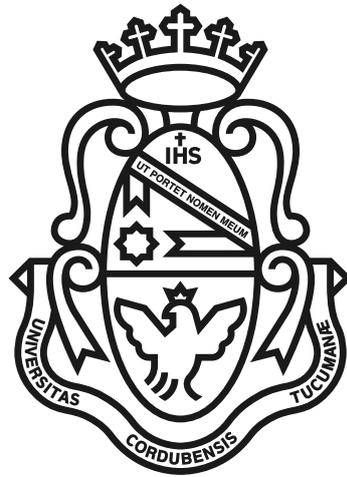


MODELO ANISÓTROPO DE HALOS

MARIO AGUSTÍN SGRÓ

presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física
como parte de los requerimientos para la obtención del grado de
Doctor en Astronomía de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



Marzo, 2014

DIRECTOR

Dr. Manuel Enrique Merchán

Palabras claves: Modelo Anisotrópico de Halos. Simulaciones numéricas. Algoritmos para la identificación de Estructuras. Función de Correlación.

Keywords: Anisotropic Halo Model. Dark matter halos. Numerical Simulations. Halo finder algorithm. Correlation function.

Clasificaciones:

02.70.Rr General statistical methods

98.62.Ve Statistical and correlative studies of properties

98.62.Py Distances, redshifts, radial velocities; spatial distribution of galaxies

98.65.-r Galaxy groups, clusters, and superclusters; large scale structure of the Universe

¿Qué soy cuando me comparo con el universo?.

— Ludwig van Beethoven

Toda convicción es una cárcel.

— Friedrich Nietzsche

Dedicado a mis padres: Pini y Mario.

RESUMEN

Según nuestro entendimiento actual sobre el origen y evolución del Universo, todas las estructuras que observamos hoy en día provienen de pequeñas fluctuaciones en el campo de densidad primigenio. Las observaciones del fondo cósmico de microondas han demostrado que el contraste de densidad máximo de aquellas fluctuaciones era del orden de 10^{-5} , brindando una observación contundente en favor del Principio Cosmológico. Estas fluctuaciones fueron amplificadas por la acción de la gravedad y formaron diversas estructuras tales como filamentos, panqueques y nodos para conformar la *telaraña* cósmica que muestran las observaciones actuales.

La manera en que las fluctuaciones evolucionan es posible describirla analíticamente solo en los primeros estadios de la evolución. En estas etapas puede aplicarse la Teoría Lineal para determinar como es el crecimiento de la perturbación en función del tiempo. La evolución posterior debe ser estudiada haciendo uso de simulaciones numéricas o modelos analíticos los cuales permiten adentrarse en el estudio de las etapas de la evolución no lineal de las fluctuaciones. La realización de un simulación numérica es el primer paso cuando se quiere realizar dicho estudio, siendo la identificación de las estructuras a estudiar el segundo paso esencial.

En el presente trabajo de tesis, como primer paso, hemos desarrollado un algoritmo para la identificación de halos y subhalos de materia oscura en simulaciones numéricas cosmológicas. Nuestro método consiste aplicar recursivamente el clásico método de FoF. Adicionalmente, en cada uno de los pasos aplicamos un criterio de energía para descartar aquellas partículas que no se encuentran gravitacionalmente ligadas. Como parte del proyecto *Subhaloes going Notts* pudimos realizar comparaciones entre diferentes identificadores, y contrastar las propiedades de los subhalos obtenidas por los diferentes algoritmos.

Una vez identificados los halos y subhalos en un simulación cosmológica es posible realizar estudios estadísticos de diversos tipos. Uno de los más utilizados de tales estudios es la función de correlación en sus diferentes *sabores*. En la segunda parte de esta tesis nos dedicamos al estudio de la función de correlación anisótropa, la cual definimos a partir de los autovectores del tensor de forma de los halos de materia oscura. El procedimiento consiste, resumidamente, en estimar la correlación en volúmenes cónicos alrededor de cada uno de los autovectores. Realizando dicho proceso en simulaciones encontramos que existe cierta preferencia de la materia circundante a estar alineada con la dirección del semi-eje mayor, i. e. la amplitud de la función de

correlación es mayor en la dirección paralela que en las direcciones perpendiculares al semi-eje mayor del tensor de forma. Esto también lo observamos en catálogo de galaxias, donde las direcciones para estimar la correlación las determinamos a partir del tensor de forma proyectado en el plano del cielo.

El modelo más utilizado para interpretar los resultados encontrados a partir de la función de correlación es el Modelo de Halos. Este consiste en una prescripción teórica para la función de correlación bipuntual bajo ciertas hipótesis que tiene que ver con como la materia se distribuye y agrupa en el Universo. Nuestro aporte a dicho modelo consiste en una extensión del mismo para tener en cuenta la forma triaxial de los halos de materia oscura como así también los alineamientos de la materia en escalas mayores al tamaño de los halos. Para tal fin fue necesario introducir funciones de probabilidad que describan cual es la distribución de forma de los halos y otra similar para la alineación de la materia circundante. La modelización de estas función llevó a encontrar ciertos resultados esperados según la teoría de formación (i. e., los halos más masivos tienen formas más elongadas) y otros resultados que nos permitieron cuantificar el factor de alineamiento de la materia con los eje principales del tensor de forma.

ABSTRACT

According to our current understanding of the origin and evolution of the Universe, all the structures we see today come from small fluctuations in the primordial density field. The observations of the cosmic microwave background have shown that the maximum density contrast of those fluctuations was of the order 10^{-5} , strengthening the Cosmological Principle. These fluctuations were amplified by the action of gravity, forming several structures such as filaments, pancakes and nodes.

The way in which fluctuations evolve can be analytically described only in the early stages of evolution. During this period we can apply the linear theory to determine how the perturbations grow as function of time. Later stages of the evolution must be studied by means of numerical simulations or semi-analytical models providing an insight to the non-linear stages of the evolution of the fluctuations. The next essential step, after performing a numerical simulation, is the identification of structures to be studied.

In this thesis we developed an algorithm to identify dark matter halos and subhalos in cosmological numerical simulations. Our method is based on to recursively apply the classical Friends-of-Friends algorithm. Additionally, in each of the steps, an energy criterion is applied

in order to discard those particles that are not gravitationally linked. As part of the «Subhaloes going Notts» project we were able to make comparisons among different identifiers, and contrast the properties of subhalos identified by the different algorithms. Having identified the halos and sub-halos in a cosmological simulation it is possible to perform statistical studies of various types. One of the most employed is the correlation function in its different combinations.

In the second part of this thesis we studied the anisotropic correlation function computed along the eigenvectors of the shape tensor of the dark matter halos. Briefly, the process consists in estimating the correlation on conical volumes around each eigenvectors. By performing this process over a numerical simulations, we found that the matter surrounding the dark halos trends to be aligned with the direction of the major axis, i. e., the amplitude of the correlation function is larger in the direction parallel to the major axis than in the perpendicular directions. This trend was also observed in the Sloan galaxy catalog, in this case the directions were determined from the projected shape tensor.

The Halo Model is the most widely used tool to interpret the results from the correlation function. This is a theoretical prescription for bipunctual correlation function under certain assumptions related to the distribution of the matter in the Universe. Our contribution is the extension of this model taking into account the triaxial shape of the dark matter halos as well as the alignments of matter at scales larger than the size of the halos. Our results allow the quantification of the alignment of the matter surrounding the dark matter halos. axis of the shape tensor.

PUBLICACIONES

Durante el desarrollo de mi carrera de doctorado hemos publicado los siguientes trabajos:

Knebe, A., Pearce, F. R., Lux, H., Ascasibar, Y., Behroozi, P., Casado, J., Moran, C. C., Diemand, J., Dolag, K., Dominguez-Tenreiro, R., Elahi, P., Falck, B., Gottlöber, S., Han, J., Klypin, A., Lukić, Z., Maciejewski, M., McBride, C. K., Merchán, M. E., Muldrew, S. I., Neyrinck, M., Onions, J., Planelles, S., Potter, D., Quilis, V., Rasera, Y., Ricker, P. M., Roy, F., Ruiz, A. N., Sgró, M. A., Springel, V., Stadel, J., Sutter, P. M., Tweed, D., & Zemp, M. (2013). Structure finding in cosmological simulations: the state of affairs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 435, 1618–1658.

URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013MNRAS.435.1618K>

Onions, J., Ascasibar, Y., Behroozi, P., Casado, J., Elahi, P., Han, J., Knebe, A., Lux, H., Merchán, M. E., Muldrew, S. I., Neyrinck, M., Old, L., Pearce, F. R., Potter, D., Ruiz, A. N., Sgró, M. A., Tweed, D., & Yue, T. (2013). Subhaloes gone notts: spin across subhaloes and finders. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429, 2739–2747.

URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013MNRAS.429.2739O>

Onions, J., Knebe, A., Pearce, F. R., Muldrew, S. I., Lux, H., Knollmann, S. R., Ascasibar, Y., Behroozi, P., Elahi, P., Han, J., Maciejewski, M., Merchán, M. E., Neyrinck, M., Ruiz, A. N., Sgró, M. A., Springel, V., & Tweed, D. (2012). Subhaloes going notts: the subhalo-finder comparison project. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423, 1200–1214.

URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2012MNRAS.423.1200O>

Paz, D. J., Sgró, M. A., Merchán, M., & Padilla, N. (2011). Alignments of galaxy group shapes with large-scale structure. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 414, 2029–2039.

URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011MNRAS.414.2029P>

Sgró, M. A., Paz, D. J., & Merchán, M. (2013). Anisotropic halo model: implementation and numerical results. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433, 787–795.

URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013MNRAS.433..787S>

Sgró, M. A., Ruiz, A. N., & Merchán, M. E. (2010). Hierarchical friends-of-friends algorithm to extract substructures from dark matter halos. *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata*

Argentina, 53, 43–46.

URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010BAAA...53...43S>

Yaryura, C. Y., Lares, M., Luparello, H. E., Paz, D. J., Lambas, D. G., Padilla, N., & Sgró, M. A. (2012a). The influence of superstructures on bright galaxy environments: clustering properties. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 426, 708–718.

URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2012MNRAS.426..708Y>

Yaryura, C. Y., Lares, M., Luparello, H. E., Paz, D. J., Lambas, D. G., Padilla, N., & Sgró, M. A. (2012b). Superestructuras y las propiedades del clustering de galaxias brillantes. *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina*, 55, 373–377.

URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2012BAAA...55..373Y>

*Gracias a la vida,
que me ha dado tanto.. -
- Violeta Parra*

AGRADECIMIENTOS

El camino recorrido no habría sido posible sin el acompañamiento y ayuda de muchas personas a las cuales deseo agradecer por todos los momentos que me han obsequiado.

A mis padres por brindarme siempre todas las posibilidades y alentarme a estudiar lo que me gustaba.

A mi compañera, Carito, por compartir conmigo tantos buenos y malos momentos durante estos años.

A mi director, Manuel, por haber confiado en mi y permitirme explorar diversos temas que enriquecieron mi formación doctoral.

A familiares y amigos todos, por cada momento compartido en las más diversas situaciones, y por no olvidarme de alguno no nombraré a nadie, pero espero que todos ellos se sientan incluidos.

A todos los colegas, compañeros y amigos del IATE, especialmente a Polako, Dante, Dario, Facundo, Ismael, Matias Schneiter, Marcelo, Anita O'mill.

Al equipo francés: Jérémy Blaizot, Julie y Leo Michel-Dansac, por su afecto y por brindarme la oportunidad de trabajar con ellos.

Al Dr. Laerte Sodré, Dr. Ariel Zandivares, Dra. Andrea Costa y Dra. Sofía Cora, por aceptar ser parte del tribunal evaluador de esta tesis.

Espero todos ellos reciban este abrazo de agradecimiento... también vos.

* * *

Durante la realización de esta tesis usufructu  las becas de doctorado tipo I y II del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Los trabajos de investigación fueron llevados a cabo con recursos del Instituto de Astronomía Teórica y Experimental (CCT Córdoba, CONICET, UNC) y del Observatorio Astronómico de Córdoba (UNC).

ÍNDICE GENERAL

I INTRODUCCIÓN	1
1 FUNDAMENTOS Y HERRAMIENTAS TEÓRICAS	3
1.1 Breve historia sobre el estudio del Universo	3
1.2 Ecuaciones de Campo de Einstein y el Universo Homogéneo e isótropo	6
1.3 Dinámica de los universos FLRW	7
1.4 Corrimiento hacia el rojo cosmológico	12
1.5 Formación de Estructuras por Inestabilidad Gravitacional: Teoría Lineal	13
1.6 Crecimiento no lineal de las perturbaciones de densidad	17
1.6.1 La aproximación de Zel'dovich	17
1.6.2 El modelo de colapso esférico	19
1.7 La masa de un halo	23
1.8 La densidad numérica media de halos: La Función de Masa	23
1.9 Los Halos de materias oscura: trazadores sesgados . .	28
1.10 Perfiles de densidad de los halos de materia oscura . .	31
2 CATÁLOGOS DE GALAXIAS Y SIMULACIONES NUMÉRICAS	35
2.1 Catálogo de galaxias Sloan	35
2.1.1 Identificación de grupos de galaxias	38
2.2 Simulaciones del Universo en gran escala	40
2.2.1 Condiciones Iniciales	41
2.2.2 Cálculo de las fuerzas involucradas	41
2.2.3 Integración de las ecuaciones de movimiento .	43
2.3 Construyendo catálogos sintéticos	44
3 ESTADÍSTICAS DEL CAMPO DE DENSIDAD	49
3.1 Espectro de potencia y funciones de correlación	49
3.2 Campos gaussianos	51
3.3 Fluctuaciones en la masa	52
3.4 El espectro de potencia primordial	53
3.5 El Modelo de Halos	56
3.5.1 El modelo de halos en el espacio de Fourier . .	58
3.6 El modelos de halos y la distribución de galaxias . . .	59
II ANISOTROPÍAS EN EL UNIVERSO	61
4 IDENTIFICACIÓN DE ESTRUCTURAS EN SIMULACIONES NUMÉRICAS	63
4.1 Algoritmos para identificar estructuras en simulaciones numéricas	63
4.2 MENDIETA: descripción del algoritmo	64
4.2.1 Aplicación	65

4.2.2	Comparación con otros identificadores	68
5	ALINEACIÓN	79
5.1	Alineamientos en simulaciones numéricas	79
5.1.1	La simulación numérica	79
5.1.2	Función de correlación anisótropa	80
5.2	Función de correlación anisótropa proyectada en catálogos de galaxias	82
5.2.1	Función de correlación anisótropa en catálogos sintéticos	83
5.2.2	El catálogo de grupos de galaxias	83
5.2.3	Alineamientos en la función de correlación proyectada	84
5.3	Alineación y colores de las galaxias	87
6	MODELO ANISÓTROPO DE HALOS	99
6.1	Introducción	99
6.2	Modelo Anisótropo de Halos	100
6.2.1	El término de 1-halo	103
6.2.2	El término de 2-halos	106
6.3	Modelo Anisótropo de Halos y la distribución de galaxias	108
6.3.1	Distribución de Ocupación de Halos	108
6.3.2	Modelo Anisótropo de Halos Proyectado	109
6.3.3	Proyección sobre el plano del cielo	111
6.4	Método de integración	114
6.5	Implementación	114
6.5.1	La función de correlación cruzada tridimensional	114
6.6	Comparación con Simulaciones Numéricas	115
6.6.1	Función de correlación cruzada isotropa	115
6.6.2	Estimación de parámetros: Método de Maximo Likelihood	118
6.6.3	Modelo Anisótropo de Halos aplicado a la simulación	119
7	CONCLUSIONES	121
III APÉNDICE		125
A	PEQUEÑA INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA TENSORIAL	127
A.1	Algebra tensorial	127
A.2	Las transformaciones de Lorentz	129
B	ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN DE HALOS Y SUBHALOS	131
B.1	FoF: Friends-of-Friends	131
B.2	SO: Spherical Overdensity	132
B.3	AHF: Amiga Halo Finder	134
B.4	DENMAX	135
B.5	SKID	136
B.6	Bound Density Maxima Algorithm (BDM)	137
B.7	HOP	138
B.8	SUBFIND	139

B.9 AdaptaHOP	141
C MÉTODOS MONTE CARLO DE INTEGRACIÓN	145
C.1 Método Monte Carlo	147
C.2 Método de Integración Monte Carlo	147
C.2.1 Método de rechazo	148
C.2.2 Método del valor medio	148
C.2.3 Estimación de errores en integración MC	149
C.2.4 Muestreo con importancia	151
C.3 Ejemplos	152
C.3.1 comparación con regla de simpson	152
C.3.2 independencia de la cantidad de dimensiones	153
C.3.3 importance sampling	153
D NÚMEROS ÚTILES	155
BIBLIOGRAFÍA	157

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Fondo Cósmico de Microondas observado por Planck	6
Figura 2	Cobertura en el cielo del catálogo espectroscópico de galaxias SDSS-DR7	36
Figura 3	Distribución espacial de galaxias en ascensión recta y <i>redshift</i>	37
Figura 4	Evolución temporal de una simulación cosmológica	45
Figura 5	Distribución espacial del catálogo real y el catálogo sintético	47
Figura 6	MENDIETA en acción: ejemplo de identificación de subhalos	66
Figura 7	Número medio de subestructuras en función de la masa del Halo	67
Figura 8	Comparación Mendieta vs otros identificadores: campo de densidad	69
Figura 9	Número acumulativo de subhalos con masas (M_{200}) mayores al valor indicado dentro de una esfera de $250h^{-1}kpc$	70
Figura 10	Comparación de la pendiente y la normalización de la función de masa	71
Figura 11	Número acumulativo de subhalos en función de la velocidad de rotación máxima v_{max}	72
Figura 12	Masa en subhalos acumulada en función de la distancia radial	72
Figura 13	Perfil general del parámetro de espín de Bullock en subhalos	74
Figura 14	Perfil general del parámetro de espín de Peebles en subhalos	75
Figura 15	Perfil general del parámetro de espín de Bullock en subhalos usando la rutina de limpieza propia	76
Figura 16	Perfil general del parámetro de espín de Peebles en subhalos usando la rutina de limpieza propia	76
Figura 17	Perfil general del parámetro de espín de Bullock en subhalos usando la rutina de limpieza común	77
Figura 18	Perfil general del parámetro de espín de Peebles en subhalos usando la rutina de limpieza común	77

Figura 19	Función de correlación anisótropa en simulaciones numéricas	89
Figura 20	Cocientes entre funciones de correlación paralelas y perpendiculares al semieje mayor del tensor de forma	90
Figura 21	Función de correlación grupo–galaxia anisótropa en catálogo sintético	91
Figura 22	Distribución de masas de grupos de galaxias	92
Figura 23	Función de correlación anisótropa grupo-galaxia proyectada	93
Figura 24	Cocientes globales entre correlaciones direccionales	94
Figura 25	Diagrama color-magnitud de galaxias	95
Figura 26	Bimodalidad en la distribución de color de galaxias	96
Figura 27	Funciones de correlación anisótropas por color	97
Figura 28	Función distribución de formas	105
Figura 29	Función distribución de alineamiento halo-halo	107
Figura 30	Función de Correlación Anisótropa Direccional: dependencia con los parámetros del modelo	107
Figura 31	Modelo de Halos Isótropo: test del modelo	116
Figura 32	Estimación de parámetros: curvas de nivel	117
Figura 33	Modelo de Halos Anisótropo para halos centros en tres rangos de masa: $10^{12.00} - 10^{12.5}$, $10^{13.50} - 10^{14.0}$ y $10^{14.50} - 10^{15.0} h^{-1}M_{\odot}$	120
Figura 34	Comparación integración mediante método de Simpson vs. Monte Carlo	152
Figura 35	Error en integración Monte Carlo de una esfera n -dimensional	153
Figura 36	Comparación método Monte Carlo estándar vs. método de <i>importance sampling</i>	154

ACRÓNIMOS

FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, Modelo Cosmológico Estándar
EF	Ecuaciones de Friedmann
MC	Monte Carlo
NFW	Modelo de Navarro-Frenk-White para el perfil de densidad de halos de materia oscura
Λ CDM	Λ -Cold Dark Matter, Modelo Cosmológico de Materia Oscura Fría con Constante Cosmológica.
EPL	espectro de potencia lineal
ρ_c	densidad crítica del Universo
CMB	siglas en inglés de Cosmic Microwave Background, Fondo Cósmico de Microondas
MH	Modelo de Halos
MAH	Modelo Anisótropo de Halos
ECE	Ecuaciones de Campo de Einstein
DOH	Distribución de Ocupación de Halos
EdS	Universo Einstein-de Sitter

Parte I

INTRODUCCIÓN

En esta primera parte introductoria veremos algunos conceptos básicos de la cosmología moderna. Comenzaremos con una pequeña introducción a la cosmología y a las ecuaciones de campo de Einstein, y veremos como éstas describen la evolución del Universo en gran escala. Seguidamente, observaremos cómo se forman las estructuras dentro de un Universo en expansión desde el punto de vista de la teoría de perturbación lineal y no lineal. También veremos algunas herramientas estadísticas utilizadas para describir la distribución de materia en el Universo.

FUNDAMENTOS Y HERRAMIENTAS TEÓRICAS

*The process of progress in theoretical science finds its expression not only in the fact that the relations expressed by elementary laws are replaced by others that are more precise, but also in the circumstance that elementary concepts that are associated with the most immediate perceptions of reality need to be replaced by newer ones, better suited to the complex data provided by experience. **

— Albert Einstein, charla de apertura durante el curso sobre Teoría de la Relatividad que brindó en Argentina, 1925.

1.1 BREVE HISTORIA SOBRE EL ESTUDIO DEL UNIVERSO

Largo es el camino que ha recorrido la humanidad tratando de entender el Cosmos. Los primeros modelos, tales como los *Universos Islas* del filósofo francés René Descartes, las *esferas de estrellas* de Thomas Wright o el *Universo jerárquico y fractal* de Immanuel Kant y Johann Heinrich Lambert, estaban basados principalmente en la especulación e imaginación, ya que no se contaba en aquellas épocas con observaciones que respaldaran dichos modelos. No fue hasta las últimas décadas del siglo XVIII que William Herschel logró desarrollar el primer modelo de nuestra galaxia basándose en las observaciones del brillo de diferentes estrellas, lo cual fijó el primer antecedente de una cuantificación de la escala y estructura del Universo.

Durante el siglo XIX se construyeron telescopios de mayor tamaño con la intención de observar objetos astronómicos más débiles, y se desarrollaron los mecanismos que permitieran realizar el guiado del telescopio para poder contrarrestar el movimiento de rotación de la Tierra. Al mismo tiempo se produjo un cambio en la concepción de los telescopios, pasando de los tipo refractor a los telescopio reflectores, estos últimos, si bien son más sensibles al mecanismo de guiado, permitieron construir superficies colectoras más grandes. Otro de los

* El proceso del progreso en las ciencias teóricas encuentra su expresión no solo en el hecho que las relaciones expresadas por las leyes elementales son reemplazadas por otras que son más precisas, sino también en la circunstancia que los conceptos elementales que están asociados con las percepciones más inmediatas de la realidad necesitan ser reemplazados por otros más nuevos y que mejor se adapten a los complejos datos brindados por la experiencia.

grandes hitos para la astronomía del siglo XIX, fue el empleo de placas fotográficas para el registro de las imágenes astronómicas. Hasta ese entonces todas las observaciones se realizaban a ojo desnudo y consecuentemente el tiempo de integración para detectar objetos débiles estaba reducido a la capacidad del ojo humano. El telescopio más grande construido en ese siglo, fue el gran telescopio reflector de 72 pulgadas localizado en el Castillo de Birr en Irlanda, el cual fue construido por William Parsons. Con este telescopio fue posible identificar la estructura espiral de las galaxias y detectar nebulosas espirales más débiles. Las observaciones sugerían que si estas galaxias eran similares a la galaxia de Andrómeda (M31) entonces aquellas deberían de encontrarse a una distancia muy grande.

La observación astronómica tuvo otro gran empuje cuando en 1918 se terminó de construir el telescopio Hooker de 100 pulgadas ubicado en el Monte Wilson. Este instrumento jugó un rol importante en los descubrimientos de los siguientes 30 años. En particular, ayudo a resolver el *Gran Debate* entre Harlow Shapley y Heber Curtis sobre el origen de las nebulosa espirales y el tamaño del Universo. En 1922, Öpik estimó la distancia de M31 comparando la relación masa-luminosidad de la región central de M31 con la de nuestra galaxia, de esta forma estimo que la galaxia de Andrómeda debería encontrarse a $440Kpc$ de distancia, bastante más allá de los límites de la Vía Láctea. Por otro lado, Edwin Hubble descubrió la existencia de estrellas variables tipo Cefeidas en la galaxia M31. Este tipo de estrellas posee una relación periodo-luminosidad que puede ser utilizada para estimar distancias. La relación periodo-luminosidad fue estudiada observando estrellas Cefeidas en las Nubes de Magallanes por Henrietta Leavitt (1912).

En 1925, Hubble (1925) publica su famoso trabajo donde establece la naturaleza extragaláctica de las nebulosas espirales. Y en 1926 publica otro famoso artículo (Hubble, 1926) donde brinda la primera descripción más o menos detallada de las galaxias como objetos extragalácticos, en este trabajo incluye la famosa clasificación morfológica de Hubble, estima la densidad relativa para cada uno de los tipos de galaxias, como así también la relación masa-luminosidad. Hubble fue un poco más allá y, adoptando el modelo de universo estático propuesto por Einstein, dedujo cuál debería ser el número total de galaxias en el Universo. Tomando el radio propuesto por Einstein de $R = 27000Mpc^*$, el número total de galaxias debería ser 3.5×10^{15} . Esto representó la primera aplicación de las ideas de la cosmología relativista al universo de las galaxias.

Paralelamente, también se estaban realizando trabajos con observaciones espectroscópicas de las nebulosas espirales. Particularmente, se estudiaba la velocidad de recesión de estas nebulosas a través del corrimiento Doppler de las líneas de absorción de sus espectros. Los

* $1 Mpc = 1 \times 10^6 \text{ parsec} = 3.26 \times 10^6 \text{ años luz}$

resultados arrojaban que dichas nebulosas se alejaban típicamente a una velocidad de 250kms^{-1} , lo cual representaba una velocidad mucho más altas de las observadas en nuestra galaxia. En 1922, Carl Wirtz encuentra que existe una posible dependencia lineal entre la velocidad y la magnitud aparente de la galaxia (Wirtz, 1922). Finalmente, en 1929 Edwin Hubble publica su artículo donde establece que existe una clara dependencia lineal entre el desplazamiento hacia el rojo de las líneas espectrales de las galaxias y la distancia a la que se encuentran (Hubble, 1929). Si el corrimiento hacia el rojo es interpretado como un corrimiento Doppler debido a la velocidad de recesión v de las galaxias, entonces la relación puede ser escrita como $v = H_0 r$, donde H_0 es la Constante de Hubble. Vale notar que este resultado fue anticipado por aquellos que aplicaron las ideas de la relatividad general al Universo como un todo.

Hubble también propuso que era posible determinar la validez del Principio Cosmológico mediante la observación de galaxias débiles. Él encontró que el número de galaxias débiles observadas se correspondía casi exactamente con el número esperado si estas se encontraran uniformemente distribuidas. Pero la prueba más fuerte la brindó la observación del Fondo Cósmico de Microondas (CMB), descubierta por Penzias & Wilson (1965) cuando realizaban mediciones en los Laboratorios de la Bell Telephone. Los experimentos señalaron que dicha radiación era isótropa y el espectro de la misma mostraba corresponderse exactamente al de un cuerpo negro con temperatura de $\approx 3^\circ\text{K}$. Rápidamente, Dicke et al. (1965) se dieron cuenta que dicha radiación podría ser la que había sido predicha años antes por Gamow (1948a) basado en su modelo de *Big Bang Caliente*. Los relevamientos más detallados del CMB han sido realizados en años más recientes mediante el uso de satélites. El último de ellos es el relevamiento realizado por el satélite Planck (Planck Collaboration I, 2013) el cual obtuvo mediciones del fondo cósmico con una resolución angular de ≈ 30 minutos de arco y una precisión en las amplitudes de las fluctuaciones de temperatura $\Delta T/T \approx 2.0 \times 10^{-6}$. La figura 1 muestra un mapa del cielo con las mediciones de las fluctuaciones de temperatura realizadas por este satélite. El estudio detallado de tales fluctuaciones ha demostrado que la radiación del CMB es altamente isótropa, lo que representa una argumento muy fuerte a favor del principio cosmológico.

Hemos relatado hasta aquí, casi anecdóticamente, los comienzos de la cosmología moderna, y las ideas que llevaron a formarnos la imagen que tenemos hoy sobre el origen y evolución del Universo. Veremos ahora estas ideas desde un punto más riguroso y con el formalismo matemático correspondiente. Para lo que sigue de este capítulo, harán falta algunas nociones básicas del álgebra tensorial, aquel lector que quiera refrescar tales conceptos puede dirigirse al apéndice A.

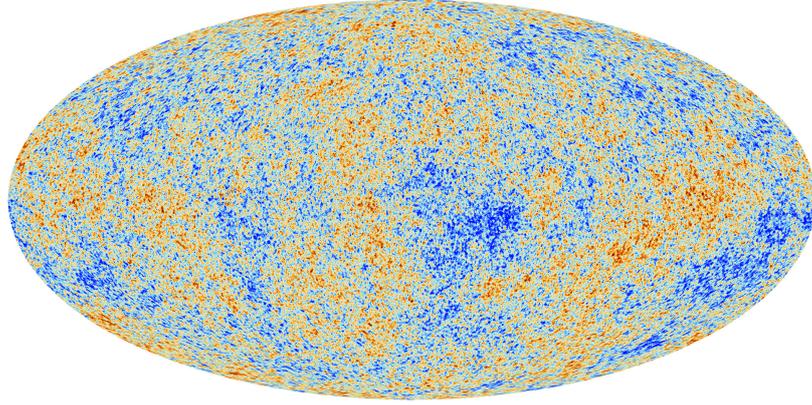


Figura 1: Las anisotropías en el Fondo Cósmico de Microondas (CMB) observadas por el satélite Planck. Los diferentes colores representan las fluctuaciones en la temperatura, siendo las máximas diferencias $\Delta T/T \approx 10^{-5}$ con un valor medio de $T = 2.725^\circ K$. Dichas variaciones reflejan las fluctuaciones en el campo de densidad y, por lo tanto, las semillas que dieron origen a las estructuras que observamos hoy en día. El CMB representa la imagen más antigua (cuando el Universo tenía $\approx 380\,000$ años) que podemos obtener del Universo, ya que antes de esa época la *sopa* cósmica era opaca a la radiación. © ESA and the Planck Collaboration.

1.2 ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN Y EL UNIVERSO HOMOGÉNEO E ISÓTROPICO

Basándose en el Principio de Equivalencia y en el Principio de Covarianza General*, Einstein (1915) postula las Ecuaciones de Campo de Einstein (ECE), las cuales describen la gravitación como el resultado de un espacio-tiempo tetradimensional curvado por su contenido de materia y energía. En el lenguaje tensorial estas ecuaciones pueden ser sintetizadas en la siguiente expresión:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento (que describe el contenido de materia y energía del espacio en cuestión) y $G_{\mu\nu}$ es el Tensor de Einstein el cual se define de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

donde $R \equiv R^\mu{}_\mu$ y $R_{\mu\nu} \equiv R^\kappa{}_{\mu\kappa\nu}$ son contracciones del tensor de Riemann $R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}$, y se denominan escalar y tensor de curvatura, respectivamente. La constante cosmológica Λ fue introducida originalmente por el mismo Einstein para crear un Universo estacionario.

* Este principio establece que todas las leyes de la física deben poseer la misma forma matemática en todos los sistemas de referencia.

