del campo magnético, y guarda también una relación con el período Kepleriano del disco a cada radio. Con curvas a trazos blancas se muestra un ajuste cualitativo de la envolvente inferior de la imagen del crecimiento de α_ν .

En la Fig. 6.4 mostramos la evolución de las estructuras turbulentas para diferentes instantes de tiempo a $z = -0,3$. Puede verse que a medida que el tiempo avanza, los filamentos evolucionan hacia estructuras más definidas y de mayor contraste.

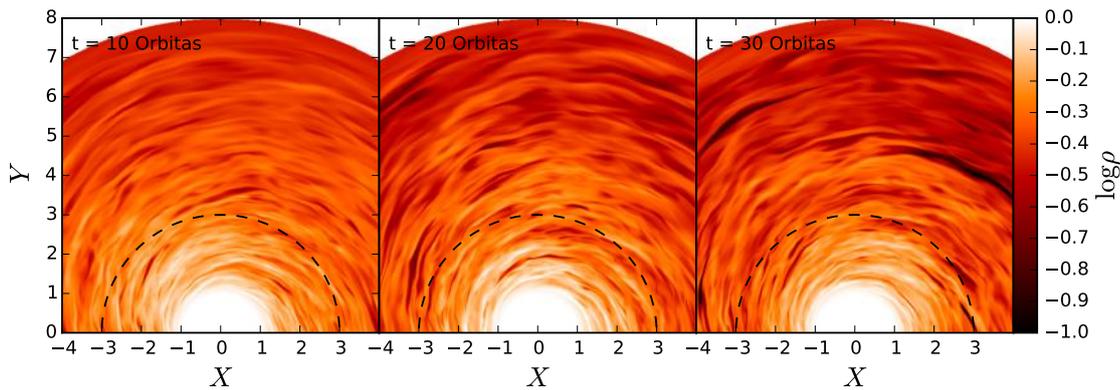


Figura 6.4: Densidad de materia en tres instantes diferentes, partiendo de un estado laminar perturbado. El tiempo se mide en órbitas a $r=3$. La intensidad de campo magnético es $\beta = 100$. Puede observarse como con el incremento del tiempo aparecen estructuras de mayor tamaño y un mayor contraste de densidad.

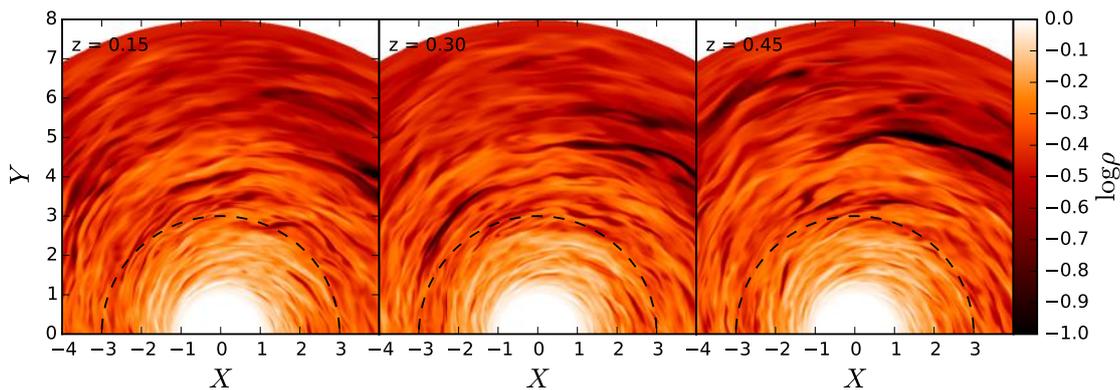


Figura 6.5: Densidad de materia en tres cortes a diferente altura. La intensidad de campo magnético es $\beta = 100$. Puede observarse la existencia de filamentos oscuros coherentes verticalmente. El círculo a trazos negro corresponde con la órbita en la cual se localizará el planeta.

En la Fig. 6.5 mostramos la densidad de materia para diferentes alturas del disco en $t = 30$ órbitas. Puede observarse como la estructura del disco y el contraste de densidad es independiente de Z . También se observa la existencia de

estructuras que prevalecen independientemente de la altura, lo cual refleja una estructura vertical para la turbulencia.

6.5.2. Reutilización de un estado turbulento previo

Una aspecto importante para la obtención de una medición limpia del torque será la reutilización de estados turbulentos saturados como condición inicial para la realización de nuevas simulaciones. Con el objetivo de reducir los tiempos de cómputo involucrados, decidimos partir de un estado turbulento saturado *reiniciado* como punto de partida para el desarrollo de un centenar de simulaciones nuevas. Cuando nos referimos a campos reiniciados, es en el sentido de que todos los campos son restituidos hacia sus perfiles radiales medios originales. Esto se hace para la densidad, las velocidades y el campo magnético acimutal. A continuación describimos el método empleado.

Supongamos que inicialmente un campo f cualquiera (por ejemplo la densidad) es perfectamente axisimétrico. Su perfil radial vendrá dado por la expresión¹:

$$\begin{aligned}\bar{f}(r, z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f d\varphi \equiv \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{n_\varphi} f_{ijk} \Delta\varphi_i \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{n_\varphi} f_{ijk} \left(\frac{\pi}{n_\varphi} \right) \\ &= \frac{1}{n_\varphi} \left(\sum_{i=0}^{n_\varphi} f_i \right)_{jk}.\end{aligned}\tag{6.24}$$

Así, su perfil será sólo función de r (j) y de Z (k).

Luego de una simulación de largo período, por efectos de la viscosidad efectiva todos los perfiles se verán modificados. En particular, el perfil \bar{f} será modificado hacia \bar{g} :

$$\bar{g} = \bar{f} + \delta\bar{g},\tag{6.25}$$

con $\delta\bar{g}$ es el apartamiento de \bar{g} respecto del perfil original \bar{f} . Por lo tanto, para restituir el perfil medio, basta con invertir la expresión anterior y calcular $\delta\bar{g}$:

$$\delta\bar{g} = \bar{g} - \bar{f},\tag{6.26}$$

y restarlo a f , para obtener un nuevo campo h :

$$h = g - \delta\bar{g}.\tag{6.27}$$

¹notar que el límite de integración es π debido a la consideración de medio disco

Veamos que, en efecto, el campo h tiene el mismo perfil medio que f :

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (g - \delta\bar{g}) d\varphi \\ &= \bar{g} - \delta\bar{g} \\ &= \bar{f},\end{aligned}\tag{6.28}$$

donde se utilizó la relación $\overline{\delta\bar{g}} = \delta\bar{g}$.

En la Fig. 6.6 se muestra un ejemplo del método aplicado a una simulación turbulenta particular, en la que el perfil de densidad ha sido alterado por movimientos radiales de materia, y es restituido mediante el método descrito.

6.5.3. Tiempo de coherencia de la MRI

En esta sección estudiaremos las propiedades de coherencia de la turbulencia que utilizaremos para obtener las mediciones del torque sobre los planetas.

Cómo fue explicado anteriormente, con el objetivo de obtener resultados suficientemente limpios en el caso turbulento respecto de mediciones laminares, realizaremos promedios de un gran número de simulaciones. Para ello, es necesario estudiar previamente los tiempos en los cuales las estructuras de la turbulencia se descorrelacionan.

Para esto, consideramos una simulación con $\beta = 100$ a partir de la órbita 30. Realizamos la restitución de los perfiles y continuamos la simulación con un muestreo temporal muy fino (1/40 de órbita a $r = 3R_0$).

Realizamos cuatro simulaciones con muestreo fino, restituidas e iniciadas con ruido uniforme superpuesto en el campo de velocidad. Luego, calculamos la correlación entre cada campo (promediado previamente en z) con los restantes (6 combinaciones en total). La correlación acimutal C de un campo f_1 con otro f_2 se define como:

$$C(r) = \frac{\int f_1 f_2 d\varphi}{\sqrt{\int f_1^2 d\varphi \int f_2^2 d\varphi}},\tag{6.29}$$

y mide la coherencia entre la señal f_1 y la señal f_2 en un instante de tiempo determinado. Un valor cercano a la unidad para esta cantidad significa un alto grado de correlación. Es decir, el promedio de ambos campos no contribuirá a incrementar una señal de fondo. Por el contrario, un valor en torno a cero significa que ambas señales se distribuyen en torno a una media nula.

La ecuación (6.29) es un buen estimador del grado de correlación de una señal cuando ésta no presenta tendencias, y se halla distribuida en torno a una media constante. Así, este estimador no puede ser utilizado, por ejemplo, con el campo de velocidad acimutal o el perfil de densidad, los cuales presentan tendencias

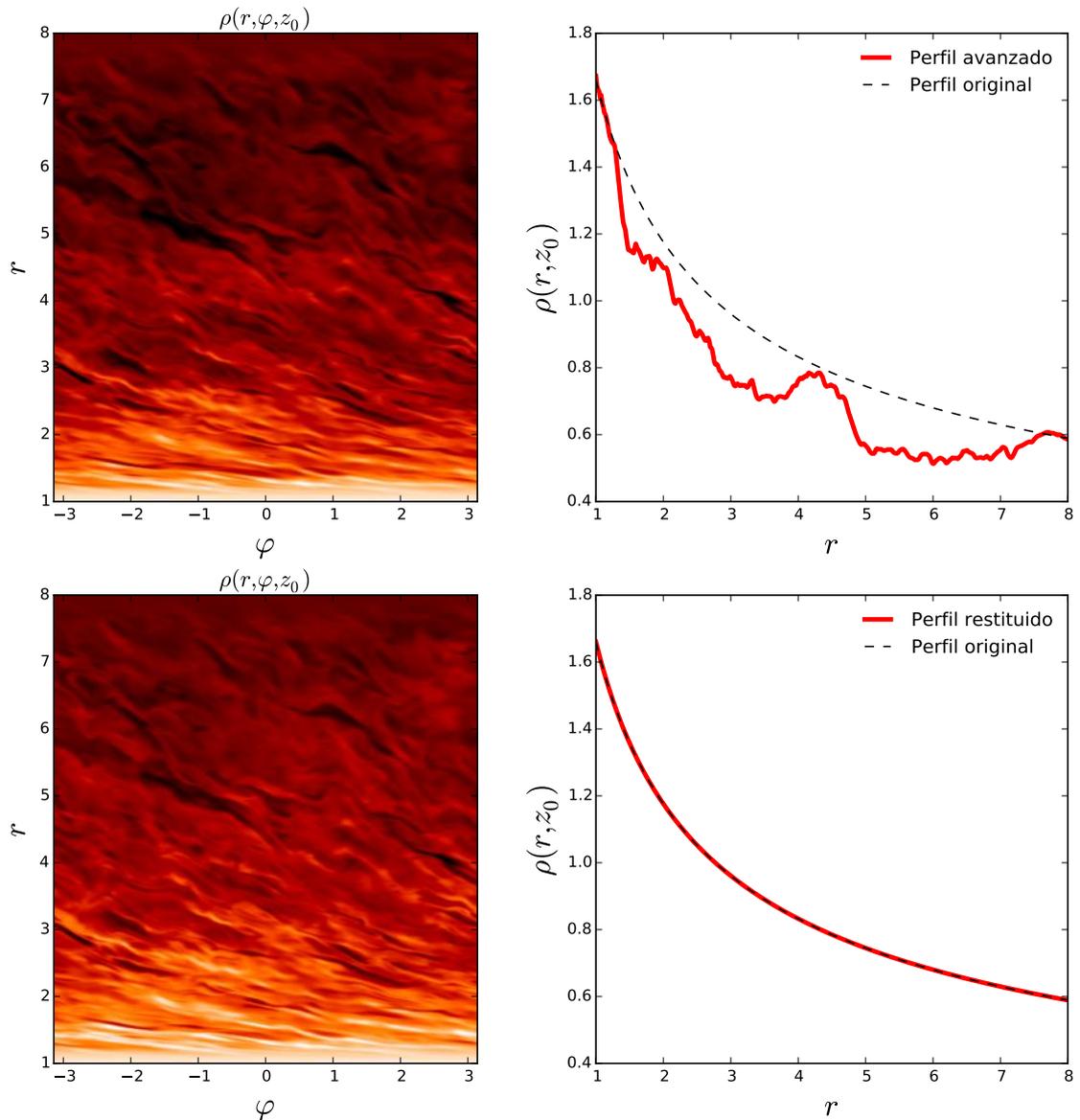


Figura 6.6: Ejemplo de restitución de perfiles sin impactar de forma significativa en las estructuras turbulentas. Los paneles de la izquierda corresponden a una representación polar de una simulación con $\beta = 100$, a 30 órbitas y a una altura $z = -0,3$. El campo mostrado es la densidad volumétrica. Por construcción, capa a capa el perfil es restituido, por lo que el perfil promediado en Z también es restituido. Los extremos de la paleta de colores son los mismos para ambos gráficos.

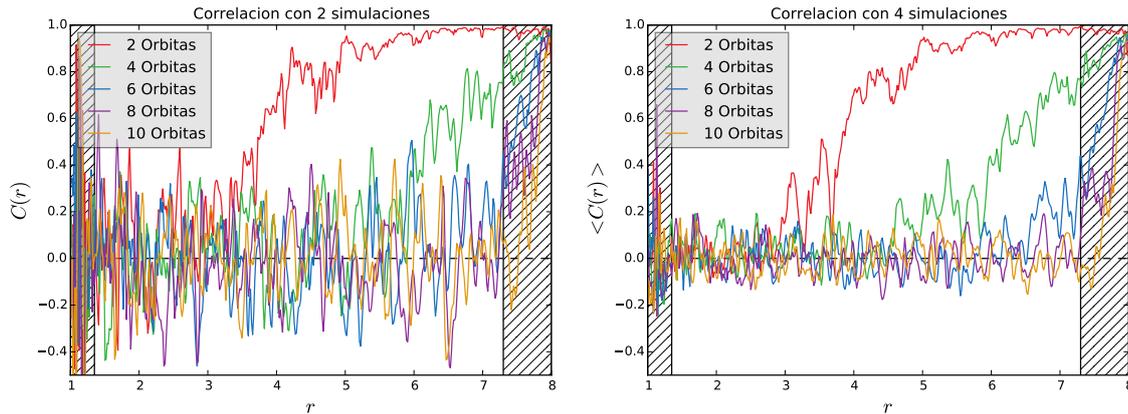


Figura 6.7: Correlación acimutal para ciertos instantes de tiempo, partiendo de dos (o cuatro) simulaciones restituídas con el método descrito en 6.5.2. Todas las simulaciones comienzan con una perturbación aleatoria en el campo de velocidad, y diferente para cada una de ellas. En el panel de la izquierda la correlación se calcula para un par de simulaciones, mientras que en el panel derecho se calcula la correlación de todos los pares posibles (sin repetición) formados a partir de 4 simulaciones y se promedian. La relación señal-ruido para el conjunto promediado es notablemente mas clara. Es interesante observar cómo el tiempo en el que las simulaciones permanecen correlacionadas depende de la distancia radial, lo cual es una manifestación de la disminución de la velocidad de rotación con la distancia. Con un entramado a rayas se muestra la región de amortiguación utilizada en las simulaciones.

considerables².

En nuestro estudio, preferimos utilizar campos que tenemos certeza de que se distribuyen en torno a una media constante, como son la componente radial o vertical del campo magnético.

En la Fig. 6.7 se muestra el resultado de la correlación para diferentes instantes de tiempo, en función del radio. Se muestra además el mismo cálculo pero utilizando un mayor número de simulaciones. Se utilizó el procedimiento descrito en la sección 6.5.2 para restablecer los perfiles, y se añadió un ruido blanco a los campos de velocidad radial y vertical, descorrelacionado entre ellas. Posteriormente se dejan evolucionar y se calcula la correlación de a pares. En el panel de la izquierda se muestra la correlación calculada para un par de simulaciones, mientras que en el panel de la derecha, se muestra la correlación que resulta de promediar la correlación individual de 6 pares (formados a partir de 4 simulaciones). Como es esperable, la correlación calculada a partir de un mayor número de pares presenta una menor dispersión. Por completitud, se marca con un entramado la región de amortiguación utilizada, la cual no debe ser tomada en cuenta en el estudio estadístico de la turbulencia.

De la Fig. 6.7 podemos concluir que dos simulaciones se descorrelacionan significativamente luego de aproximadamente 6 órbitas. Este valor es necesariamente función de β , y es esperable que a menor intensidad de campo magnético, ma-

²aunque se podrían sustraer mediante modelos

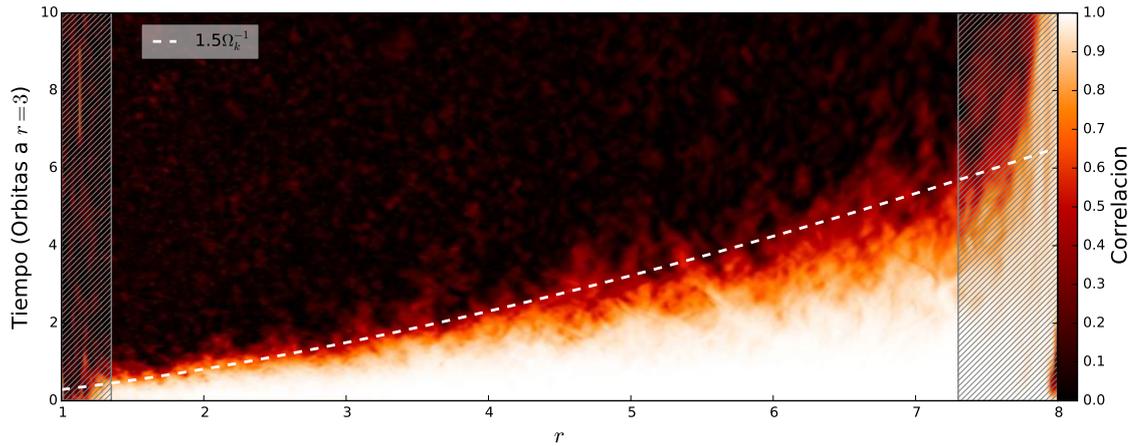


Figura 6.8: Correlación acimutal en función del tiempo. La correlación se calculó de forma análoga a la calculada para la Fig. 6.7. En este caso, el color representa el valor de la correlación promediada para todos los pares formados. Con línea a trazos se marca la curva que corresponde a 1.5 períodos orbitales a cada radio, la cual se corresponde aproximadamente con el límite de correlación para cada anillo. Es muy interesante observar que el tiempo de correlación es estrictamente proporcional al tiempo Kepleriano. Con un entramado a rayas se muestra la región de amortiguación utilizada en las simulaciones.

yor sea el tiempo de coherencia de la simulación. Por otro lado, la región en donde estará el planeta, se descorrelaciona significativamente en tan solo ~ 3 órbitas locales.

Este estudio puede extenderse de forma continua, generando un mapa de correlación radial en función del tiempo, lo cual nos permitirá estimar de forma precisa la ley que describe el tiempo de coherencia. Para esto, utilizamos los seis pares anteriores, y calculamos la correlación para cada salida temporal de todas ellas.

Como ya se describió con anterioridad, el muestreo temporal utilizado corresponde a $1/40$ de órbita a $r = 3R_0$, y utilizamos como tiempo de corte de 10 órbitas, para 4 simulaciones. Esto significa que la información utilizada para construir el mapa consiste de 1600 salidas hidrodinámicas.

En la Fig. 6.8 se muestra el resultado de este estudio. Es notable como la correlación decrece al igual que lo hace el periodo orbital local a cada radio. Además, el tiempo de descorrelación es la mitad del tiempo necesario para desarrollar la turbulencia a partir de un estado laminar (ver Fig. 6.3). Por lo tanto, es posible ganar un factor 2 en tiempo de cómputo. A partir de la curva mostrada, podemos concluir que el tiempo de descorrelación completa de dos simulaciones idénticas, pero perturbadas levemente, será:

$$t_{\text{corr}} = \eta_{\text{corr}} \Omega_k^{-1}(r), \quad (6.30)$$

dónde η_{corr} debe ser función de β , y decrecer a mayor intensidad de campo magnéti-

co. A primer orden, podemos postular una ley de la forma $\eta_{\text{corr}} = \lambda\beta$, y por la Fig. 6.8, correspondiente a $\beta = 100$, se tiene que $\lambda \sim 0,01$. Por lo que la ley es:

$$t_{\text{corr}}(r) \simeq 0,01\beta \sqrt{\frac{r^3}{GM_*}}. \quad (6.31)$$

Así, los tiempo de descorrelación completa en nuestras simulaciones con diferente parámetro β vendrán dados por $t_{\text{corr}}(8R_0)$.

- B2 ~ 9 orbitas a $r = 3R_0$.
- B4 ~ 17 orbitas a $r = 3R_0$.

Por lo tanto, antes de insertar un planeta para medir su torque, será necesario esperar un tiempo cercano a $t_{\text{corr}}(8R_0)$ para poder obtener datos que incrementen la relación señal-ruido en la medición del torque neto.

6.5.4. El mejor muestreo temporal

Antes de insertar los planetas para medir el torque, vamos a estudiar el tiempo de muestreo óptimo para una simulación aislada.

Supongamos que utilizamos, por ejemplo, un intervalo de muestreo temporal demasiado grande. Si este intervalo es muy superior al tiempo durante el cual una estructura turbulenta permanece coherente, ciertamente estaremos contribuyendo a incrementar la señal, pero estaremos perdiendo información valiosa sobre la evolución temporal detallada de las cantidades de interés.

Por otro lado, supongamos que el intervalo de muestreo es inferior al tiempo de coherencia de las estructuras. En este caso, si bien estaremos obteniendo de forma muy detallada la evolución temporal de los procesos involucrados, en escalas de tiempo menores al tiempo de coherencia no estaremos incrementando la señal que deseamos medir³.

Por último, ya que en última instancia estamos interesados en estudiar las propiedades del torque en la región de corrotación, estudiamos como evoluciona la varianza de los datos en torno al promedio, en función del número de datos promediados sobre una ventana temporal fija en torno a esta región.

En la Fig. 6.9 puede verse la evolución de la varianza alrededor de un anillo delgado centrado en la corrotación. Se observa claramente como la varianza satura a partir de un valor cercano a 0.1 para el intervalo de muestreo. Esto nos dice que para obtener la menor cantidad de información no redundante y completa, el muestreo debe realizarse a intervalos cercanos a este valor. Obviamente esto será función de β , sin embargo, en este trabajo establecimos 1/10 de órbita como el tiempo de muestreo para todas nuestras simulaciones.

³Además de estar perdiendo tiempo de cómputo en escrituras y desperdiciando espacio de disco duro

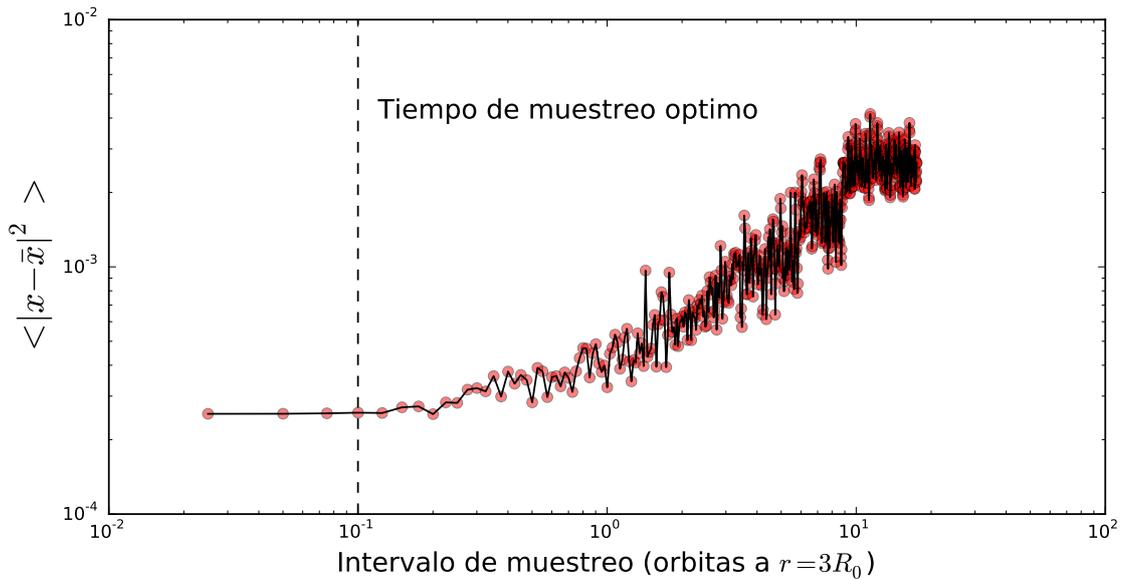


Figura 6.9: Evolución de la varianza alrededor del anillo localizado en $r = 3R_0$. Los campos medios ya fueron promediados en Z . A medida que el intervalo de muestreo disminuye, también lo hace la varianza. A partir de un intervalo de muestreo $\sim 0,1$, la varianza se estabiliza, mostrando que un muestreo más fino no introduce nueva información. Así, en este trabajo adoptamos como tiempo de muestreo $1/10$ de órbita a $r = 3R_0$.