El tensor de Riemman, y las contracciones del mismo, contiene la información geométrica del espacio-tiempo, y puede definirse a través de los símbolos de Christoffel:

$$R^{\mu}_{\nu\kappa\lambda} \equiv \partial_{\kappa}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\kappa}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\nu\kappa} \quad (1.3)$$

Los símbolos de Christoffel están contruidos a partir de derivadas del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ del espacio y, por lo tanto, el tensor de Einstein involucra derivadas segundas de las componentes de dicho tensor. Consecuentemente, las ECE son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para $g_{\mu\nu}$, y por ello, no es posible resolverlas para una métrica general. Por este motivo, debemos realizar algunas hipótesis sobre la forma del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para encontrar las soluciones a las ECE.

No se tardó mucho en pretender aplicar las ECE al Universo, para lo cual fue necesario realizar algunas hipótesis sobre el contenido de materia y el tensor métrico del Universo como un todo. Bajo la hipótesis del Principio Cosmológico, la forma más general que puede adoptar el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) (Weinberg, 1972)

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \\ &= dt^2 - a^2(t) \left[\gamma_{ij}(x^k)dx^i dx^j \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

expresada en término de las coordenadas comóviles x^i ($i = 1, 2, 3$) y donde hemos utilizado unidades en las que la velocidad de la luz es igual a la unidad, $c = 1$. En coordenadas esféricas el elemento de línea para esta métrica puede escribirse como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - K \cdot r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.5)$$

Esta métrica está determinada completamente a través de dos cantidades; $a(t)$, la cual determina la cinemática del Universo, y K , que caracteriza su curvatura espacial dada por el escalar de curvatura

$$R = \frac{6K}{a^2(t)} \quad (1.6)$$

de acuerdo al valor de K los universos de FLRW se clasifican en abiertos ($K < 0$), planos ($K = 0$) y cerrados ($K > 1$). Estos términos se refieren a las propiedades topológicas de las hipersuperficies espaciales del Universo.

1.3 DINÁMICA DE LOS UNIVERSOS FLRW

Para poder resolver las ECE debemos especificar el contenido de materia y energía del Universo, esto es, debemos definir el tensor $T_{\mu\nu}$.

La forma más general que puede tomar éste para que sea compatible con nuestras hipótesis de homogeneidad e isotropía es la de un fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (1.7)$$

donde u^μ es la cuadrivelocidad del fluido mientras que ρ y p son la densidad de energía y presión del fluido, respectivamente, y hemos considerado la convención de que la velocidad de la luz $c = 1$.

Introduciendo los tensores métrico y energía-momento en las ECE obtenemos las conocidas Ecuaciones de Friedmann (EF):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2} \quad (1.8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.9)$$

donde \dot{a} y \ddot{a} indica la primera y segunda derivada temporal, respectivamente. Para simplificar estas ecuaciones resulta conveniente realizar los siguientes reemplazos

$$\rho \rightarrow \rho - \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (1.10)$$

$$p \rightarrow p + \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (1.11)$$

Con lo cual, las EF pueden expresarse como:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + -\frac{K}{a^2} \quad (1.12)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (1.13)$$

Las ECE contienen a la ecuación de conservación de la energía $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ en forma implícita. Derivando la primera de estas ecuaciones y combinándola con la segunda obtenemos la ecuación para la conservación de la energía:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0 \quad (1.14)$$

Podemos obtener soluciones explícitas para $a(t)$ y K utilizando la primera de las EF y la ecuación de la conservación de la energía. Para ello debemos además especificar la ecuación de estado del fluido que relaciona la presión del mismo con su densidad, esto es $p = p(\rho)$.

Pero antes, veamos algunos aspectos desde un punto de vista cualitativo. Observemos la ecuación 1.13, según esta, la aceleración \ddot{a}/a será negativa mientras la cantidad $\rho + 3p$ sea positiva. Además debido que ahora $a > 0$, por definición, y $\dot{a}/a > 0$, dado que observamos que las galaxias se alejan (vemos corrimiento hacia el rojo de sus espectros), entonces se sigue de aquí que la curva $a(t)$ versus el tiempo

t debe ser cóncava hacia abajo, y debe tocar el punto $R(t_i) = 0$ en algún tiempo finito t_i en el pasado, tomaremos este tiempo tal que $t_i = 0$. De modo que el tiempo presente t_0 es el tiempo transcurrido desde esa singularidad, y podría ser llamado *la edad del Universo*. Supongamos que $\ddot{a}(t)$ es nulo para $0 < t < t_0$, entonces $a(t)$ tendría una dependencia lineal con el tiempo de la forma $a(t) = a(t_0)t/t_0$, y así la edad del Universo sería igual al tiempo de Hubble definido como $H_0^{-1} = a(t_0)/\dot{a}(t_0)$. Por otro lado, si $\ddot{a}(t)$ es negativa para $0 < t < t_0$, entonces, la edad del Universo debe ser menor que el tiempo de Hubble, $t_0 < H_0^{-1}$. Consideremos ahora la ecuación 1.14 y la reescribamos de la siguiente manera

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3pa^2 \quad (1.15)$$

esta nos dice que mientras la presión no se vuelva negativa, la densidad debe decrecer cuando a crece al menos tan rápidamente como a^{-3} . Miremos la ecuación 1.12 reescrita como

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 \quad (1.16)$$

vemos que el término de la derecha decrece al menos tan rápido como a^{-1} . Luego, para $k = -1$, $\dot{a}^2(t)$ será positiva siempre, tal que $a(t)$ sigue creciendo indefinidamente con $a(t) \rightarrow t$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para $k = 0$, $\dot{a}^2(t)$ se mantiene positiva, tal que $a(t)$ crece indefinidamente pero más suavemente que t . Mientras que para $k = +1$, $\dot{a}^2(t)$ se hará cero cuando ρa^2 alcance el valor de $3/(8\pi G)$, y dado que \ddot{a} es definida negativa, $a(t)$ comenzará a decrecer hasta eventualmente alcanzar el valor $a = 0$ en algún tiempo finito en el futuro.

En general nos interesan principalmente fluidos barotrópicos (i. e., su presión proporcional a la densidad)

$$p = \omega\rho \quad (1.17)$$

donde ω es una constante independiente del tiempo que utilizamos para caracterizar la ecuación de estado. Por ejemplo, las partículas relativistas (e. g., radiación) tienen $\omega = +\frac{1}{3}$, las no relativistas como la materia que tiene presión nula (estrellas y galaxias), tendrán $\omega = 0$ y la constante cosmológica, Λ , tiene $\omega = -1$. Entonces, para este tipo de fluidos, la ecuación de conservación 1.14 implica que

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a} \\ \Rightarrow \rho &\propto a^{-3(1+\omega)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Puede verse entonces que, para un Universo dominado por materia, la densidad de materia decrece como

$$\rho_m \propto a^{-3} \quad (1.19)$$

Esto es, simplemente, la densidad de materia decrece a medida que el Universo se expande. Por otro lado un Universo dominado por radiación la densidad de energía de radiación decae como

$$\rho_R \propto a^{-4} \quad (1.20)$$

En este caso observamos que la densidad de energía de radiación decae más rápidamente que la densidad de energía de materia, y esto es así porque la densidad numérica de fotones decae de la misma manera que la materia pero además los fotones pierden energía proporcional a a^{-1} a medida que su longitud de onda se alarga.

La masa-energía total del Universo está compuesta por diferentes fluidos y cada uno de ellos con una ecuación de estado w_i particular. Mientras que los diferentes componentes no interactúen entre si la ecuación 1.17 es válida para cada componente. Si denotamos por $\rho_{0,i}$ a la densidad actual de la i -ésima especie, entonces la densidad total de energía del Universo correspondiente a la época $a(t)$, será

$$\rho = \sum_{i=1}^N \frac{\rho_{0,i}}{a(t)^{3(1+w_i)}} \quad (1.21)$$

donde hemos asumido que la masa-energía del Universo tiene N componentes y hemos fijado $a_0 = 1$ por simplicidad. De esta manera la EF para $a(t)$ puede escribirse como

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^N \frac{\rho_{0,i}}{a^{3(1+w_i)}} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.22)$$

donde H es el parámetro de Hubble que suele escribirse en función de h

$$H = 100 h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (1.23)$$

Notemos que la ecuación 1.22 la podemos escribir como

$$K = H_0^2 \left(\frac{8\pi G}{3H_0^2} \sum_{i=1}^N \rho_{0,i} + \frac{\Lambda}{3H_0^2} - 1 \right) \quad (1.24)$$

De esta ecuación podemos notar que la curvatura del espacio estará dada por el contenido de materia-energía del Universo y el valor de la constante cosmológica. En ausencia de dicha constante el Universo será plano ($K = 0$) cuando la densidad total de energía $\sum_{i=1}^N \rho_{0,i}$ sea igual a la densidad crítica ρ_c dada por

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 2.773 \times 10^{11} h^2 M_\odot \text{ Mpc}^{-3} \quad (1.25)$$

En términos de la densidad crítica podemos definir el parámetro de densidad correspondiente a cada especie del Universo

$$\Omega_{0,i} \equiv \frac{\rho_{0,i}}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{0,i} \quad (1.26)$$

si, además, definimos

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (1.27)$$

y

$$\Omega_K = \frac{K}{H_0^2}, \quad (1.28)$$

podemos escribir la ecuación 1.24 como

$$\sum_{i=1}^N \Omega_{0,i} + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1 \quad (1.29)$$

En este caso, con constante cosmológica ($\Omega_\Lambda \neq 0$), vemos que el Universo será plano ($\Omega_K = 0$) cuando

$$\sum_{i=1}^N \Omega_{0,i} + \Omega_\Lambda = 1 \quad (1.30)$$

Los últimos resultados del satélite Planck y el Sloan Digital Sky Survey (Planck Collaboration XVI, 2013) muestran que el contenido de materia-energía del Universo está balanceado según los parámetros $\Omega_b = 0.0487 \pm 0.0006$, $\Omega_{dm} = 0.265 \pm 0.006$ y $\Omega_\Lambda = 0.692 \pm 0.010$, y $\Omega_K = 0.0005 \pm 0.006$. El Universo muestra ser plano (constante de curvatura $K \sim 0.0$), al menos al nivel de incertidumbre que se tiene al momento. Luego, podemos escribir la ecuación para la evolución del factor de escala como

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left[\sum_{i=1}^N \Omega_{0,i} (a^{-(1+3w_i)} - 1) + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) + 1 \right] \quad (1.31)$$

Así vemos que si conocemos el contenido de materia-energía del Universo, es posible obtener su evolución temporal.

Generalmente, escribimos la ecuación 1.31 en términos del corrimiento al rojo z (véase más adelante §1.4), definiendo $z = 0$ en $t = t_0$ de forma que $a = a(t_0)/(1+z)$:

$$\begin{aligned} H^2(z) &\equiv H_0^2 E^2(z) \\ &= H_0^2 \left[\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\gamma (1+z)^4 + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right] \end{aligned} \quad (1.32)$$

Al igual que $H(z)$ los parámetros cosmológicos también varían con z , es fácil ver que

$$\begin{aligned} \Omega_m(z) &= \Omega_m \frac{(1+z)^3}{E^2(z)} \\ \Omega_\gamma(z) &= \Omega_\gamma \frac{(1+z)^4}{E^2(z)} \\ \Omega_k(z) &= \Omega_k \frac{(1+z)^2}{E^2(z)} \\ \Omega_\Lambda(z) &= \Omega_\Lambda \frac{1}{E^2(z)} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Podemos obtener la solución para $a(t)$ integrando la EF teniendo en cuenta que $\dot{a}/a = da/dt/a = H(a)$, de manera que $dt = da/a/H(a)$

$$\int_0^t dt = \int_0^a \frac{da'}{a'H(a')} \quad (1.34)$$

y si realizamos la sustitución con la ecuación 1.32

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da'}{a' [\Omega_m a'^{-3} + \Omega_\gamma a'^{-4} + \Omega_k a'^{-2} + \Omega_\Lambda]^{1/2}} \quad (1.35)$$

1.4 CORRIMIENTO HACIA EL ROJO COSMOLÓGICO

Hemos ya mencionado el descubrimiento del corrimiento hacia el extremo rojo de las líneas espectrales de las galaxias y su interpretación como un desplazamiento Doppler concreto producto de la velocidad de recesión de las mismas. Este efecto fue predicho con anterioridad como resultado de aplicar las ideas de la relatividad general al Universo.

Para exponer este fenómeno en los términos de la relatividad general, pensemos en una señal luminosa o un fotón propagándose desde algún punto con coordenadas esféricas $(r_1, \phi_1, \theta_1, t_1)$ en dirección radial ($d\theta = d\phi = 0$) hacia algún punto definido como el origen de coordenadas. Los fotones viajan por las líneas mundo nulas conocidas como geodésicas, para las cuales $ds = 0$. Entonces, para estas líneas mundo y un modelo homogéneo e isótropo del Universo debe de cumplirse la siguiente ecuación

$$0 = c^2 dt^2 - a(t) \frac{dr^2}{1 - Kr^2} \quad (1.36)$$

Luego, el tiempo t_0 que le tarde a la señal llegar hasta el origen estará dado por la expresión

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = f_K(r_1) \quad (1.37)$$

donde

$$f_K(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \begin{cases} \arcsen(r_1) & (K = +1) \\ r_1 & (K = 0) \\ \operatorname{arcsenh}(r_1) & (K = -1) \end{cases} \quad (1.38)$$

Dado que r_1 , ϕ_1 y θ_1 no dependen del tiempo, el factor $f_K(r_1)$ es también independiente del tiempo, estando toda la dependencia temporal contenida en el factor $a(t)$. Con esta observación, una segunda cresta del haz luminoso que parta de la fuente en el tiempo $t_1 + \delta t_1$ alcanzará el origen a un tiempo $t_0 + \delta t_0$ definido por

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{c dt}{a(t)} = f_K(r_1) \quad (1.39)$$

Considerando que dos crestas consecutivas del haz luminoso tienen una diferencia temporal muy pequeña ($\approx 10^{-14}$ segundos), podemos suponer que el factor de expansión $a(t)$ no cambia en ese intervalo temporal, por lo tanto, obtenemos

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)} \quad (1.40)$$

Y de esta manera, la razón entre la frecuencia observada y la frecuencia de la señal luminosa cuando sale de la fuente es:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \quad (1.41)$$

Definimos el parámetro de corrimiento hacia el rojo (*redshift*, por su denominación inglesa) como:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0} \quad (1.42)$$

$$= \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \quad (1.43)$$

con la convención $a(t_0) = 1$ (el factor de expansión se toma igual a la unidad para el tiempo presente), el parámetro z se relaciona con $a(t)$ en la manera:

$$z = \frac{1}{a} - 1 \quad (1.44)$$

De esta relación puede observarse que, en un Universo en expansión $a < 1$ y por lo tanto $z > 0$, indicando que las líneas espectrales son desplazadas hacia el extremo rojo. En el caso contrario, $a > 1$ y $z < 0$, implicando un corrimiento hacia el azul.

1.5 FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS POR INESTABILIDAD GRAVITACIONAL: TEORÍA LINEAL

Habiendo descripto brevemente algunas propiedades de la evolución de las ecuaciones que gobiernan la expansión del Universo homogéneo e isótropo, consideraremos ahora pequeños apartamientos de la homogeneidad e isotropía. Estas perturbaciones del campo de densidad eventualmente crecerán y formarán galaxias y otras estructuras cósmicas. El elemento de línea que apropiadamente describe un Universo [FLRW](#) perturbado tiene la forma

$$ds^2 = ds_{FLRW}^2 + h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.45)$$

donde ds_{FLRW}^2 es el elemento de línea dado por la ecuación 1.4. En la aproximación lineal las perturbaciones a la métrica se asumen pequeñas tal que $h_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \ll 1$, y la escala de longitud de las perturbaciones

es siempre más pequeña que la escala del Horizonte. De este modo, es válido el tratamiento Newtoniano de la perturbación de las mismas.

La idea fundamental en la formación de estructuras por inestabilidad gravitacional consiste en suponer que existe un mecanismo que nos brinda fluctuaciones iniciales en el campo de densidad de materia del Universo las cuales evolucionarán bajo el efecto de la fuerza gravitatoria para formar estructuras. En lo que sigue no nos interesará como surgieron estas fluctuaciones iniciales por lo que solo diremos que las teorías de inflación han logrado dar algunas respuestas al respecto. Las fluctuaciones cuánticas del inflatón fueron multiplicadas por el proceso inflacionario, brindando las fluctuaciones en densidad necesarias para el instante inicial de la formación de estructuras. A partir de ese momento, es la fuerza de gravedad la que determina la evolución de estas fluctuaciones iniciales. La gravitación provoca que regiones en donde hay una mayor concentración de materia (una fluctuación positiva de densidad), acreten gravitacionalmente cada vez una cantidad mayor de materia de sus alrededores. Consecuentemente, los alrededores de la fluctuación positiva, perderán cada vez más materia provocando así una fluctuación negativa de densidad.

Si el camino libre medio de una partícula es pequeño, la materia puede ser tratada como un fluido perfecto y las ecuaciones Newtonianas que gobiernan el movimiento de partículas no colisionales en un Universo en expansión son las ecuaciones hidrodinámicas. Escribiremos estas ecuaciones en términos de $\vec{x} = \vec{r}/a(t)$ (la coordenada espacial comóvil), $\vec{v} = \dot{\vec{r}} - H\vec{r} = a(t)\dot{\vec{x}}$ (el campo de velocidades peculiares), $\phi(\vec{x}, t)$ (el potencial gravitacional Newtoniano) y $\rho(\vec{x}, t)$ (la densidad de materia). Dichas ecuaciones son las siguientes: la *ecuación de continuidad*, que es básicamente la ecuación de conservación de la masa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.46)$$

La *ecuación de movimiento* o *de Euler*, que es sencillamente la segunda ley de Newton aplicada al fluido,

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \quad (1.47)$$

Y, finalmente, la *ecuación de Poisson* para el campo gravitacional dada por la expresión

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (1.48)$$

Las ecuaciones 1.46, 1.47 y 1.48 representan un sistema lineal de ecuaciones de segundo grado que deberemos resolver. Las fluctuaciones iniciales en el campo de densidad representan pequeñas perturbaciones en un fondo homogéneo, por lo tanto, podemos escribir las cantidades físicas como $\rho \rightarrow \rho_0 + \delta\rho$, $\vec{v} \rightarrow \vec{v}_0 + \delta\vec{v}$, etc. Por el momento solo nos interesarán fluctuaciones lineales de modo que las

cantidades δ sean suficientemente pequeñas y podremos despreciar términos cuadráticos en dichas variables. Luego, realizando la expansión en series de Taylor de las ecuaciones 1.46, 1.47 y 1.48 en estas cantidades y solo manteniendo términos de primer orden, obtendremos un conjunto de ecuaciones para ρ_0 , \vec{v}_0 , etc. y otro para el sistema de las cantidades perturbadas $\delta\rho$, $\delta\vec{v}_0$, etc. El sistema para estas últimas queda expresado de la siguiente manera:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + 3H\delta\rho + H\vec{x} \cdot \nabla\delta\rho + \rho_0\nabla \cdot \delta\vec{v} = 0 \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} + H\delta\vec{v} + H\vec{x} \cdot \nabla\delta\vec{v} = -\frac{v_s^2}{\rho_0}\nabla\delta\rho - \nabla\delta\phi \quad (1.50)$$

$$\nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \quad (1.51)$$

en donde hemos introducido la expansión del Universo, $\vec{v} = \vec{x}H$, y además, hemos utilizado la relación termodinámica de conservación de la entropía

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \delta s + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \delta\rho = v_s^2\delta\rho \quad (1.52)$$

El sistema de ecuaciones para las cantidades perturbadas que hemos obtenido es lineal y, en principio, puede ser resuelto analíticamente. Para tal fin, supongamos que la solución es del tipo $\delta\rho = \rho_1(t)\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}/a)$, $\delta\vec{v} = \vec{v}_1(t)\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}/a)$, etc., es decir que podemos escribir todas las cantidades como una superposición de ondas. Sustituyendo dichas estas expresiones en las ecuaciones 1.46, 1.47 y 1.48 obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{d\rho_1}{dt} + 3H\rho_1 + i\frac{\rho_0}{a}\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (1.53)$$

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} + H\vec{v}_1 + i\frac{\rho_1}{a}\left(\frac{v_s^2}{\rho_0} - 4\pi G\frac{a^2}{k^2}\right)\vec{k} = 0 \quad (1.54)$$

$$\phi_1 + 4\pi G\frac{a^2}{k^2}\rho_1 = 0 \quad (1.55)$$

Para poder resolver este conjunto de ecuaciones es conveniente rotar el sistema de coordenadas, de tal forma que la propagación de la fluctuación sea en la dirección de uno de los ejes. Para hacer esto, descomponemos el vector $\vec{v}_1 = \lambda\vec{k} + \vec{v}_2$, donde \vec{v}_2 es un vector perpendicular al vector de propagación de onda por lo tanto $\vec{k} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

En términos del vector \vec{v}_2 , las ecuaciones 1.53 y 1.54 se transforman en

$$\frac{d\rho_1}{dt} + 3H\rho_1 + i\frac{\rho_0}{a}k^2\lambda = 0 \quad (1.56)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} + H\lambda + \frac{i}{a} \left(\frac{v_s^2}{\rho_0} - 4\pi G \frac{a^2}{k^2} \right) \rho_1 = 0 \quad (1.57)$$

además de una ecuación para la velocidad \vec{v}_2 dada por

$$\frac{d\vec{v}_2}{dt} + H\vec{v}_2 = 0 \quad (1.58)$$

cuya solución es $\vec{v}_2 = \vec{V}/a$. Esto implica que los modos perpendiculares al vector de onda se eliminan con la expansión del Universo, cuando a crece. Si usamos el hecho que $\rho_0 \sim 1/a^3$, y combinamos las ecuaciones 1.56 y 1.57 obtenemos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden para el contraste de densidad definido como $\delta = \rho_1/\rho_0$.

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2H\frac{d\delta}{dt} + \left(v_s^2 \frac{k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_0 \right) \delta = 0 \quad (1.59)$$

Esta última ecuación es lineal en δ y resulta fundamental en el entendimiento de la evolución de las fluctuaciones primordiales. La solución más general puede ser expresada en términos de dos modos:

$$\delta(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x})D_+(t) + \delta(\vec{x})D_-(t) \quad (1.60)$$

donde D_+ y D_- representan los modos creciente y decreciente de la perturbación. En general nos preocuparemos del modo creciente de la perturbación y, por lo tanto, en el régimen lineal la evolución de las perturbaciones puede escribirse

$$\delta(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}, t=0) \frac{D(t)}{D(t=0)} \quad (1.61)$$

donde la solución general para $D(t)$ se encuentra dada por

$$D(a) = \frac{5}{2}a\Omega_m \int_0^a \frac{da'}{(a'H(a'))^3} \quad (1.62)$$

Veamos a continuación algunos ejemplos particulares. Consideremos un Universo plano dominado por materia. La solución de las EF es $a \sim t^{2/3}$, $\rho \sim t^{-2}$, $v_s^2 = 0$ y por tanto $H = 2t/3$. Entonces la ecuación 1.56 se transforma en

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{t} \frac{d\delta}{dt} - \frac{2}{3} \frac{1}{t^2} \delta = 0 \quad (1.63)$$

Esta ecuación admite dos soluciones como ley de potencia linealmente independientes $\delta(\vec{x}, t) = D_{\pm}(t)\delta(\vec{x})$ donde $D_{+}(t) \propto a(t)$ es el modo creciente, que crece proporcionalmente a la expansión del Universo, y $D_{-} \propto t^{-1}$ es el modo decreciente, que desaparece conforme avanza el tiempo. Si imponemos condiciones iniciales de tal modo que la fluctuación evolucione a partir de un estado de reposo, esto es, pedimos que $\delta = \delta_1$ y $\dot{\delta}_1 = 0$ en $t = t_1$, la forma final de δ es una superposición de los modos creciente y decreciente:

$$D(t) = \frac{3}{5}\delta_1 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{2/3} + \frac{2}{5}\delta_1 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{-1} \quad (1.64)$$

Análogamente podemos ver que sucede en un Universo dominado por radiación. En este caso, $p = 1/3\rho$, $a \sim t^{1/2}$, $\rho \sim t^{-2}$, $v_s^2 = 1/3$, con lo que la ecuación para el contraste de densidad 1.63 se transforma en

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{d\delta}{dt} + \left(\frac{A}{t}k^2 - \frac{3}{8}\frac{1}{t^2}\right)\delta = 0 \quad (1.65)$$

donde A es una constante. Esta ecuación solo tiene soluciones oscilantes decrecientes, es decir, las fluctuaciones no se forman, oscilan y después desaparecen. Esto es así porque en un campo de radiación se espera que cualquier concentración de materia sea dispersado por los choques entre la radiación y las partículas. Este resultado nos dice que si las fluctuaciones deben crecer para formar las estructuras cósmicas sólo pueden hacerlo durante la época cuando domina la materia. Durante la época donde la radiación es dominante no hay posibilidades de que las fluctuaciones se formen y crezcan. Sin embargo, un análisis relativista puede demostrar que existe un tipo de perturbaciones que pueden crecer durante la era domina por radiación. Estas fluctuaciones son las que tienen un tamaño inicial más grande que la región que se encuentra en contacto causal.

1.6 CRECIMIENTO NO LINEAL DE LAS PERTURBACIONES DE DENSIDAD

Hemos visto en la sección anterior la descripción de la evolución lineal de las perturbaciones del campo de densidad. Ese enfoque deja de ser válido cuando el contraste de densidad de la perturbación se hace lo suficientemente grande ($\delta \gg 1$) e ingresa en el estadio del régimen no lineal. Veremos en esta sección como describir esta etapa de la evolución.

1.6.1 La aproximación de Zel'dovich

Una descripción simple y elegante de la evolución no lineal de las perturbaciones del campo de densidad fue dada por Zel'dovich

(1970). Hablando rigurosamente, la aproximación de Zel'dovich demostró ser lo suficientemente precisa para describir la evolución de las perturbaciones durante la parte lineal y los primeros momentos de la parte no-lineal.

Según este modelo podemos escribir la posición $\vec{r}(t)$ de una partícula de la siguiente manera:

$$\vec{r}(\vec{q}, t) = a(t)\vec{q} - b(t)\vec{f}(\vec{q}) \quad (1.66)$$

donde $a(t)$ es el factor de expansión del Universo, \vec{q} es la coordenada comóvil inicial de la partícula, y $b(t)$ es una función que escala el campo de velocidades $\vec{f}(\vec{q})$ inicial de la partícula, bajo la hipótesis de que este último es irrotacional*, el mismo puede ser escrito como el gradiente de un potencial, $\vec{f}(\vec{q}) = -\nabla\Phi(\vec{q})$. Las coordenadas \vec{r} y \vec{q} son denominadas posición *Euleriana* y *Lagrangiana*, respectivamente.

Por otro lado, utilizando la conservación de la masa, podemos escribir:

$$\rho(\vec{r}, t)d\vec{r} = \bar{\rho}(t)d\vec{q} \quad (1.67)$$

Esta ecuación puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\rho(\vec{r}, t) = \bar{\rho}(t) J \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{q}} \right]^{-1} \quad (1.68)$$

donde $J[\partial\vec{r}/\partial\vec{q}]$ es el determinante del Jacobiano del tensor de deformación. Consecuentemente, la expresión para la distribución de densidad es:

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{\bar{\rho}(t)}{\left[\left(1 - \frac{b(t)}{a(t)}\alpha\right) \left(1 - \frac{b(t)}{a(t)}\beta\right) \left(1 - \frac{b(t)}{a(t)}\gamma\right) \right]} \quad (1.69)$$

donde $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ son los autovalores del tensor de deformación. Esta ecuación nos muestra las dos particularidades principales de la aproximación de Zel'dovich. Primero, la densidad se vuelve infinita cuando $b(t)\alpha = 1$, $b(t)\beta = 1$ o $b(t)\gamma = 1$. Segundo, en general, todos los autovalores serán diferentes y, por lo tanto, el colapso será anisótropo; el colapso comenzará primero a lo largo del eje definido por el autovalor más grande.

En general, los autovalores pueden ser positivos o negativos. Si solo uno de ellos es positivo, digamos α , mientras que los otros dos (β y γ) son negativos, el colapso será primeramente en la dirección correspondiente al autovalor α hasta alcanzar el punto donde se cumpla $b(t)\alpha = 1$. De este modo, la evolución gravitatoria de la perturbación acentúa la asfericidad, formando estructuras aplanadas conocidas como los *panqueques de Zel'dovich*.

* Esta es una suposición razonable dado que cualquier rotación en el campo de velocidad inicial será borroneada por la expansión al menos antes de que las órbitas de las partículas comiencen a cruzarse.

En el caso en que dos autovalores sean positivos y uno solo negativo, la evolución dará lugar a una estructura conocida con el nombre de *filamento*, y el cual típicamente se forma en la intersección de dos *panqueques*. Finalmente, si todos los autovalores son positivos, se formarán estructuras de dimensión nula, las cuales se encontrarán localizadas en la intersección de dos filamentos.

El modelo de Zel'dovich es extremadamente preciso en predecir el campo de densidad hasta la formación de los panqueques y las otras estructuras, pero su efectividad se anula cuando se produce el cruce de las trayectorias de las partículas, conocido como el momento de *shell-crossing*.

1.6.2 El modelo de colapso esférico

La hipótesis de que los objetos no lineales se formaron de un colapso esférico es una aproximación simple y útil. Este modelo para la evolución de una perturbación en el campo de densidad con un perfil inicial de tipo sombrero (*tophat*, como es más conocido por su denominación en inglés), fue estudiado por primera vez por Gunn & Gott (1972).

Dicho modelo, describe la evolución de una región del espacio cuyo tamaño comóvil inicial es R_0 . El radio R de una región sobredensa se comporta de la misma manera que el factor de expansión para un universo cerrado, y por lo tanto podemos modelar el crecimiento general de una perturbación con simetría esférica usando las mismas ecuaciones de la cosmología clásica. Por lo tanto, podemos aplicar para esta región las EF

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2} \quad (1.70)$$

Esta ecuación determinará la evolución del tamaño de la perturbación, al menos durante los estadios de evolución lineal.

Podemos resolver fácilmente la ecuación 1.70 si reparametrizamos la misma en términos de una variable η , definida como $d\eta = cdt/R(t)$. Asumiendo que $\rho(t)$ puede escribirse como $\rho(t) = \rho_0 R_0^3 / R^3(t)$ tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{d\eta}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho R^4 - kR^2 \\ &= \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3}R - kR^2 \end{aligned} \quad (1.71)$$

donde hemos realizado la sustitución $\rho \rightarrow \rho + \Lambda/8\pi G$. Si definimos la constante de escala como

$$R_* \equiv \frac{4\pi G\rho_0 R_0^3}{3} = GM \quad (1.72)$$

donde M es la masa inicial encerrada dentro de la esfera sobredensa, podemos reescribir la ecuación 1.71 de la siguiente forma

$$\left[\frac{d}{d\eta} \left(\frac{R}{R_*} \right) \right]^2 = 2 \left(\frac{R}{R_*} \right) - k \left(\frac{R}{R_*} \right)^2 \quad (1.73)$$

Para una región sobredensa $k = +1$, esta ecuación tiene como solución

$$\frac{R(\eta)}{R_*} = 1 - \cos \eta \quad (1.74)$$

Para encontrar el tiempo utilizamos la definición del parámetro η , de donde

$$t(\eta) = \int_0^\eta R(\eta') d\eta' \quad (1.75)$$

Luego, las dos ecuaciones que describen completamente la evolución de la sobredensidad con simetría esférica son

$$R(\eta) = R_*(1 - \cos \eta) \quad (1.76)$$

$$t(\eta) = R_*(\eta - \sin \eta) \quad (1.77)$$

Veamos a continuación el comportamiento en algunas épocas interesantes en la historia de la sobredensidad.