6.6. Midiendo el torque

Con las propiedades estadísticas de la turbulencia ya estudiadas, procederemos a la medición del torque actuante sobre un planeta. Para ello partimos de simulaciones base, las cuales han sido generadas a partir de un campo de velocidad laminar y un campo magnético toroidal, y se corresponden con las simulaciones B2 y B4 anteriormente descritas.

Luego de la obtención de estados turbulentos saturados (aproximadamente luego de un tiempo $\sim 2t_{\text{corr}}(8R_0)$), se restituyen los campos y se añade un ruido uniforme sobre el campo de velocidad ya turbulento.

Este procedimiento se realiza 500 veces para cada β diferente. Cada una de estas 500 simulaciones se deja evolucionar por un tiempo prudencial (el cual depende de β , ver eq. (6.31)) para obtener estados turbulentos totalmente descorrelacionadas entre cada una de ellas. Estos tiempos, como se describió con anterioridad oscilan entre las 5 y 20 órbitas.

Una vez alcanzado el tiempo de descorrelación global, se introduce un planeta en el disco y se comienza a producir toda la información que será luego procesada. Desde la inserción del planeta, hasta que finaliza cada simulación transcurren 30 órbitas planetarias, que a un ritmo de escritura cada $1/10$ de órbita, significa la generación de 300 campos por cada una de las 500 simulaciones, lo cual da el número de 150000 campos para realizar el promedio.

En la Fig. 6.10 se muestra un esquema del método utilizado para la realización

de las mediciones que se presentan en la siguiente sección.

6.7. Cálculo del torque

El torque neto al que está sometido el planeta se calcula luego de realizar el promedio de los campos de densidad de todas las simulaciones con planeta, para un determinado parámetro β . Su valor, partiendo de un promedio previo en Z , se calcula como:

$$\frac{\Gamma}{m_p} = \sum_{ij} \mathcal{G} m_{ij} \left(\frac{x_p (y_j - y_p)}{[(x_i - x_p)^2 + (y_j - y_p)^2 + \varepsilon^2]^{3/2}} - \frac{y_p (x_i - x_p)}{[(x_i - x_p)^2 + (y_j - y_p)^2 + \varepsilon^2]^{3/2}} \right), \quad (6.32)$$

dónde $m_{ij} = V_{ij} \rho_{ij}$ es la masa contenida en la celda ij . ε es, al igual que en el cálculo del potencial (eq. 6.18), la longitud de suavizado.

Ya que estamos interesados en la medición del torque sobre los planetas, el cual es producido por el campo de densidad, los promedios son realizados exclusivamente sobre este campo. El procedimiento consiste en sumar la densidad a lo largo de la dirección Z , con lo cual se obtiene la densidad superficial $\Sigma = \rho \Delta z$, y posteriormente promediar cada salida temporal con sus correspondientes en el conjunto de simulaciones. Así, el torque se calcula utilizando la masa promedio $\langle m \rangle_{ij}(t)$, definida como:

$$\langle m \rangle_{ij}(t) = \frac{V_{ij}}{n_l} \sum_{l=1}^{n_l} \Sigma_{ij}^l, \quad (6.33)$$

dónde Σ^l corresponde con la densidad superficial de cada simulación considerada en el promedio.

En esta investigación no estamos interesados tanto en calcular un valor absoluto para el torque sufrido por un planeta, sino más bien en comparar el torque respecto de casos más simplificados, obtenidos de calcular el torque que siente un planeta en los casos hidrodinámico y magnético bidimensionales.

Ya que todas las simulaciones se compararán entre ellas de la misma forma, la longitud de suavizado utilizada no será de importancia siempre y cuando sea la misma para todos los cálculos. La zona de amortiguación se excluye en el cálculo del torque.

6.8. Simulaciones de comparación

A fin de obtener resultados adicionales de comparación, se realizan simulaciones bidimensionales, con y sin campos magnéticos, con exactamente los mismos parámetros utilizados en las simulaciones tridimensionales.

Ya que el torque sobre los planetas es producido exclusivamente por la distribución de masa en el disco, una dificultad adicional surge al comparar casos

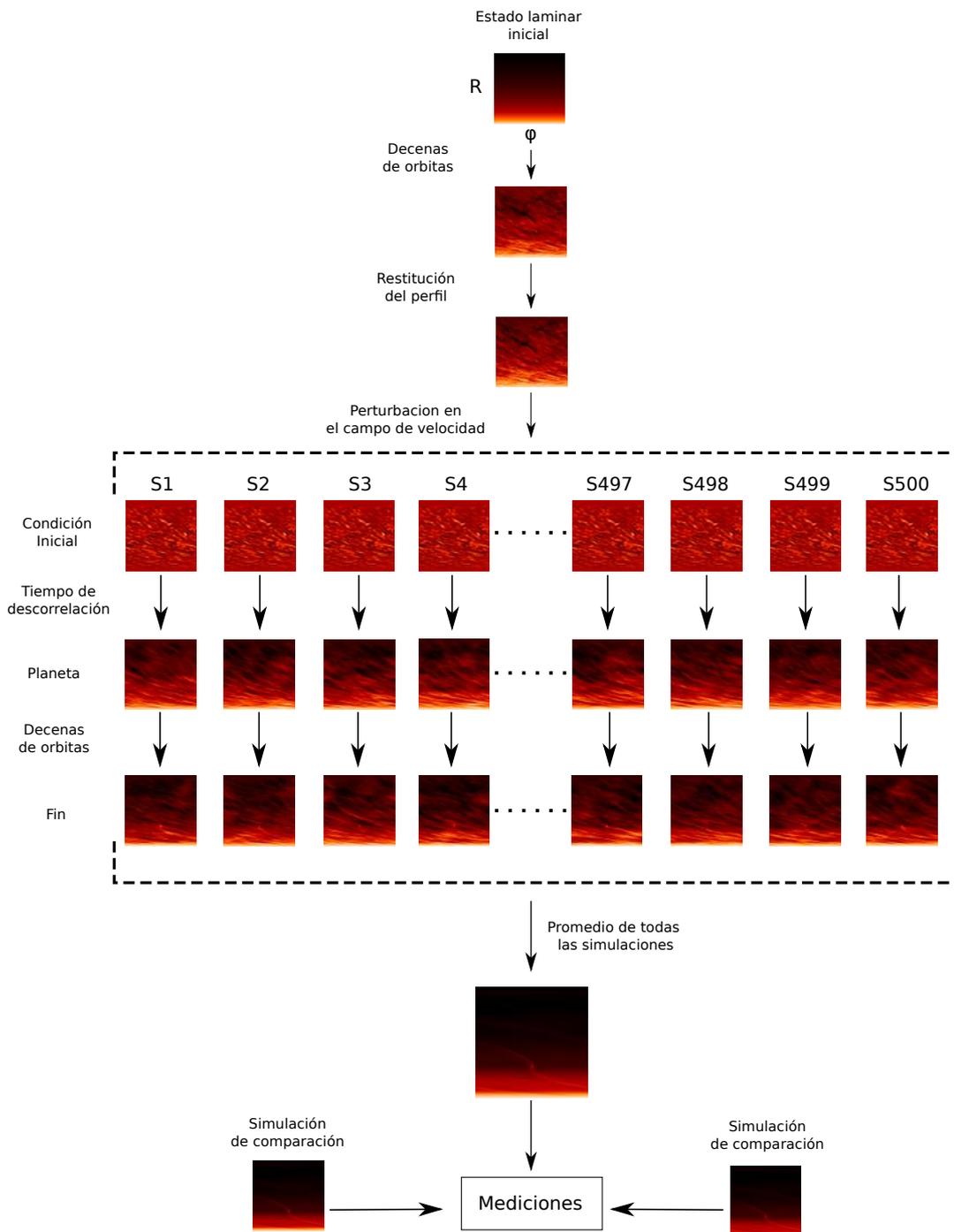


Figura 6.10: Método utilizado para la medición, y posterior comparación, del torque sufrido por un planeta en un disco magnetizado y turbulento. Partiendo de un estado laminar inicial, se deja evolucionar hasta adquirir un estado completamente turbulento, lo cual ocurre en algunas decenas de órbitas. Posteriormente, se utiliza el método descrito en 6.5.2 para restablecer los perfiles radiales. Luego, se añaden perturbaciones aleatorias en el campo de velocidad y se simulan 500 realizaciones diferentes. Para cada una de ellas, se las deja evolucionar por un tiempo suficiente para obtener estados no correlacionados. Posteriormente, se inserta un planeta y se deja evolucionar por algunas decenas de órbitas más. Finalmente, se promedian todos los campos para cada instante de tiempo, y se realizan las mediciones correspondientes. Adicionalmente, se realizan simulaciones simplificadas (hidrodinámicas y magnetohidrodinámicas 2D laminares) con el fin de comparar los resultados.

físicamente no comparables, como lo son el caso turbulento y el caso laminar. El problema radica en que en el caso turbulento el perfil de densidad evoluciona de forma significativamente diferente a los casos laminares, en los que un estado estacionario es fácilmente alcanzado. Así, en caso de encontrar diferencias, no es trivial atribuir las, por ejemplo, a un cambio en la magnitud del torque de corrotación, o a un cambio en la forma de la estela espiral.

La turbulencia, al transportar momento angular de forma estocástica, genera que el disco altere su perfil de densidad radial de forma significativa. Además, predecir cuanta masa inyectar (o evacuar) a través de las fronteras de la malla, para adquirir un estado quasi estacionario es, por lejos, una tarea muy difícil.

Por la ley de conservación del momento angular total del sistema, a medida que la materia cae hacia la estrella, debe haber materia que se aleje de ésta. En un disco sin fronteras, el efecto neto es un derrame (o difusión) del disco en las regiones externas, y, en las internas, una acreción. En una simulación realizada en una caja cilíndrica cerrada, esta ley de conservación impacta profundamente en los perfiles radiales obtenidos al cabo de decenas de órbitas.

Para minimizar variaciones en el torque debido a estos inconvenientes, aprovechamos la gran tasa de muestreo temporal de las simulaciones tridimensionales para restituir el perfil de densidad de las simulaciones bidimensionales al mismo ritmo. El método utilizado es el que ya ha sido descrito en 6.5.2. Es importante notar que, al hacer modificaciones axisimétricas sobre el perfil de densidad, no estamos modificando el valor del torque neto sobre los planetas.

6.8.1. Modelos 2D: Viscosidad y número de Prandtl

Experimentalmente se observa que la turbulencia genera una difusión efectiva sobre los campos. Esta difusión se hace evidente cuando se promedia un gran número de ellas y se observan los campos resultantes. [Guilet *et al.* \(2013\)](#) sugirieron utilizar un modelo bidimensional con una viscosidad efectiva ν en la ecuación de momento y resistividad efectiva η en la ecuación de inducción, relacionadas por el número adimensional de Prandtl $\mathcal{P} \equiv \nu/\eta$. Autores previos (por ejemplo, [Fromang y Stone, 2009](#); [Guan y Gammie, 2009](#); [Lesur y Longaretti, 2009](#)) determinaron que este número es del orden de la unidad, pero su valor puede no ser exactamente la unidad. A pesar de la imprecisión en su valor, saber que es cercano a la unidad es una referencia importante para generar una grilla cuadrada en ν, \mathcal{P} con el fin de encontrar los parámetros que mejor representen los torques obtenidos por los promedios de nuestras simulaciones tridimensionales.

El caso hidrodinámico sin magnetismo, se simula con los mismos parámetros obtenidos para el caso magnético bidimensional de mejor ajuste, el cual presenta una viscosidad α similar al de las simulaciones turbulentas (ver 6.5.1). Este tipo de simulaciones no presenta dificultades adicionales, y servirá para determinar el exceso de torque resultante en las simulaciones tridimensionales.

6.9. Resultados

6.9.1. Simulación B2

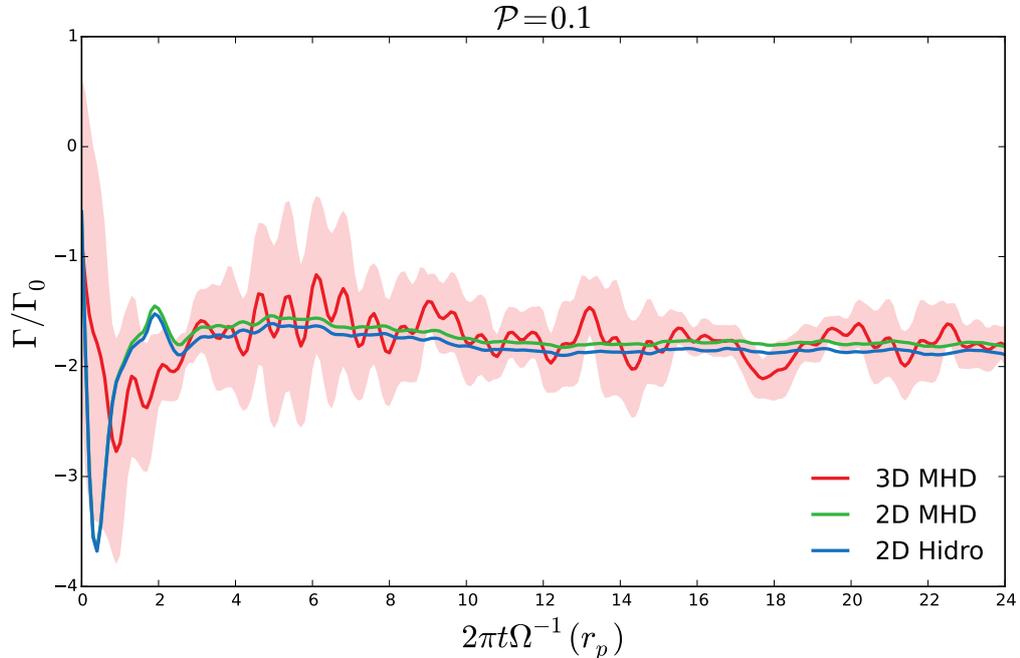


Figura 6.11: Torque total actuante sobre un planeta para la simulación B2. En rojo se muestra el valor medido para el torque luego de realizar promedios cada una órbita (para incrementar la señal) considerando la simulación tridimensional turbulenta. La banda roja clara es la desviación estándar del promedio rojo, lo cual nos da una idea de los errores cometidos en la medición. En verde se muestra el torque para caso magnético 2D con un número de Prandtl=0.1, y en azul el torque en el caso hidrodinámico puro. La similitud entre las tres curvas es notable.

El primer caso considerado es el conjunto con el campo magnético más intenso. En la Fig. 6.11 podemos ver el torque calculado para este conjunto de datos. En rojo se muestra el torque obtenido mediante el promedio de las simulaciones tridimensionales, y en verde el resultado de una simulación bidimensional, cuyo valor de \mathcal{P} es extremadamente bajo, igual a 0.1. En azul, se muestra el mismo torque obtenido para el caso bidimensional no magnético. Como es de esperar, dado el número de Prandtl tan bajo, el caso magnético e hidrodinámico son prácticamente iguales. Un aspecto notable de todas las curvas es que siguen la misma tendencia, lo cual muestra el correcto tratamiento de los perfiles de densidad en todos los casos.

En este caso particular, un número de prandtl tan bajo parecería ser evidencia de que la turbulencia es demasiado grande y genera difusiones enormes en los campos. Sin embargo, una inspección a la densidad de torque, revela un comportamiento muy interesante. En la Fig. 6.12 se puede ver la densidad de torque calculada para cada uno de los tres casos correspondientes a la figura anterior.

En rojo, puede verse la densidad de torque para el caso turbulento tridimensional (nótese la alta calidad de los datos gracias a los promedios), y en azul y verde, el correspondiente para el otro par de simulaciones. Sorprendentemente, aunque el valor total para el torque (integral bajo la curva) sea el mismo, los valores de torque para cada radio son muy diferentes. En el caso tridimensional turbulento se observa una señal muy importante proveniente de la región de corrotación, mientras que en los casos bidimensionales simplificados no se observa esta característica, probablemente debido a la gran difusividad presente.

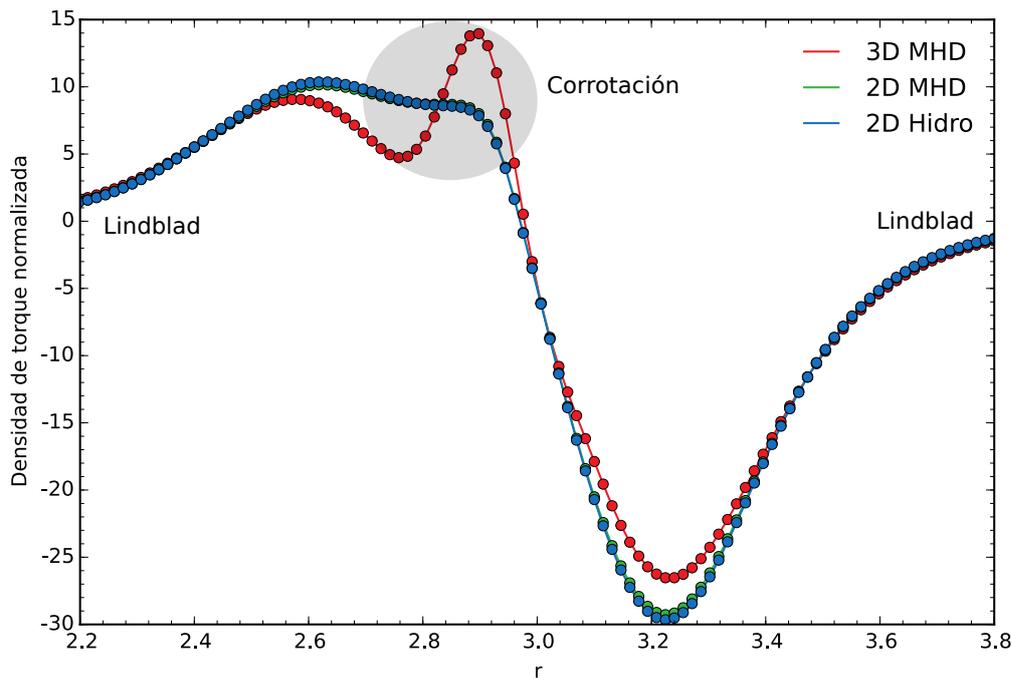


Figura 6.12: Densidad de torque para los tres casos considerados en la simulación B2. En rojo se muestra la densidad de torque para el caso tridimensional turbulento. En verde el caso magnetizado bidimensional con un número de prandtl igual a 0.1. En azul se muestra la densidad de torque para el caso hidrodinámico. A pesar de que las tres curvas subtenden la misma área, la estructura de ellas es bastante diferente. En particular, en el caso tridimensional se observa una señal muy fuerte proveniente de la corrotación.

Así, aunque el torque sea comparable y bien comportado en los tres casos, no significa que la física que está ocurriendo en torno a la región coorbital sea la misma. De hecho, este torque nos está mostrando un comportamiento bastante diferente en un caso y en otro. Por otro lado, puede darse el caso de que la suposición de que la resistividad magnética y la viscosidad son proporcionales no sea adecuada en este tipo de situaciones.

Finalmente, realizamos una comparación del campo de densidad para los tres casos. Una inspección de la Fig. 6.13 no muestra grandes diferencias entre los tres casos. Sin embargo, la simetría de las islas formadas a acimut negativo respecto del planeta tiende a perderse levemente. En el primer panel, correspondiente al

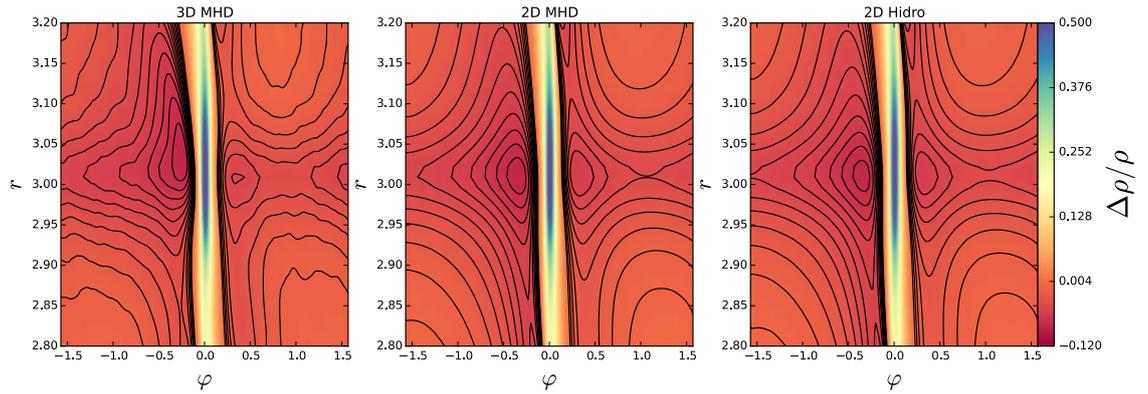


Figura 6.13: Densidad superficial para el caso tridimensional turbulento y para los casos hidrodinámico y magnetohidrodinámico bidimensional de la simulación B2. Todos los paneles fueron calculados promediando 5 órbitas a partir de la órbita 10, luego de la inserción del planeta. En curvas negras se muestran isocontornos de densidad, los cuales se corresponden con exactamente el mismo valor para los tres paneles a fin de comparar diferencias sutiles en los gradientes de densidad.

caso turbulento tridimensional, se observa como esta región es alargada en radio y su centro se desplaza hacia afuera, lo cual muy probablemente es la fuente del torque adicional observado. Por el contrario, dada la alta resistividad utilizada en estos casos, las simulaciones bidimensionales prácticamente no presentan diferencias.

6.9.2. Simulación B4

Aquí presentamos el caso de campo magnético más débil. En la Fig. 6.14 observamos el torque calculado para el conjunto de simulaciones correspondientes a un parámetro $\beta = 400$. En rojo se muestra el torque calculado para el caso tridimensional turbulento, mientras que en azul y verde se muestran el torque en el caso magnético bidimensional con $\mathcal{P} = 0,5$ y el caso hidrodinámico respectivamente. A diferencia del caso anterior, ahora el número de Prandtl necesario para obtener un buen ajuste entre el caso 3D y 2D se incrementó de forma considerable. La tendencia observada por la curva verde respecto de la roja es notable, exhibiendo incluso los mismos patrones de deriva de larga escala. A diferencia del caso anterior, en este caso se observa un exceso de torque significativo y positivo, evidenciando algún proceso en la región de corrotación.