Evolución para $\eta \ll 1$

Para describir la evolución de la sobredensidad en los primeros estadios podemos desarrollar las soluciones 1.76 y 1.77 en series de potencias de η alrededor de $\eta = 0$. Ignorando términos de orden más alto que η^5 obtenemos:

$$\begin{aligned} R(\eta) &\simeq R_* \left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{24}\eta^4 + \dots \right) \\ t(\eta) &\simeq R_* \left(\frac{1}{6}\eta^3 - \frac{1}{120}\eta^5 + \dots \right) \end{aligned}$$

Combinando estas dos ecuaciones encontramos $R(t)$

$$R(t) \simeq \frac{R_*}{2} \left(\frac{6t}{R_*} \right)^{2/3} \left[1 - \frac{1}{20} \left(\frac{6t}{R_*} \right)^{2/3} \right] \quad (1.78)$$

Consideremos cuanto $t \rightarrow 0$, entonces el término dominante es

$$R(t \rightarrow 0) = \frac{R_*}{2} \left(\frac{6t}{R_*} \right)^{2/3} = \left(\frac{9GMt^2}{2} \right)^{1/3} \quad (1.79)$$

de esta ecuación podemos ver cuál es la dependencia temporal de la densidad en los primeros estadios

$$\rho(t \rightarrow 0) = \frac{3M}{4\pi R^3(t \rightarrow 0)} = \frac{1}{6\pi G t^2} = \rho_0(t) \quad (1.80)$$

y observemos que hemos recuperado el resultado para la evolución de la densidad de un Universo Einstein-de Sitter (EdS).

La densidad dentro de la esfera es $\rho \propto 1/R^3$, por lo tanto la sobre-densidad fraccional es

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -3\frac{\delta R}{R} = \frac{3}{20} \left(\frac{6t}{R_*} \right)^{2/3} \quad (1.81)$$

hasta primer orden. Recordando que en un EdS $a(t) \propto t^{2/3}$, hemos recuperado el resultado de la teoría lineal $\delta_{lin} \propto a$.

Punto de Retorno o Turnaround

Posteriormente, la evolución de la esfera se desprende de la expansión del fondo cosmológico. A partir de la ecuación 1.76 observamos que el radio alcanza un máximo $R_{max} = 2R_*$ cuando $\eta = \pi$ en el tiempo $t_{max} = \pi R_*$. Luego, empleando el resultado de las ecuaciones 1.79 y 1.80, podemos calcular la densidad dentro de la esfera relativa a la densidad del fondo cosmológico

$$\begin{aligned} 1 + \delta_{max} &= \frac{\rho_{max}}{\rho_0(t_{max})} \\ &= \frac{(R_*/2)^3 (6t_{max}/R_*)^2}{R_{max}^3} \\ &= \frac{9\pi^2}{16} \simeq 5.55 \end{aligned} \quad (1.82)$$

Utilizando la ecuación 1.81 podemos calcular cual sería el contraste de densidad de la sobredensidad a este tiempo según las predicciones de la teoría lineal

$$\delta_{lin} = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \simeq 1.08 \quad (1.83)$$

Observemos aquí que el modelo de colapso esférico no solo nos permite describir la evolución no lineal de perturbaciones en densidad individuales, sino también los resultados pueden ser fácilmente comparados con los resultados que provienen de la teoría lineal.

*Colapso y Virialización **

* Utilizaremos el vocablo *virialización*, y otros derivados del término *virial*, para hacer referencia a cuerpos que satisfagan el Teorema de Virial. Este establece que en todo cuerpo, en estado de equilibrio o quasi-equilibrio, existe una relación bien definida entre las energías potencial y cinética del mismo.

Una vez que la sobredensidad alcanza el punto de retorno ésta comienza a colapsar hasta formar un objeto auto-gravitante comúnmente conocido como *halo*.

Si solamente actuara la gravedad, la sobredensidad esférica, según las ecuaciones 1.76 y 1.77, colapsaría a una singularidad de densidad infinita cuando $\eta = 2\pi$, en el tiempo $t_{col} = 2\pi R_*$.

Sin embargo, el colapso total nunca ocurre en la práctica; pequeñas irregularidades en la simetría esférica hacen que la energía cinética de colapso se convierta en movimientos aleatorios. De este modo, la perturbación alcanzará, eventualmente, un estado de equilibrio ligado. Recordando el Teorema de Virial, en el estado de equilibrio, la perturbación tendrá una energía cinética total K relacionada con la energía potencial V mediante la ecuación

$$V = -2K \quad (1.84)$$

Si asumimos que la energía se conserva durante la transición desde el punto de retorno hasta el estado de equilibrio, la ecuación 1.84 implica que el radio R_{vir} de virialización está dado por

$$R_{vir} = \frac{1}{2}R_{max} = R_* \quad (1.85)$$

y esto es lo que llamaremos radio virial del halo de materia. Utilizando las soluciones paramétricas 1.76 y 1.77 vemos que la perturbación alcanza el tamaño R_{vir} cuando $\eta = 3\pi/2$ en el tiempo $t_{vir} = R_*(3\pi/2 + 1)$.

En general, asumimos que el proceso de virialización no es alcanzado sino hasta después de t_{col} . Si calculamos el contraste de densidad no lineal para este momento obtendremos

$$\begin{aligned} 1 + \delta_{vir} &= \frac{(R_*/2)^3 (6t_{col}/R_*)^2}{R_{vir}^3} \\ &= \frac{(6\pi)^2}{2} \simeq 178. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Vale notar que este valor es dos ordenes de magnitud más grande que el predicho por la teoría lineal es $\delta_{lin} = (3/20)(12\pi)^{2/3} \simeq 1.69$ para contraste de densidad de esta región.

El modelo de colapso esférico representa una descripción simple y muy útil de la evolución de una perturbación esférica en el campo de densidad. Podemos utilizar los resultados de la teoría lineal para predecir en que regiones se formarán los halos, y podemos hacer predicciones razonables de cuán densos esperamos que sean esos halos.

Aunque hemos utilizado el modelo de EdS para determinar las propiedades del colapso esférico, nuestra discusión es cualitativamente similar para cosmologías en las cuales $\Omega_m \leq 1$ y/o $\Omega_\Lambda \geq 0$. Los valores reales de δ_{sc} y δ_{vir} dependen del modelo cosmológico adoptado (Maoz, 1990; Lacey & Cole, 1993; Oukbir & Blanchard, 1997; Nakamura & Suto, 1997).

1.7 LA MASA DE UN HALO

Hemos visto como se forman las estructuras a partir de las fluctuaciones iniciales en el campo de densidad, primero en el régimen lineal y luego, cuando el contraste de densidad aumenta ($\delta > 1$), como se separan de la expansión general y colapsan en objetos virializados. Y hemos señalado que una vez que se encuentran es su estado de virialización llamaremos a estas estructuras halos. En general, cuando nos refiramos a halos estaremos hablando de halos de materia oscura, es decir, estructuras virializadas compuestas de materia oscura.

El paso siguiente es definir lo que entendemos por masa del halo. En la literatura existen diferentes definiciones para la masa de un halo, a continuación describiremos algunas de ellas.

Para comenzar recordemos que en el modelo de colapso esférico la densidad de un objeto que se encuentra en su estado virializado es de $\Delta = 18\pi^2 \simeq 178$. Utilizaremos la notación $\Delta \equiv \frac{\bar{\rho}}{\rho_c}$ para referirnos a la sobredensidad relativa a la densidad crítica de un objeto virializado.

Supongamos que hemos identificado alguna estructura, y hemos elegido un centro a partir del cual podemos tomar cascarones esféricos para definir su perfil de masa. Definimos M_Δ como la masa contenida dentro del radio r_Δ dentro del cual la densidad media es igual a $\bar{\rho} = \rho_c \Delta$.

$$\int_0^{r_\Delta} r^2 \rho(r) dr = \frac{\Delta}{3} \rho_c r_\Delta^3 \quad (1.87)$$

La masa virial según el modelo de colapso esférico sería entonces M_Δ .

Del modelo de colapso esférico podemos establecer el radio virial r_Δ como el radio dentro del cual la materia está virializada y fuera del cual la masa se encuentra aún colapsando hacia el objeto. Algunas simulaciones sugieren que esto ocurre para un valor de $\Delta = 200$ más o menos independientemente de la cosmología, y, por lo tanto, M_{200} es un estimador comúnmente utilizado en simulaciones y que aproximadamente es la masa virial si $\Omega_m = 1$.

Otro estimador de masa frecuentemente utilizado en simulaciones es simplemente la suma de la masa de las partículas miembros del halo identificado mediante algún algoritmo buscador de halos. Este estimador de masa tiene la ventaja de que es bien definido en términos del algoritmo en cuestión y por lo tanto, el proceso para la estimación de la función de masa es independiente de la cosmología.

1.8 LA DENSIDAD NUMÉRICA MEDIA DE HALOS: LA FUNCIÓN DE MASA

Sea $n(m, z)$ la densidad numérica comóvil de halos, de masa m al *redshift* z . (Algunos autores utilizan dn/dm para denotar esta misma cantidad, y nosotros utilizaremos las dos notaciones indistintamente). Dado que los halos se forman a partir de regiones en el campo

de densidad inicial que eran suficientemente densas y que luego colapsaron, para estimar $n(m, z)$, primero debemos estimar la densidad numérica de regiones en el campo de fluctuaciones inicial que eran suficientemente densas para colapsar. Un modelo simple para esto fue propuesto por [Press & Schechter \(1974\)](#), de aquí en adelante [PS](#)):

$$\frac{m^2 n(m, z)}{\bar{\rho}} \frac{dm}{m} = v f(v) \frac{dv}{v} \quad (1.88)$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad comóvil media del Universo y

$$v f(v) = \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \exp(-v/2) v \equiv \frac{\delta_{sc}^2(z)}{\sigma^2(m)} \quad (1.89)$$

Aquí δ_{sc} es la densidad crítica requerida para el colapso esférico en el tiempo z , extrapolada linealmente al tiempo presente usando la teoría lineal. En un Universo [EdS](#), $\delta_{sc}(z=0) = 1.686$, mientras que en otras cosmologías, δ_{sc} depende suavemente de Ω_m y Ω_Λ ([Eke et al., 1996](#)). En la ecuación [1.89](#), $\sigma^2(m)$ es la varianza en el campo de fluctuaciones inicial cuando es suavizado con un filtro de tipo escalón de escala $R = (3m/4\pi\bar{\rho})^{1/3}$, extrapolado al presente usando la teoría lineal:

$$\sigma_{lin}^2(m) \equiv \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^3 P^{lin}(k)}{2\pi^2} |W(kR)|^2 \quad (1.90)$$

donde $W(x) = (3/x^3)[\sin(x) - x\cos(x)]$ es la transformada de Fourier de un perfil de tipo *tophat*.

Expresada en función de $v \equiv [\delta_{sc}(z)/\sigma(m)]^2$ la función de masa tiene una forma universal e independiente del *redshift* y el espectro de potencia.

Veamos como construimos una función de masa de este tipo. Para comenzar, calculemos la fluctuación de la masa esperada en una región de un cierto tamaño en un campo gaussiano, caracterizado por su espectro de potencia $P(k)$,

$$\begin{aligned} \Delta^2(\bar{M}, t) &\equiv \left\langle \left(\frac{M(\vec{x}, t) - \bar{M}}{\bar{M}} \right)^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{V_W^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^3 |\delta(\vec{k}, t)|^2 V^3}{2\pi^2} |W(\vec{k})|^2 \\ &= D^2(t) \frac{1}{V_W^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^3 |\delta(\vec{k}, t_i)|^2 V^3}{2\pi^2} |W(\vec{k})|^2 \\ &= D^2(t) \Delta^2(\bar{M}, t_i) \end{aligned} \quad (1.91)$$

Donde, recordemos, $W(k)$ es la transformada de Fourier de la función filtro, la cual selecciona volúmenes de tamaño V_W y densidad media \bar{M} , y δ^2 son las fluctuaciones en masa M alrededor de la masa media $\bar{M} = \bar{\rho} V_W$. $\delta(\vec{k}, t)$ son las amplitudes del desarrollo de Fourier del campo de densidad

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}(t) \int \delta(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d\vec{k} \quad (1.92)$$

Para un dado modelo cosmológico, sabemos como calcular el crecimiento lineal de las amplitudes a partir de algún tiempo inicial t_i , $\delta(\vec{k}, t) = D(t)\delta(\vec{k}, t_i)$, donde, recordemos, $D(t) = (t/t_i)^{2/3}$ para un Universo EdS.

Asumamos que el campo $\delta(\vec{k}, t_i)$ es Gaussiano en algún momento t_i . Entonces, el campo de fluctuaciones en densidad suavizado en la escala \bar{M} lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned}\delta(\bar{M}, \vec{x}, t) &\equiv \int \bar{\rho}\delta(\vec{x}', t)W(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \\ &= \sum_{\vec{k}} \bar{\rho}V \delta(\vec{k}, t)W(\vec{k}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &= \bar{\rho}D(t) \frac{V^2}{(2\pi)^3} \int \delta(\vec{k}, t_i) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d\vec{k} \quad (1.93)\end{aligned}$$

Dado que $\delta(\vec{k}, t_i)$ es un campo Gaussiano, $\delta(\bar{M}, \vec{x}, t)$ es una suma de campos gaussianos, por lo tanto él mismo es un campo gaussiano, con media cero y varianza $\Delta(\bar{M}, t)$. Su distribución de probabilidad será por lo tanto

$$P(\delta)d\delta = \frac{1}{(2\pi\Delta^2)^{1/2}} \exp(-\delta/2\Delta^2)d\delta \quad (1.94)$$

Supongamos ahora que conocemos la forma del espectro de potencia, $P(k, t_i) \propto k^m$, y buscamos la dependencia de Δ con la masa

$$\Delta(\bar{M}, t) \propto D(t)\bar{M}^{-(m+3)/6} \quad (1.95)$$

Tomemos por ejemplo $m = -2$, tal que $\Delta(\bar{M}, t) = AD(t)/M^{1/6}$ (A es una constante). En escalas suficientemente grandes, tales que $\Delta(\bar{M}, t) \ll 1$, $\delta(\bar{M}, \vec{x}, t)$ es un campo Gaussiano con media cero y con muy poca dispersión, y la mayoría de las fluctuaciones en estas escalas estarán en el régimen lineal $\delta < 1$. Por otro lado, en escalas más pequeñas, la dispersión aumenta, de modo tal que algunas fluctuaciones poseen $\delta \sim 1$ y, si seguimos el razonamiento empleado en la sección referida al colapso esférico, estas regiones del espacio se separarán de la expansión del Universo y entrarán en el régimen no lineal para luego colapsar y formar, eventualmente, un halo virializado de materia oscura.

Ahora miremos que sucede a medida que el tiempo avanza e investiguemos como evolucionará el campo de densidad en momentos cada vez más tardíos. Para ello mantengamos el tamaño del filtro constante, es decir $\bar{M} = cte.$. A medida que t crece, $D(t)$ también crece, y por lo tanto la dispersión aumenta, de modo que si bien el campo en escalas grandes era inicialmente lineal, ahora tendremos $\delta \sim 1$ en algunas regiones del espacio para estas escalas, y objetos en escalas de masa cada vez más grande comenzarán a ingresar al régimen no lineal y a colapsar. Esto es la esencia del crecimiento jerárquico de la estructura.

Recordemos que del modelo de colapso esférico obtuvimos que la densidad lineal crítica sobre la cual los objetos comienzan a colapsar es δ_c . Entonces, la fracción de las fluctuaciones para la cual la densidad lineal está por encima de esta densidad umbral, es:

$$\begin{aligned} F(\bar{M}, t) &= \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta \frac{1}{(2\pi)^{1/2} D(t) \Delta(\bar{M}, t_i)} \exp[-\delta^2 / 2D(t)^2 \Delta^2(\bar{M}, t_i)] \\ &= \int_{\delta_c / D\Delta}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp(-x^2 / 2) dx \end{aligned} \quad (1.96)$$

donde $x = \delta_c / D\Delta$. PS consideraron la hipótesis de que esta fracción puede ser identificada como la fracción del Universo que ha colapsado a objetos de masa menor que \bar{M} . Si $n(\bar{M})$ representa la densidad numérica de objetos con masa \bar{M} , y dado que ellos ocupan un volumen $V = \bar{M} / \bar{\rho}$, tenemos de acuerdo con la hipótesis de PS que

$$F(\bar{M}, t) = \int_{\bar{M}}^{\infty} n(\bar{M}) \frac{\bar{M}}{\bar{\rho}} d\bar{M} \quad (1.97)$$

Consideremos que sucede cuando $\bar{M} \rightarrow 0$ en la ecuación 1.95, en este caso $\Delta \rightarrow \infty$, y la integral sobre x va desde 0 hasta ∞ , y por lo tanto $F(\bar{M} \geq 0, t) = 1/2$ (i.e. solo la mitad del Universo colapsa en objetos de algún tamaño). Pero esto es contradictorio con el hecho de que para masas suficientemente bajas, el campo de densidad siempre se vuelve no lineal y por lo tanto pensaríamos que el Universo siempre colapsará en objetos suficientemente pequeños. Para resolver este problema, PS arbitrariamente introdujeron un factor 2 en la ecuación 1.96. De este modo, podemos ahora igualar las derivadas de las ecuaciones 1.96 y 1.97, para obtener la expresión para $n(\bar{M})$ como

$$\begin{aligned} n(\bar{M}, t) d\bar{M} &= - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\bar{\rho}}{\bar{M}} \frac{\delta_c}{D(t) \Delta^2(\bar{M}, t_i)} \frac{d\Delta(\bar{M}, t)}{d\bar{M}} \\ &\quad \times \exp \left[- \frac{\delta_c^2}{2D^2(t) \Delta^2(\bar{M}, t_i)} \right] d\bar{M} \end{aligned} \quad (1.98)$$

Esta ecuación, generalmente escrita como en la ecuación 1.88, es conocida actualmente como la función de masa de Press-Schechter. Notemos de paso que cumple con la condición de normalización

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \int \frac{dn}{dM} M dM = \int f(v) dv = 1 \quad (1.99)$$

lo cual quiere decir que toda la materia se encuentra ligada a un halo de alguna masa.

Para un espectro de potencia del tipo $P(k) \propto k^m$, $\Delta(\bar{M}) \propto \bar{M}^{-(m+3)/6}$, la función de masa queda

$$\begin{aligned} n(\bar{M}, t) d\bar{M} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi} \right) \frac{\bar{\rho}}{\bar{M}} \left(1 + \frac{m}{3} \right) \left(\frac{\bar{M}}{\bar{M}_*(t)} \right)^{(3+m)/6}} \\ &\quad \times \exp \left[- \left(\frac{\bar{M}}{\bar{M}_*(t)} \right)^{(3+m)/3} \right] \frac{d\bar{M}}{\bar{M}} \end{aligned} \quad (1.100)$$

donde la masa característica $M_*(t)$ es definida como $D(t)\Delta(M_*(t), t_i) = \delta_c$, la masa que tendría en el tiempo t un objeto evolucionado linealmente cuya densidad al tiempo t_i era δ_{sc} .

Recordemos que para construir la función de masa de PS ellos asumieron que los objetos se forman a partir de fluctuaciones iniciales gaussianas y pequeñas, y una vez alcanzada la densidad crítica, evolucionaban según el modelo de colapso esférico. Ahora bien, por un lado, Doroshkevich (1970) y Bardeen et al. (1986) observaron que las perturbaciones en un campo de densidad Gaussiano son inherentemente triaxiales, y por otro lado, la comparación con simulaciones numéricas demostró que la función de masa de PS sobrestimaba la cantidad de objetos de baja masa. Fue entonces que Sheth & Tormen (1999, de aquí en adelante ST) demostraron que esta discrepancia podía ser reducida sustancialmente si se asume que las estructuras se forman a partir de un colapso elipsoidal en vez de uno esférico. Estos autores propusieron una nueva forma funcional que consideraba los efectos del colapso no esférico y realizaron ajustes con simulaciones numéricas para obtener los parámetros de su modelo. La función que ellos emplearon es:

$$\nu f(\nu) = A(p) (1 + (q\nu)^{-p}) \left(\frac{q\nu}{2\pi}\right)^{1/2} \exp(-q\nu/2) \quad (1.101)$$

donde $p \approx 0.3$, $A(p) = [1 + 2^{-p}\Gamma(1/2 - p)/\sqrt{\pi}]^{-1} \approx 0.3222$, y $q \approx 0.75$. Si $p = 1/2$ y $q = 1$, entonces esta expresión es la misma que la ecuación 1.96. Para $\nu \ll 1$, la función de masa escala como $\nu f(\nu) \propto \nu^{0.5-p}$. El valor de $\nu = 1$ define la escala de masa característica M^* (que nombramos anteriormente: $\sigma(M^*) \equiv \delta_{sc}(z)$) y es $\sim 2 \times 10^{13} M_\odot$ en $z = 0$; debe notarse que halos más masivos que M^* son raros.

Por completitud, señalemos que Jenkins et al. (2001) mostraron que la función de masa de ST sobrestima la cantidad de halos de masas altas. Utilizando simulaciones numéricas (las mismas que utilizaron ST) ellos modelaron la función de masa mediante la siguiente expresión

$$f(\sigma) = A \exp(-|\ln\sigma^{-1} - B|^\epsilon) \quad (1.102)$$

donde $A = 0.315$, $B = 0.61$ y $\epsilon = 3.8$ fueron determinados mediante ajuste sobre las diferentes simulaciones para diferentes *redshift* y condiciones iniciales. Con esta función consiguieron una precisión mayor al 20% sobre rango de masa más amplio que la función de ST. Vale notar además que ellos encontraron que si el parámetro A en la función de masa se deja libre (i.e. no requerimos que se cumpla la condición de conservación de la masa, ecuación 1.99) un mejor ajuste es conseguido con los parámetros $A = 0.353$, $p = 0.175$ y $q = 0.73$ en la función de ST 1.101, con estos valores el 84% de la masa se encuentra en halos.

1.9 LOS HALOS DE MATERIAS OSCURA: TRAZADORES SESGADOS

Una pregunta interesante que nos podríamos hacer es si la estadística (funciones de correlación, espectro de potencia) sobre la distribución de halos de materia oscura reproduce la estadística de la distribución de materia. En este sentido es que podemos preguntarnos cuán buenos trazados de la distribución de materia oscura son los halos. Como veremos a continuación, utilizando los formalismos de **PS** y de **ST**, en gran escala es posible encontrar una relación determinista entre la distribución de halos y la de la materia.

Supongamos que dividimos el Universo en celdas de un dado volumen comóvil V . Las diferentes celdas podrían contener diferente cantidad de masa M , lo cual significa que ellas tienen diferentes densidades: $M/V \equiv \bar{\rho}(1 + \delta)$. Sea $N(m, z_1 | M, V, z_0)$ el número medio de halos de masa m que colapsaron en z_1 , y se encuentran en celdas de tamaño V que contienen una cantidad de masa M en z_0 . La sobredensidad de halos en tales celdas es

$$\delta_h(m, z_1 | M, V, z_0) = \frac{N(m, z_1 | M, V, z_0)}{n(m, z_1)V} - 1 \quad (1.103)$$

Dado que ya tenemos un modelo para el denominador, para continuar, necesitamos un buen estimador de $N(m, z_1 | M, V, z_0)$.

Un halo puede ser entendido como una región cuya densidad era suficientemente grande como para provocar el colapso gravitacional de dicha región. Entonces el número de halos dentro del volumen V es igual al tamaño inicial de V por la densidad numérica de regiones dentro de este volumen que eran lo suficientemente densas para colapsar y formar halos. Si V es sobredenso hoy, su tamaño comóvil hoy es más pequeño que su tamaño inicial: el tamaño comóvil inicial era $M/\bar{\rho} = V(1 + \delta)$. Si escribimos $N(m, z_1 | M, V, z_0) = n(m, z_1 | M, V, z_0)V(1 + \delta)$, entonces necesitamos estimar la densidad numérica $n(m, z_1 | M, V, z_0)$.

La densidad numérica media de halos $n(m, z_1)$ es una función de la densidad crítica requerida por el modelo de colapso esférico a ese tiempo: $\delta_{sc}(z_1)$ (ver ecuaciones 1.88 y 1.89). En este contexto, $n(m, z)$ debería ser pensado como una descripción de la densidad numérica de halos en celdas extremadamente grandes que son exactamente tan densas como el fondo del Universo (i.e., celdas que tienen $M \rightarrow \infty$ y $\delta = 0$). Celdas más densas podrían ser pensadas como regiones en las cuales la densidad crítica requerida para el colapso esférico es más fácil de alcanzar, así una buena aproximación a $n(m, z_1 | M, V, z_0)$ es obtenida reemplazando δ_{sc} en la expresión para $n(m, z)$ con $\delta_{sc}(z_1) - \delta_0(\delta, z_0)$ (Mo & White, 1996). Notemos que no podemos utilizar δ , pues $\delta_{sc}(z_1)$ ha sido extrapolada desde las condiciones iniciales usando la teoría lineal, mientras que δ , que es el valor real de la densidad, ha sido transformada desde su valor en las condiciones iniciales usando teoría no lineal. $\delta_0(\delta, z_0)$ denota la densidad

inicial, extrapolada utilizando la teoría lineal, que una región debe haber tenido para tener la densidad δ en z_0 .

De esta forma, una estima razonable de la densidad de halos de masa m que se encuentran virializados a z_1 y están en celdas de tamaño V con masa M a z_0 es

$$\frac{m^2 n(m, z_1 | M, V, z_0)}{\bar{\rho}} \frac{dm}{m} = v_{10} f(v_{10}) \frac{dv_{10}}{v_{10}} \quad (1.104)$$

$$\text{donde } v_{10} = \frac{[\delta_{sc}(z_1) - \delta_0(\delta, z_0)]^2}{\sigma^2(m) - \sigma^2(M)}$$

y $f(v)$ es la misma forma funcional que describe la función de masa no condicional 1.98 o 1.101.

Dos límites de la ecuación 1.104 son interesantes. A medida que $V \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow \infty$ y $\delta_0 \rightarrow \delta_{sc}(z_0)$ cualquiera sea el valor de M . Ahora bien, una región de tamaño pequeño que contienen una masa M es lo que nosotros llamamos un halo de masa M . Entonces, si tenemos un halo de una dada masa M a z_0 , entonces $N(m, z_1 | M, V = 0, z_0)$ es el número promedio de subhalos de masa m en tiempos anteriores cuando $z_1 \geq z_0$. En este límite de la ecuación 1.104 obtenemos lo que conocemos como función de masa progenitora o condicional. En el otro límite, cuando $V \rightarrow \infty$ entonces $M \rightarrow \infty$ también, por lo tanto, $\sigma^2(M) \rightarrow 0$ y $|\delta| \rightarrow 0$, luego la ecuación 1.104 se reduce a $n(m, z_1)$ como esperábamos.

Supongamos que estamos en el límite cuando $V \rightarrow \infty$, por lo tanto $|\delta| \ll 1$, en este caso podemos utilizar la siguiente aproximación para $\delta_0(\delta)$ (Bernardeau, 1994)

$$\frac{\delta_0}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta^k = \delta - \frac{17}{21} \delta^2 + \frac{341}{567} \delta^3 - \frac{55805}{130977} \delta^4 + \dots \quad (1.105)$$

Dado que las celdas son grandes, la masa M contenidas en ellas también es grande y más grande que la masa m_* de un halo típico. En este límite, $\sigma(M) \ll \sigma(m)$ para casi cualquier valor de m , esto permite que consideremos que $\sigma(M) \rightarrow 0$. Esto conduce a

$$n(m, z_1 | M, V, z_0) \approx n(m, z_1) - \delta_0(\delta, z_0) \left(\frac{\partial n(m, z_1)}{\partial \delta_{sc}} \right)_{\delta_{sc}(z_1)} + \dots \quad (1.106)$$

tal que

$$\delta_h(m, z_1 | M, V, z_0) \approx \delta - (1 + \delta) \delta_0(\delta, z_0) \left(\frac{\partial \ln n(m, z_1)}{\partial \delta_{sc}} \right)_{\delta_{sc}(z_1)} \quad (1.107)$$

Y si tomamos la función de masa de ST de la ecuación 1.101 y solo tomando términos hasta el orden más bajo en δ obtenemos

$$\delta_h(m, z_1 | M, V, z_0) \approx \delta \left(1 + \frac{qv - 1}{\delta_{sc}(z_1)} + \frac{2p/\delta_{sc}(z_1)}{1 + (qv)^p} \right) = b_1(m, z_1) \delta$$

(1.108)

Esta expresión establece que la sobredensidad de halos en celdas de tamaño lo suficientemente grandes es linealmente proporcional a la sobredensidad de la masa, siendo $b_1(m, z_1)$ la constante de proporcionalidad. Notemos que esta depende de la masa de los halos y del *redshift* al que se virializaron, pero es independiente del tamaño de las celdas.

Para ver que nos quiere decir esta ecuación, consideremos el caso $q=1$ y $p=0$. Entonces según la ecuación 1.108 los halos masivos (aquellos que son más masivos que la masa característica m_* y para los cuales $\nu > 1$) tendrán $b_1(m, z_1) > 1$ y decimos que están sesgados relativos a la materia oscura, mientras los halos menos masivos ($\nu < 1$) tendrán $b_1(m, z_1) < 1$ y decimos que son halos anti sesgados.

La relación lineal que hemos encontrado solo es válida para escalas grandes. Podemos extender el análisis pensando la distribución de halos en función de la densidad de materia δ y expresándola en un desarrollo de serie de potencia

$$\delta(k)_h = \sum_i b_i k^i \quad (1.109)$$

utilizando la expresión de la función de masa de ST en la ecuación 1.104, podemos encontrar los coeficientes del desarrollo de los cuales escribimos algunos a continuación (Mo et al., 1997; Scoccimarro et al., 2001):

$$\begin{aligned} b_1(m, z_1) &= 1 + \epsilon_1 + E_1 \\ b_2(m, z_1) &= 2(1 + a_2)(\epsilon_1 + E_1) + \epsilon_2 + E_2 \\ b_3(m, z_1) &= 6(a_2 + a_3)(\epsilon_1 + E_1) + 3(1 + a_2)(\epsilon_2 + E_2) + a_3 + E_3 \end{aligned} \quad (1.110)$$

donde

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{qv - 1}{\delta_{sc}(z_1)} \\ \epsilon_2 &= \frac{qv}{\delta_{sc}(z_1)} \left(\frac{qv - 3}{\delta_{sc}(z_1)} \right) \\ \epsilon_3 &= \frac{qv}{\delta_{sc}(z_1)} \left(\frac{qv - 3}{\delta_{sc}(z_1)} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.111)$$

y

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{2p/\delta_{sc}(z_1)}{1 + (qv)^p} \\ \frac{E_2}{E_1} &= \frac{1 + 2p}{\delta_{sc}(z_1)} + \epsilon_2 \\ \frac{E_3}{E_1} &= \frac{4(p^2 - 1) + 6pqv}{\delta_{sc}^2(z_1)} + 3\epsilon_1^2 \end{aligned} \quad (1.112)$$

Observemos que los coeficientes de sesgo b_i cumplen con la relación de consistencia

$$\int dm \frac{mn(m, z)}{\bar{\rho}} b_k(m, z) = \delta_{k,0} \quad (1.113)$$

donde $\delta_{k,0}$ es la delta de Kronecker. Según estas ecuaciones los halos más masivos tienden a tener más sesgo respecto de la distribución de materia, y estos halos tenían un sesgo aún mayor para *redshift* más altos.