Inspeccionando la densidad de torque para estas simulaciones, mostrada en la Fig. 6.15, vemos que en el caso turbulento tridimensional persiste la señal observada en la Fig. 6.12, correspondiente al campo magnético más intenso en la región de corrotación, pero al ser más débil el campo magnético en este caso, lo mismo ocurre con la intensidad de la señal. Otra diferencia respecto del caso anterior es la aparición de esta señal, de forma muy débil, en la simulación bidimensional con campo magnético (curva verde), mostrando en efecto, que quizás

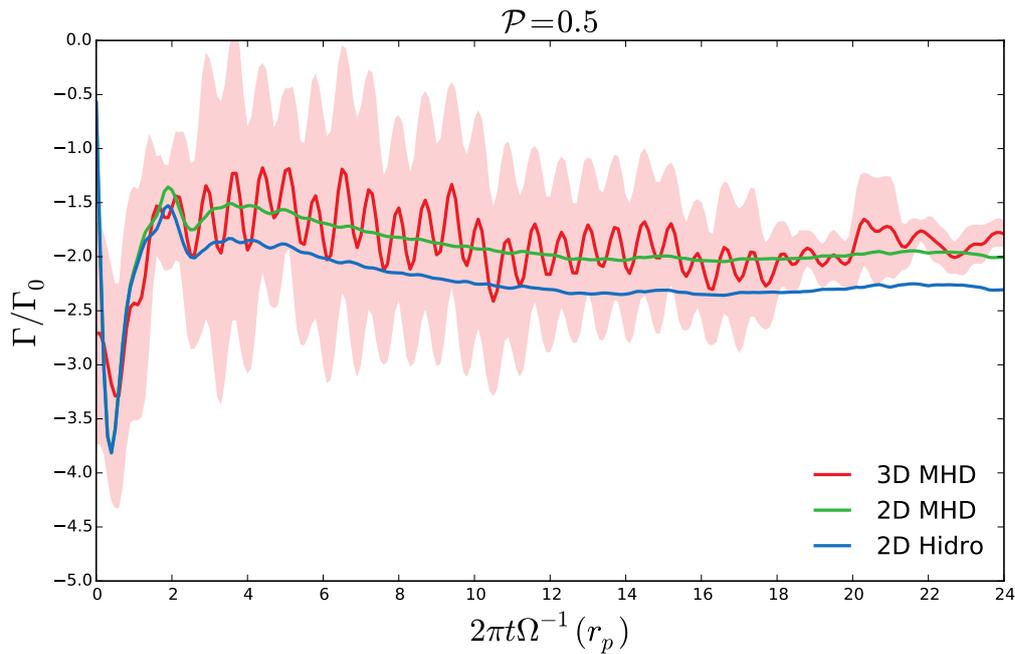


Figura 6.14: Torque total actuante sobre un planeta para la simulación B4. En rojo se muestra el valor medido para el torque luego de realizar promedios cada una órbita (para incrementar la señal) considerando la simulación tridimensional turbulenta. La banda roja clara es la desviación estándar del promedio rojo, lo cual nos da una idea de los errores cometidos en la medición. En verde se muestra el torque para caso magnético 2D con un número de Prandtl=0.5, y en azul el torque en el caso hidrodinámico puro. La similitud entre las tres curvas es notable.

el número de Prandtl efectivo en las simulación tridimensional no es tan bajo como parecería indicar el buen acuerdo entre los torques. Por el contrario, la densidad de torque en el caso hidrodinámico no muestra evidencia de ese pico en torno a la corrotación, mostrando, en efecto, que su origen es atribuible al campo magnético.

Finalmente, realizamos la misma comparación que en el caso anterior con los campos de densidad en los tres casos. En la Fig. 6.16 vemos la densidad superficial para las tres simulaciones mostradas en esta sección. Al igual que en el caso anterior, el caso tridimensional turbulento presenta una alteración significativa del perfil en un acimut negativo. Una modificación más tenue es observada en el caso magnético 2D, pero con una tendencia similar, mientras que el caso hidrodinámico es comparable al mismo caso hidrodinámico obtenido para el conjunto B2.

Así, si bien en este caso fuimos capaces de observar un exceso de torque positivo para el caso magnético, este exceso nuevamente parece no tener el mismo origen en la simulación bidimensional que en la tridimensional turbulenta.

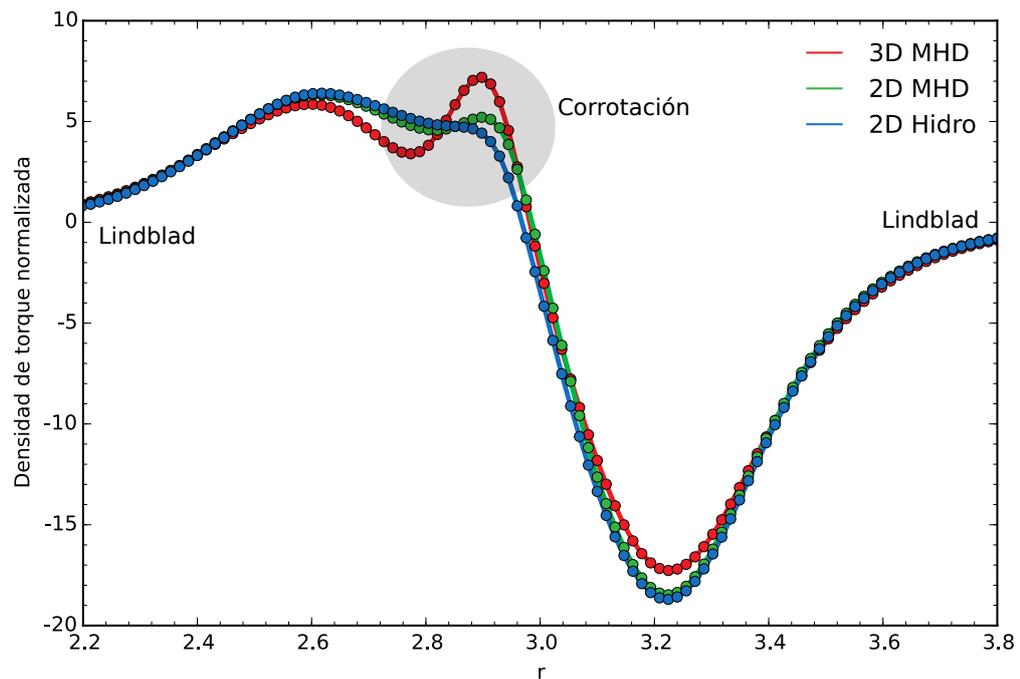


Figura 6.15: Densidad de torque para los tres casos considerados en el la simulación B4. En rojo se muestra la densidad de torque para el caso tridimensional turbulento. En verde el caso magnetizado bidimensional con un número de Prandtl igual a 0.5. En azul se muestra la densidad de torque para el caso hidrodinámico. A pesar de que las tres curvas subtienden la misma área, la estructura de ellas es bastante diferente. En particular, en el caso tridimensional se observa una señal muy fuerte proveniente de la corrotación.

6.10. Conclusiones

En este capítulo hemos presentado la problemática relacionada con la medición de torques actuantes sobre un planeta en un caso muy complejo como lo es una simulación tridimensional turbulenta. Desarrollamos un método para realizar mediciones suficientemente limpias del torque, por medio de la realización de promedios instantáneos de un gran número de simulaciones.

Estudiamos las propiedades de correlación de la turbulencia con el objetivo de incrementar significativamente la eficiencia de nuestras simulaciones, y vimos que los parámetros óptimos para la realización de los promedios es función de la intensidad del campo magnético. Realizamos parametrizaciones sencillas para estas cantidades y obtuvimos recetas más o menos precisas para asegurar el incremento de la relación señal/ruido en nuestras mediciones.

Desarrollamos un método para reiniciar las simulaciones mediante la restitución de los perfiles alterados por la turbulencia, pero sin alterar su espectro, lo cual nos permitió ganar tiempo de cómputo valioso para la realización de un gran número de simulaciones tridimensionales costosas.

Mediante la realización de dos conjuntos de simulaciones, cada uno con 500

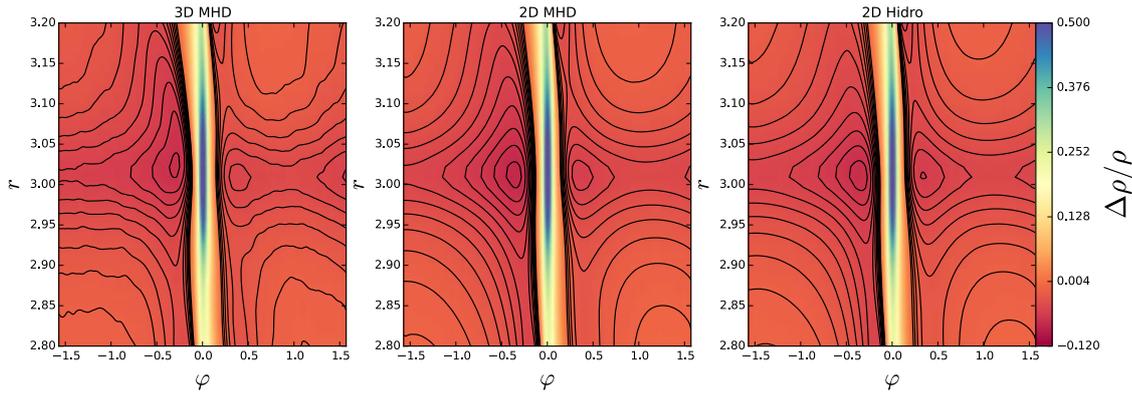


Figura 6.16: Densidad superficial para el caso tridimensional turbulento y para los casos hidrodinámico y magnetohidrodinámico bidimensional de la simulación B4. Todos los paneles fueron calculados promediando 5 órbitas a partir de la órbita 10, luego de la inserción del planeta. En curvas negras se muestran isocontornos de densidad, los cuales se corresponden con exactamente el mismo valor para los tres paneles a fin de comparar diferencias sutiles en los gradientes de densidad.

simulaciones tridimensionales individuales de larga duración, fuimos capaces de obtener una curva de torque con una señal suficiente como para distinguir el sentido de la migración. En todos los casos, el signo del torque fue negativo. Sin embargo, mediante comparación con un caso hidrodinámico de idénticas condiciones, en un caso con un campo magnético muy débil observamos un exceso de torque significativo, mientras que en el caso de campo más intenso el exceso es mucho más sutil. Esto puede parecer contradictorio a primera vista, pero podría ser explicado a partir del hecho de que un mayor nivel de turbulencia genera una mayor difusión de las cantidades.

Encontramos comportamientos interesantes en torno a la región de corrotación, y en todos los casos, las densidades de torques en los casos bidimensionales sencillo y tridimensional turbulento no eran comparables, aún cuando los torques totales y las tendencias observadas si lo eran. Este comportamiento podría estar sugiriendo la presencia de algún proceso diferente ocurriendo en el caso tridimensional, o simplemente que la relación utilizada entre la viscosidad efectiva y la resistividad no deba ser considerada lineal para nuestras simulaciones.

Con este estudio, sentamos las bases y el método para futuras exploraciones en este tema. Con un mayor número de simulaciones, tanto bidimensionales como tridimensionales, esta línea de investigación ciertamente arrojará resultados concluyentes sobre la naturaleza del torque de corrotación magnético.

Migración planetaria de gran escala

7

7.1. Introducción

Como se introdujo en el Capítulo 2, y ya fue estudiado en casos particulares en los Capítulos 5 y 6, un planeta inmerso en un disco de gas sufrirá cambios orbitales dramáticos debido a la interacción con el disco de gas.

El torque sufrido por el planeta puede calcularse de forma analítica en la hipótesis de régimen lineal (cuando la masa del planeta perturbador es suficientemente pequeña) y haciendo algunas simplificaciones, como por ejemplo, discos globalmente isotermos. Estos cálculos permiten entender cuáles son los mecanismos físicos fundamentales que se encuentran involucrados en el proceso de migración (Goldreich y Tremaine, 1979; Tanaka *et al.*, 2002; Paardekooper y Papaloizou, 2009, entre otros).

Sin embargo, como ya se observó en los capítulos 5 y 6, la complejidad del problema puede llegar a ser demasiado grande. Por otro lado, los procesos no lineales pueden ser muy importantes para masas intermedias, por lo que su estudio analítico es limitado. Así, la utilización de códigos numéricos para resolver el sistema de ecuaciones completo es indispensable para poder avanzar en el entendimiento de la migración planetaria.

Las simulaciones hidrodinámicas son muy demandantes computacionalmente. El costo necesario es tan grande por tres razones:

1. Es necesario resolver una región angosta (órbitas de herradura) cerca de la órbita del planeta para calcular correctamente el torque de corrotación (ver por ejemplo la Fig. 5.14).
2. Es necesario mantener una resolución suficientemente buena como para resolver la estela espiral excitada por el planeta (Sección 2.5.1).
3. Es necesario considerar una extensión acimutal completa para describir correctamente el movimiento de herradura y estudiar correctamente las propiedades de saturación del torque de corrotación (Sección 2.5.1).

Grandes esfuerzos fueron hechos con tal de disminuir el costo computacional e incrementar la eficiencia de las integraciones numéricas. Un caso notable es el algoritmo FARGO (descrito en la sección 3.16), desarrollado por [Masset \(2000\)](#). Otro ejemplo notable es la consideración de la evolución global de un disco de acreción a partir de una malla radial 1D superpuesta a un disco 2D no axisimétrico, lo cual permite simulaciones globales de evolución viscosa a costo computacional adicional despreciable ([Crida et al., 2007](#)). En particular, la utilización de modelos globales de disco es crucial en estudios de la migración de tipo II (ver sección 2.5.2), la cual ocurre para planetas de masa suficientemente grande como para abrir un surco en el disco y migrar a un tiempo similar al tiempo de evolución viscosa del disco.

Detecciones recientes de exoplanetas, particularmente las provistas por el satélite Kepler, muestran la existencia de sistemas de planetas múltiples, próximos a la estrella central, y que se encuentran muy cerca de resonancias de movimientos medios (p. ej. [Lithwick y Wu, 2012](#); [Goldreich y Schlichting, 2014](#); [Xie, 2014](#)). Aún se debate si estos sistemas fueron formados in-situ (p.ej. [Hansen y Murray, 2012](#)) o son un resultado de interacciones de tipo planeta-disco (p.ej. [Baruteau y Papaloizou, 2013](#)) como las estudiadas en los capítulos anteriores. En particular, con la segunda hipótesis aún hay problemas que deben ser resueltos antes de considerar estudiarla con detalle.

Simulaciones hidrodinámicas de sistemas con múltiples planetas presentan dos desafíos principales. Por un lado, deben ser capaces de resolver un decaimiento orbital de gran escala, como por ejemplo, desde $r_0 \sim 10AU$ (\sim el lugar donde sería posible su formación) hasta $r_0 \sim 0,1$, que se corresponde (orden de magnitud) con la posición actual observada en muchos casos. Así, las simulaciones deben ser multi escala abarcando, al menos, dos órdenes de magnitud en su dominio radial.

Por otro lado, incluso después de haber alcanzado una región suficientemente interna, en el caso de sistemas de múltiples planetas, es necesario esperar a que éstos evolucionen, dentro de su posible configuración resonante, hacia alguna especie de condición estacionaria o de equilibrio, si es que existe.

Por lo tanto, el desafío para esta clase de problemas es la realización de simulaciones multi escala, tanto en espacio como en tiempo.

Los códigos hidrodinámicos tradicionales, incluso FARGO3D en el estado presentado en el Capítulo 3, no son capaces de atacar el tipo de problema descrito. Una de las principales dificultades proviene de la condición CFL (sección 3.13), lo cual es un requisito de estabilidad propio del esquema utilizado para resolver las ecuaciones de forma explícita. En una grilla cilíndrica, la condición CFL limita significativamente el paso de tiempo por el tamaño de las celdas más internas. Así, simulaciones que pretendan describir un disco suficientemente extendido en radio deberán integrarse con un paso de tiempo considerablemente pequeño. Por lo tanto, simular planetas que migren sobre escalas radiales suficientemente

grandes será prácticamente imposible. Con las técnicas estándar, siempre podrá encontrarse una extensión radial tal que el costo computacional sea tan alto que sea una simulación imposible de ser realizada. Por este motivo, las simulaciones de planetas en disco son simulaciones de tipo local, tanto en espacio como en tiempo, y esto es una característica y limitación que suele ser pasada por alto.

El objetivo de este capítulo es, entonces, presentar un nuevo método numérico desarrollado con el objetivo de resolver parte de los problemas anteriormente descritos. El método que presentaremos consiste en una técnica de remapeo de las cantidades hidrodinámicas, la cual se basa en la actualización adecuada de las condiciones de contorno de una malla hidrodinámica a medida que todo el dominio se mueve junto con los planetas que migran dentro de ella. Es decir, construiremos una *malla móvil*¹ en radio.

Las condiciones de contorno se redefinen de forma automática, y conducen a simulaciones de muy alta resolución y que varía y se adapta de forma adecuada si algunas consideraciones son tenidas en cuenta.

Veremos en las secciones siguientes que, al definir el dominio hidrodinámico de forma local, se evita tener que considerar una malla suficientemente extendida, por lo que el costo de las simulaciones se reduce de forma significativa, permitiendo alcanzar una mejora en el rendimiento de al menos un orden de magnitud (ver sección 7.6). Al incrementarse automáticamente la resolución a medida que los planetas migran, también ganamos en precisión.

Por último, la técnica presentada permite, por primera vez, la realización de simulaciones hidrodinámicas de planetas en migración por tiempos computacionales (y dinámicos) virtualmente infinitos, similares al tiempo de vida media del disco de gas.

7.2. Modelo utilizado

Describiremos el problema utilizando las ecuaciones completas de Navier-Stokes en un marco de referencia no rotante:

La ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (7.1)$$

con ρ la densidad y \vec{v} la velocidad del fluido.

Las ecuaciones de momento son:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla P - \rho \nabla \phi + \nabla \cdot \vec{\Pi}, \quad (7.2)$$

con P la presión térmica y ϕ el potencial gravitatorio, que incluye sólo el potencial

¹El método propuesto no sugiere realizar una transformación de Galileo local, por lo que en rigor, no es una malla móvil. Sin embargo, el método podría ser generalizado hacia una malla realmente móvil sin mucha dificultad.

estelar y el planetario. $\vec{\Pi}$ es el tensor viscoso:

$$\vec{\Pi} = \rho\nu \left[\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{v})\vec{I} \right], \quad (7.3)$$

con ν la viscosidad cinemática e \vec{I} el tensor identidad.

Por simplicidad, utilizaremos las ecuaciones anteriores integradas en Z , con lo cual nos reduciremos al caso bidimensional. Sin embargo, los resultados aquí presentados pueden ser extendidos a la tercer dimensión de forma directa. Es importante notar que en el caso estudiado la materia gaseosa no se *siente* gravitatoriamente entre ella, por lo que el disco es no autogravitante (como se supuso a lo largo de todo este trabajo)

En las simulaciones que presentaremos, utilizamos la ecuación de estado isoterma (ver Ec. 3.6), en donde la presión del gas se relaciona con la densidad superficial de materia Σ como $P = c_s^2(r)\Sigma$, con c_s la velocidad del sonido del gas. c_s se relaciona con la relación de aspecto del disco h como $c_s = r\Omega_k h(r)$. $\Omega_k = \sqrt{GM_*/r^3}$ es la velocidad angular Kepleriana y G es la constante de gravitación universal. r es la distancia a la estrella central.

En el modelo presentado en esta sección asumimos que Σ y la relación de aspecto h son leyes de potencia con índices α y f respectivamente². El potencial del planeta es suavizado sobre una longitud $\epsilon = 0,6H$, con $H/r = h(r)$:

$$\phi_p = -\frac{GM_p}{\sqrt{|r - r_p|^2 + \epsilon^2}}, \quad (7.4)$$

Por simplicidad, utilizamos un sistema astrocéntrico y despreciamos los términos indirectos (aceleración del sistema de referencia no inercial), ya que no serán relevantes para el desarrollo del método.

Un aspecto que será crucial en el desarrollo del método son las condiciones de contorno. Utilizamos las condiciones de contorno de amortiguación de [de Val-Borro et al. \(2006\)](#) (ya descriptas en los Capítulos 3 y 6).

Resolveremos todas las ecuaciones en un sistema de coordenadas polares y una grilla linealmente espaciada (aunque la relajación de esta condición se discute en 7.5) en acimut y en radio. El número de celdas utilizadas es n_r en radio y n_φ en acimut.

7.3. Método e implementación numérica

La idea principal de nuestro método es considerar un estado previo como una nueva condición inicial remuestreada a fin de avanzar el sistema hacia un nuevo estado posterior. Hay dos formas de realizar esto:

²Esto implica un ley de potencia para la temperatura T , con índice $\beta = 2f - 1$.

1. Avanzar el sistema en el tiempo hasta un cierto estado, luego hacer un remuestreo de todos los campos, y recomenzar la simulación.
2. Utilizar cada estado alcanzado en un paso de tiempo anterior y remapear todas las cantidades antes de avanzar nuevamente el sistema.

En nuestro trabajo elegimos la segunda opción, ya que permite una variación suave para todas las cantidades, aunque la primer opción podría ser utilizada como una primera aproximación al método, ya que la implementación es mucho más directa y simple, lo cual podría ser beneficioso para un usuario no experimentado con la modificación de un cierto código.

Ya que nuestro método tiene por objetivo el seguimiento de los planetas mientras migran en el disco, el remuestreo debe realizarse exclusivamente de forma radial.

El algoritmo desarrollado tiene tres pasos fundamentales, que consisten en una receta para calcular los nuevos bordes de la malla, una técnica para reconstruir los campos en nuevas posiciones y un método para actualizar las condiciones de contorno y las regiones de amortiguación de los campos.

Para encontrar los nuevos bordes radiales de la malla, utilizaremos la información de la posición del o los planetas. Para esto, es necesario tener en cuenta algunas consideraciones previas.

El anillo de gas más alejado de un planeta que es capaz de generar un torque neto sobre éste es aquel que se localiza en una resonancia de movimiento medio 2:1 interna y 1:2 externa, lo cual se corresponde con las resonancias de Lindblad más alejadas (ver Ec. 2.15).

Así, los nuevos bordes de la malla deberían ser calculados en función de las posiciones de estas resonancias. Cuando dentro de la malla coexistieran más de un planeta, las posiciones de los bordes deberían ser función de las resonancias de Lindblad más externas (por fuera y por dentro) correspondientes a los planetas extremos, es decir, al planeta más exterior y al más interior. De esta forma, es posible asegurar que toda la física de la migración por la interacción con la estela tidal es capturada dentro de la malla hidrodinámica. Por otro lado, para preservar intacta la contribución de la estela generada por los planetas al torque, las resonancias más externas deberían caer dentro de la región activa de la malla, es decir, sin considerar las regiones de amortiguación.

Una vez que se calculan los nuevos bordes, se divide nuevamente la malla utilizando la misma cantidad de celdas radiales que en el paso de tiempo anterior³.

Finalmente, realizamos una interpolación lineal, utilizando los campos avanzados un paso de tiempo Δt , para calcular los valores en las nuevas posiciones radiales de las celdas recientemente construidas. Si estas nuevas celdas caen en un dominio no considerado en el paso de tiempo anterior, se extrapolan por medio

³Esta elección es sólo por simplicidad. El número de celdas podría ser modificado y el método aquí propuesto seguiría siendo válido.

de prescripciones analíticas, las cuales son las utilizadas o bien como condición inicial, o calculadas en tiempo de ejecución, cuando la evolución viscosa global es considerada (ver sección 7.3.3).

La misma receta es utilizada para actualizar las condiciones de contorno y las regiones de amortiguación.

7.3.1. Definiendo los bordes de la malla

En esta sección presentamos un algoritmo particular para la determinación de los bordes de la malla en función de la posición de los planetas, para lo cual tenemos en cuenta el ancho de la zona de amortiguación de ondas.