Entonces, como conclusión de esta sección, podemos decir que en el límite donde el sesgo es determinista (i. e., existe una relación lineal entre la distribución de los halos y la distribución de materia), los parámetros de sesgo están determinados completamente por la función de masa de los halos. Luego, si utilizamos la teoría perturbativa para describir la distribución de materia, entonces los coeficientes de sesgo nos permiten describir la distribución de halos. Las predicciones de la teoría perturbativa y la función de masa dependen de la forma del espectro de potencia primordial. Así, en este modelo, las fluctuaciones del espectro inicial son utilizadas para dar una descripción completa del sesgo de los halos de materia oscura.

1.10 PERFÍLES DE DENSIDAD DE LOS HALOS DE MATERIA OSCURA

El paso siguiente en la descripción de los halos de materia oscura es describir como se distribuye la materia dentro de la región virializada. Los primeros trabajos sobre el perfil de densidad de los halos basados en el modelo de colapso esférico mostraron que las estructuras virializadas tenían un perfil de densidad que podía describirse por una ley de potencia (Fillmore & Goldreich, 1984; Bertschinger, 1985; Hoffman, 1988). Luego mediante el empleo de simulaciones numéricas se encontró que el estado final de las estructuras virializadas tenían un perfil que era mejor descrito por la ley de de Vaucouleurs (1948) $R^{1/4}$ (van Albada, 1982; Aguilar & Merritt, 1990).

Posteriormente, con el advenimiento de mejores simulaciones numéricas, se observó que el perfil de densidad de los halos de materia oscura se describía mejor mediante una ley de potencia doble (Dubinski & Carlberg, 1991; Hernquist, 1990). Este modelo empírico tenía pendiente logarítmica interior de -1 y pendiente logarítmica exterior de -4. Esta fue introducida como una aproximación analítica a la forma deproyectada del perfil de de Vaucouleurs.

Una modificación a este es el perfil Navarro-Frenk-White (NFW) (Navarro et al., 1997) que tiene una pendiente interior de -3, cuya expresión analítica está dada por

$$\rho(r|m) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right) \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2} \quad (1.114)$$

o por el perfil M99 (Moore et al., 1999) que tiene una pendiente interior de -1.4, dado por la expresión

$$\rho(r|m) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{3/2} \left[1 + \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)\right]^{3/2}} \quad (1.115)$$

Estos ajustes brindan una muy buena descripción de los perfiles de densidad de los halos virializados en simulaciones numéricas y ambos están parametrizados en términos del radio de escala r_s y la densidad al radio de escala ρ_s . La diferencias son apreciables en escalas pequeñas donde $r \ll r_s$.

La masa de un objeto de radio r_{vir} la podemos obtener haciendo la integral del perfil hasta esa radio

$$m = \int_0^{r_{vir}} 4\pi r^2 \rho(r|m) dr \quad (1.116)$$

Para el perfil NFW obtenemos

$$m = 4\pi\rho_s r_s^3 \left[\ln(1+c) - \frac{c}{1+c} \right] \quad (1.117)$$

y para el perfil M99

$$m = 4\pi\rho_s r_s^3 \frac{2 \ln(1+c^{3/2})}{3} \quad (1.118)$$

en ambas expresiones, $c = r_{vir}/r_s$ es el parámetro de concentración. En principio, los perfiles NFW y M99 se extienden hasta el infinito y decaen como r^{-3} para r grandes y, por lo tanto, la masa diverge logarítmicamente. Es por esto que hemos considerado que los halos se extiende sólo a r_{vir} , además nos aseguramos que la masa dentro del perfil es la misma que la masa descrita por la función de masa.

Las simulaciones numéricas muestran que para halos de la misma masa el parámetro de concentración c posee en distribución que puede ser bien descrita por una función log-normal

$$p(c|m, z)dc = \frac{d \ln c}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} \exp \left[-\frac{\ln^2[c/\bar{c}(m, z)]}{2\sigma_{\ln c}^2} \right] \quad (1.119)$$

Además las simulaciones indican que si bien el parámetro \bar{c} depende del valor de la masa m , el ancho de la distribución $\sigma_{\ln c}$ no. Para el perfil NFW esta dependencia se puede escribir de la siguiente manera

$$\bar{c}(m, z) = \frac{9}{1+z} \left[\frac{m}{m_*(z)} \right]^{0.13} \quad (1.120)$$

con $\sigma_{\ln c} \approx 0.25$, donde $m_*(z)$ es la masa para la cual $\sigma(m, z) = \delta_c$. Análogamente, para el perfil M99 tenemos la relación

$$\bar{c}_{M99} \approx \left(\frac{\bar{c}_{NFW}}{1.7} \right)^{0.9} \quad (1.121)$$

Según la ecuación 1.120 los halos menos masivos son, en promedio, más concentrados que los más masivos.

Para el desarrollo subsiguiente nos será útil la transformada de Fourier del perfil de densidad de los halos de materia oscura. A tal fin, definimos primero el perfil de densidad normalizado de la siguiente manera

$$u(r|m) = \frac{\rho(r|m)}{m} \quad (1.122)$$

Luego, la transformada de Fourier de esta cantidad será

$$u(k|m) = \int u(r|m) 4\pi r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} dr \quad (1.123)$$

Para el perfil NFW $u(k|m)$ está dado por la expresión analítica

$$u(k|m) = \frac{4\pi\rho_s r_s^3}{m} \left[\sin(kr_s) [Si([1+c]kr_s) - Si(kr_s)] - \frac{\sin(ckr_s)}{(1+c)kr_s} + \cos(kr_s) [Ci([1+c]kr_s) - Ci(kr_s)] \right] \quad (1.124)$$

donde las funciones integrales seno y coseno están definidas por

$$Ci(x) = \int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt \quad (1.125)$$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\cos(t)}{t} dt \quad (1.126)$$

Veremos más adelante como estas expresiones son utilizadas en el Modelo de Halos para el cálculo del espectro de potencial o de la función de correlación.

CATÁLOGOS DE GALAXIAS Y SIMULACIONES NUMÉRICAS

Para poder verificar las predicciones de las diferentes teorías, o revelar nuevos fenómenos no descritos completamente, uno debe recurrir a la observación de la Naturaleza, la cual será el último verdugo de las hipótesis que hagamos sobre ella. En nuestro marco particular, y para los estudios a los cuales nos avocamos, las observaciones son realizadas sobre la distribución de galaxias del Universo. Estas son plasmadas en grandes tablas de información de diversa índole vinculadas entre sí.

Además, contamos con otra herramienta que puede ayudarnos en el estudio de los procesos físicos que acaecen en el Universo, la simulación numérica. Esta permite realizar una suerte de *experimento*, por ejemplo, variando ya sean las condiciones iniciales, las ecuaciones físicas que gobiernan la evolución, o el dominio físico, la incorporación o supresión de diferentes procesos físicos, etc.

Veremos en este capítulo una breve descripción del catálogo de galaxias que utilizaremos para nuestros estudios como así también una breve introducción a la generación de simulaciones numéricas cosmológicas por computadora.

2.1 CATÁLOGO DE GALAXIAS SLOAN

El catálogo de galaxias Sloan (SDSS, por las sigla en inglés de *Sloan Digital Sky Survey*) es uno de los relevamientos del cielo más grandes que se han construido hasta la fecha. El mismo consiste en el mapeo detallado de la posición, brillo en cinco bandas (véase tabla 1) y espectros (en algunos casos) de los cuerpos celestes en un área de aproximadamente un cuarto del total del cielo. A partir de los espectros, y de especial interés para nosotros, se obtuvieron los corrimiento hacia el rojo de galaxias y quasars (York & et al., 2000). Las observaciones fueron realizadas con el telescopio de 2.5 m del Observatorio de Apache Point situado en los Montes Sacramento (Nuevo México, Estados Unidos), el cual alberga dos instrumentos. Uno de los cuales es una cámara de gran campo (campo de visión de 3°) con 24 CCD de 2048×2048 píxeles cada uno, con un total de ≈ 120 Megapíxeles. La utilización de esta cámara de gran campo es apropiada para realizar

un relevamiento en un área grande del cielo. Las imágenes tienen un tiempo de exposición efectivo de 54.1 s y por hora fueron relevados 18.75 grados^2 en cada una de las cinco filtros.

Banda	λ_{medio} [Å]	Mag. límite
u	3551	22.3
g	4686	23.3
r	6165	23.1
i	7481	22.5
z	8931	20.8

Tabla 1: Propiedades de los cinco filtros fotométricos del catálogo SDSS.

A partir de los datos fotométricos se seleccionaron los objetos a los cuales se les realizaron las mediciones con el segundo instrumento, el cual es un espectrógrafo que permite obtener 640 espectros simultáneamente con un rango de cobertura de 3800 Å a 9200 Å con una resolución de $\lambda/\Delta\lambda \simeq 2000$.

La adquisición de datos comenzó en el 2000 y hasta la fecha han sido liberados 10 conjuntos de datos consistentes en información fotométrica y espectroscópica de más de un millón de objetos astronómicos. Vale remarcar que las características arriba mencionadas del catálogo corresponden a las que poseía cuando se liberó la versión que nosotros utilizamos. Posteriormente se le han realizado algunas mejoras, como por ejemplo, el espectrógrafo posee ahora 1000 fibras.

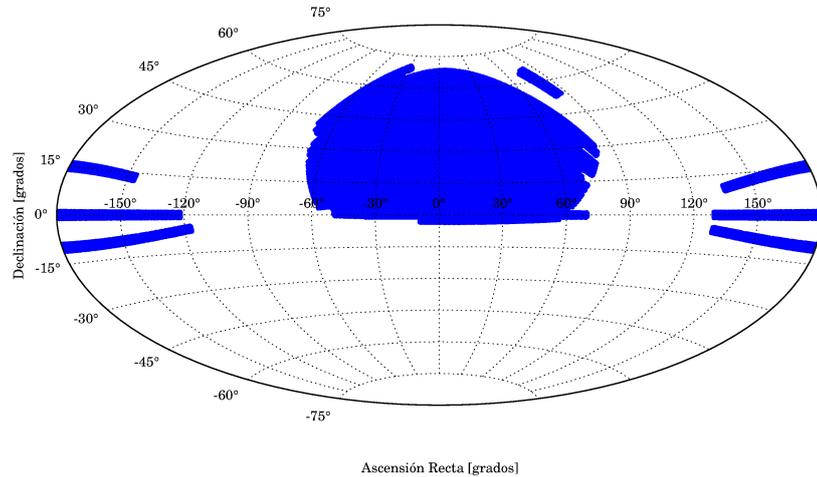


Figura 2: Cobertura en el cielo del catálogo espectroscópico de galaxias SDSS-DR7 en proyección Aitoff de las coordenadas ecuatoriales.

En particular nosotros utilizamos la versión 7 SDSS-DR7, liberada en Octubre de 2008 (Abazajian et al., 2009). El mismo incluye una muestra de galaxias completa hasta magnitud petrosiana límite en $r = 17.77$. La figura 2 muestra la cobertura sobre el plano del cielo de las galaxias que poseen medición del corrimiento hacia el rojo, un total de 928 567 objetos. Este conjunto de galaxias lo denominaremos *catálogo espectroscópico de galaxias*. La figura 3 muestra la distribución en la dirección de la visual y ascensión recta de una muestra de galaxias limitadas al intervalo de declinación ($-5^\circ, 5^\circ$). Cada punto representa una galaxia y es entintado según su índice de color definido como la diferencia entre sus magnitudes en las bandas g y r , $mg - mr$. Puede observarse como las galaxias rojas tienden a localizarse preferentemente en las regiones más densas, y además se aprecia una dilución en la cantidad de galaxias azules (generalmente de luminosidad más débil) para distancia más grandes.

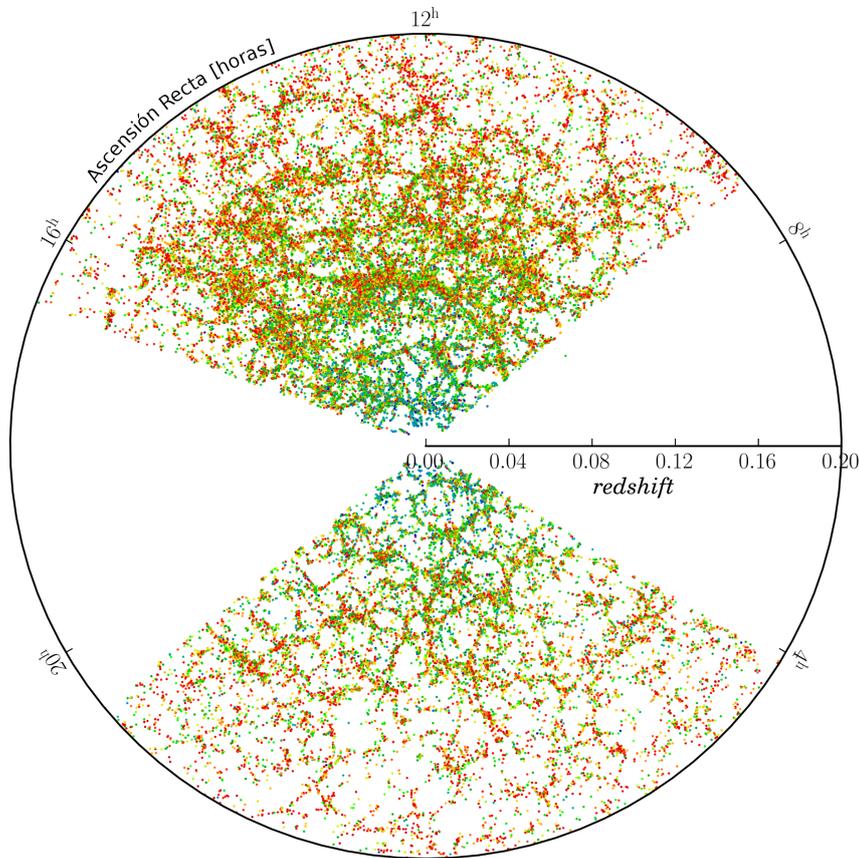


Figura 3: Distribución espacial de galaxias del catálogo espectroscópico en ascensión recta y *redshift*. Cada galaxia es distinguida según su índice de color definido como la diferencia entre sus magnitudes en la banda g y r , $mg - mr$. Solo se muestran las galaxias que poseen una declinación en el rango ($-5^\circ, 5^\circ$)

2.1.1 Identificación de grupos de galaxias

Además de contar con un catálogo de galaxias, para algunos de los estudios realizados necesitaremos tener un catálogo de grupos de galaxias. Estos grupos son identificados sobre el mismo catálogo de galaxias SDSS-DR7. Existen diversos algoritmos desarrollados con el fin de identificar grupos, nosotros haremos uso de una versión modificada del método de [Huchra & Geller \(1982\)](#) presentado por [Merchán & Zandivarez \(2005\)](#). El mismo permite encontrar contornos de isodensidad en una muestra de galaxias limitada en magnitud aparente m_{lim} .

El método puede ser descripto de la siguiente manera: comenzamos eligiendo una galaxia que no haya sido asignada previamente a un grupo, y buscamos a su alrededor galaxias que cumplan la condición

$$D_{ij} = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{V}{H_0} \leq D_L(V_i, V_j, m_i, m_j) \quad (2.1)$$

donde

$$V = \frac{V_i + V_j}{2} \quad (2.2)$$

y una diferencia en velocidades radiales de

$$V_j = |V_i - V_j| \leq V_L(V_i, V_j, m_i, m_j) \quad (2.3)$$

donde V_i y V_j se refieren a las velocidades radiales de la galaxia y su vecina en cuestión, respectivamente, m_i y m_j a sus magnitudes aparentes y θ a su separación angular. H_0 es la constante de Hubble. Si no encontramos ninguna galaxia vecina que cumpla estas condiciones, entonces se define la galaxia como *aislada*, de lo contrario la galaxia junto con todas sus vecinas son incluidas en el grupo. Este procedimiento lo aplicamos iterativamente sobre las galaxias vecinas que cumplen las condiciones mencionadas hasta que no se encuentran más miembros, cada vez que hallamos una galaxia que cumple las condiciones la incluimos en el grupo.

La elección de D_L y V_L debe tener en cuenta la variación en el muestreo debido al corte en magnitud aparente como función de la distancia. Para ello se asume que la función de luminosidad es independiente de la distancia y la posición. Entonces para cada par se define

$$D_L = D_0 \left[\frac{\int_{-\infty}^{M_{ij}} \Phi(M) dM}{\int_{-\infty}^{M_{lim}} \Phi(M) dM} \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (2.4)$$

donde

$$M_{lim} = m_{lim} - 25 - 5 \log(V_F/H_0) \quad (2.5)$$

y

$$M_{ij} = m_{lim} - 25 - 5 \log(V/H_0) \quad (2.6)$$

aquí $\Phi(M)$ es la función de luminosidad y D_0 es la separación proyectada elegida a la distancia fiducial V_F en unidades de Mpc. Con esta definición, el contorno de sobredensidad que encierra a cada grupo está dado por

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{3}{4\pi D_0^3} \left[\int_{-\infty}^{M_{lim}} \Phi(M) dM \right]^{-1} - 1 \quad (2.7)$$

Siguiendo las sugerencias de [Schecter \(1976\)](#), la diferencia de velocidades V_L es escalada de la misma forma que D_L , o sea

$$V_L = V_0 \left[\frac{\int_{-\infty}^{M_{ij}} \Phi(M) dM}{\int_{-\infty}^{M_{lim}} \Phi(M) dM} \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (2.8)$$

Con esta técnica se identificaron los grupos de galaxias en el catálogo Sloan Data Release 7*. Se adoptó una sobredensidad $\delta\rho/\rho = 200$ para la densidad en los bordes del grupo, de modo de obtener grupos bien definidos. Los parámetros D_0 y V_0 utilizados fueron $0.395 h^{-1} Mpc$ y $200 km s^{-1}$ respectivamente. La magnitud límite fue de $m_{lim} = 17.77$ con una constante de Hubble de $H_0 = 100h km s^{-1} Mpc^{-1}$. Para la función de luminosidad se utilizó una función de [Schecter \(1976\)](#) de la forma

$$\Phi(M) = 0.4 \ln(10) \Phi^* \left[10^{0.4(M^* - M)} \right]^{1+\alpha} e^{-10^{0.4(M^* - M)}} \quad (2.9)$$

con parámetros $\Phi^* = 0.0149 mag^{-1} Mpc^{-3}$, $M^* = -20.44$ y $\alpha = -1.05$ ([Blanton et al., 2003](#)) y velocidad fiducial $V_F = 50 km sec^{-1}$. También se computó la dispersión de velocidad en la dirección de la visual σ_v y el radio virial de cada grupo R_V definido como

$$R_V = \frac{\pi N_g(N_g - 1)}{2 \sum_{i>j} R_{ij}^{-1}} \quad (2.10)$$

donde N_g es el número de galaxias en el grupo y R_{ij} es la distancia proyectada entre la i -ésima y la j -ésima galaxia del grupo. La dispersión de velocidad real σ fue obtenida a partir de la dispersión medida a lo largo de la visual mediante la ecuación

$$\sigma = \sqrt{3} \sigma_v \quad (2.11)$$

Con estos valores es posible tener una estima de la masa o masa virial M_{vir} de la siguiente forma: si suponemos que cada grupo de galaxias se encuentra en su estado relajado con lo cual podemos asumir que se cumple el teorema del virial

$$2E_c + E_p = 0 \quad (2.12)$$

* <http://www.sdss.org/dr7/>

donde E_c y E_p son la energía cinética y potencial del grupo, respectivamente. Luego, podemos escribir la masa como

$$M_{vir} = \frac{\sigma^2 R_V}{G} \quad (2.13)$$

2.2 SIMULACIONES DEL UNIVERSO EN GRAN ESCALA

La gran diversidad y la complejidad de los procesos astrofísicos involucrados en la formación y evolución de las estructuras que pueblan el Universo, hacen que sea excesivamente complicado, sino imposible, abordar dichos tópicos desde un punto de vista totalmente teórico. La primera vez que se trataron de abordar estos temas desde otra perspectiva fue mediante el empleo de lámparas de luz cuya intensidad representaba la cantidad masa acumulada en esa región (Holmberg, 1941). Desde aquellos tiempos hasta ahora el desarrollo de las técnicas de simulación han evolucionado constantemente, no solo con el desarrollo de nuevos algoritmos más eficientes y más rápidos, sino también al ritmo con el poder de cómputo y de almacenamiento de los supercomputadores ha ido aumentando.

Una simulación puede interpretarse como una tabla donde se registra la información dinámica (e. g., posiciones, velocidades, potencial gravitatorio), termodinámicas (e. g., temperatura y densidad) y/o de otras índoles (e. g., magnéticas) de una cierta región del espacio. En general, la materia oscura es representada mediante partículas mientras que el material bariónico puede ser representado mediante celdas de una grilla o partículas suavizadas. De esta manera, y más sencillamente, una simulación consiste en un conjunto de partículas o grillas con sus respectivas propiedades dinámicas, termodinámicas, etc.

Las simulaciones numéricas nos ayudan a obtener una realización del Universo a partir de ciertas condiciones iniciales y leyes físicas establecidas. Por lo tanto, las mismas nos permiten validar el modelo cosmológico y la relación entre la física involucrada en el proceso de formación de las estructuras y la distribución de materia en la estructura en gran escala del Universo (Springel, 2012). Además, nos sirve de guía para interpretar los datos observacionales.

Dado el tipo de estudio que realizaremos, nos interesan, principalmente, las simulaciones del Universo en gran escala, esto es, simulaciones cuyo tamaño es de algunas centenas de megaparsecs. Por ello, lo que discutiremos en esta sección se relacionará especialmente con tales simulaciones, denominadas *cosmológicas*, y particularmente con simulaciones de N-cuerpos de partículas de materia oscura.

La realización de una simulación puede ser sintetizada en tres pasos fundamentales:

- Establecimiento de las condiciones iniciales
- Cálculo de las fuerzas involucradas

- Integración de las ecuaciones de movimiento (evolución)

Los dos últimos pasos son ejecutados iterativamente hasta alcanzar el estado de evolución deseado, generalmente fijado por un tiempo específico o número de pasos. En general, las condiciones iniciales de las simulaciones cosmológicas son establecidas en alguna época donde el Universo era más o menos homogéneo y la evolución se realiza hasta que la simulación alcanza la edad actual.

2.2.1 Condiciones Iniciales

La generación de las condiciones iniciales puede ser resumida en dos partes: primero, se establece una distribución uniforme de partículas representando un Universo sin perturbaciones, y segundo, se imponen las perturbaciones en el campo de densidad deseadas.

Para la distribución uniforme se utiliza, comúnmente, una grilla cúbica uniforme. Vale notar que el tamaño de la grilla representa una escala típica la cual introduce fuertes direcciones preferenciales que a su vez puede provocar que las propiedades estadísticas del campo de densidad en escalas chicas se vea afectado.

La segunda parte consiste en imponer las perturbaciones en el campo de densidad que se correspondan con el modelo de Universo que se desea simular. Para ello, el procedimiento utilizado, mayormente, es el método basado en la aproximación de Zel'dovich (véase §1.6.1 en página 17). Según el cual, las posiciones y velocidades de las partículas al *redshift* inicial z_i son establecidas según las ecuaciones:

$$\vec{x}(\vec{q}, z_i) = \vec{q} - D(z_i) \nabla \Phi(\vec{q}) \quad (2.14)$$

$$\vec{v}(\vec{q}, z_i) = - \frac{\dot{D}(z)|_{z=z_i}}{1+z_i} \nabla \Phi(\vec{q}) \quad (2.15)$$

donde el vector \vec{q} es la posición sin perturbación, y el potencial Φ debe ser computado en el espacio de Fourier:

$$\Phi(\vec{q}) = \sum_k \frac{\delta_k}{k^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{q}} \quad (2.16)$$

$$\text{donde } \delta_k = x \times \sqrt{(P(k))} \quad (2.17)$$

siendo x un número aleatorio extraído de una distribución gaussiana.

2.2.2 Cálculo de las fuerzas involucradas

Para una simulación de n-cuerpos, la manera más directa de calcular las fuerzas gravitacionales es realizando la suma directa de las interacciones entre partículas

$$\vec{F}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_{ij} + \epsilon|^2} \hat{r}_{ij} \quad (2.18)$$

donde $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, \hat{r}_{ij} su versor, y ϵ es un parámetro, denominado longitud de suavizado (*softening*, en inglés), que se introduce para evitar la singularidad divergente cuando $|\vec{r}_{ij}|$ se hace pequeño determinando la distancia mínima entre dos partículas. Vale notar que el tiempo de cómputo requerido para realizar esta cuenta es proporcional a N^2 , por lo que su aplicación resulta costosa, en términos computacionales, cuando es utilizada para evolucionar sistemas con muchas partículas. Por este motivo, se han desarrollado otros métodos que son extensivamente utilizados para realizar simulaciones de gran tamaño. Describiremos a continuación el método empleado por el código Gadget (Springel, 2005), siendo este último el algoritmo que hemos utilizado para realizar todas las simulaciones cosmológicas.

El método TreePM surge de la combinación de otros dos algoritmos, los cuales son empleados separadamente para computar las fuerzas en diferentes escalas denominadas de rango corto y de rango largo. Describamos brevemente cada uno de estos métodos.

Método Tree

Descrito originalmente por Barnes & Hut (1986), este método particiona el volumen de la simulación (generalmente, un cubo) en un conjunto de celdas anidadas en una estructura de árbol. Para construir tal entidad, se divide sucesivamente el volumen inicial en celdas y subceldas. En cada uno de los pasos una (sub)celda es dividida geoméricamente solo si contiene más de una partícula. Este procedimiento es repetido hasta que cada una de las subceldas de menor jerarquía contenga una sola partícula. Cada una de las subceldas así construidas posee diferentes atributos, tales como la masa total contenida dentro de ella, localización del centro de masa, y un puntero a sus subceldas. Por otro lado, cada una de las partículas posee su posición, velocidad y masa propia.

Para computar la fuerza sobre una partícula se requiere de sumar la contribución de todas las otras partículas o celdas. Si una celda se encuentra lo suficientemente lejos, puede ser considerada como un solo ente con su masa localizada en el centro de masa. Pero si la celda se encuentra más próxima, deben considerarse las contribuciones separadas de sus subceldas y/o partículas. El criterio de lejanía se fija relacionando la distancia r a la celda y el tamaño d de la misma. Entonces, una celda es considerada como una sola entidad cuando

$$\frac{d}{r} \leq \theta_c \quad (2.19)$$

siendo θ_c el valor umbral. Cabe marcar que mientras más grande es el valor de este parámetro, el error en el cálculo de la fuerza también aumenta. Sin embargo, con una buena elección de θ_c , la cantidad de operaciones necesarias para el susodicho cómputo es considerablemente menor que la suma directa sobre todas las partículas.

Método Partícula-Malla o PM

Esté método computa el potencial gravitacional en el espacio de Fourier. Para ello se define una malla regular en el volumen de la simulación, sobre la cual se interpola la densidad de cada una de las partículas. Luego, el potencial en cada uno de los puntos de la malla puede calcularse a partir de la ecuación 1.48. Una manera sencilla de resolver esta ecuación es a través de la transformada de Fourier de la misma:

$$\mathcal{F}(\Phi) = -4\pi G \frac{\mathcal{F}(\rho)}{k^2} \quad (2.20)$$

donde \mathcal{F} denota la transformada de Fourier y \vec{k} es el número de onda comóvil. A partir de esta ecuación, uno puede multiplicar por \vec{k} y encontrar el campo gravitatorio (i. e., la fuerza) computando la transformada de Fourier inversa. Generalmente, este conjunto de operaciones es realizado haciendo uso de la Transformada Rápida de Fourier.

En el algoritmo TreePM se divide las escalas de rango corto y largo partiendo de la ecuación 2.20 de la siguiente forma:

$$\Phi_k \equiv \mathcal{F}(\Phi) = \Phi_k^c + \Phi_k^l \quad (2.21)$$

con

$$\Phi_k^l = -4\pi G \frac{\mathcal{F}(\rho)}{k^2} \exp(-k^2 r_s^2) \quad (2.22)$$

$$\Phi_k^c = -4\pi G \frac{\mathcal{F}(\rho)}{k^2} (1 - \exp(-k^2 r_s^2)) \quad (2.23)$$

donde l y c denotan el rango largo y corto del potencial, respectivamente. La expresión para la fuerza de corto alcance en el espacio real es:

$$\vec{f}^c(\vec{r}) = -\frac{Gm\vec{r}}{r^3} \left(\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2r_s}\right) + \frac{r}{r_s\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{4r_s^2}\right) \right) \quad (2.24)$$

donde erfc es la función de error complementaria. Puede notarse que la fuerza de corto alcance cae rápidamente para $r \gg r_s$, y por lo tanto, solo es necesario considerar regiones cercanas cuando se computa esta fuerza mediante el método Tree. Por otro lado, el potencial y la fuerza de rango largo son computados en el espacio Fourier con el método PM pero utilizando la expresión 2.22.

2.2.3 Integración de las ecuaciones de movimiento

El mecanismo empleado por Gadget-2 para realizar la evolución temporal es el método de arrastre-patada (DK, por la siglas en inglés de *Dirft-Kick*). Brevemente, este consiste en definir dos operadores: D que evoluciona solo las posiciones y K que solo lo hace con

las velocidades. Vale notar que la fuerza solo interviene en el operador K . Con estas dos funciones uno puede armar diferentes esquemas de evolución para un intervalo temporal Δt dado, por ejemplo, $D(\Delta t/2)K(\Delta t)D(\Delta t/2)$ o $K(\Delta t/2)D(\Delta t)K(\Delta t/2)$, los cuales son los más conocidos.

Hemos vistos anteriormente que es posible separar el cómputo de la fuerza de dos términos. Equivalentemente, podemos definir dos operadores K_c y K_l , los cuales actualicen las velocidades utilizando las fuerzas de rango corto y largo, respectivamente. A partir de esos se construye un operador evolución definido como:

$$U(\Delta t) = K_l(\Delta t) \left[K_c \left(\frac{\Delta t}{2m} \right) D \left(\frac{\Delta t}{m} \right) K_c \left(\frac{\Delta t}{2m} \right) \right]^m K_l(\Delta t) \quad (2.25)$$

donde m es un entero positivo. Dado que la fuerza de rango largo varía suficientemente suave con el tiempo, mientras que la fuerza de rango corto lo hace más rápidamente, el código Gadget-2 utiliza $m = 2$.

Otro de los puntos a tratar es la elección del intervalo temporal Δt . En general, éste se fija individualmente para cada partícula y es elegido inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de dicha partícula, $\Delta t \propto 1/\sqrt{|\ddot{a}|}$. Una discusión más detallada sobre este tópico está fuera del alcance de este trabajo por lo que aquel lector interesado puede dirigirse a [Springel \(2005\)](#).

La figura 4 muestra las instantáneas de la evolución temporal de una simulación cosmológica de n -cuerpos. La misma fue realizada en un volumen comóvil cúbico de $500 h^{-1} Mpc$ de lado con 1024^3 partículas empleando el código Gadget-2. Los parámetros cosmológicos utilizados corresponden a los resultados de Wmap7. Cada panel muestra la distribución de partículas dentro de una rodaja de $500 h^{-1} Mpc$ de espesor como así también el *redshift* y la edad del Universo en la instantánea. En el primer panel superior se muestra la condición inicial a partir de la cual se comenzó la integración, siendo estas generadas mediante el código [MPgraphic](#).

2.3 CONSTRUYENDO CATÁLOGOS SINTÉTICOS

Los catálogos sintéticos de galaxias son construidos a partir de simulaciones numéricas, modelados con la intención de reproducir las características generales de un catálogo real. La ventaja que presentan es que uno puede conocer con precisión las propiedades de los componentes del mismo, y además permite introducir sesgos intencionales para evaluar el funcionamiento de algún algoritmo. Así mismo, permiten realizar una comparación directa con los resultados obtenidos de los catálogos observados.