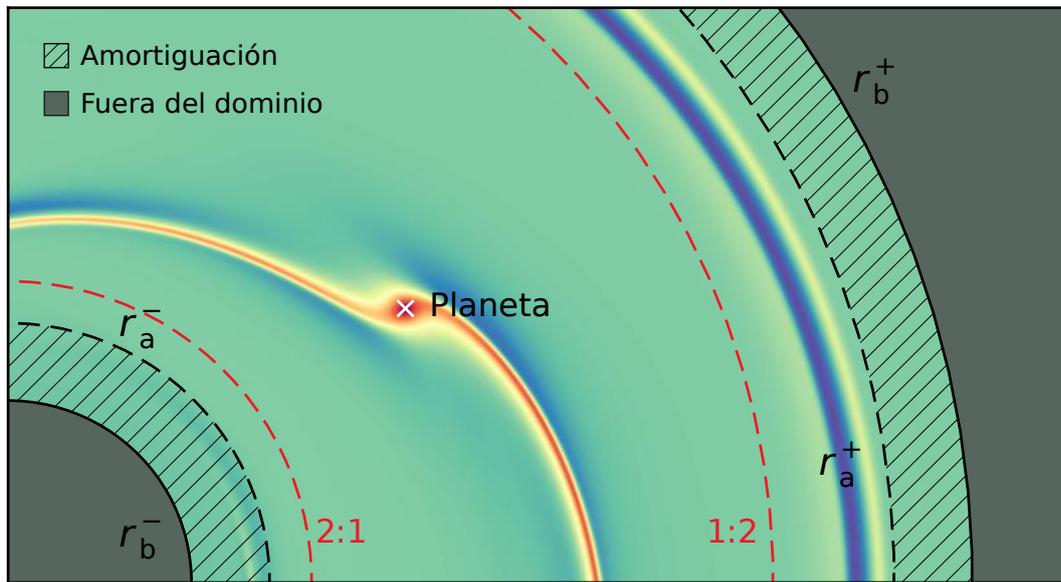


Figura 7.1: Se muestra una sección acimutal de un disco de gas con un planeta inmerso, en un plano cartesiano XY, con la estrella localizada en la esquina inferior izquierda. Las zonas grises corresponden con la región fuera del dominio hidrodinámico, es decir, el lugar en donde la malla no está definida. Las líneas negras continuas corresponden con el borde de la malla activa. Las zonas rayadas limitadas por las líneas a trazos se corresponden con las regiones de amortiguación. Aquí, los campos son forzados hacia un cierto perfil radial de referencia. En este ejemplo particular, el borde de la malla activa sin considerar la región de amortiguación (líneas a trazos) se definió con una relación de períodos 5:2 respecto del planeta, de acuerdo a la ecuación (7.7). En líneas rojas se muestra la posición de las resonancias de Lindblad más externas respecto del planeta (demarcado con una cruz blanca), las cuales juegan un rol fundamental en definir la tasa de migración.

En una forma simplificada, las regiones de amortiguación se definen como (de Val-Borro *et al.*, 2006):

$$r_a^\pm = r_b^\pm \mp \eta (r_b^+ - r_b^-), \quad (7.5)$$

dónde r^\pm son los bordes de la malla y η es la fracción de malla que se utilizará pa-

ra amortiguar los campos. Los subíndices b y a representan *borde* y *amortiguación* respectivamente. Definimos la posición de los bordes de la región de amortiguación en función de la relación de períodos \mathcal{R} con el planeta más cercano⁴:

$$r_a^\pm = r_p^\pm \mathcal{R}^{\pm 2/3} \quad (7.6)$$

dónde r_p^\pm es el planeta más cercano al borde \pm (exterior/interior). Como se dijo con anterioridad, \mathcal{R} debería ser siempre superior a 2, para considerar todas las las resonancias de Lindblad.

A partir de las ecuaciones (7.5) y (7.6), y resolviendo para r_b^\pm , obtenemos una fórmula para la posición de los bordes de la malla activa:

$$\frac{r_b^\pm}{r_p^\pm} = \left[\frac{\eta - 1}{2\eta - 1} \mathcal{R}^{\pm 2/3} + \frac{\eta}{2\eta - 1} \mathcal{R}^{\mp 2/3} \left(\frac{r_p^-}{r_p^+} \right)^{\pm 1} \right]. \quad (7.7)$$

En la Fig. 7.1 mostramos un esquema generado a partir de una de las simulaciones que presentaremos posteriormente, de un sector acimutal de un disco de gas con un planeta sumergido en él. Las regiones de amortiguación se representan por un entramado, y están delimitadas entre líneas a trazos y líneas continuas negras. La extensión radial de la región rayada es función del parámetro η en la ecuación (7.5), que en este ejemplo particular se escogió igual a $\eta = 0,1$.

El límite de la región activa, es decir, la posición de las líneas continuas negras, se calcula con la ecuación (7.7). Las líneas rojas a trazos muestran la posición de las resonancias de movimientos medios 2:1/1:2 entre el planeta y el gas. Estas resonancias se corresponden con las resonancias de Lindblad más extremas para cada lado del planeta.

En la Fig. 7.2 mostramos una simulación típica de migración planetaria, realizada con la técnica aquí descrita. La malla es modificada en tiempo de ejecución a fin de seguir al planeta durante su migración. La extensión radial completa de la malla va disminuyendo con el paso del tiempo para mantener una relación de períodos constante entre los bordes y el planeta. La malla activa corresponde con la zona azul, y su extensión se calcula por medio de la ecuación (7.7). Con un entramado, se superpone la región de amortiguación.

7.3.2. Llenado de la malla

Una vez que los bordes de la malla han sido computados, debemos dividir nuevamente la malla. Por simplicidad, este procedimiento se hace utilizando el mismo número de celdas n_r que en el paso anterior. Como ya se mencionó, la malla puede ser dividida siguiendo diferentes recetas, donde las más populares suelen ser la división lineal y la llamada división logarítmica. Sin embargo, recetas aún más sofisticadas pueden utilizarse a fin de obtener algunas propiedades útiles, como por ejemplo, que el número de celdas por unidad de escala de pre-

⁴Por medio de la tercera ley de Kepler.

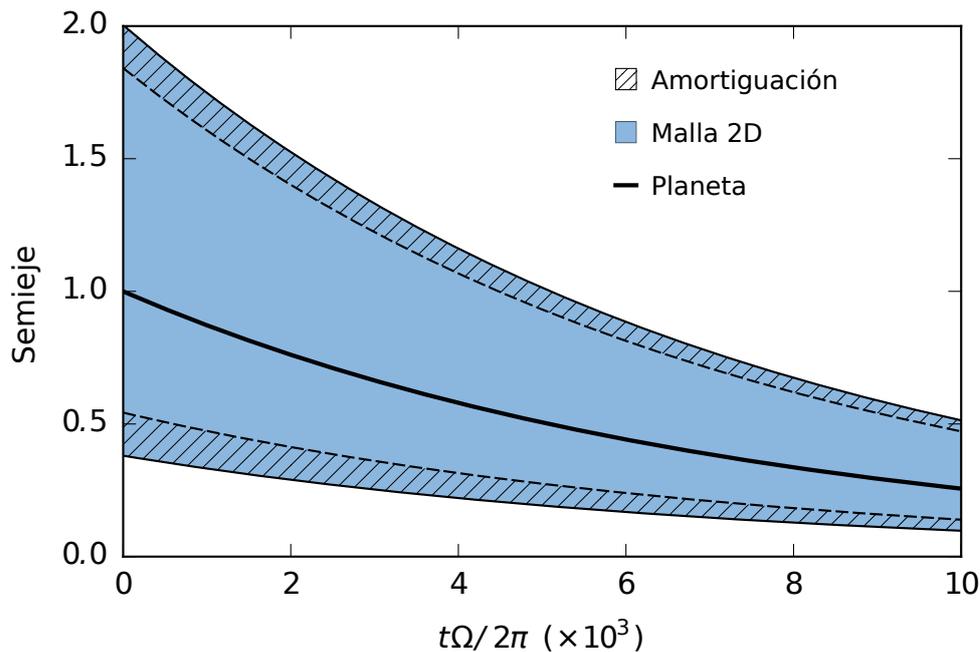


Figura 7.2: Evolución temporal del semieje de un planeta utilizando el método de remapeo (línea continua gruesa). La región azul representa la extensión radial de la malla hidrodinámica 2D (región activa). Las regiones de amortiguación, al igual que en las figuras anteriores, son marcadas con un entramado a rayas. A medida que el planeta se encuentra en semiejes más interiores, la extensión radial de la malla disminuye, pero manteniendo una distancia en número de órbitas constante.

sión se conserve. En la sección (7.5) discutiremos un poco más en profundidad la utilización de diferentes métodos, y cuáles son sus propiedades.

Por ahora, sin pérdida de generalidad, asumamos que el espaciamiento entre celdas es lineal⁵. Para cada nueva celda, calculamos sus vecinos sobre la malla vieja, y los utilizamos para estimar el valor de las cantidades de interés por medio de interpolación lineal.

Si una celda no posee dos vecinos más cercanos (como es el caso de los bordes de la malla), o si su posición cae fuera de la malla activa del paso de tiempo anterior, al no disponer de información para interpolar, utilizamos prescripciones analíticas para calcular su correspondiente valor. Estas prescripciones son dadas por la condición inicial (leyes de potencia en general) y se aplican de forma exclusiva para la velocidad del sonido (o perfil de temperatura) y para la velocidad acimutal. La misma prescripción es utilizada para el perfil de densidad superficial y la velocidad radial si la deriva viscosa del disco no es tomada en cuenta (ver sección 7.3.3). En caso contrario, se utiliza la solución de la ecuación (7.12) para actualizar la densidad superficial, y la ecuación (7.13) para actualizar la veloci-

⁵De hecho, divisiones más complicadas también pueden ser vistas como divisiones lineales bajo una transformación de coordenadas adecuada.

dad radial.

Ahora discutimos el algoritmo de llenado para el caso en el que la malla sea uniformemente espaciada.

Consideremos una cantidad q , definida en la posición r_i en el tiempo t_n y denotada (al igual que en la capítulo 3) por q_i^n . Después de un paso de tiempo, esta cantidad se actualiza hacia un valor q_i^{n+1} , por medio de una integración completa de todas las ecuaciones hidrodinámicas.

Según nuestro método, los bordes deben ser actualizados, partiendo de:

$$(r_b^-)^n ; (r_b^+)^n \longrightarrow (r_b^-)^{n+1} ; (r_b^+)^{n+1},$$

a través de la ecuación (7.7). Posteriormente, necesitamos calcular las nuevas posiciones radiales r_j para cada celda. En el caso linealmente espaciado, esto puede ser hecho mediante la simple relación:

$$r_j = (r_b^-)^{n+1} + j\Delta, \quad (7.8)$$

con $j = 0 \dots n_r - 1$, y $\Delta = [(r_b^+)^{n+1} - (r_b^-)^{n+1}] / n_r$. Para fijar ideas, asumiremos que $(r_b^-)^{n+1}$ se corresponde con el borde radial de la malla alternada, es decir, de una cantidad alternada (como por ejemplo, v_r). Supongamos que tenemos una variable genérica, alternada en r , denotada por q_j^{n+1} . Interpolándolo linealmente con sus vecinos de la malla en el paso de tiempo anterior, su valor es:

$$q_j^{n+1} = q_{k_j}^{n+1} + \frac{q_{k_{j+1}} - q_{k_j}}{r_{k_{j+1}} - r_{k_j}} \Big|^{n+1} (r_j - r_k), \quad (7.9)$$

con $k_j \equiv k_j(i)$, es una función del espaciamiento de la malla en el paso de tiempo anterior. En el caso linealmente espaciado, el índice k_j se calcula como:

$$k_j = \text{int} \left[\frac{r_j - (r_b^-)^n}{(r_b^+)^n - (r_b^-)^n} n_r \right]. \quad (7.10)$$

Así, hemos construido una receta para calcular cantidades en la nueva malla a partir de los vecinos en la malla del paso de tiempo anterior. La extensión al caso centrado es directa.

En la Fig. 7.3 puede verse un esquema del algoritmo descrito en esta sección, colocando en contexto todas las cantidades importantes utilizadas. En la parte inferior de la figura, se parte en el tiempo t_n . Se integra la hidrodinámica por un paso dt completo y se actualiza q , desde q_i^n hacia su nuevo valor q_i^{n+1} (línea intermedia). Finalmente, en la parte superior calculamos los nuevos bordes de la malla e interpolamos linealmente los valores recientemente actualizados para llenar la nueva malla en la posición r_j .

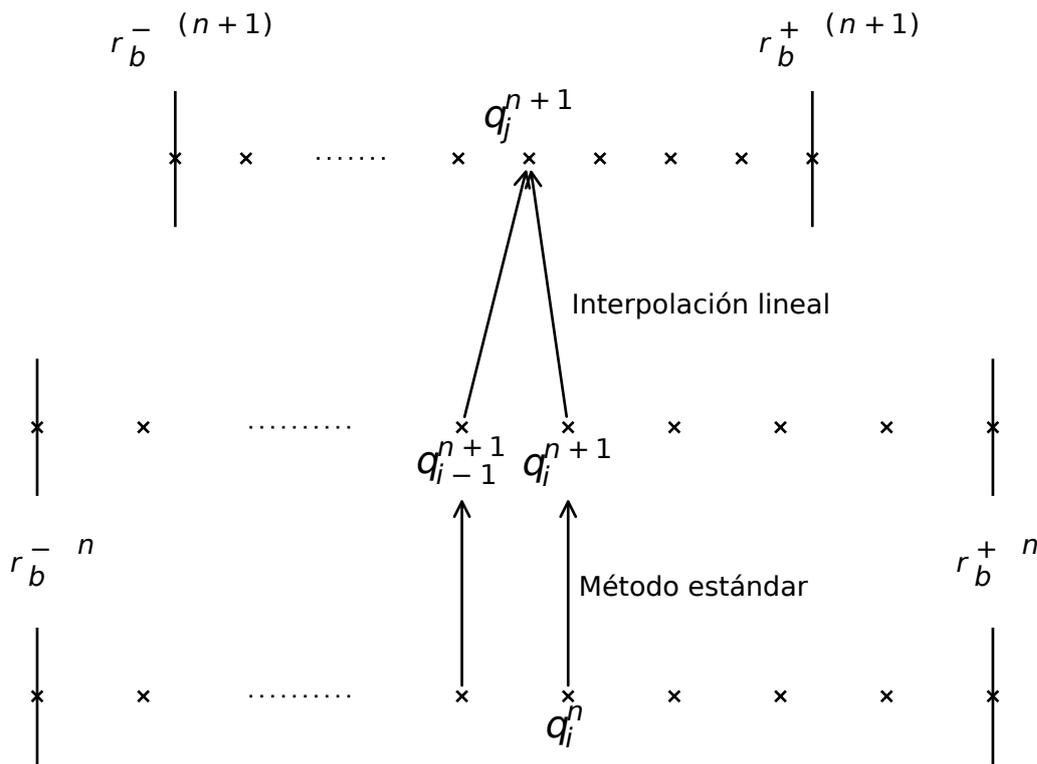


Figura 7.3: Diagrama básico del algoritmo utilizado para el remapeo de los campos hacia una malla nueva. La cantidad q es avanzada un paso de tiempo completo, posteriormente se calculan los nuevos bordes, se divide la malla, y se calcula q_j^{n+1} utilizando los valores vecinos sobre la malla anterior.

7.3.3. Evolución viscosa del disco

Ya que el método de remapeo permite realizar simulaciones por tiempos dinámicos prolongados y sobre una escala espacial muy grande, deberíamos tener en cuenta la evolución temporal de los perfiles en el disco. En particular, debemos prestar atención a la evolución viscosa la cual, como veremos, no debería ser despreciada.

Describir un disco de gas a partir de una ley de potencias para una simulación de largo período ciertamente no es la mejor elección. Una ley de potencias no es, en general, una solución estacionaria para un disco de acreción.

Debido al tercer término del miembro derecho de la ecuación de momento (7.2), el disco experimenta un derrame radial, y el momento angular es transportado, generando, entre otros efectos, una migración de la masa sobre escalas de tiempo $\tau_v \propto r^2/\nu$, el llamado *tiempo de deriva viscosa* (Pringle, 1981).

Por otro lado, el tiempo característico de migración de los planetas ($\tau_a = r_p/\dot{r}_p$, ver capítulo 2), en régimen de tipo I, escala como $\tau_a \propto M_*^2(h/r)^2(m_p\Sigma)^{-1}\Omega^{-1}$ (Ward, 1986). Así, el cociente entre ambas escalas de tiempo es:

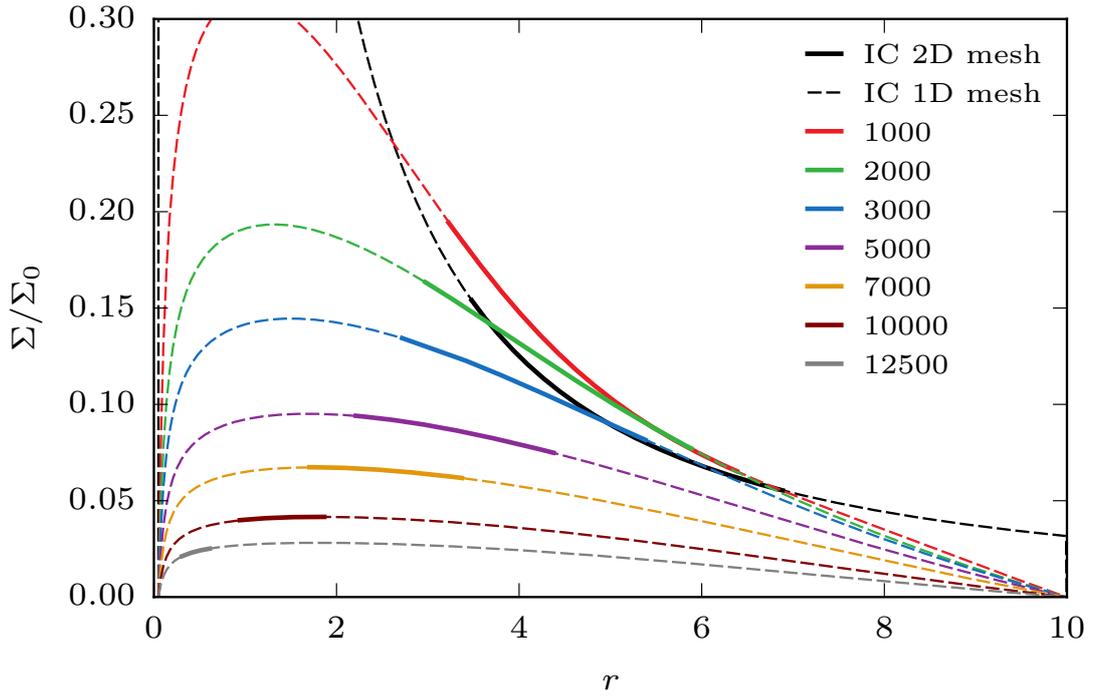


Figura 7.4: Evolución viscosa del perfil de densidad superficial inicialmente definido como una ley de potencia $\Sigma/\Sigma_0 = r^{-1.5}$. En esta simulación no se incluyen planetas. La resolución del modelo viscoso 1D (ecuación 7.12) es 2048. La malla activa 2D tiene 256 zonas radiales. La viscosidad ν es constante en todo el dominio. La condición de contorno que se aplica en este caso es densidad superficial nula en $r = 0,05$ y en $r = 10$. La malla 2D se dibuja con línea gruesa sobre la solución provista por el modelo 1D (líneas a trazos), y le fue impuesta una tasa de migración constante, a fin de observar el acople entre el módulo de deriva viscosa y el algoritmo de remapeo. Las leyendas de las curvas corresponden a órbitas tiempo, medido en órbitas a $r = 1$.

$$\frac{\tau_a}{\tau_v} \propto \frac{M_*^2 h^2 \nu}{m_p \Omega \Sigma r^4}. \quad (7.11)$$

A $r = R_0$, los parámetros típicos son $h = 0,05$, $M_* = 1M_\odot$, $\nu = 10^{-5} R_0^2 \Omega_0$ y $\Sigma \sim 10^{-4} M_\odot R_0^{-2}$. Si consideramos una masa planetaria $m_p/M_* = 10^{-5}$, obtenemos un cociente igual a ~ 4 . Este valor depende de r como $r^{-(2,5+\alpha)}$, con α en la práctica un número negativo mayor que $-1,5$. Así, la tasa de migración se vuelve despreciable comparada con el tiempo de deriva viscosa cuando el planeta migra hacia regiones más próximas a la estrella.

Este análisis simplificado muestra que para realizar simulaciones consistentes (al menos en cuanto a la estructura radial de los discos) de planetas en migración de tipo I sobre una gran escala (en tiempo y en espacio), una evolución viscosa auto consistente debería ser considerada.

En este trabajo, atacamos este problema resolviendo un modelo 1D simplificado para la ley de conservación del momento angular de los discos, bajo el efecto

del torque viscoso (debido a una viscosidad ν) y despreciando la presión del disco y los torques generados por los planetas sobre el gas (Pringle, 1981). En este modelo, la densidad evoluciona como:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma \sqrt{r}) \right]. \quad (7.12)$$

Avanzamos la ecuación (7.12) de forma explícita sobre una malla 1D extendida radialmente y suficientemente grande. Esto se hace en tiempo de ejecución, mientras la hidrodinámica completa es resuelta. Hay que tener en cuenta, que por la utilización de un esquema explícito para la solución del perfil 1D, cuando la viscosidad es demasiado grande, el paso de tiempo puede venir limitado por este modelo sencillo. Esto se debe a que, en general, el modelo 1D contendrá un número mucho mayor de celdas radiales, y esto podría impactar dramáticamente en el paso de tiempo necesario (el cual decrece como Δr^2). Así, a fin de no gastar tiempo computacional significativo en este paso, en caso de que el paso de tiempo permitido sea menor al predicho por la condición CFL de la malla 2D, hacemos un subciclo sobre la malla 1D hasta obtener la densidad en el instante de tiempo deseado. Típicamente se observa que estos subciclos suelen contener ~ 5 iteraciones por paso de tiempo.

Posteriormente, utilizamos el perfil de densidad radial calculado para actualizar las condiciones de contorno y las regiones de amortiguación.

Una vez que el perfil de densidad fue calculado, la velocidad radial puede ser inferida por la relación cerrada:

$$v_r = -\frac{3}{\Sigma \sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma \sqrt{r}), \quad (7.13)$$

la cual se obtiene a partir de la ecuación para la densidad y la ecuación de continuidad.

Una observación interesante es que en régimen estacionario, la ecuación (7.12) satisface dos soluciones interesantes. Por un lado, si $\nu \Sigma \propto r^{-0.5}$, entonces Σ es estacionario. Otra solución posible para un perfil estacionario es:

$$\nu \Sigma = C, \quad (7.14)$$

con C una constante. Así, a fin de obtener un disco con una densidad que sea una ley de potencia en estado estacionario, ν no puede ser una constante.

Por ejemplo, utilizando la viscosidad α_ν , definida como $\nu = \alpha_\nu H^2 \Omega$ (Shakura y Sunyaev, 1973), y un perfil particular para la temperatura (o relación de aspecto del disco), un perfil estacionario para Σ sí puede ser asegurado. Así, para una tasa de acreción constante, la cual puede ser expresada como $\dot{M} = -2\pi r \Sigma v_r$, en estado

estacionario la densidad superficial adopta la forma:

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 r^{-1/2-2f}, \quad (7.15)$$

con $\Sigma_0 = \frac{\dot{M}}{3\pi\alpha_\nu h_0^2 \sqrt{GM}}$, con $h_0 = h(R_0)$.

También, en esta configuración, la velocidad radial se reduce a la expresión sencilla:

$$v_r = -\frac{3}{2} \frac{\nu}{r}. \quad (7.16)$$

Esta implementación de la evolución viscosa del disco a través de la resolución de un modelo 1D puede ser comparada brevemente con un trabajo previo de [Crida et al. \(2007\)](#), quien resuelve la deriva viscosa por medio de la utilización mallas 1D fuera de la región activa 2D.

En nuestro caso, tratamos posibles reflexiones por medio de la utilización de las regiones de amortiguación ([de Val-Borro et al., 2006](#)). A diferencia del método de estos autores, en esta primer aproximación no consideramos la conservación del momento angular global, al no considerar torques de planetas sobre la malla 1D. En nuestro caso esto no es de importancia ya que la malla 1D no forma parte del sistema físico que estamos resolviendo. Esta malla es tan solo un modelo simplificado que nos permite estimar las variaciones del perfil de densidad debido a condiciones de contorno globales. Además, estas condiciones de contorno, en la práctica se encuentran extremadamente lejos de la región de interés. En pocas palabras, estamos asumiendo que los planetas en formación sólo alteran las propiedades locales del disco de acreción. Por último, comparando con resultados obtenidos por estos autores, nuestro método arroja resultados mucho más limpios, tanto lejos como cerca de las fronteras de la malla activa (ver Fig. 7.4), y, como se verá mas adelante, las tasas de migración obtenidas son muy precisas.

La Fig. 7.4 muestra un claro ejemplo de cómo una malla 2D que migra en el tiempo es alterada cuando son consideradas simulaciones de muy largo tiempo. Las líneas continuas se corresponden con la malla 2D, mientras que las líneas a trazo son la solución obtenida mediante la integración de la ecuación (7.12). Esta figura se corresponde con la prueba descrita en la sección 7.4.4.

7.3.4. Desplazamiento de las resonancias de Lindblad

[Baruteau y Masset \(2008b\)](#) mostraron que un tratamiento especial para computar el torque es necesario cuando la auto gravedad del disco no es considerada en simulaciones con planetas en migración. Ellos mostraron que, debido a un desplazamiento espurio de las resonancias de Lindblad, un planeta migrando en un disco que no siente su propio campo de gravedad migra más rápido de lo que predice la teoría, y de lo que resulta en simulaciones de discos auto gravitantes.

Este desplazamiento espurio ocurre porque el planeta y el disco se encuentran orbitando potenciales efectivos diferentes. Por un lado, para que el planeta migre,

debe sentir la influencia del disco, por lo que la masa que orbita se corresponde con la masa estelar sumada a toda la masa del disco interior a su radio actual. Por otro lado, un disco que no siente su propio potencial, sólo orbita a la estrella central. De forma resumida, el desplazamiento de las resonancias de Lindblad es un efecto de la no auto consistencia de la simulación.

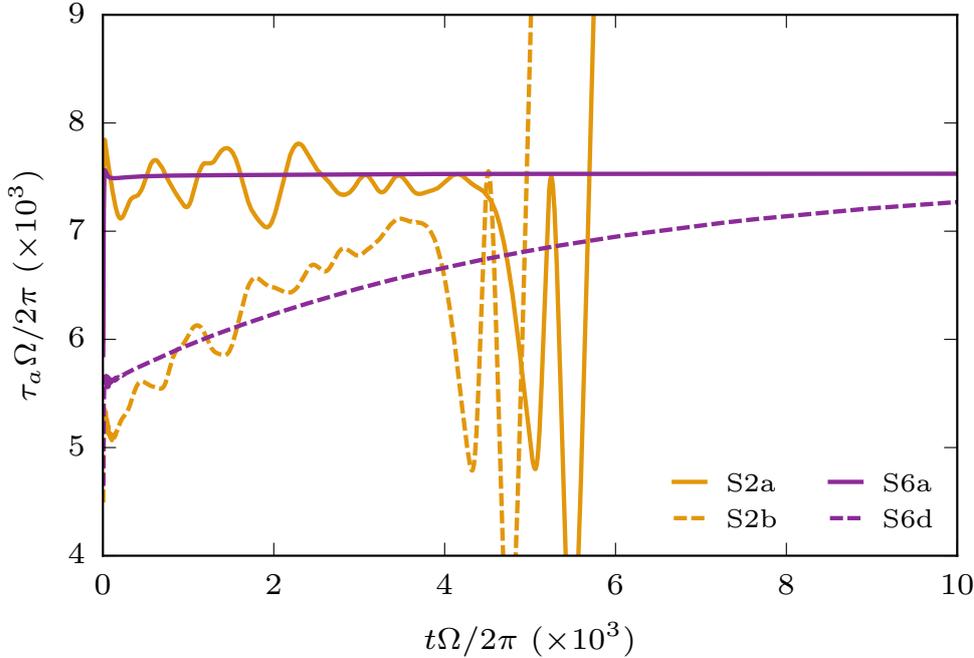


Figura 7.5: Tiempo característico de migración para el caso estático (líneas anaranjadas), comparándolo con el método de remapeo (líneas violetas). Con líneas sólidas se muestran simulaciones realizadas teniendo en cuenta la corrección del desplazamiento espurio de las resonancias de Lindblad. Ambas curvas deben ser comparadas con las líneas a trazos del mismo color, las cuales corresponden a las mismas simulaciones, pero sin considerar la corrección en el desplazamiento de las resonancias. En muy buen acuerdo con [Baruteau y Masset \(2008b\)](#), el tiempo característico de migración es menor cuando el planeta y el disco no orbitan el mismo potencial.

El desplazamiento espurio se corrige restando el perfil de densidad radial antes de calcular las fuerzas gravitatorias a las que está sometido el planeta. Por construcción, este método no altera la magnitud del torque neto (modificaciones axisimétricas), pero si tiene un profundo impacto sobre la cantidad de masa que el planeta siente en el disco interior. Así, el método impacta sobre la frecuencia orbital del planeta, haciéndolo orbitar sólo a la estrella central, corrigiendo el desplazamiento de las resonancias, y asegurando la obtención de tasas de migración precisamente calculadas.

Antes de computar la fuerza gravitatoria, restamos de la densidad su parte axisimétrica en el tiempo n :

$$\delta\Sigma(r, \varphi) = \Sigma(r, \varphi) - \langle \Sigma \rangle_{\varphi}, \quad (7.17)$$

con φ la coordenada angular y $\langle \Sigma \rangle_\varphi$ es el promedio de la densidad en esta dirección, definido como:

$$\langle \Sigma \rangle_\varphi = \frac{1}{n_\varphi} \sum_{i=0}^{n_\varphi-1} \Sigma(r, \varphi_i). \quad (7.18)$$

Luego, calculamos la fuerza gravitatoria que actúa sobre el planeta utilizando $\delta\Sigma$.

La corrección de este efecto es extremadamente importante para nuestro método si se desean obtener resultados que converjan, por ejemplo, con la extensión radial de la malla. Un ejemplo claro de las implicaciones de este problema puede verse en la Fig. 7.5, que se corresponde con la prueba realizada en la sección 7.4.5. Considerando diferentes extensiones radiales para la malla a resolución fija. Observar que estamos incluyendo de manera artificial diferente cantidad de masa en las regiones internas del disco. Esto cambia la frecuencia orbital del planeta respecto del disco, lo cual impacta de forma directa sobre el torque sentido por el planeta. Esto es mostrado de forma clara por la curva morada a trazos de la Fig. 7.5, donde el valor asintótico, el cual se corresponde con una malla 2D estrecha y de baja masa, tiende al valor obtenido al corregir tal efecto (línea continua).

7.4. Pruebas numéricas

En esta sección mostraremos una serie de pruebas realizadas con el fin de validar el método.

Todas las simulaciones aquí presentadas fueron realizadas incluyendo todas las características ya mencionadas: (i) el método de remapeo, (ii) la evolución viscosa del disco y (iii) la corrección del desplazamiento de las resonancias de Lindblad.

Con el objetivo de realizar comparaciones, en algunas pruebas no se incluyen algunas de estas características (mencionadas de forma explícita en cada caso), como por ejemplo, la corrección del desplazamiento de las resonancias de Lindblad o el método de remapeo, al considerar dominios estáticos.

Los parámetros utilizados en las simulaciones son: $\Sigma(R_0) = 10^{-3}$, $\alpha = -0,5$, $h(R_0) = 0,05$, $f = 0$ y $\alpha_v = 4 \times 10^{-3}$. Los parámetros adicionales se describen en la tabla 7.1, en donde también se puede leer la nomenclatura utilizada para cada simulación.

En todos los casos, las regiones de amortiguación fueron definidas a un 10% de la extensión radial total de la malla, lo cual si bien es un valor grande, nos permitirá realizar comparaciones suficientemente limpias.

Las unidades utilizadas en estas pruebas son: para la masa $M_0 = 1$, para longitudes $R_0 = 1$, y para el tiempo $t = \Omega_k^{-1} = 1$ ya que la constante de gravitación se define como $G = 1$.

Simulación	Remapeo	\mathcal{R}	R_{min}	R_{max}	n_r	n_ϕ
S1	-	-	0.35	1.75	377	512
S2a	-	-	0.35	1.75	755	1024
S2b*	-	-	0.35	1.75	755	1024
S3	-	-	0.35	1.75	1132	1536
S4	✓	1.5	-	-	185	1024
S5	✓	1.8	-	-	271	1024
S6a	✓	2.0	-	-	323	1024
S6b	✓	2.0	-	-	162	512
S6c	✓	2.0	-	-	646	2048
S6d*	✓	2.0	-	-	323	1024
S7	✓	2.2	-	-	371	1024
S8a	✓	2.5	-	-	438	1024
S8b	✓	2.5	-	-	219	512
S8c	✓	2.5	-	-	876	2048

Tabla 7.1: Tabla que describe las configuraciones utilizadas para las simulaciones realizadas en este capítulo. En todos los casos se define $h(R_0) = 0,05$, $\alpha_v = 4 \times 10^{-3}$, $\alpha = -0,5$, $f = 0$, $\Sigma(R_0) = 10^{-3}$ y la masa planetaria $m_p = 2 \times 10^{-5}$. El dominio acimutal es $[0, 2\pi]$.

* No se considera la corrección del desplazamiento de las resonancias de Lindblad.

7.4.1. Caso estándar: convergencia con la resolución

La primer prueba que realizamos tiene por objetivo producir resultados confiables en el caso estándar, es decir, sin el método de remapeo. Estos resultados servirán como base para comparar entre las tasas de migración que mediremos mediante la utilización completa de la nueva técnica desarrollada. El conjunto de simulaciones se corresponde con las simulaciones S1, S2a y S3 de la tabla 7.1. Estas simulaciones fueron diseñadas con el objetivo de estudiar convergencia con resolución para la tasa de migración. La simulación S1 se corresponde con el caso de menor resolución, mientras que S2a la duplica, y S3 la triplica.

En la Fig. 7.6, observamos la evolución temporal del tiempo característico de migración para los tres casos diferentes. Se observa cómo las diferencias entre las simulaciones S2a y S3 son pequeñas (curvas verde y azul), lo cual permite concluir que S2a ya se encuentra, a fines prácticos, en un estado convergido, por lo que puede ser considerada una simulación de referencia.

Por otro lado, algo interesante también se observa en la Fig. 7.6. Existen oscilaciones, las cuales son de amplitud considerable y de gran periodo (mayor a 1000 órbitas). Este periodo no está relacionado con los tiempos característicos de libración de materia en las órbitas de herradura, y no parecen depender significativamente de la resolución.

Pruebas realizadas incrementando o disminuyendo levemente la posición de las fronteras radiales (manteniendo resolución constante) mostraron la aparición de una diferencia de fase para estas oscilaciones, lo cual nos permite atribuir las

a efectos de rebote de la estela generada por el planeta en los bordes de la malla. Es importante notar que este efecto es extremadamente sutil, y no observable directamente sobre los campos hidrodinámicos. A medida que el planeta migra, estos rebotes se localizan en posiciones diferentes respecto del planeta, contribuyendo con torques positivos o negativos, generando un patrón oscilatorio con escalas de tiempo típicas del orden de la tasa de migración. Estas oscilaciones son prácticamente imperceptibles en un diagrama semieje-tiempo, por lo que a lo largo de todo este capítulo, optamos por mostrar curvas para la tasa de migración, un parámetro extremadamente sensible a perturbaciones no evidentes.

A un tiempo $\sim 5,5 \times 10^3$ órbitas, los planetas alcanzan el borde de la malla hidrodinámica. Al aproximarse, el torque positivo de la estela interna es suprimido, generando un incremento en la tasa de migración. Una vez que el planeta alcanza una posición suficientemente interior, la estela externa ya no es capaz de ejercer un torque significativo, por lo que el tiempo de migración diverge y el planeta deja de migrar.

En lo que sigue del capítulo, utilizaremos el resultado de la simulación S2a como punto de comparación para las tasas de migración obtenidas con el nuevo método desarrollado.

7.4.2. Caso no estándar: convergencia con el dominio

Con el objetivo de estudiar las propiedades de convergencia con la extensión radial del dominio hidrodinámico del método de remapeo, diseñamos un conjunto de simulaciones que mantienen una resolución fija a medida que se varía la extensión radial. Esta clase de estudios es de importancia para comprender cual es la precisión que se puede alcanzar con el método cuando se considera una extensión radial determinada. Por otro lado, nos permite verificar, por ejemplo, que tanto más allá de la resonancia 2:1 (1:2) debe irse a fin de no alterar la tasa de migración provista por la migración de tipo I.

Las simulaciones correspondientes a esta sección son las S4, S5, S6a, S7 y S8a de la tabla 7.1.

La Fig. 7.7 muestra el tiempo característico de migración para cada simulación. La curva negra se corresponde con el caso estándar de referencia S2a (ver sección 7.4.1). Con curvas de color se muestran las simulaciones realizadas con el método de remapeo.

Sin considerar por ahora el valor absoluto obtenido para la tasa de migración, por primera vez observamos la calidad y limpieza de los resultados que es posible obtener mediante esta técnica. No solo son resultados de bajo costo computacional, sino también carentes de oscilaciones, lo cual está en perfecto acuerdo con la teoría lineal de Tanaka *et al.* (2002) (ver expresión para la tasa de migración del capítulo 2).

Respecto de los resultados, es notable la separación observada entre los casos S4 y S5. Esta separación puede ser interpretada como un efecto transitorio, de-

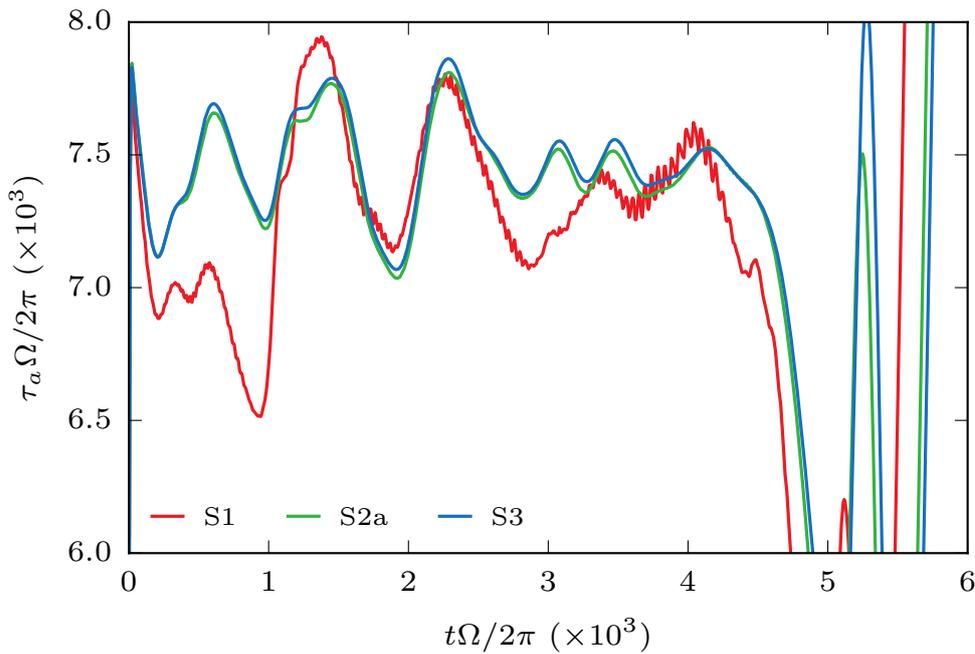


Figura 7.6: Tiempo característico de migración τ_a para tres simulaciones diferentes, de resolución creciente, sin considerar el método de remapeo. Las simulaciones se corresponden con las S1 (curva roja), S2a (curva verde) y S3 (curva azul) de la tabla 7.1. Las tres curvas muestran un comportamiento global similar. En el caso de menor resolución se observan oscilaciones de mayor intensidad. En los tres casos, las oscilaciones son debidas a reflexiones muy pequeñas de la estela en los bordes de la malla. Luego de $\sim 5,5$ orbitas, las curvas divergen como consecuencia de que los planetas alcanzan el borde interno de la malla hidrodinámica, por lo que la migración se detiene.

bido a la falta de convergencia de los resultados con la extensión radial. Ambas simulaciones no incluyen las resonancias de Lindblad más alejadas, por lo que están por debajo del límite impuesto por la física de la migración de tipo I. En casos como estos, ya que el torque neto depende de una cancelación delicada entre las fuerzas ejercidas en las resonancias internas y externas, una consideración parcial de ellas puede conducir a resultados muy diferentes e impredecibles.

De forma similar, una diferencia significativa parece existir entre la simulación S6a y S7, en donde se observa un tiempo de migración diferente entre ambas. La simulación S6a tiene una extensión radial que de hecho incluye hasta la resonancias de Lindblad nominal más externa (2:1), pero incluso así, comparándola con S7 y S8a, la falta de convergencia es clara.

Esta interesante característica nos muestra que considerar hasta una relación de periodos 2:1 entre el planeta y el borde de la zona de amortiguación no es suficiente para capturar la dinámica completa de la migración de tipo I. Esto puede ser atribuible al hecho de que las resonancias de Lindblad no están restringidas a una posición exacta en el disco, y al igual que en las resonancias de cualquier sis-

temas dinámico, presenta un ancho efectivo. Este ancho depende del número de onda acimutal m , y alcanza su máximo para números de onda acimutal pequeños y en el caso de planetas excéntricos. Así, este sencillo experimento nos muestra que este ancho no puede ser despreciado.

Las simulaciones S7 y S8a claramente muestran una tendencia a converger. Esto nos permite concluir que considerando extensiones radiales con un parámetro $\mathcal{R} \gtrsim 2,2$ debería ser suficiente para obtener una tasa de migración suficientemente precisa.

En casos más sofisticados, como por ejemplo los que incluyan planetas excéntricos, el tamaño de la malla adecuado debería ser validado con una prueba de convergencia similar.

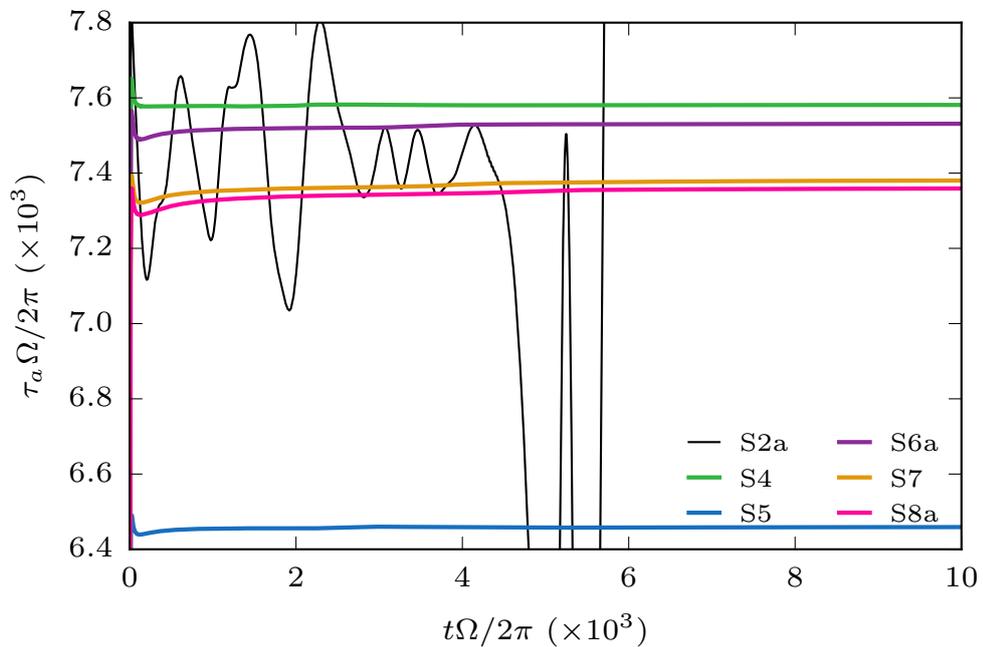


Figura 7.7: Tiempo característico de migración para un conjunto de simulaciones con el método de remapeo y considerando diferentes extensiones radiales de la malla a resolución fija. La curva negra se corresponde con la simulación estándar de referencia S2a. Las líneas de color se corresponden con los resultados obtenidos en las simulaciones con el método de remapeo. Ver discusión en el texto (sección 7.4.2)

Como comentario final, puede verse cómo el conjunto S7 y S8a presentan tiempo característico de migración sensiblemente inferior al tiempo medio obtenido en el caso estándar. Esta diferencia puede atribuirse a diferencias en los procesos de saturación del torque en la región de corrotación. Esta característica es sensible a los procesos difusivos presentes en la región de herradura. En el caso estándar, a medida que el planeta migra, ve degradada su resolución en la región de corrotación. Por el contrario, el caso de remapeo, como se verá en la sección 7.5, mantiene resolución constante durante todo el proceso, posibilitando

un mayor torque de corrotación, y así, un tiempo de migración inferior.

7.4.3. Caso no estándar: convergencia con la resolución

Para tener una idea de la precisión alcanzada con el método de remapeo, no es suficiente considerar la convergencia con la extensión radial de la malla. En esta sección realizamos una prueba adicional para estudiar la convergencia de los resultados con la resolución utilizada cuando se utiliza el método de remapeo.

Seleccionamos las simulaciones S6a y S8a de la prueba anterior y modificamos la resolución por un factor 2 (simulaciones S6c, S8c) y 1/2 (simulaciones S6b, S8b), conservando, en todos los casos, la extensión radial fija (ver tabla 7.1).

La Fig. 7.8 muestra el tiempo característico de migración para los seis casos estudiados (curvas de color), y se muestra también la simulación estándar de referencia S2a (curva negra).

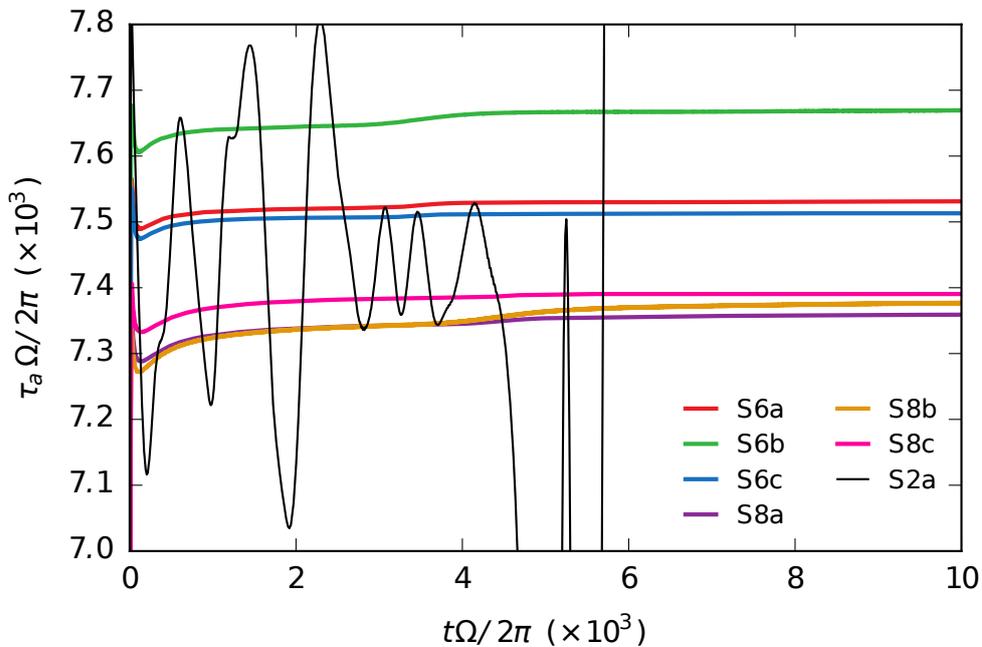


Figura 7.8: Tiempo característico de migración considerando el método de remapeo, para dos extensiones radiales diferentes, cada una considerando tres resoluciones diferentes, crecientes en factores de 2 (ver tabla 7.1 para los detalles de cada simulación). En líneas de color se muestran los dos conjuntos de simulaciones. La curva negra se corresponde con la simulación estándar S2a.