El catálogo observacional que utilizaremos es el SDSS-DR7 y, en nuestro caso, la construcción del catálogo sintético a partir de la si-

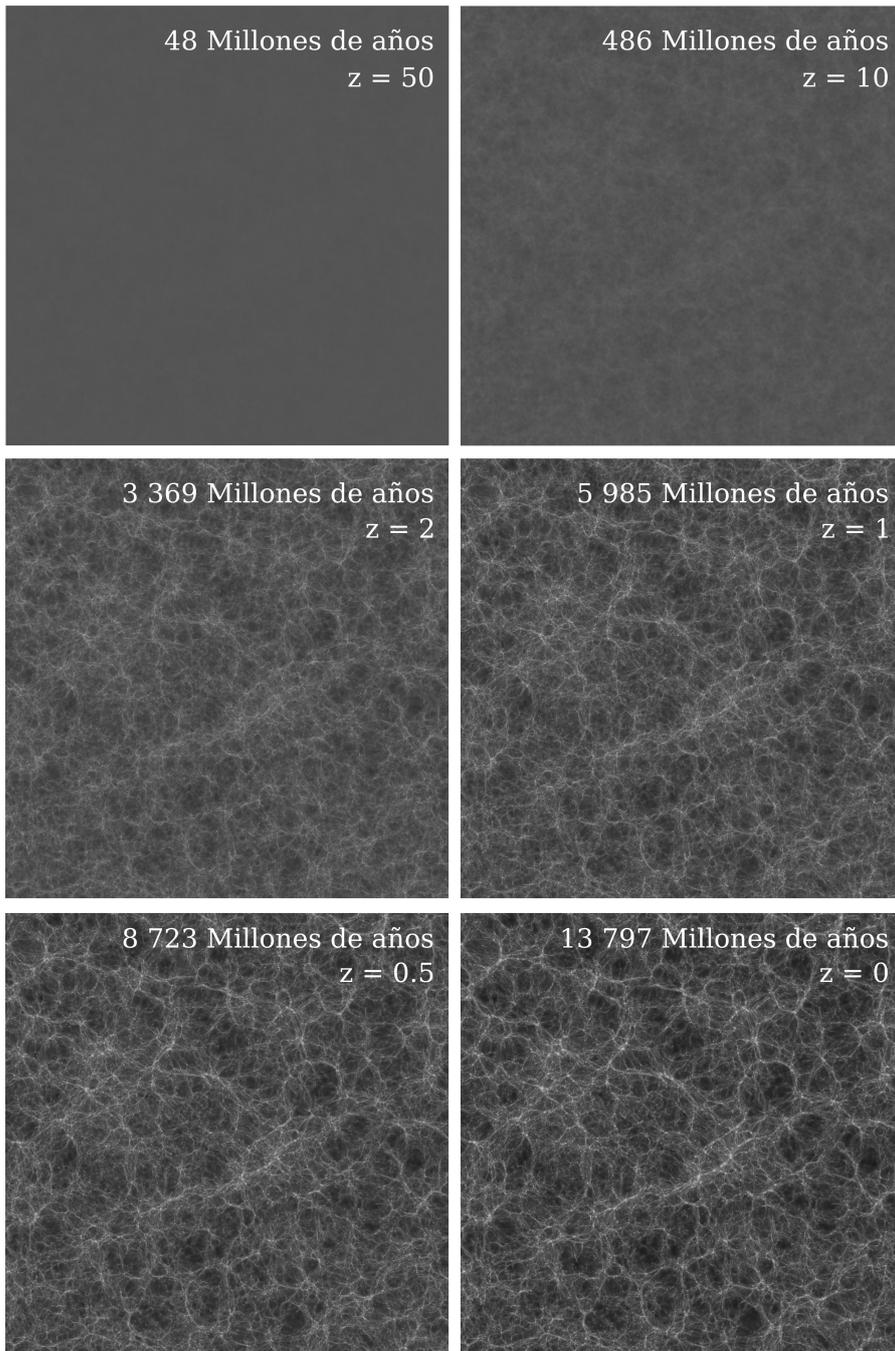


Figura 4: Evolución temporal de una simulación cosmológica de solo materia oscura en un volumen cómovil cúbico de $500 h^{-1} Mpc$ de lado con 1024^3 partículas. Los parámetros cosmológicos utilizados en la misma corresponden a los resultados de Wmap7. Cada panel muestra la distribución de partículas dentro de una rodaja de $500 h^{-1} Mpc$ de espesor como así también el *redshift* y la edad del Universo en la instantánea. Arriba a la izquierda se muestran las condiciones iniciales.

mulación numérica requiere dos pasos; uno relacionado con la geometría del catálogo observacional que deseamos reproducir y otro con las propiedades de las galaxias.

Dado que, en general, el volumen de las simulaciones numéricas es menor al volumen del Universo relevado en los catálogos, lo primero que debe realizarse es el ensamblado de sucesivos cubos de la simulación de modo de lograr generar un volumen equivalente al del catálogo. Esto puede realizarse siempre que se hayan considerado condiciones de contorno periódicas, local es una práctica corriente en simulaciones cosmológicas. Una vez realizado esto, se debe proceder a ralea la cantidad de partículas con el objetivo de reproducir la densidad numérica de galaxias. Este último valor es estimado a partir de la integral de la función de luminosidad (véase ecuación 2.9) con los parámetros de [Blanton et al. \(2003\)](#).

El paso siguiente consiste en asignarle aleatoriamente a cada partícula una magnitud en alguna banda, en nuestro caso utilizaremos la banda r de Sloan. La distribución de magnitudes debe responder a la función de luminosidad de la banda dada. Además, con el fin de reproducir los datos observacionales lo más fehacientemente posible utilizamos diferentes parámetros para dicha función, según sea el ambiente donde se encuentre la partícula. Para las partículas que se encuentran asociadas a halos de materia oscura utilizamos los parámetros provisto por [Zandivarez et al. \(2006\)](#) según la masa del halo, mientras que para las partículas que no se encuentran en grupos utilizamos los parámetros de [Blanton et al. \(2003\)](#). Por último, y dado que el catálogo real posee un corte en magnitud aparente en $m_r < 17.77$, solo deben guardarse las partículas que cumplan con esta condición.

Para imitar la distribución en el plano del cielo del catálogo real, se confecciona una máscara angular con las herramienta SDSSPix*. Esta permite fraccionar la esfera celeste en un total de $n_\eta \cdot n_\lambda \cdot r^2$ píxeles de igual área, siendo $n_\eta \cdot r$ y $n_\lambda \cdot r$ la cantidad de píxeles en la dirección de las coordenadas η y λ del catálogo, respectivamente, y r un parámetro de resolución (nosotros utilizaremos $r = 128$). Luego, comenzando con todos los píxeles *apagados*, se *prenden* aquellos que contienen al menos una galaxias. Finalmente, se debe seleccionar un punto origen dentro del volumen de la misma, y computar desde allí las coordenadas angulares de las partículas. Luego, se realiza un filtrado utilizando la máscara anteriormente construida, conservando solo aquellas partículas que se encuentran dentro de un píxel *prendido*.

En la figura 5 se muestra, para comparación, la distribución espacial de galaxias del catálogo real (porción superior) y de partículas del catálogo sintético (porción inferior). Puede observarse, en ambos casos, la notable disminución en la densidad de galaxias a *redshift* más altos.

* SDSSPix fue desarrollado por Max Tegmark, Yongzhong Xu y Ryan Scranton. <http://dls.physics.ucdavis.edu/scranton/SDSSPix/>

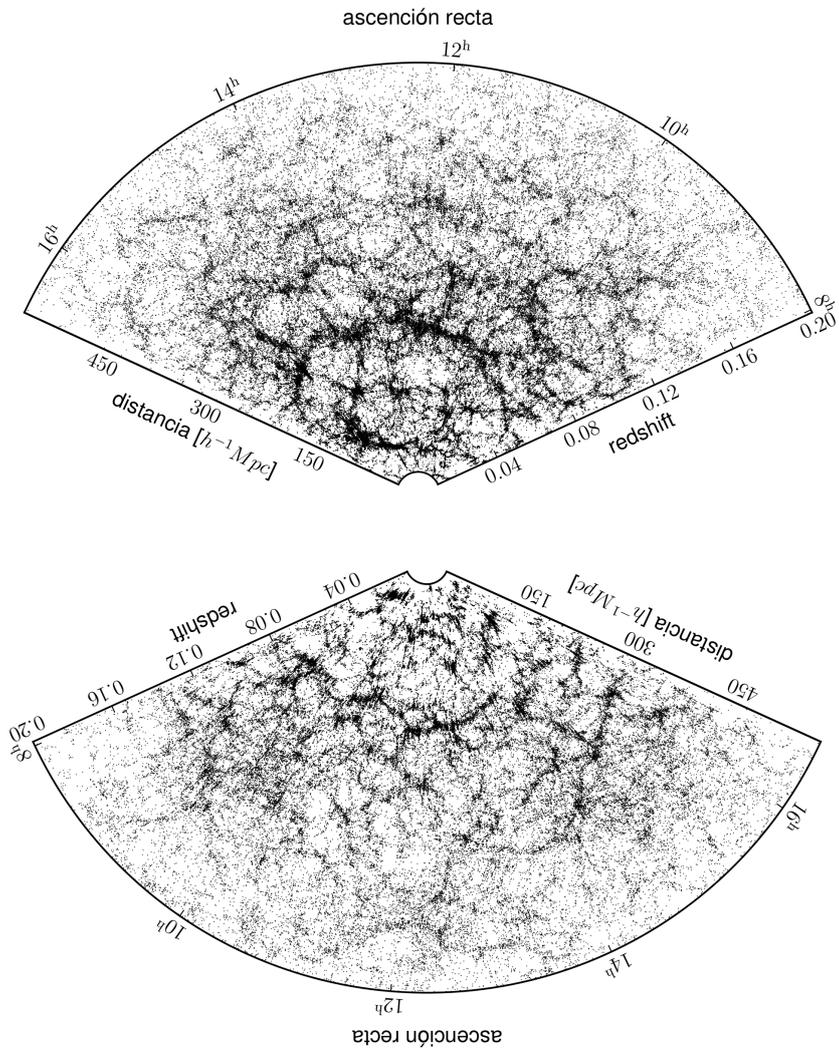


Figura 5: Gráfico de torta mostrando la distribución espacial de galaxias del catálogo real en la porción superior y de partículas del catálogo sintético en la porción inferior.

3

ESTADÍSTICAS DEL CAMPO DE DENSIDAD

Hemos visto en los capítulos anteriores la aproximación teórica y mediante simulaciones de la formación y evolución de las estructuras. En este capítulo veremos la descripción estadística de la distribución de materia en el Universo.

En gran escala el Universo ha mostrado ser homogéneo e isótropo, y por lo tanto debe esperarse que las propiedades estadísticas del mismo sean homogéneas. Más aún, las propiedades estadísticas de las fluctuaciones del campo de densidad deben ser también homogéneas en todo el Universo. Para interpretar esto, uno debe pensar al campo de densidad como un proceso estocástico, y siendo las mediciones estadísticas realizadas sobre un conjunto o ensamble de realizaciones de dicho campo de densidad, o en otras palabras, un ensamble de diferentes Universos. Claramente, en este punto se nos presenta una limitación dado que nosotros solo podemos tener acceso a una sola realización de dicho proceso estocástico (i. e., la distribución de materia que observamos hoy en día). Este inconveniente puede ser resuelto teniendo en cuenta la *Hipótesis de Ergodicidad*. Esta expresa que si uno realiza una medición estadística sobre una realización lo suficientemente grande del proceso estocástico, esto resulta equivalente a efectuar la misma estadística sobre el ensamble de realizaciones.

Generalmente asumimos que la estadística del campo de densidad es de tipo gaussiana *. Esto bien podría estar justificado por el teorema central del límite, o por el proceso inflacionario. Además las mediciones de las fluctuación del fondo cósmico de radiación muestran ser gaussianas con un alto grado de precisión. Por esta razón, en este capítulo veremos con un poco de detalle el crecimiento de las fluctuaciones en un campo de densidad gaussiano.

La Hipótesis de Ergodicidad establece que las estadísticas efectuadas sobre una realización lo suficientemente grande son equivalentes a las mismas realizadas sobre todo el ensamble de realizaciones.

3.1 ESPECTRO DE POTENCIA Y FUNCIONES DE CORRELACIÓN

El análisis estadístico del campo de densidad se realiza en función del contraste de densidad definido de la siguiente manera:

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\bar{\rho}(t)} - 1 \quad (3.1)$$

* Utilizaremos el vocablo *gaussiana* (y similares) para denotar distribuciones estadísticas de una variable aleatoria que siguen una ley de Gauss

donde $\bar{\rho}(t)$ es la densidad media del Universo en el tiempo t y $\rho(\vec{x}, t)$ es la densidad en la posición \vec{x} en el mismo instante. Según su definición, el contraste de densidad representa las fluctuaciones de densidad respecto a la densidad media de fondo, siendo $\delta > 0$ para sobredensidades y $\delta < 0$ para subdensidades.

Según el teorema de Fourier el contraste de densidad puede ser desarrollado en una serie armónica:

$$\begin{aligned}\delta(\vec{x}, t) &= \sum \tilde{\delta}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int \tilde{\delta}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d\vec{k}\end{aligned}\quad (3.2)$$

donde el volumen V debe ser lo suficientemente grande de tal forma que el Universo puede ser considerado periódico dentro de él. En general, consideramos V como un volumen cúbico de lado L , por lo tanto las condiciones de periodicidad son, por ejemplo en la dirección z , $\delta(x, y, L) = \delta(x, y, 0)$ (y similarmente para las otras componentes). Dado que $\delta(\vec{x})$ es real y tiene media cero por definición, tendremos que $\langle \tilde{\delta}(\vec{k}, t) \rangle = 0$ y $\tilde{\delta}(\vec{k}, t) = \tilde{\delta}(-\vec{k}, t)^\dagger$. Los coeficientes de Fourier $\tilde{\delta}(\vec{k}, t)$ son cantidades complejas dadas por

$$\tilde{\delta}(\vec{k}, t) = \frac{1}{V} \int_V \delta(\vec{x}, t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d\vec{x}\quad (3.3)$$

Por la conservación de la materia dentro del volumen V tenemos también que $\tilde{\delta}(\vec{k} = \vec{0}) = 0$. Notemos que en el régimen lineal de la evolución de las perturbaciones cada modo de Fourier $\tilde{\delta}(\vec{k}, t)$ satisface la ecuación de crecimiento lineal separadamente (i. e. cada modo crece independientemente de los otros, mientras que se cumpla que $\delta \ll 1$).

Las propiedades estadísticas del campo de densidad están determinadas por el conjunto infinito de funciones de correlación,

$$\begin{aligned}\langle \delta(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_2) \rangle &= \zeta_2 \\ \langle \delta(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_2) \delta(\vec{x}_3) \rangle &= \zeta_3 \\ \langle \delta(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_2) \delta(\vec{x}_3) \delta(\vec{x}_4) \rangle &= \zeta_4 \\ &\dots\end{aligned}\quad (3.4)$$

Bajo la hipótesis de que el Universo es homogéneo o isótropo, las funciones de correlación solo dependerán de la distancia relativa.

Consideremos por ejemplo la función de correlación de dos puntos, $\zeta_2(|\vec{\Delta}|) = \langle \delta(\vec{r}) \delta(\vec{r} + \vec{\Delta}) \rangle$, esta función describe cuan correlacionadas están las densidades en dos puntos separados por una distancia $\Delta = |\vec{\Delta}|$. Según la definición en la ecuación 3.4 tenemos

$$\zeta_2(\Delta) = \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{\Delta}) \rangle\quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{V} \int \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{\Delta}) d\vec{x}\quad (3.6)$$

El espectro de potencia es la transformada de Fourier de la función de correlación de dos puntos.

si introducimos la descomposición de Fourier obtenemos

$$\begin{aligned}
 \xi_2(\Delta) &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \int \tilde{\delta}(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \tilde{\delta}(\vec{q}) \exp(i\vec{q} \cdot (\vec{x} + \vec{\Delta})) d\vec{x} \\
 &= \sum_{\vec{k}} |\tilde{\delta}(\vec{k})|^2 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{\Delta}) \\
 &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int |\tilde{\delta}(\vec{k})|^2 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{\Delta}) d\vec{k}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde hemos utilizado el hecho de que

$$\frac{1}{V} \int \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d\vec{x} = \delta^D(\vec{k})$$

donde δ^D es la función delta de Dirac. La función $P(k) \equiv \langle |\tilde{\delta}(\vec{k})|^2 \rangle$ con $k = 2\pi/r$, es llamada el espectro de potencia del campo de densidad y de las ecuaciones anteriores vemos que la función de correlación de dos puntos es la transformada de Fourier del espectro de potencia.

La función de correlación de dos puntos puede ser expresada también como la probabilidad conjunta de encontrar una galaxia en un volumen δV_1 y otra en un volumen δV_2 separados por una distancia r_{12} :

$$\delta^2 P = \bar{n}^2 [1 + \xi(r_{12})] \delta V_1 \delta V_2 \tag{3.8}$$

donde \bar{n} es la densidad numérica media de galaxias por unidad de volumen. El concepto de función de correlación, establecido en estos términos, puede ser extendido al caso de de tres o más puntos.

Las funciones de correlación tienen un rol fundamental en el estudio de la distribución de materia. Y como señalamos anteriormente, si queremos utilizar estas funciones para una completa descripción de la distribución de materia debemos conocer las funciones de correlación de todos los ordenes. Así también, mediante las funciones de correlación es posible estudiar la evolución de la distribución de materia.

3.2 CAMPOS GAUSSIANOS

Un tipo importante de campos de densidad son aquellos donde $\tilde{\delta}(\vec{k})$ son variables gaussianas, esto quiere decir que tanto la parte real como la imaginaria de $\tilde{\delta}$ son distribuciones gaussianas independientes con media cero y dispersión $P(k)/2$, tal que $\langle |\tilde{\delta}|^2 \rangle = \langle |\tilde{\delta}_R|^2 \rangle + \langle |\tilde{\delta}_I|^2 \rangle = P$ (los subíndices, R e I denotan la parte real e imaginaria, respectivamente). Tales campos de densidad son llamados brevemente *campos gaussianos*.

Si escribimos la amplitud compleja como la suma de su parte real e imaginaria, $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_R + i\tilde{\delta}_I$, e introducimos la amplitud $A = (\tilde{\delta}_R^2 +$

$\tilde{\delta}_I^2)^{1/2}$ y el ángulo de fase θ , $\tan \theta = \tilde{\delta}_I / \tilde{\delta}_R$, podemos encontrar la distribución de probabilidad para A y θ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P(\tilde{\delta}_R)d\tilde{\delta}_R P(\tilde{\delta}_I)d\tilde{\delta}_I &= \frac{1}{2\pi P/2} \exp\left(-\frac{\tilde{\delta}_R^2 + \tilde{\delta}_I^2}{P}\right) d\tilde{\delta}_R d\tilde{\delta}_I \\ &= \frac{A}{2\pi P/2} \exp\left(-\frac{A^2}{P}\right) dA d\theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

de esta última ecuación puede observarse que las amplitudes de los modos de Fourier tienen una distribución gaussiana $\propto A \exp(-A^2/P)$, y las fases θ son aleatorias en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Si los modos de Fourier son gaussianos, entonces el campo de densidad en el espacio real es la suma de campos gaussianos, por lo tanto es también un campo gaussiano, con probabilidad

$$p(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) d\delta \quad (3.10)$$

Dado que $\delta > -1$ por definición, esto puede solamente funcionar cuando la dispersión $\sigma \ll 1$, es decir, que el campo puede ser gaussiano solamente para perturbaciones muy pequeñas, y a medida que las perturbaciones crecen, la estadística del campo comenzará siempre a desviarse de la gaussianidad.

Una de las propiedades más importantes de un campo gaussiano es que todas las funciones de correlación de orden más alto que 2 pueden ser computadas en término del espectro de potencia, o alternativamente de la función de correlación de dos puntos. Entonces, si el campo de densidad cosmológico fuera inicialmente gaussiano, sus propiedades estadísticas estarían completamente determinadas por el espectro de potencia inicial $P(k)$. Y como hemos ya mencionado, las fluctuaciones generadas durante la inflación muestran ser gaussianas, al menos en un alto grado de precisión. A medida que las fluctuaciones crecieron, las propiedades estadísticas de δ se fueron apartando de la gaussianidad, en particular, la distribución del campo de galaxias observado hoy no es gaussiano.

3.3 FLUCTUACIONES EN LA MASA

El método de la descomposición de Fourier puede ser utilizado para computar la variación en la masa encerrada dentro de una esfera de volumen V_W . La masa media contenida dentro de este volumen es $\bar{M} = \bar{\rho}V_W$. Para encontrar el nivel de fluctuación alrededor del valor medio, $\langle(\delta M/\bar{M})^2\rangle$, definimos una función filtro W tal que

Los campo de densidad gaussianos son completamente descritos por la función de correlación de dos puntos.

$\int W(x) dx = V_W$. Cuando este filtro es aplicado en la posición \vec{x} , la masa contenida dentro del volumen encerrado por él es:

$$M(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \quad (3.11)$$

$$= \int \bar{\rho} (1 + \delta(\vec{x}')) W(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \quad (3.12)$$

$$= \bar{\rho} \int W(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \quad (3.13)$$

$$+ \bar{\rho} \int \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \delta(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}') W(\vec{q}) \exp(i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) d\vec{x}' \quad (3.14)$$

La integral sobre \vec{x}' es $\int \exp(i(\vec{k} - \vec{q}) \cdot \vec{x}') d\vec{x}' = V \delta^D(\vec{k} - \vec{q})$, entonces

$$M(\vec{x}) = \bar{M} \left[1 + \frac{V}{V_W} \sum_{\vec{k}} \delta(\vec{k}) W(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \right] \quad (3.15)$$

Luego podemos calcular la fluctuación en la masa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{M(\vec{x}) - \bar{M}}{\bar{M}} \right)^2 \right\rangle &= \frac{1}{V} \int \left(\frac{M(\vec{x}) - \bar{M}}{\bar{M}} \right)^2 d\vec{x}' \\ &= \frac{V}{V_W^2} \int \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \delta(\vec{k}) W(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}') W(\vec{q}) \exp(i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) d\vec{x}' \\ &= \frac{V^2}{V_W^2} \sum_{\vec{k}} |\delta(\vec{k})|^2 |W(\vec{k})|^2 \\ &= \frac{V^3}{(2\pi)^3 V_W^2} \int |\delta(\vec{k})|^2 |W(\vec{k})|^2 d\vec{k} \\ &= \frac{1}{V_W^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^3 |\delta(\vec{k})|^2 V^3}{2\pi^2} |W(\vec{k})|^2 \quad (3.16) \end{aligned}$$

De esta ecuación observamos que la cantidad

$$\Delta^2(k) \equiv \frac{k^3 |\delta(\vec{k})|^2 V^3}{2\pi^2} \quad (3.17)$$

es una medida de cuanto contribuyen las perturbaciones en la escala k a la fluctuación de masa, por unidad de intervalo logarítmico en k .

3.4 EL ESPECTRO DE POTENCIA PRIMORDIAL

Una vez creadas las fluctuaciones iniciales podemos seguir su evolución mediante la teoría lineal de perturbaciones, al menos en sus primeros estadios. El espectro de potencia primordial establece cual era la distribución de dichas fluctuaciones en el campo de densidad

de Universo primigenio. En consecuencia, es necesario, para el estudio de formación de estructura, conocer el espectro primordial.

Escribamos el espectro de potencia primordial como $P(k, t \rightarrow 0) \equiv P(k)$. Si asumimos que no existe una escala privilegiada, entonces bien podemos suponer que el espectro de potencia inicial tiene la forma funcional de una ley de potencia

$$P(k) \propto k^n \quad (3.18)$$

donde el índice n establece el balance entre pequeña y gran escala. La homogeneidad asintótica requiere que $n > -3$, dado que, en caso contrario, el universo sería altamente heterogéneo en gran escala. Por otro lado, un argumento debido a Zel'dovich establece que $n < 4$, dado que, de otra forma, el Universo habría sido muy heterogéneo en sus etapas primitivas. Este espectro es conocido como *espectro mínimo*. Un caso particular es el valor de $n = 0$ el cual corresponde al ruido blanco, representando la misma potencia para todas las longitudes de onda o escalas.

El más importante de todos es el espectro de potencia invariante de escala, también conocido como espectro de Harrison-Zel'dovich, que corresponde al valor de $n = 1$. Para este espectro en particular, el Universo es autosimilar en el sentido que luce siempre igual a cualquier escala que se lo observe. Para ver un poco más detalladamente esto consideremos una esfera comóvil de radio R , y masa típica $M \propto R^3$. Con un espectro de potencia $P(k) \propto k^n$, las fluctuaciones en masa serán según la ecuación 3.16

$$\langle (\delta M/M)^2 \rangle = \int_0^{1/R} P(k) k^2 dk \sim M^{-(n+3)/3} \quad (3.19)$$

Las correspondientes fluctuaciones en el potencial son del orden de

$$\delta\phi \sim \frac{\delta M}{M} \sim M^{-(n+3)/3} M^{2/3} \sim M^{(1-n)/6} \quad (3.20)$$

Entonces, para $n = 1$, las fluctuaciones en el potencial son independientes de la escala.

Otra forma de ver que $n = 1$ corresponde a un espectro de potencia invariante de escala, es considerar las amplitudes de las fluctuaciones al momento en que ellas entran al Horizonte, definido como $c \cdot t$, donde t es la edad del universo. La varianza de las fluctuaciones en densidad en un camino de tamaño comóvil x_f es

$$\langle (\delta\rho/\rho)^2 \rangle = t^2 \int_0^{1/x_f} P(k) k^2 dk \sim t^2 x_f^{-(n+3)} \quad (3.21)$$

donde hemos usado el hecho de que las fluctuaciones crecen como $\delta \propto a^2 \propto t$ fuera del horizonte durante la era dominada por la radiación. Cuando las fluctuaciones entran al horizonte $ax_f = ct$ o $x_f \propto t/a \propto t^{1/2}$ dado que $a = t^{1/2}$ en la época de la radiación. Luego,

al momento de ingresar al Horizonte, la amplitud de las fluctuaciones es proporcional a $x_f^4 x_f^{-(n+3)} = x_f^{1-n}$, por lo que x_f es independiente de la escala cuando $n = 1$.

Hemos asumido que los efectos de presión y cualquier otro proceso astrofísico son despreciables durante la evolución gravitacional de las perturbaciones. Ahora bien, la composición particular de cualquier tipo de materia constituyente del Universo o, incluso, los parámetros cosmológicos del modelo de Universo que estemos utilizando, pueden suprimir el crecimiento de las perturbaciones. Esta disminución puede verse reflejada en diferentes escalas del espectro de potencia. La información necesaria sobre el contenido de materia y los parámetros cosmológicos los expresamos mediante la función de transferencia $T(k, t)$.

Para construir la función de transferencia lo primero que debemos hacer es especificar el modo de las perturbaciones. En cosmología existen dos alternativas relevantes, que son la adiabática y la isocurvatura. La primera involucra fluctuaciones acopladas de materia y radiación de modo que la entropía tiene variación espacial nula; mientras que la segunda, tiene fluctuación neta nula en la densidad de energía e involucra fluctuaciones en la entropía. En general asumimos fluctuación adiabáticas que son las predichas según el modelo de inflación y son la base de los modelos cosmológicos más aceptados.

Existen varios procesos que pueden modificar la forma primordial del espectro de potencia. Por ejemplo, el crecimiento de la estructura inhibido por la presión en escalas más pequeñas que la longitud de la onda acústica que predice la teoría de inestabilidad de Jeans. La radiación y partículas relativistas podrían causar supresión cinemática de crecimiento. El acoplamiento imperfecto de fotones y bariones puede causar la disipación de las perturbaciones en el componente bariónico. El efecto neto de esos procesos, para el caso de un campo de fluctuaciones inicialmente gaussiano, es cambiar la forma del espectro de potencia original que describimos con la función de transferencia que relaciona el espectro de potencia procesado $P(k)$ con su forma primordial $P_0(k)$ mediante la ecuación $P(k, t) = P_0(k) \cdot T^2(k, t)$.

Conociendo el espectro de potencia en un dado momento t_0 , podemos utilizar la teoría lineal para computar el espectro de potencia en cualquier tiempo posterior t , $P(k, t) = T^2(k, t)P(k, t_0)$. Dado que cada modo de Fourier evoluciona independientemente, la función $T(k, t)$ no dependerá de la forma real de la función $P(k, t_0)$. Además, dado que $P(k) = \langle |\delta(k)|^2 \rangle$, T también específica como crece δ , $\delta(k, t) = T(k, t)\delta(k, t_0)$. Y si el campo de fluctuaciones iniciales es gaussiano, entonces las propiedades estadísticas de este están completamente determinadas por $P(k, t) = T^2(k, t)P(k, t_0)$, y así $T(k, t)$ y $P(k, t_0)$ proveen una descripción completa de cómo la estructura evoluciona en el régimen lineal.

3.5 EL MODELO DE HALOS

Como hemos observado anteriormente, el modelo de [Press & Schechter \(1974\)](#) para la función de masa de los halos de materia oscura presupone que toda la materia se encuentra agrupada en estas estructuras, en otras palabras, toda la masa del Universo se encuentra aglomerada en objetos virializados que conocemos como halos. Este es el punto de partida para el modelo de halos que ha sido desarrollado por diferentes autores (véase por ejemplo, [Seljak, 2000](#); [Peacock & Smith, 2000](#); [Ma & Fry, 2000](#)). Además, este modelo posee dos hipótesis fundamentales más: la primera es que la función de correlación en escalas pequeñas está dominada por la distribución de materia dentro de los halos, es decir, por su perfil de densidad; y la segunda, que en escalas grandes, la evolución del espectro de potencia primordial puede ser calculada mediante la teoría lineal y, por lo tanto, la correlación en aquellas escalas es bien descrita por los resultados de esta modulados por los factores de sesgos de los halos.

Los «ingredientes» para construir el modelo de halos son: la función de masa de los halos de materia oscura, su perfil de densidad y el espectro de potencia lineal. A continuación veremos la «receta» para combinar estos elementos y obtener como producto el modelo de halos que describe la estructura en gran escala del Universo.

La hipótesis de que toda la masa está contenida en halos implica que la densidad de materia en un punto \vec{x} dado del espacio está dada por la suma de las contribuciones de los perfiles de densidad de cada uno ellos a dicho punto:

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}) &= \sum_i \rho(\vec{x} - \vec{x}_i | m_i) \equiv \sum_i m_i u(\vec{x} - \vec{x}_i | m_i) \\ &= \sum_i \int \delta(m - m_i) \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i) m u(\vec{x} - \vec{x}') d m d^3 x'\end{aligned}\quad (3.22)$$

donde \vec{x}_i y m_i indican la posición y la masa del i -ésimo halo, respectivamente. En la segunda igualdad hemos utilizado el artilugio matemático de integrar funciones delta de Dirac:

$$\int \delta(x' - x) f(x') dx' = f(x) \quad (3.23)$$

Vale hacer notar que hemos asumido que el perfil de densidad de los halos está determinado exclusivamente por su masa, suposición que, como veremos más adelante, puede no ser del todo correcta.