Como ya se había observado en la sección anterior, existe una diferencia significativa entre los conjuntos S6 ($\mathcal{R} = 2$) y S8 ($\mathcal{R} = 2,5$). Esta diferencia no parece tener relación con la resolución utilizada.

La simulación S6a (curva roja) está próxima al respectivo caso de mayor resolución S6c (curva azul), evidenciando un comportamiento convergido a pesar del dominio radial considerado. Claramente, la curva de menor resolución de este

conjunto, la simulación S6b (curva verde), se encuentra lejos de un valor convergido.

El conjunto S8 es más intrigante. Observamos que el caso de menor resolución, la simulación S8b (curva anaranjada) parecería alcanzar un estado convergido si sólo fuese comparado con el caso de resolución intermedia, la simulación S8a (curva violeta), lo cual es muy diferente a lo observado en el conjunto S6. Curiosamente, considerando una alta resolución (curva rosada, simulación S8c), es claro que no se alcanzó una convergencia, aunque las diferencias tienden a disminuir con el tiempo, y son realmente muy pequeñas.

Ya que el conjunto S8 incluye, por un amplio margen, todas las resonancias de Lindblad dentro del dominio hidrodinámico, esta diferencia observada podría ser explicada a partir de diferencias en el torque de corrotación, el cual si puede ser bastante sensible con la resolución utilizada, como ya se discutió en la sección (7.4.2).

A pesar de todo, la dispersión observada en el conjunto S8 es realmente muy pequeña, y la tasa de migración puede ser determinada con una precisión muy alta, $\lesssim 5\%$. Por otro lado, comparando el valor convergido de las simulaciones S8a y S8b, con el valor mostrado por la simulación S7 en la Fig. 7.7, podemos confiar en que una tasa de migración precisa es alcanzada.

Nuevamente, todos estos resultados sugieren que la extensión radial para la malla activa (sin incluir la región de amortiguación) debería ser determinada por un parámetro $\mathcal{R} > 2,2$, sin importar la resolución utilizada.

7.4.4. Evolución viscosa

Realizamos una prueba para verificar la implementación del modelo de evolución viscosa y su acople con el método de remapeo. Realizamos una simulación axisimétrica sin un planeta.

Inicializamos un disco con una relación de aspecto constante ($f = 0$) e isotermod localmente, con una densidad superficial inicial siguiendo una ley de potencia.

El modelo 1D de evolución para el perfil de densidad superficial, dado por la ecuación (7.12), es avanzado utilizando una grilla 1D con 2048 celdas, uniformemente espaciadas entre $r = 0,05$ y $r = 10$. Imponemos una densidad superficial nula en las fronteras de esta grilla.

La malla 2D se construye con 256 celdas radiales, y los bordes siempre mantienen una relación de periodos 3:2 ($\mathcal{R} = 1,5$) con los bordes (hasta la región de amortiguación). Esta malla se mueve a velocidad radial constante, lo cual nos permite probar la implementación y el acople entre el modelo 1D y el método de remapeo.

La Fig. 7.4 muestra la evolución temporal del perfil de densidad superficial en diferentes instantes. En líneas continuas se muestra la densidad superficial para la malla 2D. Las líneas a trazos se corresponden con la solución de la ecua-

ción (7.12), utilizada para actualizar las condiciones de contorno y actualizar las regiones de amortiguación, en diferentes tiempos.

En negro, se muestra la condición inicial, mientras que en color, la evolución del perfil de densidad para diferentes instantes de tiempo es mostrada.

También, se verificó satisfactoriamente que nuestro método fuera capaz de obtener soluciones estacionarias si se considera un modelo de disco con α_v , considerando $\alpha = -0,5$ y $f = 0$, la cual es la configuración utilizada en todas las pruebas con planetas realizadas en las secciones anteriores (ver tabla 7.1).

Los resultados obtenidos para el modelo viscoso son extremadamente limpios, permitiendo realizar simulaciones de gran escala que incluyan planetas y consideren la evolución viscosa global del disco. Por último, esto también abre la posibilidad de realizar simulaciones de muy largo tiempo de la migración de tipo II.

7.4.5. Corrigiendo las frecuencias orbitales

Una característica importante que hemos incluido en nuestro método es la corrección por el desplazamiento espurio de las resonancias de Lindblad (ver sección 7.3.4). Como se dijo con anterioridad, esta corrección es un componente crucial del método de remapeo. Hemos probado su implementación mediante la realización de dos conjuntos de simulaciones numéricas, los cuales incluyen casos con esta corrección y sin ella, sin el método de remapeo (S2a, S2b) y considerando todos los ingredientes (S6a, S6d). En los casos S2a y S6a, se calcula la fuerza gravitatoria incluyendo la densidad media de fondo, mientras que en los casos S2b y S6d, se sigue el método descrito por la ecuación (7.17), de la sección 7.3.4.

La Fig. 7.5 muestra la evolución del tiempo característico de migración para estas cuatro simulaciones. En líneas a trazos se muestran los casos no corregidos por el desplazamiento, tanto para el caso estándar como con la técnica de remapeo, mientras que en línea continua, los casos corregidos.

Como ya se anticipó en la sección 7.3.4, y en muy buen acuerdo con Baruteau y Masset (2008b), los casos sin la corrección presentan tiempos de migración más cortos.

Es interesante notar como en los casos que no consideran esta corrección (líneas a trazos de la Fig. 7.5), presentan una derivada no nula para la tasa de migración. Es posible demostrar por cálculos lineales (Tanaka *et al.*, 2002, por ejemplo), que según los parámetros físicos del disco considerado, el tiempo característico de migración debería ser una constante, como se obtiene en el caso corregido con el método de remapeo (curva continua morada). Así, se muestra de forma clara que la tasa de migración calculada sin esta corrección es incorrecta.

Sin embargo, otra característica notable, la cual se observa de forma muy limpia cuando se utiliza la técnica de remapeo, es que el tiempo característico de migración obtenido sin la corrección por el desplazamiento de las resonancias de

Lindblad, tiende asintóticamente al caso corregido. Esto es una consecuencia de que a medida que el planeta migra hacia las regiones interiores del disco, este se hace cada vez más estrecho, y menos masivo. Lo mismo se observa en el caso estático, ya que a medida que el planeta migra, la masa interior se hace inferior, aunque la relación señal-ruido es bastante más baja.

7.5. Sobre la distribución radial de las celdas

Un aspecto muy importante, que hasta ahora hemos pasado por alto en la presentación del método de remapeo, es la resolución. Es importante entender cómo mantener una resolución aceptable (y qué significa aceptable) cuando se estudia la migración de un planeta en un disco de gas con ciertas propiedades.

La principal característica que es necesario resolver al simular estos sistemas es la llamada escala de presión del disco H . Esta es la escala típica que proviene de la dispersión de velocidad dentro del disco (temperatura). Por otro lado, resolver adecuadamente esta escala implica de forma automática estar resolviendo correctamente el torque ejercido sobre el planeta. Esto es porque las resonancias de Lindblad más cercanas al planeta se acumulan en una región específica, localizadas a una distancia $r \simeq \pm H$ respecto del planeta (Artymowicz, 1993).

Recordemos que en todo este trabajo, siempre se asumió $H \propto r^f$, es decir, una ley de potencia, y en particular, en este capítulo hemos utilizado $H \propto r$ (es decir, $f = 0$).

En una malla dividida uniformemente en radio, el método de remapeo tal cual fue presentado genera una resolución creciente con r , por lo que el número de celdas por unidad de H será constante para toda la simulación, es decir, independiente de la posición radial de la malla. Así, no es esperable observar problemas de convergencia con la resolución, que sean dependientes de la distancia.

Para fijar ideas, estudiemos el caso de un planeta aislado en el disco y que migra. Veamos que, en este caso, el método de remapeo mantiene el mismo número de celdas por unidad de H . El tamaño radial inicial de una celda es:

$$\delta r = \frac{r^+ - r^-}{n_r} = \frac{\Delta r}{n_r}, \quad (7.19)$$

con r^\pm los bordes de la malla y n_r el número de celdas radiales. Utilizando la ecuación (7.7) y haciendo $r_p^- \equiv r_p^+ \equiv r_p$, Δr es:

$$\delta r = \frac{r_p}{n_r(1-2\eta)} (\mathcal{R}^{2/3} - \mathcal{R}^{-2/3}). \quad (7.20)$$

Por lo que la cantidad de celdas n_H contenidas en una unidad de H , en la posición del planeta, es:

$$n_H \equiv \frac{H}{\delta r} = \frac{h_0 n_r (1-2\eta)}{\mathcal{R}^{2/3} - \mathcal{R}^{-2/3}} = C, \quad (7.21)$$

con C una constante (adimensional). Para valores típicos usados en las pruebas anteriores ($h_0 = 0,05, \eta = 0,1, \mathcal{R} = 2,2$), el valor de la constante es $C \simeq 0,036n_r$, que con una resolución radial típica de 100 celdas la escala de altura del disco comienza a ser resuelta, y permanecerá igualmente resuelta durante toda la simulación.

Sin embargo, cuando consideramos un disco con otro perfil de temperatura, es decir $h = h(r)$ (lo que en inglés suele llamarse *flared*⁶), el número de celdas por unidad de H no será más una constante. En este caso, realizando el mismo procedimiento que en la deducción de (7.21), y colocando $h(r) \propto r^f$, se prueba que $n_H \propto r^f$, lo cual es una función decreciente con r para $f > 0$, un parámetro típico en discos de acreción.

Así, una malla uniformemente espaciada no servirá para modelar correctamente la migración de gran escala para estos sistemas, por lo que una técnica diferente debe ser considerada. Esta simple observación pone en evidencia la necesidad de utilizar mallas no uniformes para simular correctamente la migración de planetas en discos más realistas. Veamos cual sería el espaciamiento óptimo para resolver la escala de presión en un disco con $f > 0$. Por definición, $H \propto r^{f+1}$, por lo que el espaciamiento δr debe ser uniforme en r^{f+1} .

Por completitud, mostramos aquí como generar una distribución particular para la malla con un espaciamiento que siga una determinada ley.

En el caso de espaciamiento uniforme, como el utilizado a lo largo de todo el capítulo (y todo este trabajo), de forma discreta se verifica la relación:

$$\frac{r_{j+1} - r_j}{(j+1) - j} = C, \quad (7.22)$$

donde C es una constante dependiente de los bordes de la malla y del número de celdas consideradas ($C = (r^+ - r^-)/n_r$). El denominador, si bien tiene valor numérico igual a la unidad, fue agregado para ilustrar el sentido matemático del espaciamiento. (7.22) es una ecuación de derivada discreta que representa la variación del tamaño de las celdas. Así, un espaciamiento uniforme en radio significa que el tamaño de las celdas es el mismo independientemente de r . En forma continua, esto se escribe como:

$$\frac{dr}{dl} = C, \quad (7.23)$$

dónde se sustituyó el índice discreto j por una versión continua l . Así, el espaciamiento en este caso será:

$$r(l) = Cl + r(0), \quad (7.24)$$

⁶acampanado en español.

C y $r(0)$ se ajustan con las propiedades de la malla deseada:

$$r(0) = r^-, \quad (7.25)$$

$$r(n_r) = C n_r + r^- = r^+, \quad (7.26)$$

así, $C = (r^+ - r^-)/n_r$. El caso de espaciamento logarítmico uniforme es análogo, con ecuación diferencial:

$$\frac{d \log r}{dl} = C. \quad (7.27)$$

Ahora veamos el caso de interés ($f > 0$). Vimos que en este caso, el espaciamento debe satisfacer⁷:

$$\frac{dr}{r^{f+1}} = C dl \quad (7.28)$$

Así, resolviendo la ecuación diferencial, se obtiene que:

$$r(l) = (-f Cl + D)^{-1/f}, \quad (7.29)$$

y luego de ajustar las constantes, finalmente se obtiene (en versión discreta):

$$r(j) = \left[\frac{(r^+)^{-f} - (r^-)^{-f}}{n_r} j + (r^-)^{-f} \right]^{-1/f}. \quad (7.30)$$

Y con una receta similar a la utilizada en la ecuación (7.10), es posible calcular los vecinos de forma eficiente y aplicar todo el método de remapeo sobre este espaciamento no uniforme.

Una aclaración importante debe hacerse sin embargo. En la práctica, los discos no pueden mantener un perfil de altura con $f > 0$ durante una gran extensión, ya que su temperatura no crece de forma indefinida. Así, en la mayoría de los casos de interés, será suficiente considerar una malla uniforme en el logaritmo (ecuación 7.27, o ecuación 7.28, con $f = 0$), la cual decrece a un menor ritmo que el caso $f > 0$, permitiendo pasos de tiempo más grandes y capturando a la vez los procesos físicos fundamentales para la obtención de tasas de migración correctas.

En la Fig.7.9 se muestra el espaciamento posible según las fórmulas deducidas en esta sección, para un conjunto de 30 celdas radiales. El espaciamento utilizado en este capítulo se corresponde con la curva azul, mientras que en otros casos de interés, perfiles más costosos deben ser utilizados, como son el logarítmico (curva morada) o perfiles aún más empinados, como el mostrado por la curva verde ($f = 1$).

⁷Notar que este caso se corresponde con la generalización del espaciamento uniforme ($f = -1$) y logarítmico ($f = 0$).

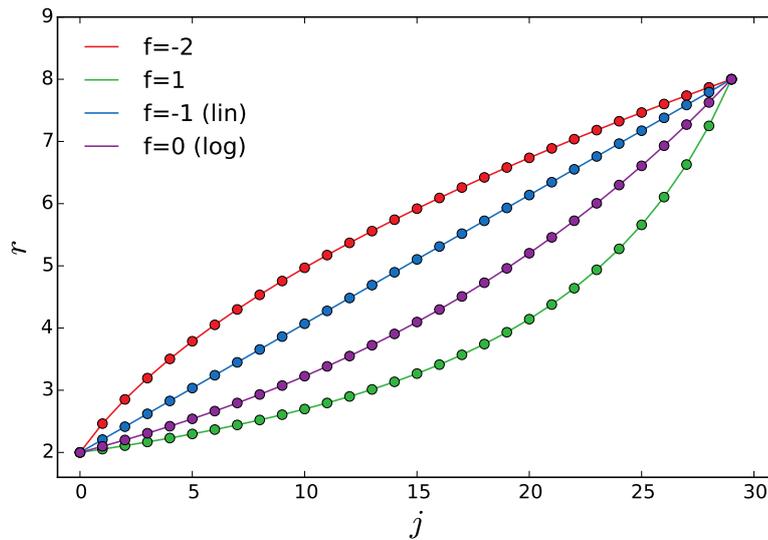


Figura 7.9: Ejemplo de diferentes espaciamientos de la malla, necesarios para resolver la escala de presión de forma uniforme a media que el planeta migra en el disco. Se muestra la coordenada radial en función del índice discreto j . Puede verse la diferencia entre un perfil de disco negativo, uno constante y uno positivo. El caso logarítmico ($f = 0$) incrementa considerablemente la resolución para radios interiores, sin embargo, un índice $f > 0$ hace necesaria la consideración de celdas que disminuyan más aceleradamente su tamaño.

7.6. Método de remapeo vs caso estándar

El método de remapeo tal cual fue presentado en este capítulo muestra mejoras sustanciales respecto del caso estándar. Por un lado, la calidad de los datos que es posible obtener mediante su aplicación es notable. Por otro, la reducción del tiempo computacional es uno de los aspectos más interesantes. En el caso bidimensional, tal cual fue presentado en este capítulo, ya se observan ganancias en el tiempo de cómputo que son significativas.

Extender todos los resultados presentados al caso 3D es un proceso directo. En el caso tridimensional, donde lo que se reduce no es una cantidad superficial, sino un corte volumétrico, la mejora en rendimiento será mucho mayor, posibilitando obtener factores de aceleración respecto del caso bidimensional mucho más importantes. Otro aspecto muy importante será el ahorro en memoria. Al no necesitar un número tan grande de celdas en radio, la cantidad de memoria ahorrada en una simulación tridimensional será significativa. Veamos estas mejoras un poco más en detalle.

Supongamos que se desea simular un planeta que migra desde una distancia R_p^+ hasta R_p^- , y que en el caso estático, se utiliza un número de celdas n_e para la malla. En el caso con remapeo, el número de celdas radiales será menor (para conservar la resolución), y lo denotamos por n_r .

Por simplicidad en este ejemplo, asumamos que el parámetro η es nulo (ver ecuación 7.5). A fin de incluir todas las resonancias de Lindblad dentro del do-

minio en el cual el planeta se moverá, debemos considerar como bordes para la malla:

$$\frac{r^\pm}{R_p^\pm} = 2^{\pm 2/3} \simeq 1,59^{\pm 1} \quad (7.31)$$

Así, en el caso estático, se tendrá que los límites son:

$$r^+ = 1,59R_p^+ \quad (7.32)$$

$$r^- = 0,63R_p^- \quad (7.33)$$

mientras que en el caso con remapeo, los bordes siempre cumplirán con la relación (7.31).

El paso de tiempo viene limitado por el tamaño de las celdas en comparación con la velocidad del sonido⁸:

$$dt < \frac{r\Delta\varphi}{c_s}. \quad (7.34)$$

En el caso $f = 0$, $c_s \propto r^{-1/2}$, por lo que $dt \propto r^{1/2}$, mostrando de forma explícita que el paso de tiempo tiende a cero al considerar extensiones radiales que vayan demasiado cerca de la estrella.

En el caso estándar, si consideramos R_p^- suficientemente pequeño⁹, el paso de tiempo estará gobernado exclusivamente por (7.34) evaluada en r^- , mientras que en el caso con remapeo, la evaluación deberá realizarse de forma continua durante la migración. Otra suposición que no debe pasarse por alto para la validez de este análisis es que estamos despreciando la extensión radial de las celdas, es decir, estamos asumiendo $r\Delta\phi/\Delta r \lesssim 1$, lo cual en el caso estático siempre podrá ser verificado, pero en el caso con remapeo, podría no ser cierto a partir de un determinado r .

Por simplicidad, supongamos que el planeta migra a una tasa constante \dot{a} , que no depende del semieje. Con esta tasa de migración, partiendo de R_p^+ , llegará a R_p^- en un tiempo físico $t_m = (R_p^- - R_p^+)/\dot{a}$.

Estudemos el tiempo de ejecución para cada método considerando una simulación completa, desde que el planeta parte desde R_p^+ y llega a R_p^- . El tiempo de ejecución, o tiempo computacional, es inversamente proporcional al paso de tiempo utilizado y directamente proporcional al costo computacional, el cual, en primera aproximación, es proporcional al número de celdas consideradas. Así, se puede escribir la relación:

$$dt_c \propto \frac{n}{\Delta t} dt_f, \quad (7.35)$$

con Δt función del tiempo físico t_f a través de la condición CFL. Por lo tanto, el

⁸Esto vale sólo porque se está utilizando el algoritmo FARGO y un planeta de masa suficientemente pequeña.

⁹Esta suposición es para poder realizar una comparación limpia y obtener comparaciones a órdenes de magnitud

tiempo computacional total es:

$$t_c \propto n \int_0^{t_m} \frac{dt_f}{\Delta t(t_f)}. \quad (7.36)$$

En el caso estándar, este tiempo será:

$$\begin{aligned} t_{ce} \propto n_e \int_0^{t_m} \frac{dt_f}{\Delta t(t_f)} &= n_e \frac{t_m}{\Delta t} \\ &= \frac{n_e t_m}{\sqrt{0,63}} \frac{1}{\sqrt{R_p^-}}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

En el caso con remapeo, $\Delta t(t_f) \propto \sqrt{r^-(t_f)} = [0,63(R_p^+ + \dot{a}t_f)]^{1/2}$, por lo que el tiempo de ejecución vendrá dado por:

$$\begin{aligned} t_{cr} \propto n_r \int_0^{t_m} \frac{dt_f}{\Delta t(t_f)} &= \frac{n_r}{\sqrt{0,63}} \int_0^{t_m} \frac{dt_m}{\sqrt{R_p^+ + \dot{a}t_f}} \\ &= -\frac{2n_r}{\dot{a}\sqrt{0,63}} \left(\sqrt{R_p^+} - \sqrt{R_p^-} \right) \end{aligned} \quad (7.38)$$

$$= \frac{2t_m n_r}{\sqrt{0,63}} \left(\frac{\sqrt{R_p^+} - \sqrt{R_p^-}}{R_p^+ - R_p^-} \right). \quad (7.39)$$

El cociente entre ambos tiempos de ejecución es:

$$\frac{t_{cr}}{t_{ce}} = 2 \frac{n_r}{n_e} \left(\frac{\sqrt{R_p^+} - \sqrt{R_p^-}}{R_p^+ - R_p^-} \right) \sqrt{R_p^-}. \quad (7.40)$$

En el límite $R_{p^+} \gg R_{p^-}$, se tiene que:

$$\frac{t_{cr}}{t_{ce}} \simeq 2 \frac{n_r}{n_e} \sqrt{\frac{R_{p^-}}{R_{p^+}}}. \quad (7.41)$$

Este es un límite inferior para el tiempo con el método de remapeo. La hipótesis para obtener dicha expresión se basó en que la longitud acimutal guardaba una relación con el espaciamento radial. Retomemos dicha hipótesis para estudiar el rango de validez de (7.41):

$$\frac{r^- \Delta \varphi}{\Delta r} \simeq 0,66 \Delta \varphi n_r, \quad (7.42)$$

donde se calculó Δr en término de los bordes del método de remapeo. Así, para

que el paso de tiempo este gobernado por la longitud acimutal de las celdas, $n_r \lesssim (0,66\Delta\varphi)^{-1}$. Una resolución típica de 1024 celdas en un dominio de 0 a 2π en acimut, implica que $n_r \lesssim 247$.

Supongamos $R_p^- = 0,1$, $R_p^+ = 5$, $n_e = 1024$, $n_r = 247$. En este caso, el método de remapeo será ~ 16 veces más rápido comparado con la técnica estándar, y su eficiencia crecerá de forma notable al disminuir R_p^- .

7.7. Propiedades de conservación

Hasta ahora no se ha discutido al respecto de las propiedades de conservación de la técnica desarrollada.

La técnica de remapeo mediante una interpolación lineal no conservará la masa de una determinada región del espacio, incluso en un dominio cerrado. La razón de esto es que la densidad se evalúa en puntos discretos del espacio, y una interpolación como la que hacemos para reconstruir el campo, aunque sea exacta en los vértices considerados para los cálculos, no tiene por que guardar una relación con la distribución del campo es su entorno.

Experimentos sencillos permiten concluir que el error cometido en los casos más desfavorables son inferiores al 1% para los campos interpolados durante una simulación de largo tiempo. Este valor es, en efecto, demasiado pequeño, y parecería ser aceptable para la mayoría de los casos prácticos. Sin embargo, un cuidado especial debe tenerse. Como se discutió en los primeros capítulos, los discos Keplerianos son altamente supersónicos, por lo que la velocidad acimutal es muy grande comparada con la velocidad del sonido local. Así, un error pequeño en la determinación de esta velocidad, tendrá un impacto sustancial en el equilibrio de presión local. Una forma de disminuir al mínimo los errores cometidos para este campo, es reconstruirlo interpolando linealmente su logaritmo. En efecto, como la velocidad de rotación es una ley de potencias ($\propto r^{-1/2}$), cuando se toma su logaritmo, la función es lineal, por lo que su interpolación lineal es exacta.

Otro método para mejorar las propiedades de conservación es calcular cual es la inyección neta de masa dentro de todas las celdas (por izquierda y por derecha) al aplicar un factor de expansión o contracción a la malla (tal cual lo hacemos al recalcular los nuevos bordes). A partir de este procedimiento, es posible calcular la velocidad radial (utilizando un método upwind) adecuada para inyectar la cantidad de masa necesaria. Así se podría asegurar la conservación estricta de esta cantidad. Sin embargo, son conocidas las propiedades no deseables de esta clase de métodos cuando hay máximos locales, lo cual es frecuente en torno a saltos de densidad importantes, por lo que para este trabajo, decidimos no utilizarlo.

Estimar de forma precisa como pueden impactar una u otra receta de interpolación o bien el cálculo de flujos auxiliares en la precisión de las integraciones es un aspecto que debe ser estudiado con mucho detalle y profundidad sobrepasando esta primer aproximación al problema.

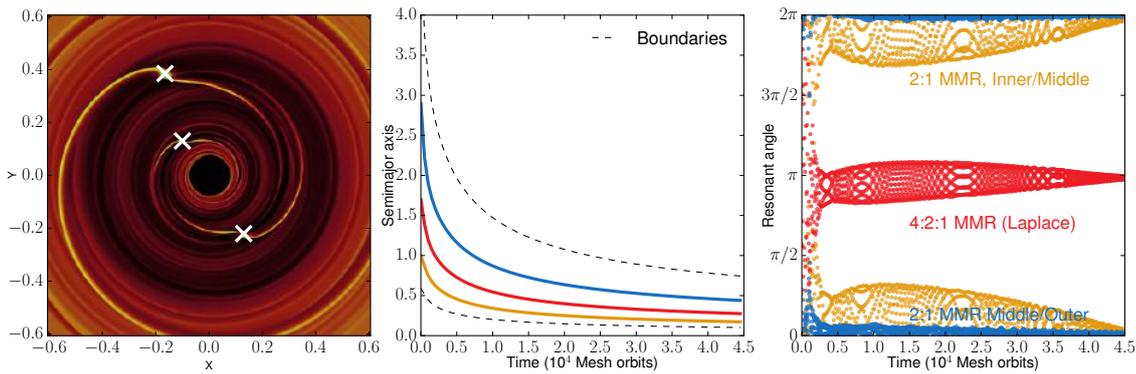


Figura 7.10: Simulación de un sistema planetario triple orbitando alrededor de una estrella y sumergidos en un disco de gas. En el primer panel se observa la densidad superficial, con la posición de los planetas marcada con cruces blancas. Las estelas generadas por cada uno de ellos es claramente visible. En el panel del medio vemos los semiejes de cada uno de los cuerpos, y en línea a trazos se marca la evolución de las fronteras de la malla, la cual va reduciendo su tamaño a medida que los planetas migran, con tal de conservar la relación de períodos con ellos. En el tercer panel se observan los ángulos resonantes correspondientes a la resonancia de movimientos medios de Laplace (4:2:1). El sistema se dice resonante cuando los puntos de color oscilan en torno a un valor fijo. Se ve que este sistema evoluciona hacia una resonancia de Laplace muy fuerte, y que ésta es estable durante toda la escala de migración.

7.8. Conclusiones

Hemos presentado un nuevo método que permite acelerar de forma considerable las simulaciones de planetas inmersos en discos de gas y mejorar la precisión con la que se obtienen las tasas de migración. Presentamos de forma detallada todos los componentes de este método, las hipótesis involucradas, la validez de la implementación y una discusión sobre que eficiencia que podemos esperar en casos típicos.

Demostramos mediante un análisis muy sencillo que este método fácilmente supera el orden de magnitud en velocidad respecto de los métodos tradicionales, lo que nos permitirá, por primera vez, comenzar a simular interacciones planeta-disco por edades que comienzan a ser comparables con la vida media de los discos de acreción. Además, por construcción el método incrementa la resolución a medida que los planetas migran, generando una especie de autoadaptación acorde a lo necesario por el sistema dinámico integrado. Vimos que en los casos de discos *flared* es necesario adoptar otra estrategia, la cual incluye la utilización de mallas no uniformes en r , pero que con una malla uniforme en el logaritmo debería ser suficiente.

Esta implementación abre un gran número de frentes de investigación diferentes, los cuales por todos los motivos expuestos a lo largo de este capítulo, no eran posible de ser realizados, o bien por la finitud del dominio, o por los costos computacionales.

Esta técnica, extendida al caso tridimensional, nos permitirá además realizar por primera vez estudios de migración que consideren la tercer dimensión, lo cual no ha sido demasiado explorado aún. Otro aspecto que va a permitir estudiar es la saturación del torque de corrotación cuando la migración es considerada, lo cual tampoco ha sido explorado hasta la fecha.

Por último, en la Fig. 7.10 mostramos un ejemplo cualitativo de la simulación de un sistema triple de planetas tipo Neptuno sumergidos en un disco de gas y utilizando este método (simulación realizada por la Lic. Ximena Ramos). En ese caso particular, la migración ocurre sobre un orden de magnitud en radio, y la configuración resonante alcanzada por los planetas es estable durante toda la integración. Este ejemplo es el primero de una serie que comenzará a sentar las bases de una nueva forma de explorar el espacio de parámetros en el estudio de las interacciones planeta-disco.

Experimentos preliminares con este método nos mostraron que su potencial es muy grande, y que permite obtener simulaciones suficientemente convergidas para sistemas de múltiples planetas. En particular, este método va a permitir por primera vez simular sistemas de planetas migrando en discos con una estructura radial detallada, con modelos de temperatura más acordes a lo esperado en la gran escala.

Conclusiones generales y perspectivas futuras



A lo largo de este trabajo hemos estudiado en detalle el proceso de migración planetaria y hemos dado argumentos suficientes como para concluir que las interacciones entre un disco de gas y un planeta en formación no puede ser evitada. Sin embargo, mostramos que esto no es completamente compatible con las observaciones de los exoplanetas. En particular, trabajos de síntesis de poblaciones planetarias requieren de algún mecanismo que sea capaz de ralentizar la migración, al menos dando tiempo suficiente hasta que el embrión obtenga una masa significativa como para alcanzar la etapa de crecimiento exponencial. Considerando estos inconvenientes, y teniendo en cuenta la robustez de los resultados de las teorías lineales de migración por interacciones planeta-disco, las cuales predicen solamente migración convergente, concluimos que es necesaria la utilización de códigos hidrodinámicos para avanzar en la caracterización de la migración. Vimos que el torque de corrotación es uno de los candidatos principales para detener la migración causada por el torque diferencial de Lindblad, y que este efecto sería en esencia no lineal.

Con estas ideas en mente desarrollamos un código magnetohidrodinámico capaz de explotar las últimas tecnologías de supercómputo. Describimos los algoritmos utilizados en su implementación y mostramos una serie de pruebas que verifican la correcta implementación de todos los módulos.

Posteriormente, utilizamos el código para estudiar tres problemas de diferente naturaleza, de los cuales hacemos un breve repaso y detallamos los resultados obtenidos.

1. Migración en discos radiativos: vimos que mediante la consideración de la emanación de calor por un planeta en crecimiento es posible obtener un mecanismo robusto para detener o incluso revertir la migración planetaria. Este efecto escala fuertemente con la cantidad de calor irradiada, lo cual es equivalente a considerar tasas de acreción y crecimiento para el planeta mayores. Vimos que el origen de este nuevo torque positivo se encuentra relacionado con la advección y difusión del calor en torno a la órbita de heradura, produciendo lóbulos subdensos y asimétricos. Vimos que este efec-

to se hace negativo para discos superkeplerianos, mostrando que depende principalmente de la distancia entre el planeta y la corrotación. Además, verificamos que este efecto no se debe a alguna característica transitoria en el disco, y que puede sostenerse durante escalas comparables con el tiempo de libración. Además, discutimos posibles implicaciones astrofísicas relacionadas con el descubrimiento de este efecto.

2. Migración en discos magnetizados: vimos que los campos magnéticos podrían jugar un papel importante en el frenado de la migración. Basados en resultados de autores previos, quienes mostraron que podría existir una componente de torque de corrotación asociada con el campo magnético, diseñamos un método para poder medirla de forma precisa. Durante el desarrollo del método estudiamos propiedades estadísticas de la turbulencia, y en particular, la forma de relacionar dos estados turbulentos diferentes para obtener una mejor señal/ruido de un planeta sumergido en el disco. Luego de realizar las mediciones del torque encontramos que, contrario a lo esperado, el caso de campo magnético más intenso sería más similar al caso laminar, mientras que el caso de campo magnético más débil presentó una evidencia significativa de un exceso de torque proveniente de la región de corrotación.
3. Migración de gran escala: motivados por la necesidad de realizar simulaciones de planetas en migración para el estudio de sistemas resonantes, desarrollamos un método para lograrlo. Vimos que los métodos actuales no son capaces de tratar esta clase de problemas. Presentamos el algoritmo desarrollado de forma extensiva y presentamos una serie de pruebas que validan la implementación, a la vez que muestran algunas propiedades de convergencia interesantes. Finalmente, mostramos un ejemplo de la potencia del método para resolver la migración de un sistema de tres planetas en un disco de gas.

Todos los resultados mostrados contribuyen de forma original a nuestro conocimiento actual de las interacciones planeta disco, a la vez que abren numerosos frentes de investigación. Entre ellos podemos citar:

1. Impacto de la inestabilidad encontrada en el caso radiativo sobre los embriones en formación: en el capítulo 5 encontramos que bajo ciertas circunstancias podía aparecer una oscilación forzada en el torque, la cual crecía de forma exponencial, alterando posiblemente la excentricidad y la inclinación de los embriones. Investigar en detalle la fuente de esta inestabilidad podría conducir a nuevos mecanismos para explicar la distribución de excentricidad de los exoplanetas. Además, una dinámica mucho más rica podría ser descubierta en la migración por interacciones planeta-disco.

2. Relación entre viscosidad y difusividad en las simulaciones MRI: en nuestra investigación realizamos un ajuste por medio del torque para realizar comparaciones. Un aspecto que queda pendiente es saber qué ocurre si el ajuste se hace a partir de viscosidades y resistividades independientes ajustadas sobre el campo de densidad o el campo magnético. Una minimización en este espacio de comparación, conduce a torque comparables? Las herramientas para realizar este trabajo ya fueron desarrolladas a lo largo de este trabajo.
3. Torque de corrotación en sistemas móviles: con el método de remapeo se podrá comenzar a estudiar por primera vez de forma detallada las características del torque de corrotación en el caso de planetas que migran. Además, se podrá extender este estudio a sistemas de planetas, en lo que la estela tidal generada por cada uno de ellos puede influenciar de forma significativa las propiedades de saturación de este torque.
4. Estudio de migración de gran escala por tiempos comparables con los tiempos de formación de los planetas: debido a la gran eficiencia del método desarrollado para el estudio de la migración de gran escala, por primera vez seremos capaces de considerar una migración global por tiempos de vida iguales a los tiempos del disco protoplanetario. En estos casos ya será necesaria la inclusión de modelos autoconsistentes para el disco de gas, el cual deberá evolucionar junto con los planetas que migran en su interior. Resultados novedosos pueden surgir de esta investigación.

Analizador sintáctico para FARGO3D



Aquí presentamos el método que desarrollamos para poder traducir FARGO3D al lenguaje CUDA, lo que permite que sea ejecutado sobre un procesador gráfico. Si bien el énfasis es hacia CUDA, las ideas pueden ser trasladadas sin mayores cambios hacia otros lenguajes de programación.

Costo en hidrodinámica

Antes de diseñar un traductor de lenguaje, es necesario identificar en donde se gasta la mayor parte del tiempo dentro de FARGO3D. En un código hidrodinámico genérico, resuelto sobre una malla, siempre habrá un tipo de rutinas muy especiales, las cuales nosotros llamamos rutinas o funciones de malla. Estas cumplen la función de tomar ciertas variables de entrada y actualizar otras cantidades. El ejemplo más sencillo de esta clase de rutinas es el cálculo de la presión. En el caso isoterma, se tiene que:

$$P(c_s, \rho; x, y, z) = c_s^2(x, y, z)\rho(x, y, z), \quad (\text{A.1})$$

donde se enfatizó la dependencia de la presión P con la velocidad del sonido c_s y la densidad de masa ρ , y la dependencia de éstos con la posición. Así, la presión es función de la posición, por lo que para ser actualizada debe ser evaluada en cada punto de la malla. c_s y ρ son variables independientes para P , que deben ser pasadas como argumento. En un lenguaje de programación, P será un vector (o cubo) de cierta cantidad de componentes (el número es función de la cantidad de celdas de la malla), al igual que c_s y ρ . Escribiendo (A.1) en función de índices, se tiene:

$$P[i, j, k] = c_s[i, j, k]^2 \rho[i, j, k] \quad (\text{A.2})$$

y un triple lazo debe hacerse para actualizar la malla completa. Este tipo de rutinas es el núcleo de FARGO3D, y son las que insumen la mayor cantidad del tiempo de cómputo. Así, nuestro trabajo se centró en la traducción automática de estas rutinas.

Funciones de malla

En un pseudo lenguaje, estas rutinas pueden ser escritas como:

```
función función_malla_cpu(argumentos):
    variables globales
    variables locales
    hacer algo... (inicializaciones, etc.)
    lazo sobre índice k
        lazo sobre índice j
            lazo sobre índice i
                q(i,j,k) = f(celdas vecinas)

    hacer algo (reducciones, actualizaciones, etc.)
terminar función
```

Este pseudo lenguaje bien podría valer para cualquier lenguaje de programación, y es éste el punto de partida para la traducción. Sólo es necesario definir algunas reglas de transformación para cada bloque. Notar que un identificador `_cpu` fue añadido a la función, a fin de especificar en qué arquitectura se espera que funcione dicha función.

Una información adicional (la cual, en principio, podría ser inferida automáticamente con más esfuerzo) es requerida para poder trasladar este pseudo lenguaje hacia otro lenguaje general. En la práctica, las GPUs tienen un espacio de memoria completamente separado del espacio de memoria que utilizan las CPUs, por lo que transferencias de datos son necesarias para sincronizarlas. Para simplificar este problema, decidimos agregar dos campos adicionales, que especifiquen que cantidades son de entrada y cuales de salida:

```
función función_malla_cpu(argumentos):
    INPUT(campos que se requieren para la actualización)
    OUTPUT(campos que se actualizan durante la ejecución)
    etc...
```

Los detalles de la transferencia de memoria se verán en la siguiente sección.

Por último, ya que es no se desea alterar la forma en la que se invoca a la función a lo largo del código, y que esto no es posible en general al cambiar de lenguaje (ya que las convenciones suelen variar, o no es permitido un espacio de memoria global, etc), es necesario desarrollar una interface o *wrapper* que vincule la función traducida con la forma esperada para la invocación tradicional:

```
función kernel_función_malla(argumentos extendidos):
    variables locales
    obtener i,j,k de los índices de thread y block
    q(i,j,k) = f(celdas vecinas)
terminar kernel
```

```

función función_malla_gpu(argumentos)
  INPUT(campos que se requieren para la actualización)
  OUTPUT(campos que se actualizan durante la ejecución)
  hacer algo... (inicializaciones, etc.)
  ejecutar kernel_función_malla (algunos argumentos,
                                +argumentos,
                                +globales)
  hacer algo (reducciones, actualizaciones, etc.)
terminar función

```

Así, `función_malla` se sigue invocando de la misma forma que antes, pero a diferencia de la función original, el lazo triple no se realiza más dentro de ella sino que deriva el trabajo hacia una función especializada, que en este caso se llama `kernel_función_malla` la cual funcionará en otra plataforma. La forma en la que construimos `kernel_función_malla` está basada en CUDA, pero las ideas son suficientemente generales y cualquier otro modelo puede ser adoptado, con tal de que se realice efectivamente la actualización completa de los campos de interés. Notar además la incorporación de posibles argumentos adicionales en el ejemplo, los cuales pueden corresponder, por ejemplo, con cantidades que permanecen en la memoria global de una arquitectura particular y no es visible de forma directa por la otra.

ENTRADA/SALIDA

Para manejar transferencias de datos, diseñamos dos macrocomandos que tienen como argumento de entrada un campo escalar, como ser la densidad o la presión. Estos campos escalares tienen dos variables que indican en que plataforma está actualizado.

Cuando un campo es declarado como SALIDA en una función anotada como `_cpu`, se indica que dicho campo no está sincronizado correctamente en la GPU, por lo que cuando sea declarado como entrada en una rutina GPU, se verificará su estado y se hará la sincronización correspondiente. Lo mismo vale para el caso contrario.

Este mecanismo nos asegura que hacemos las mínimas comunicaciones requeridas para el correcto funcionamiento de la ejecución. Esta es una tarea que en general es muy difícil de hacer, ya que un proceso manual podría llevar fácilmente a errores o redundancias. Si bien ya existen métodos alternativos con las nuevas versiones de CUDA, cuando comenzamos el desarrollo del código, esta posibilidad no existía. Por otro lado, hacerlo de esta forma nos permitió incluir información importante dentro de los macrocomandos definidos, lo que agilizó de forma considerable el desarrollo al brindar la posibilidad de una inspección más fina de la forma en la que se ejecutan las rutinas.

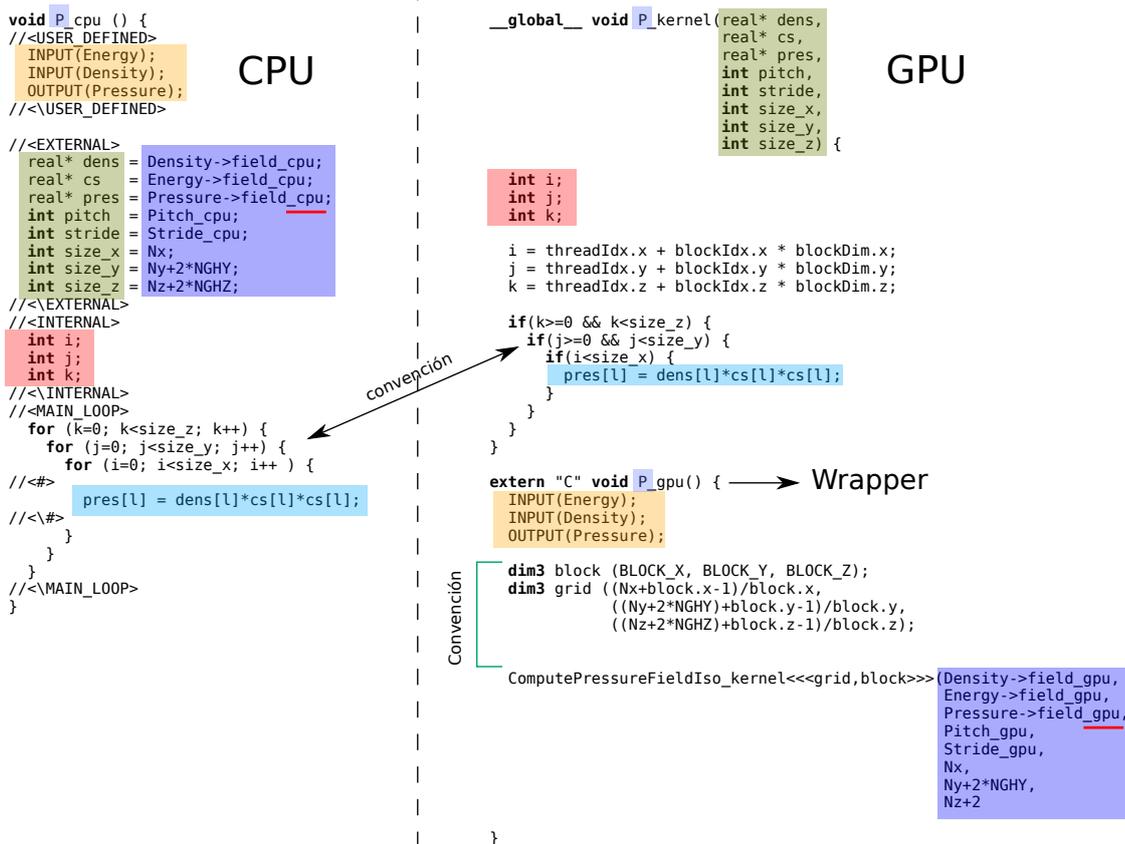


Figura A.1: Ejemplo de como se lleva a cabo el análisis sintáctico y la correspondiente traducción desde el lenguaje C hacia CUDA. La función considerada es el cálculo de la presión mediante la relación $P = c_s^2 \rho$.

Otra característica notable de nuestra aproximación es que estos macrocomandos nos permitieron utilizar el mismo sector de memoria para dos diferentes campos escalares (por medio de simples punteros), manteniendo una correcta legibilidad del código. Para evitar posibles problemas con esta forma de trabajo, el macrocomando ENTRADA revisa que el sector de memoria no haya sido utilizado por otro campo secundario, permitiendo la reutilización de la memoria, con lo cual alcanzamos valores muy cercanos al mínimo de memoria necesaria para la ejecución consistente.

CASO PRÁCTICO

En la Fig. A.1 presentamos un ejemplo del proceso, lo suficientemente sencillo y general como para comprender las ideas expuestas anteriormente. Consideremos la rutina de cálculo de la presión, en donde las reglas aplicadas fueron reducidas al máximo para simplificar la explicación.

Vemos que se parte de una rutina en la CPU llamada `P_cpu()`. Esta rutina presenta una serie de comentarios, como por ejemplo `//<USER_DEFINED>`, los cuales le dan información relevante al traductor para poder identificar ciertas partes de

código, algunas de las cuales están resaltadas con colores para mostrar las reglas de transformación entre un lenguaje y otro.

La rutina P se transforma en dos nuevas rutinas, y el sufijo `_cpu` es transformado por su correspondiente `_gpu` para el wrapper y en `_kernel` para la rutina que ejecuta el cálculo de presión sobre la GPU. Posteriormente, se transforman las líneas contenidas en el recuadro amarillo hacia su equivalente en el wrapper. Estas líneas si bien son iguales, son macrocomandos que dependen del entorno en el cual se invocan. Este entorno es modificado por una variable declarada como `#define _GPU` al comienzo del código fuente de la versión GPU de la rutina, no incluida en este esquema por simplicidad.

Posteriormente, las variables `EXTERNAL` son consideradas en la traducción. Estas son variables globales para la CPU, por lo que su nombre se considera como el nombre de los argumentos del kernel, y su valor se considera como variable de entrada al momento de invocarlo, dentro del wrapper (ver rectángulo azul). Una vez completadas las variables globales, se procede con las variables internas de la función, que se declaran de la misma forma dentro del kernel.

El lazo triple adopta una convención, y es la de utilizar siempre el nombre `size_` para sus índices. Al haber tomado el recaudo de pasar el índice como una variable externa al kernel, podemos así modificar de forma muy simple su extensión en ambas arquitecturas, y la programación del traductor se simplifica de forma notable.

Finalmente, se toma la línea fundamental, que consiste en el cálculo de la presión, y se copia íntegramente hacia el kernel, con lo cual el cálculo se realiza enteramente en la GPU.

Si bien este es el ejemplo más simple de todos, no por eso es menos ilustrativo. En la práctica aparecen algunas sutilezas adicionales, pero no contribuyen a la discusión y presentación del método, el cual con estas simples recetas ya puede ser implementado para traducir el código a cualquier otro lenguaje.