Nos harán falta construir dos cantidades. Una de ellas es la densidad numérica de halos de masa m la cual viene dada por la expresión

$$n(m) = \left\langle \sum_i \delta(m - m_i) \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \right\rangle \quad (3.24)$$

donde $\langle \dots \rangle$ denota promedio sobre un conjunto de universos. Y la segunda, la densidad media de materia la cual puede obtenerse a través de la ecuación

$$\bar{\rho} = \left\langle \sum_i m_i u(\vec{x} - \vec{x}_i | m_i) \right\rangle \quad (3.25)$$

Haciendo uso de la Hipótesis de Ergodicidad que mencionamos al principio del capítulo en la página 49 y de la ecuación 3.24, podemos reescribir la última ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \int n(m) m \, dm \int u(x - x' | m) \, d^3 x' \\ &= \int n(m) m \, dm \end{aligned} \quad (3.26)$$

Considerando la expresión para el espectro de potencias que obtenemos de la teoría lineal, tenemos las expresiones matemáticas de todos los ingredientes. Con estos elementos podemos computar, entonces, la función de correlación para la distribución de materia a partir de su definición

$$\begin{aligned} \xi(\vec{r}) &= \left\langle \left(\frac{\rho(\vec{x})}{\bar{\rho}} - 1 \right) \left(\frac{\rho(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{\rho}} - 1 \right) \right\rangle \\ &= -1 + \left\langle \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{\rho}^2} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

Reemplazando con la definición de la densidad dada en la ecuación 3.22, podemos escribir la anterior expresión de la siguiente manera

$$\xi(\vec{r}) = -1 + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left\langle \sum_i m_i u(\vec{x} - \vec{x}_i | m_i) \sum_j m_j u(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_j | m_j) \right\rangle \quad (3.28)$$

Notemos que, en esta ecuación, del producto de los dos sumatorios habrán términos para los cuales $i = j$ (i. e., factores pertenecientes al mismo halo) y otros donde $i \neq j$ (i. e., factores en halos distintos). Haciendo esta distinción podemos separar la última ecuación en dos partes

$$\begin{aligned} \xi(\vec{r}) &= -1 + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left\langle \sum_i m_i^2 u(\vec{x} - \vec{x}_i | m_i) u(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_i | m_i) \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left\langle \sum_i m_i u(\vec{x} - \vec{x}_i | m_i) \sum_{j \neq i} m_j u(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_j | m_j) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.29)$$

Luego, podemos expresar la función de correlación como la suma de dos términos

$$\xi(\vec{r}) = \xi^{1h}(\vec{r}) + \xi^{2h}(\vec{r}) \quad (3.30)$$

donde

$$\begin{aligned}\zeta^{1h}(\vec{r}) &= \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left\langle \sum_i m_i^2 u(\vec{x} - \vec{x}_i | m_i) u(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_i | m_i) \right\rangle \\ &= \int \frac{m^2 n(m)}{\bar{\rho}^2} dm \int u(\vec{y} | m) u(\vec{y} + \vec{r} | m) d^3 y\end{aligned}\quad (3.31)$$

y

$$\begin{aligned}\zeta^{2h}(\vec{x} - \vec{x}') &= -1 + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left\langle \sum_i m_i u(\vec{x} - \vec{x}_i | m_i) \sum_{j \neq i} m_j u(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_j | m_j) \right\rangle \\ &= \int \frac{m_1 n(m_1)}{\bar{\rho}} dm_1 \int \frac{m_2 n(m_2)}{\bar{\rho}} dm_2 \int u(\vec{x} - \vec{x}_1 | m_1) d^3 x_1 \\ &\quad \times \int u(\vec{x}' - \vec{x}_2 | m_2) \zeta_{hh}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1 | m_1, m_2) d^3 x_2\end{aligned}\quad (3.32)$$

en esta última ecuación, $\zeta_{hh}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1 | m_1, m_2)$ representa la correlación entre halos de masa m_1 y m_2 .

En escalas grandes, donde el sesgo de los halos de materia oscura es determinista, (i. e., existe una relación lineal entre la distribución de materia y de halos), es de esperar que

$$\zeta_{hh}(\vec{r} | m_1, m_2) \simeq b(m_1) b(m_2) \zeta(\vec{r}) \quad (3.33)$$

donde $b(m_1)$ y $b(m_2)$, son el sesgo para los halos de masa m_1 y m_2 , respectivamente (ecuación 1.110). De esta manera $\zeta(\vec{r})$ puede sacarse fuera de las integrales sobre m_1 y m_2 , separando las dos integrales. Las relaciones de consistencia 1.118 garantizan que estas integrales son iguales a la unidad, lo cual implica que en escalas mucho más grandes que los halos $\zeta^{2h}(\vec{x}) = \zeta(\vec{x})$. Si además hacemos la aproximación de que en escalas grandes $\zeta(\vec{r}) \simeq \zeta^{lin}(\vec{x})$, se obtiene que en escalas grandes el término de dos halos es muy sencillo, $\zeta^{2h}(\vec{r}) \simeq \zeta^{lin}(\vec{x})$.

3.5.1 El modelo de halos en el espacio de Fourier

Dado que el modelo para la función de correlación involucra productos de convolución de los perfiles de densidad, resulta mucho más sencillo trabajar en el espacio de Fourier donde las convoluciones se convierten en productos simples de las transformadas de los perfiles de densidad. Si realizamos las transformadas de Fourier de las ecuaciones 3.34 y 3.35 se encuentra que

$$P(\vec{k}) = P^{1h}(\vec{k}) + P^{2h}(\vec{k}) \quad (3.34)$$

donde

$$P^{1h}(\vec{k}) = \int dm n(m) \left(\frac{m}{\bar{\rho}} \right)^2 |u(\vec{k} | m)|^2 \quad (3.35)$$

$$P^{2h}(\vec{k}) = \int dm_1 n(m_1) \left(\frac{m_1}{\bar{\rho}} \right) u(\vec{k}|m_1) \\ \times \int dm_2 n(m_2) \left(\frac{m_2}{\bar{\rho}} \right) u(\vec{k}|m_2) P_{hh}(\vec{k}, m_1, m_2) \quad (3.36)$$

donde $P_{hh}(\vec{k}, m_1, m_2)$ es el espectro de potencia de los halos de masa m_1 y m_2 . Siguiendo el análisis de la sección anterior podemos plantear que

$$P_{hh}(\vec{k}, m_1, m_2) \simeq b(m_1)b(m_2)P^{lin}(\vec{k}) \quad (3.37)$$

3.6 EL MODELOS DE HALOS Y LA DISTRIBUCIÓN DE GALAXIAS

Es bien conocido que la función de correlación bipuntual angular $\omega(\theta)$ o proyectada $\zeta(\sigma)$ es bien descrita por una ley de potencia. En contraste, los modelos de materia oscura fría indican que la función de correlación de dos puntos o el espectro de potencia de la materia oscura no se comporta como una ley de potencia, como hemos visto en secciones anteriores. Ahora bien, ¿de dónde proviene esta diferencia?. [White & Rees \(1978\)](#) establecieron que la componente bariónica gaseosa puede solo enfriarse y formar estrellas si se encuentra en el pozo de potencial de materia oscura. Como resultado de esto, es de esperarse que todas las galaxias se encuentren embebidas en halos de materia oscura. Los halos más masivos podrían contener muchas galaxias, en cuyo caso es natural asociar las posiciones de las galaxias con subhalos distribuidos dentro del halo principal; por otro lado, halos con masa típicamente baja, podrían no contener galaxias; pero no existen galaxias que no se encuentren en halos. En este marco, las propiedades de la distribución de galaxias están determinadas por la velocidad en que el gas se enfría, la tasa de formación de estrellas, y los efectos de la evolución estelar, procesos que dependen de la masa del halo y de su momento angular. Dentro del contexto del modelo de halos es posible establecer por qué difiere la función de correlación de las galaxias de la función de correlación de la materia oscura.

El ingrediente necesario para obtener una descripción de la distribución de galaxias es conocer la distribución de probabilidad $P(N_g|m)$ de que un halo de masa m contenga N_g galaxias. Esta función se conoce como Distribución de Ocupación de Halos ([DOH](#)). Mediante el conocimiento de los primeros momentos de esta distribución puede obtenerse una expresión para el espectro de potencia, dada por

$$P_g(\vec{k}) = P_g^{1h}(\vec{k}) + P_g^{2h}(\vec{k}) \quad (3.38)$$

Siendo el término de 1-halo:

$$P_g^{1h}(\vec{k}) = \int dm n(m) \frac{\langle N_g(N_g - 1) | m \rangle}{\bar{n}_g} |u_g(\vec{k}|m)|^p \quad (3.39)$$

donde el superíndice p puede tomar dos valores. Cuando el número de pares es grande, es decir $\langle N(N - 1) \rangle > 1$, tomamos $p = 2$,

siendo en este caso la correlación dominada por galaxias satélites, y por el contrario, cuando $\langle N(N-1) \rangle < 1$ la parte dominante es la correlación entre la galaxia central y una galaxia satélite, en este caso tomamos $p = 1$. Mientras que el término de 2-halos es

$$P_g^{2h}(\vec{k}) = P^{lin}(\vec{k}) \left[\int dm n(m) b_1(m) \frac{\langle N_g|m \rangle}{\bar{n}_g} u_g(\vec{k}|m) \right]^2 \quad (3.40)$$

donde $u_g(\vec{k}|m)$ es la transformada de Fourier normalizada del perfil de densidad de las galaxias dentro de un halo de masa m , el cual asumimos es el mismo que el de la masa $u(\vec{k}|m)$, y \bar{n}_g es la densidad media de galaxias calculada como

$$\bar{n}_g = \int dm n(m) \langle N_g|m \rangle \quad (3.41)$$

Las ecuaciones 3.39 y 3.40 expresan el modelo de halos para la transformada de fourier de la función de autocorrelación de la distribución de galaxias y deben ser utilizadas cuando se desean comparar los resultados analíticos con aquellos extraídos de los catálogos reales.

Cabe notar que no hemos realizado ninguna suposición sobre las galaxias empleadas en el cálculo de la función de correlación. Si uno quisiera estimar la correlación para una muestra particular de galaxias (por ejemplo, galaxias de diferentes colores, etc.) debe modificar el número medio de galaxias \bar{n}_g , el perfil u_g y la distribución de ocupación $\langle N_g|m \rangle$ convenientemente.

Parte II

ANISOTROPÍAS EN EL UNIVERSO

La segunda parte abarca el trabajo de tesis propiamente dicho. Comenzamos describiendo el algoritmo para identificación de subestructuras que hemos desarrollado y la comparación de su desempeño en contraste con otros identificadores. Las secciones siguientes están dedicadas al núcleo del trabajo, el cual trata sobre las anisotropías en la distribución de materia alrededor de halos de materia oscura y grupos de galaxias. Así mismo, presentamos una extensión del Modelo de Halos clásico, la cual permite cuantificar, a través de ciertos parámetros, las anisotropías observadas en la función de correlación cruzada.

4

IDENTIFICACIÓN DE ESTRUCTURAS EN SIMULACIONES NUMÉRICAS

4.1 ALGORITMOS PARA IDENTIFICAR ESTRUCTURAS EN SIMULACIONES NUMÉRICAS

Una de las principales herramientas para analizar una simulación, ya sea cosmológica o de volumen reducido, es la rutina utilizada para distinguir las estructuras que serán los objetos de análisis para los estudios que se quieran realizar. En general, el algoritmo utilizado para tal fin debe ser capaz de identificar objetos ligados gravitacionalmente y, en lo posible, aislar las estructuras de diferentes jerarquía (i. e., identificar subestructuras dentro de estructuras mayores).

Diferentes métodos han sido propuestos para cumplir con dicho objetivo, cada uno de los cuales utiliza una técnica diferente y/o ha sido diseñado para identificar estructuras particulares de interés para el desarrollador. En rasgos generales se pueden distinguir aquellos identificadores que operan directamente sobre las partículas de materia oscura de una simulación de n-cuerpos y aquellos que identifican estructuras calculando el campo de densidad representado por las partículas. Por otro lado existen identificadores que solo trabajan sobre las posiciones de las partículas y aquellos que además utilizan la información respecto a la velocidad de las mismas (i. e., el espacio de las fases). Un resumen de los identificadores de estructuras y subestructuras más relevantes puede encontrarse en el apéndice B.

El desarrollo de herramientas propias, si bien puede requerir invertir mucho tiempo extra en ello, siempre conlleva múltiples beneficios. Particularmente permite, no solo contar con un código libre, modificable y comprensible, sino que también uno logra adentrarse en las dificultades propias del problema que está tratando abordar. Específicamente, la identificación de estructuras y subestructuras en simulaciones numéricas posee varios puntos que deben ser tratados con el cuidado necesario para poder extraer los objetos que son de interés. Algunos de los puntos son: la geometría utilizada para identificar los halos, el criterio utilizado para *limpiar* dicho halos de partículas gravitacionalmente no-ligadas, el modo en que el campo de densidad es refinado para identificar subestructuras, etc.

En este contexto y motivados por la necesidad de contar con una herramienta propia para la identificación de subestructuras en simulaciones numéricas, nos dispusimos a desarrollar un código para tal fin. En pocas palabras, nuestro método consiste en la identificación de picos de sobredensidad mediante la aplicación sucesiva del método clásico de FoF donde en cada uno de los pasos disminuimos la longitud de vínculo. De este modo, cada halo de materia oscura es descompuesto en una subestructura principal (i. e. la de mayor masa), un conjunto de subestructuras menores y un conjunto de partículas libres. Estas últimas son identificadas como partículas que han sido asignadas dentro de un grupo pero que no se encuentran ligadas gravitacionalmente. Para ello, en cada nivel del procedimiento, analizamos cada uno de los subhalos identificados con el fin de remover partículas haciendo uso de un criterio basado en la energía de las mismas.

4.2 MENDIETA: DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

El procedimiento base del algoritmo que desarrollamos es el clásico método de FoF (del inglés *Friends-of-Friends*, amigos de los amigos). Originalmente propuesto por [Huchra & Geller \(1982\)](#) para identificar grupos de galaxias, este algoritmo consiste en agrupar conjuntos de partículas (como pueden ser las de una simulación de n-cuerpos del universo o las galaxias de un catálogo) las cuales se encuentran separadas por una distancia igual o menor a una longitud de vínculo dada y que representa el único parámetro libre del método.

En simulaciones numéricas la longitud de vínculo es definida como una fracción de la distancia media entre partículas la cual es fijada a partir del valor de la sobredensidad que se desee aislar. La densidad en un punto dado es proporcional a la separación media entre partículas en dicho punto, $\rho \propto 1/\bar{l}^3$, de este modo la longitud de vínculo establece la densidad de la superficie que encierra a la región sobredensa. Consecuentemente, la densidad media en todo el volumen de dicha región dependerá del perfil de densidad que posea el objeto. Esto último puede ser un problema, en el marco del modelo de colapso esférico, si el perfil de densidad de las estructuras identificadas no es universal o la concentración de los objetos depende de la masa de los mismos ([More et al., 2011](#)). Comúnmente el valor de dicho parámetro se fija igual a 0.2, lo cual representa un valor de densidad igual a ≈ 81 veces la densidad media de materia en el Universo ([More et al., 2011](#)).

Dada esta introducción al método de identificación FoF, el algoritmo MENDIETA puede describirse en 6 pasos los cuales son aplicados iterativamente para lograr identificar estructuras de diferentes jerarquía:

- I - Para comenzar se realiza una identificación de halos de materia oscura utilizando el método FoF utilizando una longitud de

vínculo igual a b_{FoF} veces la separación media entre partículas. Una vez finalizada la identificación, solo se conservan aquellos halos con más de N_T de partículas.

- II - Sobre cada uno de los halos se realiza una segunda identificación con una longitud de vínculo más pequeña con el objetivo de aislar sobredensidades locales dentro de cada uno de ellos. Finalizado este paso, cada uno de los halos es disgregado en un conjunto de subhalos más un grupo de partículas que no han sido asociadas a ninguna subestructura (partículas libres).
- III - Todas las partículas pertenecientes a subhalos con menos de N_T miembros y todo el conjunto de partículas libres son asociadas al subhalo principal definido como el subhalo más masivo.
- IV - Para cada subhalo, se identifican las partículas cuya energía total E sea positiva, esto es: para cada partícula perteneciente al subhalo A se calcula su energía potencial E_p (teniendo en cuenta la contribución de todas las partículas pertenecientes al mismo subhalo A y su energía potencial interna) y su energía cinética E_c respecto al centro del mismo subhalo (para lo cual se calcula la velocidad relativa de cada partícula a la velocidad del centro de masa y se le adiciona la velocidad correspondiente al flujo de Hubble), siendo $E = E_p + E_c$. Aquellas partículas con $E > 0$ son removidas y reasignadas al subhalo principal. Si durante este proceso, algún subhalo queda con menos de N_T partículas, dicha estructura es removida del catálogo de subhalos y todas sus partículas son asignadas al subhalo principal.
- V - El mismo criterio de energía es aplicado a la subestructura principal. En este caso todas las partículas no ligadas son marcadas como partículas libres.
- VI - El catálogo de subhalos resultante es utilizado como una nueva entrada y todo el procedimiento es repetido desde el paso II un número N_S de veces.

4.2.1 Aplicación

Con el fin de comprobar el funcionamiento de nuestro algoritmo utilizamos una simulación de materia oscura. La misma fue realizada haciendo uso del código público GADGET2 (Springel, 2005) con los siguientes parámetros cosmológicos $\Omega_M = 0.2383$, $\Omega_\Lambda = 0.7627$, $\sigma_8 = 0.761$, y $h = 0.732$ consistentes con los resultados de WMAP3 (Spergel et al., 2007). El número total de partícula empleado fue de 256^3 en un volumen comóvil cúbico de $60h^{-1}Mpc$ de lado. Con estas particularidades la masa por partícula es $m_p = 8.56 \times 10^8 h^{-1} M_\odot$. La longitud de suavizado para el cálculo de las fuerzas fue $\epsilon = 7h^{-1}kpc$.

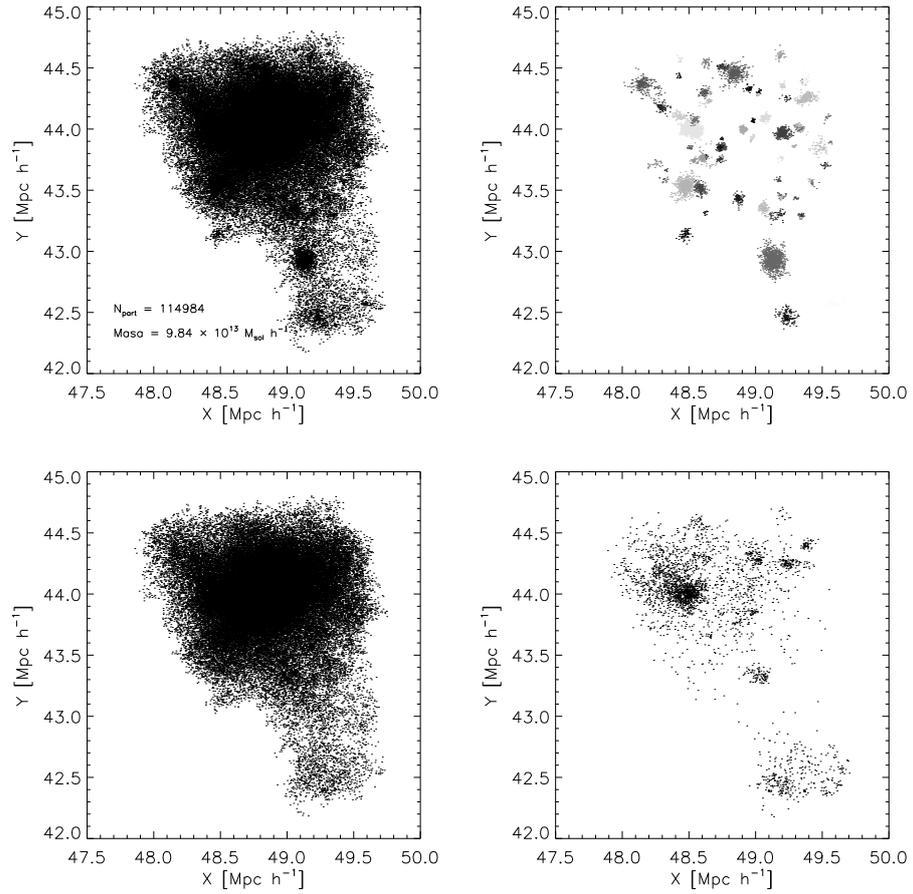


Figura 6: Ejemplo de identificación de subhalos. El panel superior izquierdo muestra el halo FoF (114984 partículas - $9.84 \times 10^{13} h^{-1} M_{\odot}$) a $z = 0$. En el panel inferior izquierdo se muestra el subhalo principal, mientras que los restantes 73 subhalos identificados se muestran en el panel superior derecho. En el panel inferior derechos se muestran las posiciones de las partículas que no han sido ligadas a ninguna subestructura (i. e. partículas libres).

Identificamos todos los halos de materia oscura con al menos $N_T = 10$ partículas en la última salida de la simulación. Para esto utilizamos una implementación en OpenMP del método clásico FoF con una longitud de vínculo b_{FoF} igual a 0.2 veces la separación media entre partículas. En total fueron identificados 51010 halos sobre los cuales aplicamos nuestro algoritmo para identificar subestructuras. Elegimos $N_S = 9$ pasos con las longitudes de vínculo equiespaciadas entre 0.9 y 0.1 veces b_{FoF} . El número de pasos N_S y la separación entre las longitudes de vínculo son parámetros libres en nuestro algoritmo. Con el fin de determinar su influencia, analizamos la misma simulación empleando $N_S = 20$ y las longitudes de vínculo espaciadas logarítmicamente. No se encontraron diferencias significativas. Para los subhalos aplicamos el mismo corte $N_T = 10$ en el número mínimo de partículas.

En cuanto al código, el mismo está escrito en lenguaje C y hacemos uso de la biblioteca OpenMP con el fin de aprovechar la mayor cantidad posible de núcleos de procesamiento que tiene el ordenador con el objetivo de reducir el tiempo total de cómputo. Existen dos grandes regiones las cuales son

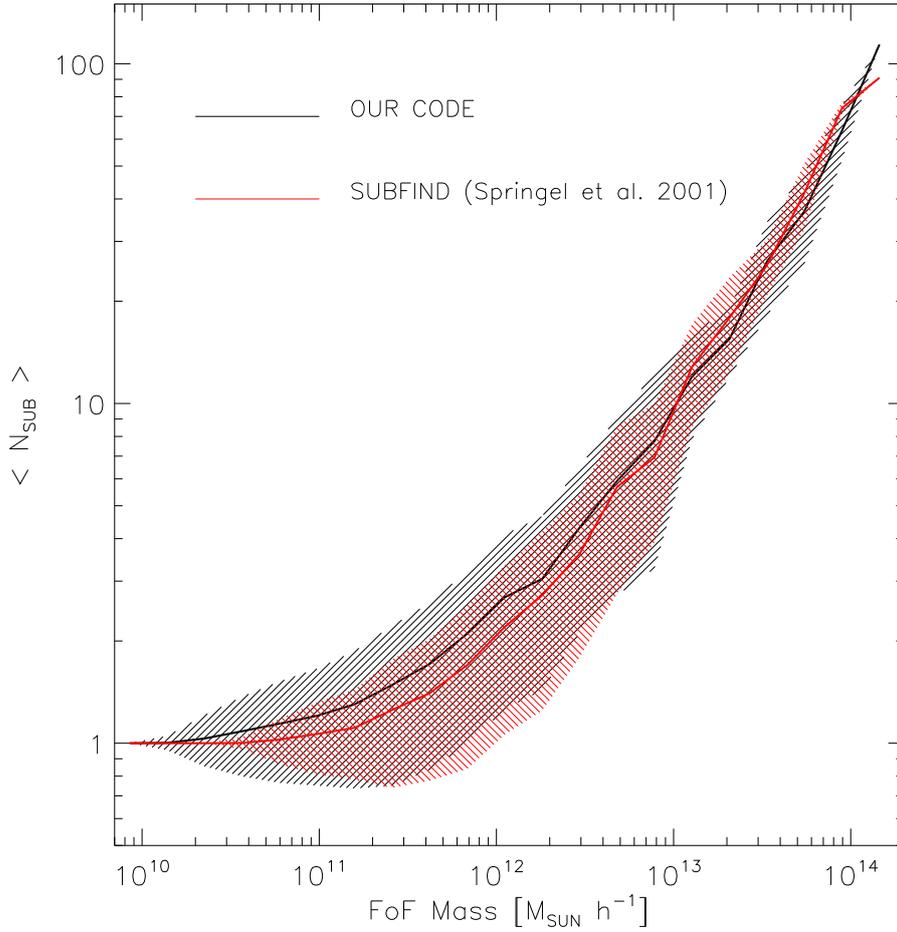


Figura 7: Número medio de subestructuras como función de la masa del halo FoF a $z = 0$. La línea negra muestra los resultados obtenidos con nuestro código, mientras que la línea roja muestra los obtenidos con el código SUBFIND (Springel et al., 2001b), ambos códigos aplicados sobre la misma simulación. Las regiones sombreadas representan el nivel de confianza de $1 - \sigma$

paralelizadas: el proceso de identificación y el procedimiento de desvinculación de partículas no ligadas gravitacionalmente.

La figura 6 muestra, como ejemplo, los resultados obtenidos para un halo con 114984 partículas ($9.84 \times 10^{13} h^{-1} M_{\odot}$). En el panel superior izquierdo se muestra el halo completo. El subhalo principal ($\sim 90\%$ de la masa del halo) se muestra en el panel inferior izquierdo. Los restantes 73 subhalos encontrados ($\sim 7\%$ de la masa total) son mostrados en el panel superior derecho, mientras que las partículas libres (el restante $\sim 3\%$) en el panel inferior derecho. Como puede observarse la mayoría de las subestructura han sido resueltas satisfactoriamente.

La figura 7 muestra de manera comparativa el número medio de subhalos en función de la masa del halo. La comparación se realiza entre nuestro código (línea negra) y el código, diseñado para el mismo propósito, SUBFIND (línea roja) (Springel et al., 2001a). Las regiones sombreadas representan el nivel de confianza a 1σ . Puede apreciarse que existe un buen acuerdo

entre los dos algoritmos, aún cuando las dos técnicas de identificación son sustancialmente diferentes.

4.2.2 Comparación con otros identificadores

Durante el año 2011 fuimos invitados a participar del proyecto *Subhaloes going Notts* * cuyo objetivo fue la comparación de diferentes identificadores de subestructuras. En síntesis, participaron un total de 11 algoritmos y las identificaciones se realizaron sobre el conjunto de simulaciones Aquarius-A. Estas forman parte del conjunto de simulaciones del proyecto Aquarius (Springel et al., 2008), el cual consiste en un conjunto de múltiples resimulaciones de un halo de materia oscura similar al de la Vía Láctea. Los parámetros cosmológicos utilizados para realizar las simulaciones son los mismo que los utilizados para la conocida simulación Millennium (Springel et al., 2005), i. e. $\Omega_M = 0.25$, $\Omega_\Lambda = 0.75$, $\sigma_8 = 0.9$, $ns = 1$, $h = 0.73$, y todas las simulaciones fueron comenzadas a redshift 127. La serie A provee 5 niveles de resolución variando en complejidad desde 2.3 millones de partículas en la resolución más baja (nivel 5) hasta 4.25 mil millones de partículas en la resolución más alta (nivel 1). Para más detalles y precisiones en cuanto a dichas simulaciones véase Springel et al. (2008).

Para poder realizar una comparación robusta y uniforme, se realizó un post-procesado común sobre los resultados de cada uno de los algoritmos. Tal proceso fue realizado garantizando que la jerarquía de subestructuras encontrada por cada identificador fuera conservada, pero al mismo tiempo, cada partícula perteneciera a solo una estructura. Además, para cada uno de los subhalos, fueron computadas diferentes propiedades. El centro de masa fue determinado a través de un procedimiento iterativo donde en cada paso el centro fue redefinido hasta que el corrimiento del mismo de un paso al siguiente fuese menor a la longitud de suavizado de la simulación. Una vez definido el centro, todas las partículas son ordenadas en distancia respecto a este, y se computó la curva de rotación definida como $GM(< r)/r$, como así también la sobredensidad $M(< r)/(4\pi r^3/3)$, esta última computada hasta que la misma cayera por debajo de 200 veces la densidad crítica del Universo ρ_{crit} y de esta forma definiendo el radio R_{200} y la masa M_{200} del subhalo. Otra de las propiedades calculadas fue la velocidad de rotación máxima v_{max} , computada suavizando la curva de rotación y encontrando el máximo de la misma.

Los resultados del proyecto *Subhaloes going Notts* fueron publicados en diversos artículos, y a continuación mostramos sucintamente los resultados más relevantes.

4.2.2.1 *Subhaloes going Notts: the subhalo-finder comparison project (Onions et al., 2012)*

Las conclusiones principales de la colaboración fueron resumidas en este artículo. La comparación entre los diferentes algoritmos de identificación se centró en la distribución espacial y la función de masa de los sub-halos de materia oscura.

En la figura 8 puede observarse la comparación visual de la posición de las subestructuras identificadas por Mendieta, Amiga, Subfind y Rockstar. Los gráficos corresponden a las identificaciones realizadas sobre el nivel 4

* <http://popia.ft.uam.es/SubhaloesGoingNotts/Home.html>

de la simulación Aquarius. Los círculos indican las posiciones de los subhalos identificados por cada algoritmo y los tamaños de los mismos son escalados proporcionalmente al valor de V_{max} . Si bien puede observarse que todos los algoritmos logran identificar la mayoría de las subestructuras visualmente identificables como sobredensidades, vale notar que nuestro algoritmo adolece de eficacia en la región central del halo. En otras palabras, con el método de percolación resulta difícil aislar estructuras en regiones demasiado densas.

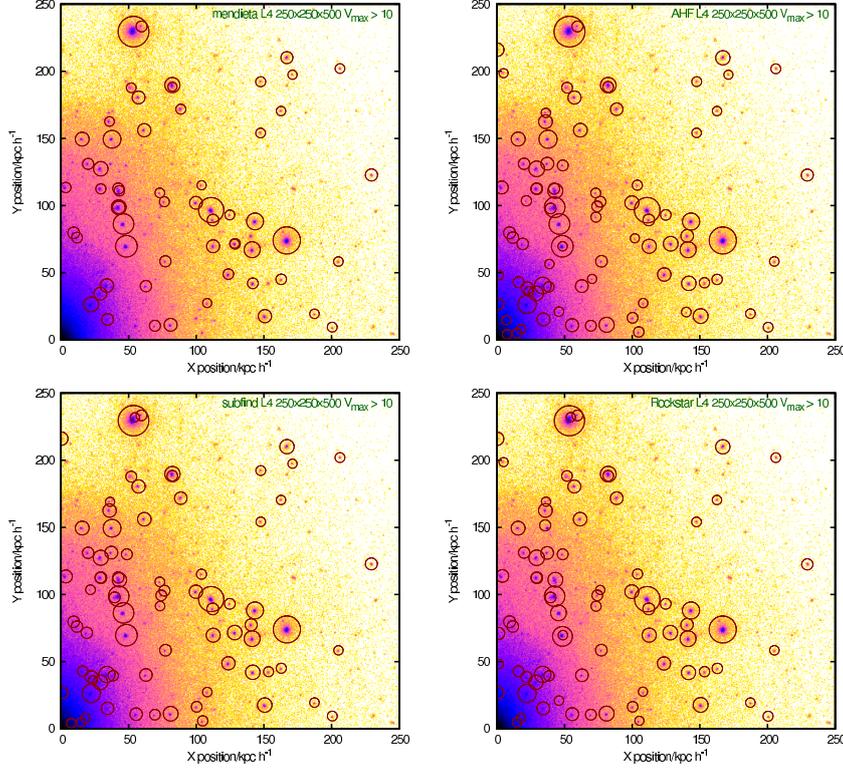


Figura 8: Las imágenes muestran la densidad suavizada de materia oscura dentro de un cuadrante del nivel 4 de la simulación Aquarius. En cada uno de los paneles se muestran con círculos los subestructuras identificadas por los algoritmos según se especifica en cada panel. El tamaño de los círculos se encuentra escalado al valor de V_{max} y solo se muestran aquellos subhalos con $V_{max} > 10$ km/s.