Muchos más detalles sobre la implementación y utilización del traductor que desarrollamos pueden encontrarse en la documentación oficial:

<http://fargo.in2p3.fr/manuals/html/c2cuda.html>

Bibliografía

- Armitage, P. J. (2007). Lecture notes on the formation and early evolution of planetary systems. *ArXiv Astrophysics e-prints*.
- Artymowicz, P. (1993). On the Wave Excitation and a Generalized Torque Formula for Lindblad Resonances Excited by External Potential. *ApJ*, 419:155.
- Bai, X.-N. (2014). Hall-effect-Controlled Gas Dynamics in Protoplanetary Disks. I. Wind Solutions at the Inner Disk. *ApJ*, 791:137.
- Balbus, S. A. y Hawley, J. F. (1991). A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution. *ApJ*, 376:214–233.
- Balbus, S. A. y Hawley, J. F. (1998). Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks. *Rev. Mod. Phys.*, 70:1–53.
- Balmforth, N. J. y Korycansky, D. G. (2001). Non-linear dynamics of the corotation torque. *MNRAS*, 326:833–851.
- Balsara, D. S. y Spicer, D. S. (1999). A staggered mesh algorithm using high order godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations. *Journal of Computational Physics*, 149(2):270–292.
- Baruteau, C., Fromang, S., Nelson, R. P., y Masset, F. (2011). Corotation torques experienced by planets embedded in weakly magnetized turbulent discs. *A&A*, 533:A84.
- Baruteau, C. y Lin, D. N. C. (2010). Protoplanetary Migration in Turbulent Isothermal Disks. *ApJ*, 709:759–773.
- Baruteau, C. y Masset, F. (2008a). On the Corotation Torque in a Radiatively Inefficient Disk. *ApJ*, 672:1054–1067.
- Baruteau, C. y Masset, F. (2008b). Type I Planetary Migration in a Self-Gravitating Disk. *ApJ*, 678:483–497.

- Baruteau, C. y Masset, F. (2013). Recent Developments in Planet Migration Theory. En *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, volumen 861 de *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, p. 201.
- Baruteau, C. y Papaloizou, J. C. B. (2013). Disk-Planets Interactions and the Diversity of Period Ratios in Kepler's Multi-planetary Systems. *ApJ*, 778:7.
- Benítez-Llambay, P., Masset, F., y Beaugé, C. (2011). The mass-period distribution of close-in exoplanets. *A&A*, 528:A2.
- Benítez-Llambay, P., Masset, F., Koenigsberger, G., y Szulágyi, J. (2015). Planet heating prevents inward migration of planetary cores. *Nature*, 520:63–65.
- Bitsch, B., Crida, A., Morbidelli, A., Kley, W., y Dobbs-Dixon, I. (2013). Stellar irradiated discs and implications on migration of embedded planets. I. Equilibrium discs. *A&A*, 549:A124.
- Boss, A. P. (1997). Giant planet formation by gravitational instability. *Science*, 276:1836–1839.
- Brio, M. y Wu, C. (1988). An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 75(2):400 – 422.
- Bryan, G. L., Norman, M. L., O'Shea, B. W., Abel, T., Wise, J. H., Turk, M. J., Reynolds, D. R., Collins, D. C., Wang, P., Skillman, S. W., Smith, B., Harkness, R. P., Bordner, J., Kim, J.-h., Kuhlen, M., Xu, H., Goldbaum, N., Hummels, C., Kritsuk, A. G., Tasker, E., Skory, S., Simpson, C. M., Hahn, O., Oishi, J. S., So, G. C., Zhao, F., Cen, R., Li, Y., y Enzo Collaboration (2014). ENZO: An Adaptive Mesh Refinement Code for Astrophysics. *ApJS*, 211:19.
- Cash, J. R. y Karp, A. H. (1990). A variable order runge-kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides. *ACM Trans. Math. Softw.*, 16(3):201–222.
- Casoli, J. y Masset, F. S. (2009). On the Horseshoe Drag of a Low-Mass Planet. I. Migration in Isothermal Disks. *ApJ*, 703:845–856.
- Charbonneau, D., Brown, T. M., Noyes, R. W., y Gilliland, R. L. (2002). Detection of an Extrasolar Planet Atmosphere. *ApJ*, 568:377–384.
- Chatterjee, S., Ford, E. B., Matsumura, S., y Rasio, F. A. (2008). Dynamical Outcomes of Planet-Planet Scattering. *ApJ*, 686:580–602.
- Colella, P. y Woodward, P. R. (1984). The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations. *Journal of Computational Physics*, 54:174–201.

- Commerçon, B., Teyssier, R., Audit, E., Hennebelle, P., y Chabrier, G. (2011). Radiation hydrodynamics with adaptive mesh refinement and application to prestellar core collapse. I. Methods. *A&A*, 529:A35.
- Cossou, C., Raymond, S. N., Hersant, F., y Pierens, A. (2014). Hot super-Earths and giant planet cores from different migration histories. *A&A*, 569:A56.
- Crida, A., Baruteau, C., Kley, W., y Masset, F. (2009). The dynamical role of the circumplanetary disc in planetary migration. *A&A*, 502:679–693.
- Crida, A., Morbidelli, A., y Masset, F. (2006). On the width and shape of gaps in protoplanetary disks. *Icarus*, 181:587–604.
- Crida, A., Morbidelli, A., y Masset, F. (2007). Simulating planet migration in globally evolving disks. *A&A*, 461:1173–1183.
- Crutcher, R. M. (1999). Magnetic Fields in Molecular Clouds: Observations Confront Theory. *ApJ*, 520:706–713.
- de Val-Borro, M., Edgar, R. G., Artymowicz, P., Ciecielag, P., Cresswell, P., D’Angelo, G., Delgado-Donate, E. J., Dirksen, G., Fromang, S., Gawryszczak, A., Klahr, H., Kley, W., Lyra, W., Masset, F., Mellema, G., Nelson, R. P., Paardekooper, S.-J., Peplinski, A., Pierens, A., Plewa, T., Rice, K., Schäfer, C., y Speith, R. (2006). A comparative study of disc-planet interaction. *MNRAS*, 370:529–558.
- Dobbs-Dixon, I., Cumming, A., y Lin, D. N. C. (2010). Radiative Hydrodynamic Simulations of HD209458b: Temporal Variability. *ApJ*, 710:1395–1407.
- Dong, R., Rafikov, R. R., Stone, J. M., y Petrovich, C. (2011). Density Waves Excited by Low-mass Planets in Protoplanetary Disks. I. Linear Regime. *ApJ*, 741:56.
- Duffell, P. C., Haiman, Z., MacFadyen, A. I., D’Orazio, D. J., y Farris, B. D. (2014). The Migration of Gap-opening Planets is Not Locked to Viscous Disk Evolution. *ApJ*, 792:L10.
- Duffell, P. C. y MacFadyen, A. I. (2012). Global Calculations of Density Waves and Gap Formation in Protoplanetary Disks Using a Moving Mesh. *ApJ*, 755:7.
- Dürmann, C. y Kley, W. (2015). Migration of massive planets in accreting disks. *A&A*, 574:A52.
- Evans, C. R. y Hawley, J. F. (1988). Simulation of magnetohydrodynamic flows - A constrained transport method. *ApJ*, 332:659–677.
- Fabrycky, D. y Tremaine, S. (2007). Shrinking Binary and Planetary Orbits by Kozai Cycles with Tidal Friction. *ApJ*, 669:1298–1315.

- Fischer, D. A., Howard, A. W., Laughlin, G. P., Macintosh, B., Mahadevan, S., Sahlmann, J., y Yee, J. C. (2014). Exoplanet Detection Techniques. *Protostars and Planets VI*, pp. 715–737.
- Fischer, D. A. y Valenti, J. (2005). The Planet-Metallicity Correlation. *ApJ*, 622:1102–1117.
- Ford, E. B. (2014). Architectures of planetary systems and implications for their formation. *Proceedings of the National Academy of Science*, 111:12616–12621.
- Fromang, S., Hennebelle, P., y Teyssier, R. (2006). A high order Godunov scheme with constrained transport and adaptive mesh refinement for astrophysical magnetohydrodynamics. *A&A*, 457:371–384.
- Fromang, S. y Stone, J. M. (2009). Turbulent resistivity driven by the magnetorotational instability. *A&A*, 507:19–28.
- Fung, J., Shi, J.-M., y Chiang, E. (2014). How Empty are Disk Gaps Opened by Giant Planets? *ApJ*, 782:88.
- Gardiner, T. A. y Stone, J. M. (2005). An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport. *Journal of Computational Physics*, 205:509–539.
- Giuppone, Cristian, A. (2011). *Ajustes orbitales y dinámica de sistemas planetarios extrasolares*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, FaMAF.
- Goldreich, P. y Schlichting, H. E. (2014). Overstable Librations can account for the Paucity of Mean Motion Resonances among Exoplanet Pairs. *Astron. J.*, 147:32.
- Goldreich, P. y Tremaine, S. (1979). The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. *ApJ*, 233:857–871.
- Goodman, J. y Rafikov, R. R. (2001). Planetary Torques as the Viscosity of Protoplanetary Disks. *ApJ*, 552:793–802.
- Guan, X. y Gammie, C. F. (2009). The Turbulent Magnetic Prandtl Number of MHD Turbulence in Disks. *ApJ*, 697:1901–1906.
- Guilet, J., Baruteau, C., y Papaloizou, J. C. B. (2013). Type I planet migration in weakly magnetized laminar discs. *MNRAS*, 430:1764–1783.
- Hansen, B. M. S. y Murray, N. (2012). Migration Then Assembly: Formation of Neptune-mass Planets inside 1 AU. *ApJ*, 751:158.
- Hawley, J. F. y Stone, J. M. (1995). MOCCT: A numerical technique for astrophysical MHD. *Computer Physics Communications*, 89:127–148.

- Hayashi, C. (1981). Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 70:35–53.
- Hollis, M. D. J., Balan, S. T., Lever, G., y Lahav, O. (2012). A uniformly derived catalogue of exoplanets from radial velocities. *MNRAS*, 423:2800–2814.
- Izsak, I. G. (1963). Laplace Coefficients and Their Newcomb Derivatives. *SAO Special Report*, 129.
- Johnson, B. M., Guan, X., y Gammie, C. F. (2008). Orbital Advection by Interpolation: A Fast and Accurate Numerical Scheme for Super-Fast MHD Flows. *ApJS*, 177:373–387.
- Johnson, J. A., Aller, K. M., Howard, A. W., y Crepp, J. R. (2010). Giant Planet Occurrence in the Stellar Mass-Metallicity Plane. *PASP*, 122:905–915.
- Jurić, M. y Tremaine, S. (2008). Dynamical Origin of Extrasolar Planet Eccentricity Distribution. *ApJ*, 686:603–620.
- Kley, W. (1989). Radiation hydrodynamics of the boundary layer in accretion disks. I - Numerical methods. *A&A*, 208:98–110.
- Kley, W. (1998). On the treatment of the Coriolis force in computational astrophysics. *A&A*, 338:L37–L41.
- Kley, W., Bitsch, B., y Klahr, H. (2009). Planet migration in three-dimensional radiative discs. *A&A*, 506:971–987.
- Kley, W. y Nelson, R. P. (2012). Planet-Disk Interaction and Orbital Evolution. *ARA&A*, 50:211–249.
- Krapp, L. y Benítez Llambay, P. (2015). Efectos magnetohidrodinámicos no ideales en discos protoplanetarios. Tesis de licenciatura, Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
- Laughlin, G., Steinacker, A., y Adams, F. C. (2004). Type I Planetary Migration with MHD Turbulence. *ApJ*, 608:489–496.
- Lesur, G. y Longaretti, P.-Y. (2009). Turbulent resistivity evaluation in magneto-rotational instability generated turbulence. *A&A*, 504:309–320.
- Levermore, C. D. y Pomraning, G. C. (1981). A flux-limited diffusion theory. *ApJ*, 248:321–334.
- Levison, H. F., Morbidelli, A., Tsiganis, K., Nesvorný, D., y Gomes, R. (2011). Late Orbital Instabilities in the Outer Planets Induced by Interaction with a Self-gravitating Planetesimal Disk. *AJ*, 142:152.

- Levison, H. F., Thommes, E., y Duncan, M. J. (2010). Modeling the Formation of Giant Planet Cores. I. Evaluating Key Processes. *AJ*, 139:1297–1314.
- Lin, D. N. C., Bodenheimer, P., y Richardson, D. C. (1996). Orbital migration of the planetary companion of 51 Pegasi to its present location. *Nature*, 380:606–607.
- Lissauer, J. J. (1993). Planet formation. *ARA&A*, 31:129–174.
- Lithwick, Y. y Wu, Y. (2012). Resonant Repulsion of Kepler Planet Pairs. *ApJ*, 756:L11.
- Londrillo, P. y Del Zanna, L. (2000). High-Order Upwind Schemes for Multidimensional Magnetohydrodynamics. *ApJ*, 530:508–524.
- Lovis, C. y Fischer, D. (2010). *Radial Velocity Techniques for Exoplanets*, pp. 27–53.
- Lynden-Bell, D. y Pringle, J. E. (1974). The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables. *MNRAS*, 168:603–637.
- Mamajek, E. E. (2009). Initial Conditions of Planet Formation: Lifetimes of Primordial Disks. En Usuda, T., Tamura, M., y Ishii, M., editores, *American Institute of Physics Conference Series*, volumen 1158 de *American Institute of Physics Conference Series*, pp. 3–10.
- Marcy, G. W. y Butler, R. P. (1998). Detection of Extrasolar Giant Planets. *ARA&A*, 36:57–98.
- Marcy, G. W., Butler, R. P., Fischer, D., Vogt, S. S., Lissauer, J. J., y Rivera, E. J. (2001). A Pair of Resonant Planets Orbiting GJ 876. *ApJ*, 556:296–301.
- Masset, F. (2000). FARGO: A fast eulerian transport algorithm for differentially rotating disks. *A&AS*, 141:165–173.
- Masset, F. y Benítez-Llambay, P. (2015). Horseshoe drag in three-dimensional globally isothermal disks. *Submitido ApJ*.
- Masset, F. S. (2011). On type-I migration near opacity transitions. A generalized Lindblad torque formula for planetary population synthesis. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111:131–160.
- Masset, F. S. y Casoli, J. (2010). Saturated Torque Formula for Planetary Migration in Viscous Disks with Thermal Diffusion: Recipe for Protoplanet Population Synthesis. *ApJ*, 723:1393–1417.
- Masset, F. S., D’Angelo, G., y Kley, W. (2006a). On the Migration of Protoplanet Solid Cores. *ApJ*, 652:730–745.

- Masset, F. S., Morbidelli, A., Crida, A., y Ferreira, J. (2006b). Disk Surface Density Transitions as Protoplanet Traps. *ApJ*, 642:478–487.
- Masset, F. S. y Papaloizou, J. C. B. (2003). Runaway Migration and the Formation of Hot Jupiters. *ApJ*, 588:494–508.
- Mayer, L., Quinn, T., Wadsley, J., y Stadel, J. (2002). Formation of Giant Planets by Fragmentation of Protoplanetary Disks. *Science*, 298:1756–1759.
- Mayor, M. y Queloz, D. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378:355–359.
- McNally, C. P., Lyra, W., y Passy, J.-C. (2012). A Well-posed Kelvin-Helmholtz Instability Test and Comparison. *ApJS*, 201:18.
- Meyer-Vernet, N. y Sicardy, B. (1987). On the physics of resonant disk-satellite interaction. *Icarus*, 69:157–175.
- Mignone, A., Flock, M., Stute, M., Kolb, S. M., y Muscianisi, G. (2012). A conservative orbital advection scheme for simulations of magnetized shear flows with the PLUTO code. *A&A*, 545:A152.
- Miralda-Escudé, J. (2002). Orbital Perturbations of Transiting Planets: A Possible Method to Measure Stellar Quadrupoles and to Detect Earth-Mass Planets. *ApJ*, 564:1019–1023.
- Naoz, S., Farr, W. M., Lithwick, Y., Rasio, F. A., y Teysandier, J. (2011). Hot Jupiters from secular planet-planet interactions. *Nature*, 473:187–189.
- Nelson, R. P. y Papaloizou, J. C. B. (2004). The interaction of giant planets with a disc with MHD turbulence - IV. Migration rates of embedded protoplanets. *MNRAS*, 350:849–864.
- Neuähuser, R., Guenther, E. W., Wuchterl, G., Mugrauer, M., Bedalov, A., y Hauschildt, P. H. (2005). Evidence for a co-moving sub-stellar companion of GQ Lup. *A&A*, 435:L13–L16.
- Norman, M. L. (1980). *Numerical study of rotating interstellar clouds: Equilibrium and collapse*. Tesis doctoral, Lawrence Livermore National Lab., CA.
- Norman, M. L., Wilson, J. R., y Barton, R. T. (1980). A new calculation on rotating protostar collapse. *ApJ*, 239:968–981.
- Ogihara, M., Morbidelli, A., y Guillot, T. (2015). Suppression of type I migration by disk winds. *ArXiv e-prints*.
- Ogilvie, G. I. y Lubow, S. H. (2002). On the wake generated by a planet in a disc. *MNRAS*, 330:950–954.

- Orszag, S. A. y Tang, C.-M. (1979). Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 90:129–143.
- Paardekooper, S.-J., Baruteau, C., Crida, A., y Kley, W. (2010). A torque formula for non-isothermal type I planetary migration - I. Unsaturated horseshoe drag. *MNRAS*, 401:1950–1964.
- Paardekooper, S.-J. y Mellema, G. (2006). Halting type I planet migration in non-isothermal disks. *A&A*, 459:L17–L20.
- Paardekooper, S.-J. y Papaloizou, J. C. B. (2008). On disc protoplanet interactions in a non-barotropic disc with thermal diffusion. *A&A*, 485:877–895.
- Paardekooper, S.-J. y Papaloizou, J. C. B. (2009). On corotation torques, horseshoe drag and the possibility of sustained stalled or outward protoplanetary migration. *MNRAS*, 394:2283–2296.
- Papaloizou, J. C. B. y Terquem, C. (1999). Critical Protoplanetary Core Masses in Protoplanetary Disks and the Formation of Short-Period Giant Planets. *ApJ*, 521:823–838.
- Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., Lissauer, J. J., Podolak, M., y Greenzweig, Y. (1996). Formation of the Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gas. *Icarus*, 124:62–85.
- Pringle, J. E. (1981). Accretion discs in astrophysics. *ARA&A*, 19:137–162.
- Rafikov, R. R. (2002). Nonlinear Propagation of Planet-generated Tidal Waves. *ApJ*, 569:997–1008.
- Robertson, B. E., Kravtsov, A. V., Gnedin, N. Y., Abel, T., y Rudd, D. H. (2010). Computational Eulerian hydrodynamics and Galilean invariance. *MNRAS*, 401:2463–2476.
- Ryu, D., Ostriker, J. P., Kang, H., y Cen, R. (1993). A cosmological hydrodynamic code based on the total variation diminishing scheme. *ApJ*, 414:1–19.
- Safronov, V. S. (1972). *Evolution of the protoplanetary cloud and formation of the earth and planets*.
- Schive, H.-Y., Tsai, Y.-C., y Chiueh, T. (2010). GAMER: A Graphic Processing Unit Accelerated Adaptive-Mesh-Refinement Code for Astrophysics. *ApJS*, 186:457–484.
- Schneider, E. E. y Robertson, B. E. (2015). CHOLLA: A New Massively Parallel Hydrodynamics Code for Astrophysical Simulation. *ApJS*, 217:24.
- Shajn, G. y Struve, O. (1929). On the rotation of the stars. *MNRAS*, 89:222–239.

- Shakura, N. I. y Sunyaev, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24:337–355.
- Shu, F. H., Adams, F. C., y Lizano, S. (1987). Star formation in molecular clouds - Observation and theory. *ARA&A*, 25:23–81.
- Sod, G. A. (1978). A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 27(1):1 – 31.
- Sorathia, K. A., Reynolds, C. S., Stone, J. M., y Beckwith, K. (2012). Global Simulations of Accretion Disks. I. Convergence and Comparisons with Local Models. *ApJ*, 749:189.
- Speith, R. y Riffert, H. (1999). The viscous gas ring as an astrophysical test problem for a viscous SPH-code. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 109:231–242.
- Stone, J. M. y Gardiner, T. A. (2010). Implementation of the Shearing Box Approximation in Athena. *ApJS*, 189:142–155.
- Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F., y Simon, J. B. (2008). Athena: A New Code for Astrophysical MHD. *ApJS*, 178:137–177.
- Stone, J. M., Hawley, J. F., Evans, C. R., y Norman, M. L. (1992). A test suite for magnetohydrodynamical simulations. *ApJ*, 388:415–437.
- Stone, J. M. y Norman, M. L. (1992a). ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I - The hydrodynamic algorithms and tests. *ApJS*, 80:753–790.
- Stone, J. M. y Norman, M. L. (1992b). ZEUS-2D: A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. II. The Magnetohydrodynamic Algorithms and Tests. *ApJS*, 80:791.
- Tanaka, H., Takeuchi, T., y Ward, W. R. (2002). Three-Dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. I. Corotation and Lindblad Torques and Planet Migration. *ApJ*, 565:1257–1274.
- Tassoul, J.-L. (1978). *Theory of rotating stars*.
- Terquem, C. E. J. M. L. J. (2003). Stopping inward planetary migration by a toroidal magnetic field. *MNRAS*, 341:1157–1173.
- Teyssier, R. (2002). Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement. A new high resolution code called RAMSES. *A&A*, 385:337–364.

- Toomre, A. (1964). On the gravitational stability of a disk of stars. *ApJ*, 139:1217–1238.
- Toro, E. (1999). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Applied mechanics: Researchers and students. Springer.
- Trac, H. y Pen, U.-L. (2004). A moving frame algorithm for high Mach number hydrodynamics. *New A*, 9:443–465.
- Tsang, D. (2011). Protoplanetary Disk Resonances and Type I Migration. *ApJ*, 741:109.
- Uribe, A., Bans, A., y Königl, A. (2015). Type I Planet Migration in a Magnetized Disk. I. Effect of Large-scale Vertical and Azimuthal Field Components. *ApJ*, 802:54.
- Uribe, A. L., Klahr, H., Flock, M., y Henning, T. (2011). Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Planet Migration in Turbulent Stratified Disks. *ApJ*, 736:85.
- van Leer, B. (1977). Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection. *Journal of Computational Physics*, 23:276.
- Wang, J. y Fischer, D. A. (2013). Revealing A Universal Planet-Metallicity Correlation For Planets of Different Sizes Around Solar-Type Stars. *ArXiv e-prints*.
- Ward, W. R. (1986). Density waves in the solar nebula - Differential Lindblad torque. *Icarus*, 67:164–180.
- Ward, W. R. (1991). Horseshoe Orbit Drag. En *Lunar and Planetary Science Conference*, volumen 22 de *Lunar and Planetary Science Conference*, p. 1463.
- Ward, W. R. (1997). Protoplanet Migration by Nebula Tides. *Icarus*, 126:261–281.
- Williams, J. P. y Cieza, L. A. (2011). Protoplanetary Disks and Their Evolution. *ARA&A*, 49:67–117.
- Wolszczan, A. (1994). Confirmation of Earth-Mass Planets Orbiting the Millisecond Pulsar PSR B1257+12. *Science*, 264:538–542.
- Wu, Y. y Murray, N. (2003). Planet Migration and Binary Companions: The Case of HD 80606b. *ApJ*, 589:605–614.
- Xie, J.-W. (2014). Asymmetric orbital distribution near mean motion resonance: Application to planets observed by kepler and radial velocities. *The Astrophysical Journal*, 786(2):153.

Ziegler, U. (2008). The NIRVANA code: Parallel computational MHD with adaptive mesh refinement. *Computer Physics Communications*, 179:227–244.