Otra de las estadísticas analizadas fue la función de masa acumulada en subhalos de materia oscura. Para ello se consideró un radio de $250 h^{-1} kpc$ alrededor del centro representativo del halo huésped y se contaron cuantos subhalos con masas M_{200} mayores a un cierto valor se hallaban dentro de dicho radio. En general puede observarse en la figura 9 que todos los identificadores mostraron una buena concordancia, la dispersión entre los diferentes métodos es de $\approx 10\%$. Los algoritmos que mostraron la mayor discrepancia fueron nuestro código MENDIETA y ADAPTAHOP. Para este último el exceso de subhalos puede ser entendido si se considera que este algoritmo no aplica ningún criterio para deshacerse de aquellas partículas que no se encuentran ligadas gravitacionalmente. Mientras que para nuestro algoritmo podemos decir que la deficiencia proviene de dos factores: por un lado, la, ya nombrada anteriormente, debilidad del método de FoF

de aislar estructuras en regiones demasiado densas; y el otro, nuestra rutina de limpieza de partículas no ligadas resulta demasiado agresivo, en cuanto remueve muchas partículas de los subhalos.

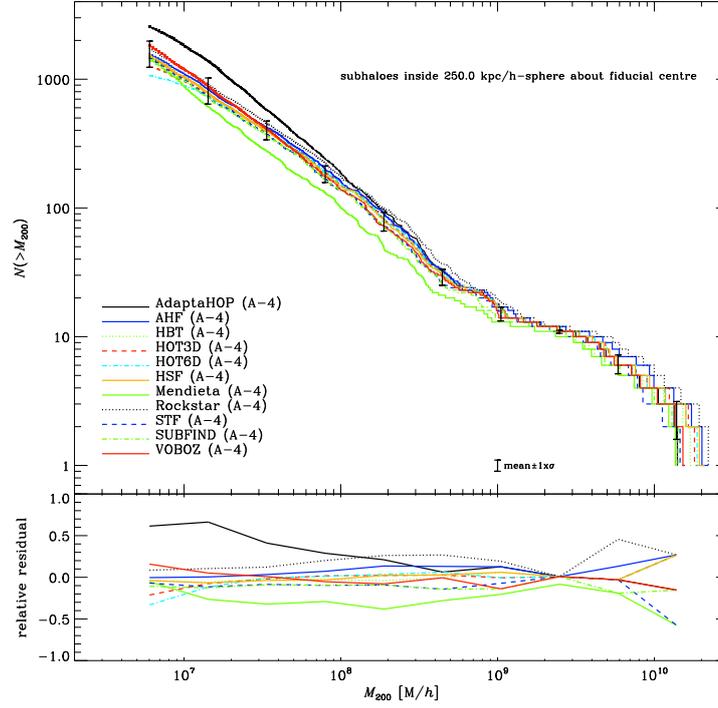


Figura 9: Número acumulado de subhalos con masas (M_{200}) mayores al valor indicado dentro de una esfera de $250h^{-1}kpc$ centrada en el halo huésped para el nivel 4 de resolución. El panel inferior muestra la diferencia relativa a la curva acumulada media.

Otra manera de cuantificar las diferencias entre los distintos identificadores consisten en realizar un ajuste mediante una ley de potencia del tipo:

$$\frac{N(>M)}{N_{total}} = a_0 M^{-n} \quad (4.1)$$

donde a_0 representa la normalización, la cual refleja el aumento en el número de subhalos debido al aumento de la resolución de la simulación; mientras que n representa la pendiente de la ley de potencia. Dado que subhalos con menos de 100 partículas son pobremente resueltos por la mayoría de los algoritmos, y que la función acumulativa presenta un quiebre para masas de subhalos mayores que $10^9 h^{-1} M_\odot$, el ajuste de la ley de potencia se realizó en dicho rango de masas (notar que el mínimo del intervalo depende del nivel de resolución de la simulación). La figura 10 muestra el espacio de estos dos parámetros recuperados por cada uno de los algoritmos de identificación y para cada uno de los niveles de resolución de la simulación. Vale notar que, dado que no todos los identificadores lograron identificar hasta el mismo nivel, la cantidad de puntos en cada curva dependerá del algoritmo que se trate. En la resolución más baja, puntos indicados con el símbolo cuadrado, se aprecian las mayores diferencias y es difícil expresar una conclusión. A resoluciones más altas, puede observarse que todos los identificadores concuerda razonablemente bien. El algoritmo que más se

diferencia es ADAPTAHOP, por la misma razón que expresamos anteriormente. Como es esperado, la contribución más importante proviene de la subestructura principal y estructuras progresivamente más pequeñas contribuyen cada vez menos.

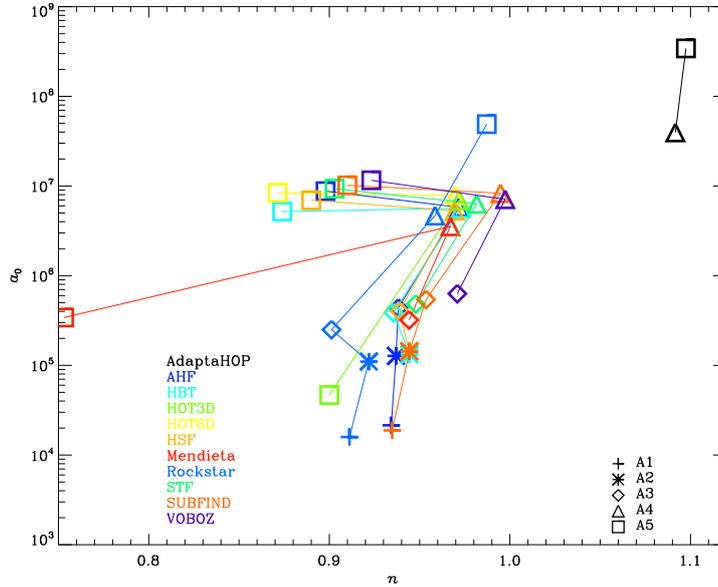


Figura 10: Comparación de la pendiente y la normalización los ajustes de la función de masa para todos los identificadores y todos los niveles.

Si en vez de utilizar la masa M_{200} , computamos la función acumulada de subhalos en función de la velocidad v_{max} , la relación que encontramos es más ceñida. La figure 11 muestra la función v_{max} acumulada para todos los identificadores para el nivel de resolución 4. Todos los identificadores presentan un muy buen acuerdo en escalas $v_{max} > 20km/s$. Para escalas entre $6km/s$ y $20km/s$ la concordancia entre los identificadores se mantiene, salvo para el caso de MENDIETA. La deficiencia presentada por nuestro algoritmo radica en el hecho, ya comentado, de que resulta difícil con nuestro método identificar subestructuras en regiones demasiado densas. En escalas menores a $6km/s$, las discrepancia entre todos los identificadores aumenta, y esto es debido a que, para la resolución del nivel 4, los subhalos de este tamaño tienen alrededor de 80 partículas, con lo cual el valor de v_{max} es estimado con menos de 20 partículas.

Una forma mejor de visualizar la deficiencia de nuestro algoritmo para identificar subestructuras en regiones muy densas consiste en graficar la cantidad de masa contenida en subhalos en función de la distancia al centro del halo huésped. La figura 12 muestra dicho gráfico, como puede observarse todos los identificadores concuerdan razonablemente bien salvo MENDIETA, el cual no logra identificar subhalos en las regiones más centrales del halo huésped (la curva para nuestro algoritmo comienza en $30h^{-1}kpc$).

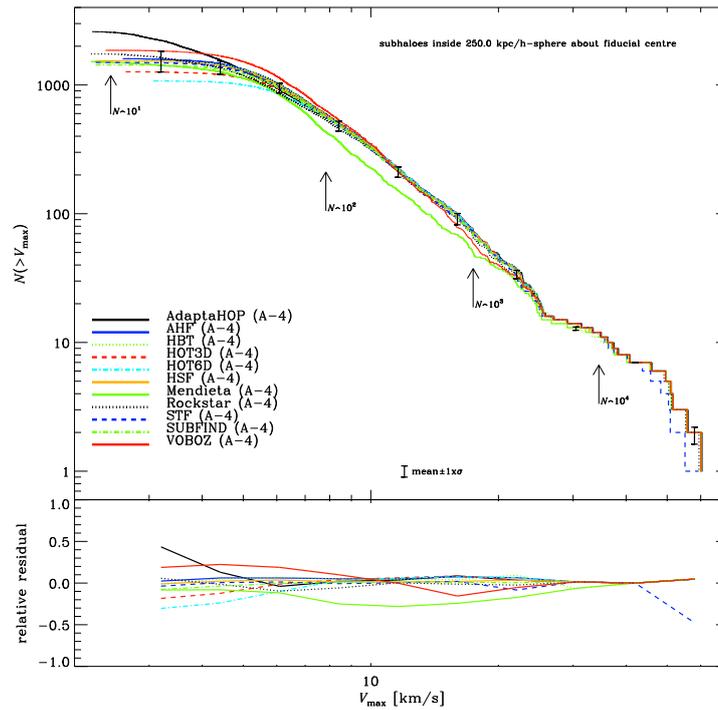


Figura 11: Número acumulado de subhalos en función de la velocidad de rotación máxima v_{max} dentro de un radio de $250h^{-1}kpc$ del centro del halo huésped. Las flechas indican el número de partículas dentro de r_{max} (la posición del pico de la curva de rotación). El panel inferior se muestran las diferencias relativas con respecto a la media de todas las curvas.

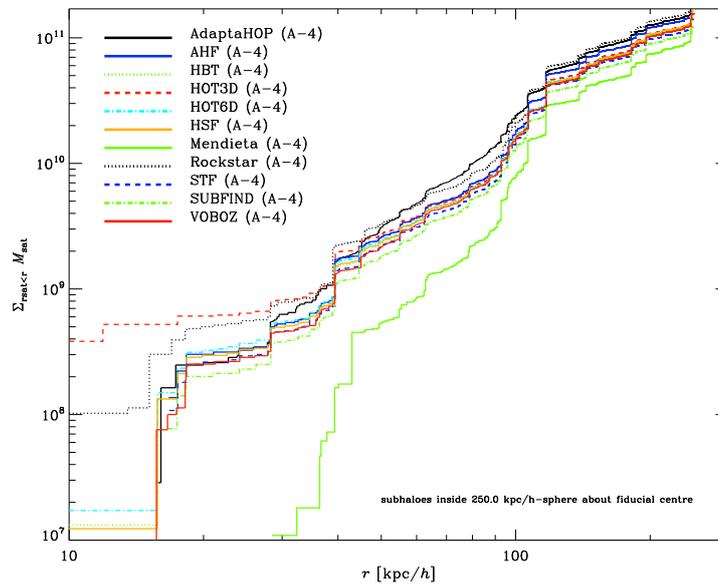


Figura 12: Masa en subhalos acumulada en función de la distancia radial al centro del halo huésped.

4.2.2.2 Subhaloes going Notts: Spin across subhaloes and finders (Onions et al., 2013)

El momento angular de un halo de materia oscura se caracteriza comúnmente a través del parámetro adimensional de espín λ . Su versión más uti-

* Momento angular intrínseco de un cuerpo

lizada es la definida en Peebles (1969), la cual se expresa de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{J\sqrt{|E|}}{GM^{5/2}} \quad (4.2)$$

donde J , E , y M son el momento angular total, la energía total (cinética más potencial) y la masa del halo, respectivamente. Uno puede interpretar el parámetro de espín como una medida de la importancia del momento angular relativo al movimiento aleatorio de la materia. Dicho de otra manera, la estructura de cuerpos con un parámetro de espín pequeño estarán soportados, principalmente, por el movimiento aleatorio de la materia dentro de él y en menor medida por su movimiento de rotación. Si se considera un cuerpo de materia oscura aislado, el parámetro de espín debería ser una cantidad conservada dado que todas las cantidades involucradas en su definición se conservan.

Estudios realizados con simulaciones numéricas han demostrado que la distribución del parámetro de espín de halos, formados dentro de un marco jerárquico de evolución, puede ser ajustada por una ley log-normal (véase por ejemplo Barnes & Efstathiou, 1987; Ryden, 1988; Cole & Lacey, 1996; Warren et al., 1992a):

$$p(\lambda)d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\ln^2(\lambda/\bar{\lambda})}{2\sigma^2}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (4.3)$$

con $\bar{\lambda} \approx 0.035$ y $\sigma \approx 0.5$. Por comparación, el parámetro de espín de una galaxia disco auto-gravitante soportada por rotación es ~ 0.4 , es decir, un orden de magnitud más grande que la media de los halos de materia oscura. Se ha demostrado que estos valores son prácticamente independiente de la masa del halo, la época y el modelo cosmológico de fondo (Barnes & Efstathiou, 1987; Warren et al., 1992a; Lemson & Kauffmann, 1999; Bullock et al., 2001; Macciò et al., 2007). Además se ha encontrado que halos con parámetro de espín más grande se encuentran en regiones del espacio más densas, resultado que parece ser independiente de la masa del halo.

Otra de las definiciones para el parámetro de espín es la dada por Bullock et al. (2001), en este caso la expresión para el mismo es:

$$\lambda' = \frac{J}{\sqrt{2MRV}} \quad (4.4)$$

Aquí J es el momento angular dentro de una esfera de radio R y masa virial M , y V es la velocidad circular a dicho radio ($V^2 = GM/R$). Este parámetro resulta más fácil de calcular a partir de las propiedades de los halos de materia oscura y no depende del perfil de densidad.

En esta parte del análisis se realizó la comparación entre los diferentes algoritmos a través del parámetro de espín. Para lograr una estimación robusta de los parámetros el estudio fue limitado a subhalos con más de 300 partículas. Y una de las particularidades que se quiso estudiar fue la influencia del procedimiento de limpieza que cada uno de los algoritmos de identificación aplica. Si la rutina de limpieza no es correctamente aplicada, partículas espurias afectaría notablemente el parámetro de espín estimado.

En las figuras 13 y 14 se muestran las distribuciones del parámetro de espín de Bullock y de Peebles, respectivamente. Cada una de las curvas representa los resultados obtenidos para el conjunto de subhalos identificados por cada uno de los algoritmos a los cuales se les ha suprimido la rutina que

realiza la limpieza de partículas no ligadas. Puede observarse que las distribuciones recuperadas presentan una forma sensiblemente diferente de una gaussiana, como debería de esperarse de los estudios anteriores (véase las líneas de trazos de cada una de las figuras). Otra de las características que vale remarcar es que los resultados muestran que muchos de los subhalos tendrían parámetro de espín más grande que 1, lo cual indicaría que esas estructuras deberían ser destrozadas por su velocidad de rotación y por lo tanto no serían sistemas en equilibrio. Estos resultados muestran claramente que el proceso de limpieza resulta de vital importancia a la hora de identificar (sub)estructuras. El parámetro de Peebles es afectado más fuertemente, como surge de la comparación de las figuras 13 y 14, que el parámetro de Bullock. Esto es debido a que este parámetro incluye en su definición la energía total de las partículas que conforman el subhalo.

Otro de las características que vale resaltar es que aquellos identificadores que son implementados en el espacio de las fases presentan resultados que mejor se aproximan a los esperados. Esto puede ser fácilmente entendido dado que en el espacio de las fases las partículas espurias con mayor frecuencia serán descartadas como miembros de alguna estructura. En este sentido, utilizar el espacio de las fases puede entenderse como un procedimiento de limpieza intrínseco del algoritmo.

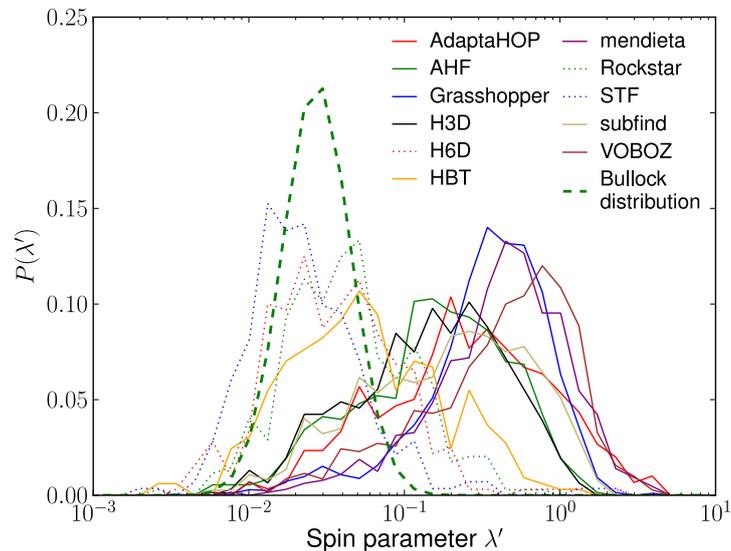


Figura 13: Perfil general del parámetro de espín de Bullock en subhalos identificados con más de 300 partículas y donde se ha suprimido la rutina de limpieza de partículas no ligadas. Los resultados para cada identificador son normalizados de tal forma que el área bajo la curva sea la misma para todos ellos. La línea de trazos representa el mejor ajuste para la distribución para halos según Bullock et al. (2001). Los resultados muestran una gran dispersión alrededor de un valor de λ el cual está lejos del valor de dicho ajuste. Las líneas de puntos muestran los resultados correspondientes a algoritmos cuya implementación se realiza sobre el espacio de las fases, mientras que las líneas sólidas muestran los resultados para los restantes métodos.

El siguiente paso consistió en realizar el mismo análisis pero en esta oportunidad permitiendo que cada uno de los identificadores realizará su propio procedimiento de limpieza. Las figuras 15 y 16 muestran las distribuciones del parámetro de espín de Bullock y de Peebles, respectivamente, para este

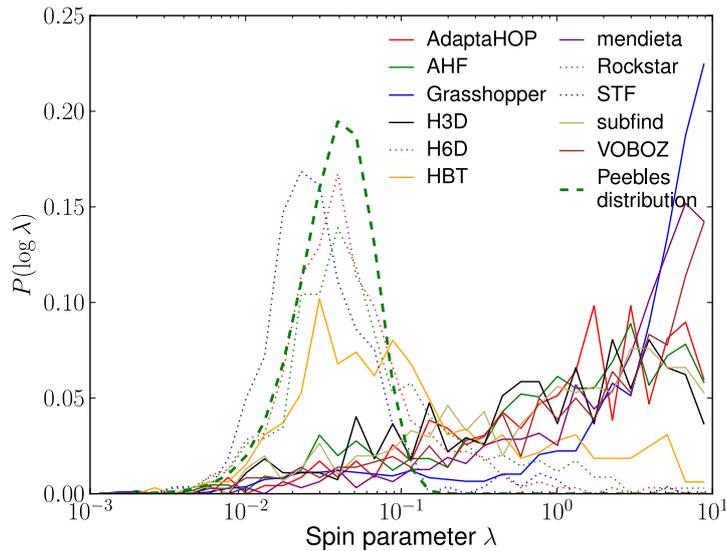


Figura 14: Este es el mismo gráfico que la figura 13 pero es este caso para el parámetro de espín de Peebles y la función de mejor ajuste de Bett et al. (2007)

caso. Las curvas de distribución para cada algoritmo se aproxima considerablemente más a la curva teórica. Vale notar que nuestro algoritmo presenta dos picos bien definidos, lo cual estaría indicando una falencia en el procedimiento de limpieza.

Finalmente, se realizó la comparación haciendo uso de una rutina de limpieza común para todos los identificadores. El método de limpieza fue extraído del algoritmo AMIGA y aplicado a los subhalos identificados sin el algoritmo propio de limpieza de cada identificador. En esta oportunidad, y como muestran las figuras 17 y 18, las curvas correspondiente a todos los algoritmos concuerdan relativamente bien entre ellas, pero muestran un valor medio inferior al valor esperado para el parámetro de espín de halos de materia oscura. Esta tendencia de que subhalos posean un parámetro de espín menor que los halos huéspedes tiene su explicación en la historia de formación de los subhalos. A medida que un subhalos se aproxima al centro del halo huésped es más susceptible de perder partículas por efectos de marea. Las partículas menos ligadas son aquellas que poseen mayor momento angular y que se encuentran en la periferia del subhalos, y por lo tanto son las más probables a ser removidas por los efecto de marea. El efecto neto es una disminución del parámetro de espín del subhalo.

Los resultados de este trabajo mostraron que el parámetro de espín es un buen indicador de la eficiencia de la rutina de limpieza aplicada por cada uno de los identificadores. En este sentido, es posible inferir si la remoción de partículas es realizada correctamente inspeccionando la distribución del parámetro de espín.

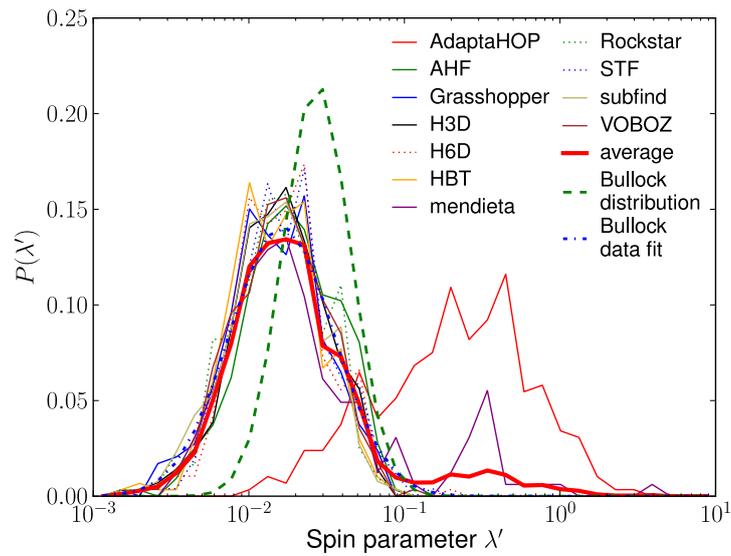


Figura 15: Este es el mismo gráfico que la figura 13 pero en este caso se ha utilizado la rutina de limpieza propia de cada identificador. En este caso las distribuciones del parámetro de espín de los diferentes algoritmos coinciden mejor entre ellas, indicando que el parámetro de espín es un buen indicador de cuán efectiva es la rutina de limpieza. Vale notar que este gráfico destaca un fallo en la rutina de limpieza de MENDIETA, como así también que ADAPTAHOP no aplica ningún tipo de limpieza. La línea de trazos representa el mejor ajuste para la distribución para halos según [Bullock et al. \(2001\)](#).

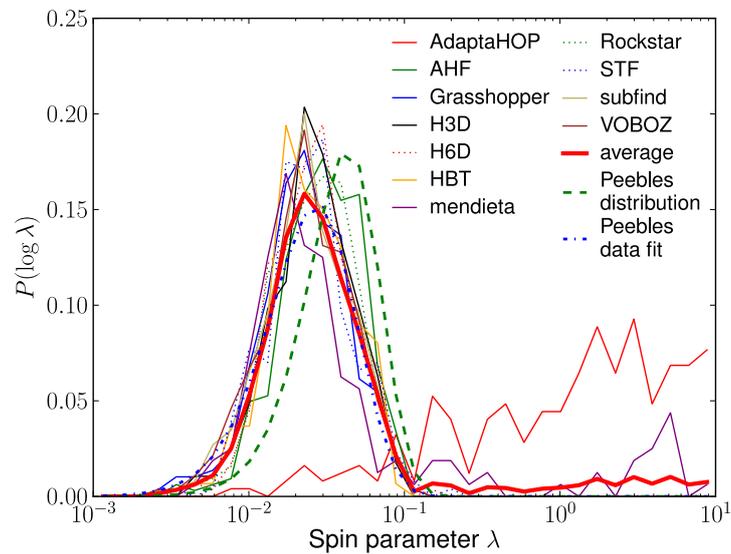


Figura 16: El mismo gráfico que la figure 15 excepto que en este caso la línea de trazo representa el ajuste de Peebles de [Bett et al. \(2007\)](#)

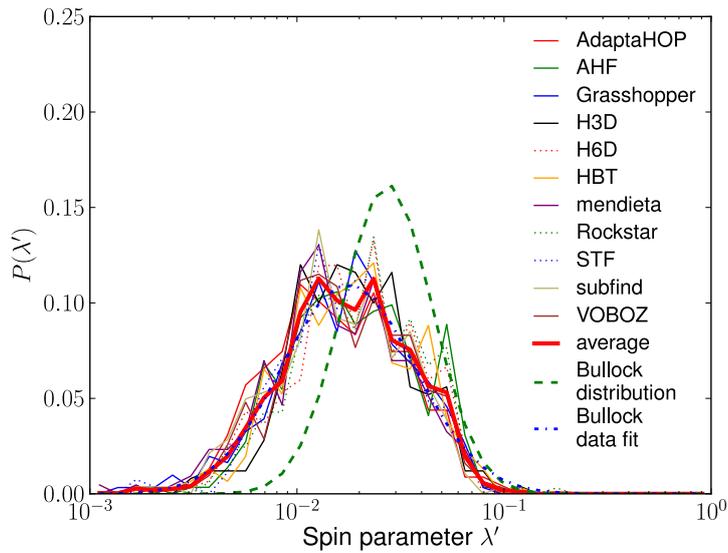


Figura 17: El mismo gráfico que la figura 13 pero en este caso se ha utilizado una rutina de limpieza común para todos los identificadores. Notar que todas las curvas presentan una buena consistencia, y han desaparecido las características que mostraban los identificadores MENDIETA y ADAPTAHOP. La línea de trazos representa el mejor ajuste para la distribución para halos según [Bullock et al. \(2001\)](#).

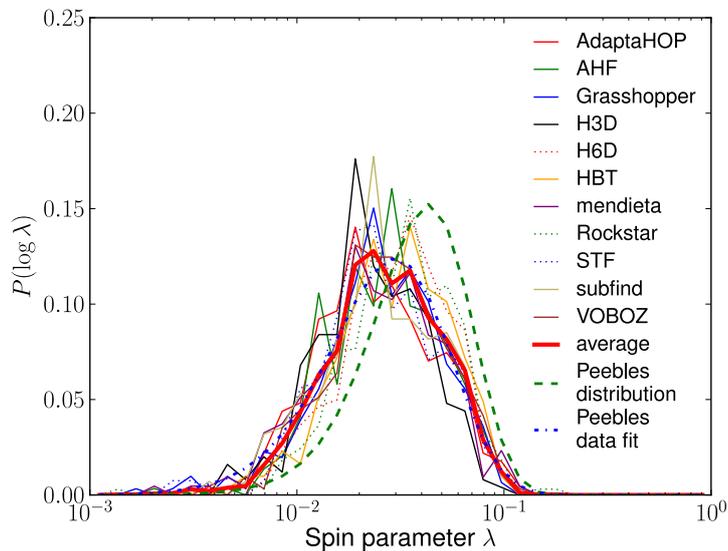


Figura 18: El mismo gráfico que la figura 14 excepto que en este caso la línea de trazo representa el ajuste de Peebles de [Bett et al. \(2007\)](#)

ALINEACIÓN

Hemos mencionado ya que el Principio Cosmológico establece que, en gran escala, el Universo es homogéneo e isótropo. Lo primero significa que el Universo posee las mismas propiedades sin importar el lugar donde se encuentre el observador, mientras que lo segundo implica que el Universo luce igual en todas las direcciones que se lo observe. Por gran escala debe entenderse distancias miles de veces más grandes que el tamaño típico de una galaxia espiral como la Vía Láctea, o lo que es equivalente, del orden de 100 Mpc . Pero cuando se observa en escalas más pequeñas, la homogeneidad e isotropía pueden no cumplirse.

En este capítulo nos dedicaremos al estudio de la anisotropía en la distribución de materia alrededor de los halos de materia oscura y de los grupos de galaxias (Paz et al., 2011). Para ello haremos uso de una herramienta estadística de amplio uso en cosmología, la función de correlación del campo de densidad. Particularmente, utilizaremos la extensión de dicha herramienta presentada por Paz et al. (2006), la cual consiste en estimar la función de correlación en diferentes direcciones las cuales son fijadas por los autovectores del tensor de forma de los halos de materia oscura o de los grupos de galaxias.

5.1 ALINEAMIENTOS EN SIMULACIONES NUMÉRICAS

Como primer paso realizaremos el estudio de los alineamientos de materia alrededor de halos de materia oscura extraídos de simulaciones numéricas. El análisis en simulaciones numéricas resulta, generalmente, más asequible dado que los datos obtenidos de ellas son más fiables que los obtenidos de catálogos observacionales. Estos últimos contienen una diversidad de sesgos y, por lo tanto, los datos son menos confiables. Por otro lado, las simulaciones permiten explorar las posibilidades del método empleado y determinar la factibilidad de realizar un estudio equivalente sobre las observaciones. Al mismo tiempo, vale remarcar, que nos permiten estimar las funciones de correlación en las tres dimensiones del espacio, pudiendo de este modo evaluar las correlaciones en las direcciones de los tres semiejes del tensor de forma.

5.1.1 La simulación numérica

Para esta parte del trabajo haremos uso de una simulación numérica de n-cuerpos en un volumen de $500^3 (h^{-1} \text{ Mpc})^3$. Las condiciones iniciales de la misma fueron calculadas a $redshift \approx 50$ asumiendo un Universo espacialmente plano con parámetros cosmológicos $\Omega_m = 1 - \Omega_\Lambda = 0.258$, constante de Hubble $H_0 = 71.9 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, y un parámetro de normalización

$\sigma_8 = 0.796$. Con estas especificaciones la masa de cada partícula resulta $m_p = 6.67 \times 10^{10} h^{-1} M_\odot$. La simulación fue realizada haciendo uso de la segunda versión del código libre Gadget (Springel, 2005) y se ha utilizado una longitud de suavizado para el cálculo de las fuerzas igual a $0.03 h^{-1} \text{Mpc}$.

La identificación de halos de materia oscura fue realizada haciendo uso de una versión reducida del código MENDIETA, consistente en un algoritmo estándar FoF con una longitud de percolación $l = 0.17 \bar{v}^{1/3}$, donde \bar{v} es la densidad media de partículas de materia oscura. Con el fin de obtener una muestra confiable de halos, solo preservamos aquellos sistemas que tuvieran más de 30 partículas.

Dado que deseamos estimar la función de correlación anisótropa debemos computar el tensor de forma de los halos de materia oscura, como así también los autovectores y autovalores del mismo. Para calcular el tensor de forma utilizamos una expresión análoga al tensor de inercia para un sistema de partículas tal como aprendimos en mecánica clásica:

$$A_{ij} = \frac{1}{N_h} \sum_{\alpha=1}^{N_h} x_{\alpha i} x_{\alpha j} \quad (5.1)$$

donde $x_{\alpha i}$ es la componente i -ésima del vector de posición desde el centro de masa de la partícula α , y N_h es el número total de partículas dentro del halo.

Para encontrar los autovectores y autovalores, debemos resolver la ecuación:

$$(A - cI) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.2)$$

donde I es la matriz identidad, se c una constante y \mathbf{v} un vector. Dado que la matriz A es hermítica* por construcción, todos sus autovalores serán reales y los mismos corresponden a los cuadrados de los semiejes (a , b , c con $a > b > c$) del elipsoide que mejor describe la distribución de partículas del halo:

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 0 \quad (5.3)$$

Mientras que los autovectores (\hat{a} , \hat{b} y \hat{c}) indicarán la dirección de los ejes principales de dicho elipsoide y definirán las direcciones en las cuales estimaremos las funciones de correlación.

5.1.2 Función de correlación anisótropa

En el lenguaje de Funciones de correlación, los halos de materia oscura serán los centros de la correlación, mientras que las partículas de la simulaciones serán las trazadoras de la estructura circundante. A esta clase particular de función se la conoce con el nombre de función de correlación cruzada, para diferenciarla de la función de autocorrelación.

Como hemos ya planteado, nuestro objetivo es estimar las funciones de correlación cruzada en diferentes direcciones. Para ello contaremos pares

* Matriz cuadrada de elementos complejos que tiene la característica de ser igual a su propia traspuesta conjugada. Es decir, el elemento en la i -ésima fila y j -ésima columna es igual al conjugado del elemento en la j -ésima fila e i -ésima columna, para todos los índices i y j

halo—partícula en diferentes rangos de distancia y comparando las cuentas así obtenidas con las correspondientes a una distribución homogénea del mismo volumen. Además, como deseamos estimar funciones de correlación direccionales, debemos imponer alguna restricción sobre la distancia angular entre los trazadores y la dirección de interés. En este sentido solo contaremos partículas que se encuentren a una distancia angular menor a un cierto ángulo $\theta_1 = 60^\circ$ de la dirección en cuestión. Para diferenciar las diferentes funciones de correlación utilizaremos la siguiente notación: $\xi_{\parallel a}$, $\xi_{\parallel b}$ y $\xi_{\parallel c}$ denotarán las correlaciones computadas alrededor de la direcciones definidas por los autovectores \hat{a} , \hat{b} y \hat{c} , respectivamente. Además denotaremos con ξ_{iso} la función de correlación isótropa, i. e. computada promediando en todas las direcciones. Además, con la intención de estudiar si existe alguna dependencia con la masa del halo centro, tomaremos diferentes muestras de halos de la simulación.

En la figura 19 se muestran los resultados para halos de baja masa ($M_{halo} \leq 2.5 \times 10^{13} h^{-1} M_\odot$) en el panel superior y halos de masa alta ($M_{halo} \geq 1.3 \times 10^{14} h^{-1} M_\odot$) en el panel inferior. Las líneas de punto corresponden a la función de correlación isótropa. Las líneas de trazos cortos, largos y sólidas corresponden a las funciones de correlación $\xi_{\parallel c}$, $\xi_{\parallel b}$ y $\xi_{\parallel a}$, respectivamente. El marco inferior de cada panel muestra los cocientes entre cada una de las funciones de correlación direccionales y la función de correlación isótropa. Las áreas sombreadas corresponden a los errores estimados haciendo uso de la técnica de remuestro *Jackknife* con un total de 100 muestras.

Puede observarse que las curvas de la figura 19 muestran una forma característica donde se destacan dos intervalos de escalas diferenciados por un punto de inflexión. Como veremos en el próximo capítulo, el término de 1-halo predomina en escalas pequeñas, mientras que el término de 2-halos lo hace en escalas grandes. El punto de inflexión se encuentra localizado estadísticamente en la escala representativa del tamaño típico de los halos en cuestión, y se ha denotado en la figura con líneas de trazos verticales. Notablemente las correlaciones en las direcciones paralelas a los semiejes \hat{b} y \hat{c} muestran menor amplitud que la función de correlación ξ_{iso} , mientras que las correspondiente a $\xi_{\parallel a}$ muestran una amplitud mayor. Esto es interpretado como un exceso en la distribución de materia en la dirección del semieje mayor del tensor de forma, o, en otras palabras, la materia presenta cierta preferencia a encontrarse alineada con dicha dirección. Podemos aún decir un poco más; la correlación $\xi_{\parallel b}$ presenta mayor amplitud que la $\xi_{\parallel c}$, lo que indicaría que existe una tendencia, en general, de la estructura en gran escala, a estar alineada de forma triaxial preferentemente prolada. Por el contrario, si la función de correlación $\xi_{\parallel b}$ presentara un exceso en la amplitud equivalente a la correlación $\xi_{\parallel a}$ se correspondería a una distribución de la estructura circundante preferentemente oblada.

Dada esta tendencia de la distribución de materia circundante podemos limitar nuestro estudio la función de correlación $\xi_{\perp a}$ estimada a partir de la distribución de materia que se encuentra en el plano perpendicular a dirección definida por el semieje mayor del tensor de forma, contrastándola con la función $\xi_{\parallel a}$. Para ello, y aquí viene la justificación del valor de θ_1 utilizado con anterioridad, definimos dos ángulos θ_1 y θ_2 , cada uno de los cuales representa el límite angular para la región paralela y perpendicular, respectivamente. Estos ángulos son elegidos de tal manera que el volumen

encerrado dentro de ellos sea el mismo. Para tal fin, debemos cumplir con la igualdad:

$$\sin(\theta_2) = 1 - \cos(\theta_1) = \chi \quad (5.4)$$

donde χ es el parámetro de umbral. Notar que un valor de $\chi > 0.5$ implicaría que los volúmenes no serían disjuntos, teniendo una porción de solapamiento, mientras que valores de $\chi < 0.5$ implicaría regiones del espacio que serían ignoradas en el cómputo de la correlación. Por estos motivos adoptamos el valor de $\chi = 0.5$, y por lo tanto, los valores de $\theta_1 = 60^\circ$ y $\theta_2 = 30^\circ$.

En la figura 19, la función de correlación computada sobre el plano perpendicular a la dirección del semieje mayor $\xi_{\perp a}$ es mostrada con líneas de punto y trazo. Como puede observarse su amplitud es similar a la amplitud presentada por la correlación paralela al semieje menor $\xi_{\parallel c}$, y presenta diferencias estadísticamente significante respecto a la correlación $\xi_{\parallel a}$ sobre todo el rango de escalas. El resultado más importante se presenta en el régimen de 2-halos donde el contraste entre las correlaciones $\xi_{\parallel a}$ y $\xi_{\perp a}$ muestra ser casi constante, al tiempo que también muestra cierta dependencia con la masa de halo centro. En este sentido, halos de mayor masa muestran una amplitud de alineamiento mayor que halos de menor masa. Menos sorprendidos son los resultados correspondientes al término de 1-halo donde el exceso de correlación en la dirección paralela al semieje mayor es claro reflejo de la naturaleza triaxial prolada de los halos.

Para estudiar la dependencia de la amplitud relativa entre las funciones de correlación $\xi_{\perp a}$ y $\xi_{\parallel a}$, con la masa del halo centro, realizamos la estimación del cociente entre dichas funciones para cinco rangos de masas entre 10^{12} y $2 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$. Dado que las diferencias relativas se mantienen constantes dentro del régimen de 2-halos, podemos calcular el cociente de aquellas funciones en este rango de escalas. La figura 20 muestra los resultados de estos cocientes en función de la masa del halo centro. Los errores fueron estimados haciendo uso de la técnica de remuestreo *Jackknife*. Como puede observarse, el cociente $\xi_{\parallel a} / \xi_{\perp a}$ entre las funciones aumenta en función de la masa del halo, indicando que la distribución de materia alrededor de halos de mayor masa tiende a encontrarse más fuertemente alineada con el semieje mayor del tensor de forma. Dentro del marco de evolución jerárquica de las estructuras este es un resultado esperado ya que los halos de mayor masa representarían sistemas que se han formado más recientemente y mostrarían aún signos de fusión de halos más pequeños y/o alineación con la estructura circundante.

5.2 FUNCIÓN DE CORRELACIÓN ANISÓTROPA PROYECTADA EN CATÁLOGOS DE GALAXIAS

Trabajar con catálogos reales tiene sus bemoles: primero, debemos determinar la forma de los grupos de galaxias proyectada sobre el plano del cielo, y por lo tanto en dos dimensiones; segundo, los grupos, en su mayoría, contienen pocos miembros, lo cual hace más difícil determinar la forma; y tercero, la cantidad de galaxias trazadoras disminuye en la dirección de la visual a medida que la distancia aumenta. Por lo tanto, antes de comenzar con el estudio de la función de correlación anisótropa con datos reales, realizaremos un análisis de las particularidades y efectos influyentes haciendo uso de un catálogo sintético.

5.2.1 Función de correlación anisótropa en catálogos sintéticos

Cuando uno estima la forma de los grupos con un número bajo de miembros sucede que dicha estima puede diferir significativamente de la forma y orientación real. Para observar este efecto, construimos un catálogo sintético simplificado. Para tal fin, proyectamos todo el volumen de la simulación en el plano Cartesiano $x - y$. Este plano puede ser considerado como el plano del cielo. A la coordenada z le adicionamos la velocidad en la misma dirección, de modo de imitar la velocidad radial a lo largo de la línea de la visual.

A los efectos de estudiar los puntos mencionados anteriormente, construimos un catálogo sintético según hemos visto en §2.3. Sobre este catálogo se identificaron grupos de galaxias sintéticas con la metodología de [Merchán & Zandivarez \(2005\)](#) descrita en §2.1.1, preservando solo grupos con más de 10 miembros. Además, se estimó la forma de los grupos de manera similar al método empleado para los halos en la simulación, salvo que en este caso debemos hacerlo utilizando dos coordenadas cartesianas proyectadas sobre el plano del cielo, lo cual es sencillamente proyectar las coordenadas ecuatoriales (α, δ) . El tensor de forma tendrá, por lo tanto, dimensión 2×2 , y solo tendremos dos autovectores los cuales establecerán las direcciones del semieje mayor y menor de dicho tensor de forma proyectado.

Luego, realizamos un estudio semejante al que llevamos a cabo sobre la simulación en la sección anterior. En este caso estimaremos la función de correlación anisótropa cruzada grupo-galaxia proyectada $\omega(R)$. Para estimar las correlaciones paralela ω_{\parallel} y perpendicular ω_{\perp} al semieje mayor del tensor de forma, separamos pares grupo-galaxia con un ángulo menor y mayor a $\theta_p = 45^\circ$, respectivamente. La elección de esta elección del valor de θ_p permite dividir el plano del cielo en dos parte de igual área. Eligiendo un valor más pequeño se reduciría la señal estadística aumentando el ruido de la estimación. Además, para disminuir la contaminación por galaxias de frente y de fondo, limitamos las galaxias trazadoras a una rodaja de $50 h^{-1} Mpc$ alrededor del centro de la correlación.

La figura 21 muestran los resultados de la estimación de la función de correlación anisótropa proyectada para tres terciles de distribución de masa, en los paneles A, B y C. El panel D muestra los resultados para el tercil más masivo de la distribución de masa de grupos con más de 20 miembros. Las líneas solidas, de trazos y de puntos muestran los resultados para las funciones ω_{\parallel} , ω_{\perp} y ω_{iso} , respectivamente. Puede observarse que la señal de alineamiento, si bien es más pequeña que la observada en la simulación, es aún estadísticamente significativa. Además, comparando los paneles C y D, puede verse que la disminución en el número de miembros del grupo tiende a disminuir la señal de alineamiento debido a que la determinación de la forma es menos precisa. Al mismo tiempo, la geometría y profundidad del catálogo real, como así también el método de identificación de los grupos, provocan un aumento significativo de las barras de error.

5.2.2 El catálogo de grupos de galaxias

El estudio de la alineación en el catálogo real lo haremos utilizando de un catálogo de grupos de galaxias extraídos del relevamiento de galaxias SDSS-DR7 como centros de la correlación, mientras que las galaxias del mismo catálogo serán las trazadoras de la distribución de estructuras.

El catálogo de galaxias SDSS-DR7 consiste de aproximadamente 900 000 galaxias las cuales poseen mediciones de *redshift* hasta aproximadamente $z \approx 0.3$, y la magnitud aparente límite es de 17.77 en la banda r . Sobre este catálogo se identificaron grupos de galaxias con la metodología de [Merchán & Zandivarez \(2005\)](#) descrita en §2.1.1. Nuestra muestra principal de grupos consiste de 3776 sistemas de galaxias con más de 10 miembros. La imposición en el número mínimo de miembros está justificada en el hecho que debemos contar con una cantidad de galaxias suficientes para poder calcular robustamente la forma proyectada del grupo.

La forma de los grupos es computada de manera similar al método empleado para los halos de materia oscura. Salvo que en este caso debemos hacerlo utilizando dos coordenadas cartesianas proyectadas sobre el plano del cielo, lo cual es sencillamente proyectar las coordenadas ecuatoriales (α, δ) . El tensor de forma tendrá, por lo tanto, dimensión 2×2 , y solo tendremos dos autovectores los cuales establecerán las direcciones del semieje mayor y menor de dicho tensor de forma proyectado.

La figura 22 muestra la distribución de masas de grupos de galaxias para diferentes corte en el número mínimo de miembros. Nuestra muestra principal corresponde al histograma de color gris claro. Para analizar la dependencia de la señal de alineamiento con la masa del grupo, dividimos dicha muestra en tres rangos de masa, cada uno de los cuales conteniendo un tercio del número total de grupos.

5.2.3 Alineamientos en la función de correlación proyectada

Recordemos que para computar la función de correlación lo que hacemos es comparar la distribución de materia que estamos estudiando con una distribución uniforme. En simulaciones numéricas este procedimiento es relativamente sencillo dado que conocemos con precisión cual es el valor medio de una distribución uniforme dentro del volumen de la simulación, pero cuando se trata de catálogos observacionales se presenta otro problema. Específicamente, se debe generar una muestra de galaxias sintéticas que se encuentren distribuidas homogéneamente dentro del volumen particular del catálogo y respondan a la misma función de dilución del mismo. Además, dependiendo del estimador que uno utilice para computar la función de correlación, es posible que sea necesario generar una distribución aleatoria de grupos sintéticos que responda a la distribución de grupos que se está considerando.

Entonces, antes de continuar hagamos una pequeña digresión sobre los estimadores de la función de correlación de dos puntos. El lector avezado en este tema puede continuar la lectura debajo del cuadro.

Estimadores de la función de correlación

Un estimador es un estadístico, una función de la muestra que se desea analizar, utilizado para estimar algún parámetro o propiedad de la misma. En este sentido es que hablamos de estimadores de la función de correlación.

En la literatura pueden encontrarse dos tipos de estimadores: los que se basan en contar pares de puntos y los denominados geométricos que aplican una especie de filtro sobre los datos. Los primeros son los más utilizados y,

por lo tanto, solo nos ocuparemos de ellos (para una discusión sobre los estimadores véase e. g., [Kerscher et al. \(2000\)](#)).

Entonces los estimadores que nombraremos se basan en contar pares de puntos cuya separación se encuentre en un rango de distancias $(r - \delta r/2, r + \delta r/2)$ dado. Uno puede contar pares de puntos de una misma muestra o de muestras diferentes. En éste último caso, la función de correlación tiene el adjetivo cruzada y los puntos alrededor de los cuales se quiere estimar la correlación se denominan *centros*, mientras que a los otros se los denomina *trazadores*. Por ejemplo, $D_1 D_2(r)$, representará la cantidad de pares de puntos cuyo centro pertenece a la muestra D_1 , mientras que los trazadores pertenecen a la muestra D_2 y cuya separación está dentro del rango $(r - \delta r/2, r + \delta r/2)$.

En nuestro caso, en general, tendremos dos conjuntos de puntos: la muestra D de N_d datos que deseamos analizar y un conjunto R de N_r puntos distribuidos aleatoria y uniformemente sobre el mismo volumen de la primera muestra, el cual servirá para contrastar con la muestra D .

Veremos tres estimadores que resultan de interés práctico. Por simplicidad, solo expondremos las expresiones correspondientes a la función de autocorrelación. Tal vez el estimador más utilizado sea el de [Davis & Peebles \(1983\)](#), el cual está definido según la expresión

$$\hat{\xi}(r) = \frac{N_r}{N_d} \frac{DD(r)}{DR(r)} - 1 \quad (5.5)$$

donde $DD(r)$ representa la cantidad de pares de la muestra D y $DR(r)$ es el número de pares con centros en la muestra D y trazadores en la muestra R .

Otro estimador que aparece en la literatura es el de [Hamilton \(1993\)](#) el cual está definido de la siguiente manera

$$\hat{\xi}(r) = \frac{DD(r) RR(r)}{DR(r)^2} - 1 \quad (5.6)$$

donde $DD(r)$ y $DR(r)$ son los mismo del estimador anterior, y $RR(r)$ es la cantidad de pares en la muestra R . Vale notar que este estimador es independiente de la normalización (no aparecen dividiendo los factores N_d ni N_r).

Por último, nombraremos al estimador de [Landy & Szalay \(1993\)](#) definido por la expresión:

$$\hat{\xi}(r) = \frac{N_r^2}{N_d^2} \frac{DD(r)}{RR(r)} - 2 \frac{N_r}{N_d} \frac{DR(r)}{RR(r)} + 1 \quad (5.7)$$

Estudios comparativos sobre estos métodos ([Kerscher et al., 2000](#)) han demostrado que los estimadores de [Davis & Peebles \(1983\)](#) y de [Hamilton \(1993\)](#) son sensibles a la cantidad de puntos N_r de la muestra uniforme, además, el primero presenta una varianza muy grande. Por otro lado, el estimador de [Landy & Szalay \(1993\)](#) ha mostrado ser menos sensible a la cantidad N_r . En general, es este último estimador el recomendado para ser utilizado.

Dado que deseamos computar la función de correlación grupos-galaxias, debemos utilizar estimadores de correlaciones cruzadas, siendo la muestra

de centros un conjunto de grupos de galaxias y la muestra de trazadores el conjunto de todas las galaxias. En particular, utilizaremos el estimador propuesto por [Landy & Szalay \(1993\)](#) el cual, en este caso, se expresa de la siguiente manera:

$$\omega(r) = \frac{D_c D_t(r) - D_c R_t(r) - R_c D_t(r) + R_c R_t(r)}{R_c R_t(r)} \quad (5.8)$$

donde hemos utilizado D_c y D_t para denotar la muestra de datos centros y trazadores, respectivamente, y R_c y R_t para los equivalentes de las muestras uniforme.

La muestra sintética de galaxias trazadoras fue construida a partir de la densidad numérica esperada a un *redshift* dado, con una magnitud por debajo del límite del catálogo, y una función de luminosidad de Schechter con parámetros $\phi_* = 0.0149$, $M_* = -20.44$ y $\alpha = -1.05$ ([Blanton et al., 2003](#)). Además, la distribución angular también fue restringida de tal forma de copiar la distribución del catálogo observacional. El catálogo sintético de galaxias trazadoras así construido contuvo un total de 2×10^7 puntos. En cuanto al catálogo sintético de grupos centros, se realizaron diferentes catálogos correspondientes a cada una de las muestras de grupos de galaxias observacionales. Cada uno de estos catálogos sintéticos se construyó siguiendo la distribución en *redshift* de grupos observados de cada muestra, y cada uno contó con una cantidad de puntos 100 veces mayor.

Estamos en condiciones de estimar las funciones de correlación proyectadas en la dirección paralela y perpendicular al semieje mayor del tensor de forma proyectado, y, para comparación, la función de correlación isótropa. A estas tres funciones las denotaremos, equivalentemente a como lo hicimos en el caso 3D, con ω_{\parallel} , ω_{\perp} , y ω_{iso} . Además, para evitar contaminación de estructuras que pidieran encontrarse muy por delante o muy por detrás de grupo centro, solo tomamos aquellas galaxias trazadoras (observadas y sintéticas) que se encontraran a una distancia relativa $< 50h^{-1}Mpc$ del grupo.

La figura 23 muestra los resultados obtenidos para la función de correlación anisótropa y proyectado para diferentes rangos de masa del grupo centro. Solo mostramos las funciones de correlación paralela ω_{\parallel} (líneas sólidas) y perpendicular ω_{\perp} (líneas de trazos) al semieje mayor del tensor de forma y la función isótropa ω_{iso} (líneas de punto). Los paneles A, B y C corresponde a cada uno de los terciles de la distribución de masa de grupos con más de 10 miembros, mientras que el panel D muestra los resultados para el tercil más masivo de grupos con más de 20 miembros. Notamos que para todas las masas se observan diferencias estadísticamente significante entre las funciones de correlación paralela y perpendicular, y que esta diferencia aumenta notablemente con la masa de los grupos centros. Estos resultados muestran que existe una fuerte señal de alineamiento, equivalente a la encontrada para el caso de estudio en la simulación numérica, estando la materia preferentemente alineada con el semieje mayor del tensor de forma proyectado. Asimismo, vale destacar que según nuestros estudios la señal de alineamiento es detectable hasta escalas de aproximadamente $20h^{-1}Mpc$.

En la figura 24 se muestran los cocientes en las funciones de correlación ω_{\parallel} y ω_{\perp} como función de la masa del grupo centro. En el panel de la izquierda se muestran los resultados correspondientes al término de 1-halo y a la derecha los del término de 2-halos. Los símbolos abiertos representan los resultados obtenidos a partir del catálogo real, mientras que los símbolos llenos los cocientes de las funciones de correlación estimadas en el catálogo sintético. Los resultados para grupos de galaxias con más de 10, 15 y 20

miembros son mostrados con círculos, triángulos y cuadrados, respectivamente.

Analizando los puntos llenos del panel de la izquierda podemos inferir que existe una cierta tendencia hacia formas menos esféricas cuando la masa del grupo aumenta, hecho que ya hemos mencionada y ha sido notado por otros autores (Paz et al., 2006). Los resultados obtenidos del catálogo real poseen errores grandes y no es posible indicar una tendencia clara. Sin embargo, en la mayoría de los casos los cocientes en el catálogo sintético y real están en buen acuerdo.

En el régimen de 2-halos existe una tendencia similar con la masa del halo centro aunque con una señal menor, disminuida por el tamaño de los errores. Sin embargo, puede observarse un buen acuerdo entre los resultados, no encontrándose una dependencia consistente con el número mínimo de miembros del grupo. Vale notar que la señal de anisotropía resulta estadísticamente significativa siendo, en el mejor de los casos (para los grupos más masivos), $3 - \sigma$ por encima de una señal isotrópica (indicada con las líneas de trazos en la figura 24).

5.3 ALINEACIÓN Y COLORES DE LAS GALAXIAS

El conjunto de galaxias posee varias particularidades que brindan información física, química, morfológica, etc. de las mismas. Una de ellas es la bien conocida bimodalidad en el color de las galaxias. Si observamos una imagen del firmamento donde aparezca una cantidad significativa de galaxias, podremos distinguir entre dos poblaciones bien diferenciadas. Una correspondiente a aquellas galaxias predominantemente esferoidales de color rojizo y otra conformada por galaxias azules preferentemente espirales. Si bien en la práctica esta distinción resulta provechosa, la misma no es tajante, siendo la relación color-morfología no tan dicotómica: una galaxia espiral puede tener un índice de color rojizo producto de una gran extinción por polvo o una galaxia elíptica puede verse azulada si ha tenido actividad de formación estelar en el pasado reciente.

Una manera de examinar esta bimodalidad es a través del diagrama color-magnitud de las galaxias como se muestra en la figura 25. Las curvas demarcan los isocontornos de nivel de la distribución de galaxias en el espacio color $M_g^{0.1} - M_r^{0.1}$ y magnitud absoluta $M_r^{0.1}$ (los superíndices indican que todas las magnitudes han sido convertidas al mismo marco fijo a $z = 0.1$). Aquellas galaxias que poseen un índice más grande tienen color más rojizo. Puede observarse en el mismo gráfico que existe cierta dependencia entre el color y la magnitud absoluta, siendo las galaxias más brillantes las que dominan la región rojiza, mientras que las más azuladas son más débiles.

Para disgregar las dos poblaciones, y teniendo en cuenta la dependencia antes citada, dividimos la muestra de galaxias en 10 rangos de magnitudes y en cada uno de ellos realizamos el ajuste de la distribución de color resultante. Dicha distribución puede ser bien descripta como la suma de dos funciones gaussianas:

$$P(c) = A_r e^{\left(-\frac{(c-\alpha_r)^2}{\sigma_r^2}\right)} + A_a e^{\left(-\frac{(c-\alpha_a)^2}{\sigma_a^2}\right)} \quad (5.9)$$

En la figura 25 los parámetros α_r y α_a para cada uno de los 10 rangos de magnitud son indicados con círculos rojos y azules, respectivamente. La línea de trazos es un ajuste lineal de los círculos verdes, los cuales indican la

media geométrica entre los dos anteriores. Con este último ajuste es posible separar la población de galaxias según la magnitud absoluta en la banda r que posea la misma. La figura 26 muestra la distribución de colores para estas dos submuestras con los colores correspondientes a la dicotomía mencionada. Por completitud en línea negra se muestra la distribución de colores de la muestra completa.

Una vez realizada esta distinción entre galaxias azules y rojas, nos planteamos la pregunta si dichas poblaciones presentarían diferentes señales de alineación bajo la «lupa» de la función de correlación anisótropa. Realizamos entonces un análisis similar al que empleamos en la sección anterior salvo que en esta oportunidad las galaxias trazadoras son o rojas o azules. La figura 27 muestra estos resultados donde en cada panel se consigna el rango de masa del grupo centro de la muestra, siendo el panel superior izquierdo correspondiente a la muestra completa de grupos. En colores azules y rojos se muestra los resultados correspondiente a las funciones obtenidas tomando como galaxias trazadoras las del color homónimo. Para comparación se muestran en color negro los resultados considerando la muestra completa de trazadores.

Lo primero que podemos observar es que la función de correlación muestra mayor amplitud para la muestra de galaxias rojas que para las azules, resultado que ya fue encontrado por otros autores (véase por ejemplo, Zehavi et al., 2005). Además, como ya hemos observado anteriormente, la amplitud de todas las correlaciones aumenta con la masa de grupo centro. En cuanto a la señal de alineamiento, vemos que la anisotropía está presente en todas las funciones y, en mayor o menor medida, en todos los rangos de masa. Sin embargo, no existen diferencias estadísticamente significativas entre las correlaciones estimadas solo con galaxias rojas o azules. Los recuadros inferiores de cada panel muestran los cocientes entre las funciones de correlación direccionales y la función isótropa (estimada para cada una de las muestras de color), donde, si bien puede apreciarse la anisotropía, el comportamiento en todos los casos es similar.

Entonces, a la luz de nuestros resultados, no podemos decir que exista alguna dependencia entre la señal de anisotropía y el color $M_g^{0.1} - M_r^{0.1}$ de las galaxias trazadoras.

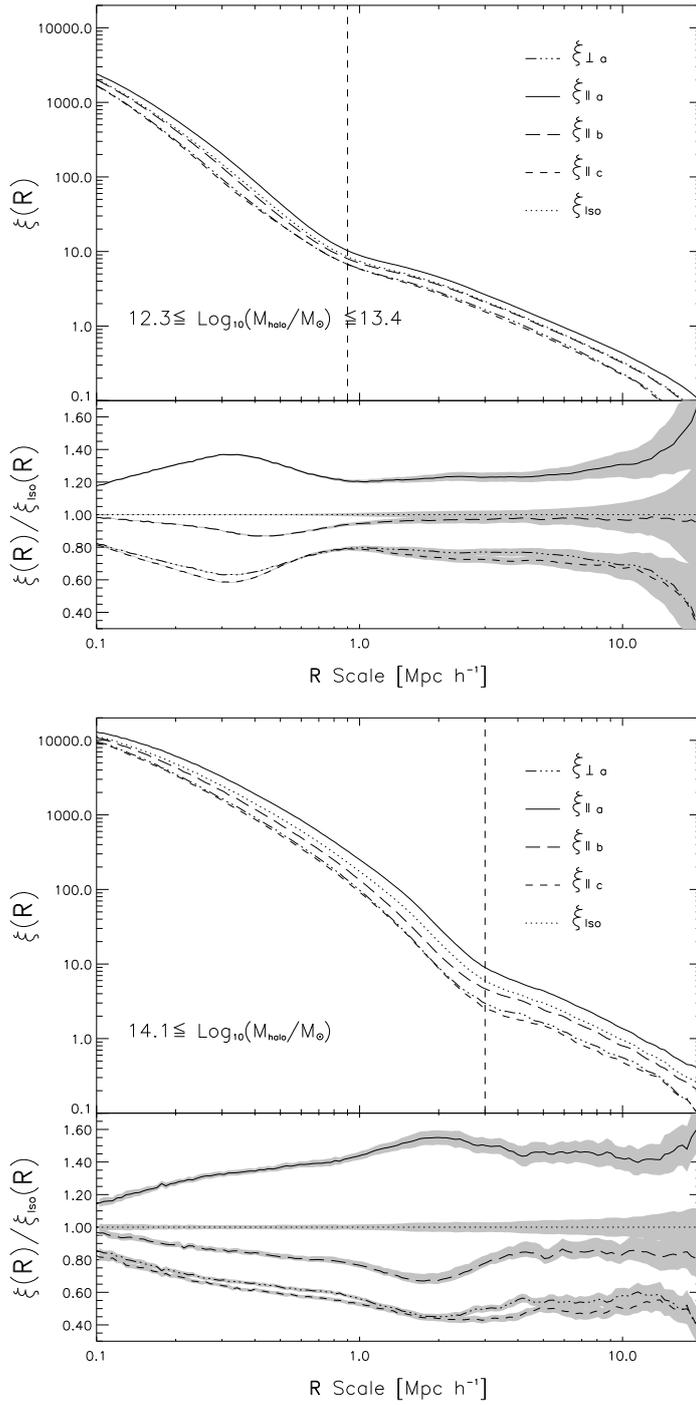


Figura 19: *Panel superior:* Función de correlación cruzada halo-materia para halos de baja masa. Las líneas sólida, de trazos largos y de trazos cortos muestran las funciones de correlación estimadas a lo largo de las direcciones de los semiejes mayor, intermedio y menor del tensor de forma del halos, respectivamente. La línea punteada muestra la función de correlación isotrópica (i. e. la correlación cruzada halo-materia clásica). La línea de trazos y puntos corresponde a la función de correlación estimada en la dirección perpendicular al semieje mayor del tensor de forma. La línea de trazos vertical indica la escala en la cual se presenta la transición entre los términos de 1- y 2-halos. Las regiones sombreadas indican $1 - \sigma$ de desviación estándar alrededor de cada medición. La parte inferior del panel muestra los cociente entre cada una de las correlaciones y la medición isotrópica. *Panel Inferior:* las mismas curvas mostradas en el panel superior pero en este caso para halos de materia oscura con masas altas.

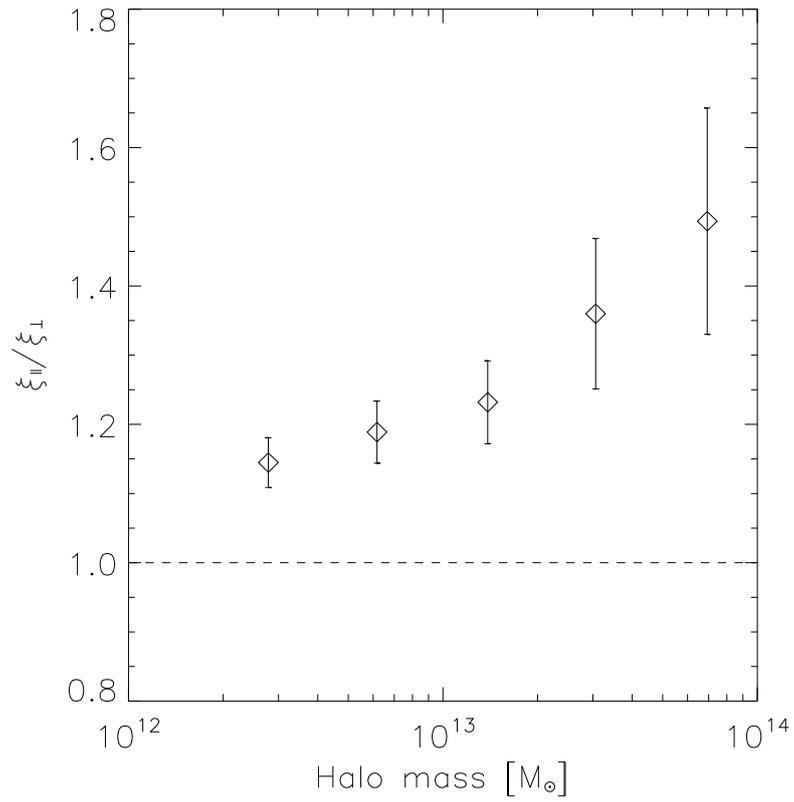


Figura 20: Cocientes globales entre las funciones de correlación en la dirección paralela y perpendicular al semieje mayor del tensor de forma del halo ($\xi_{\parallel a} / \xi_{\perp a}$). Es cociente es computado solo para el régimen de 2-halos. La línea de trazo horizontal marca el límite correspondiente a una señal de anisotropía nula.

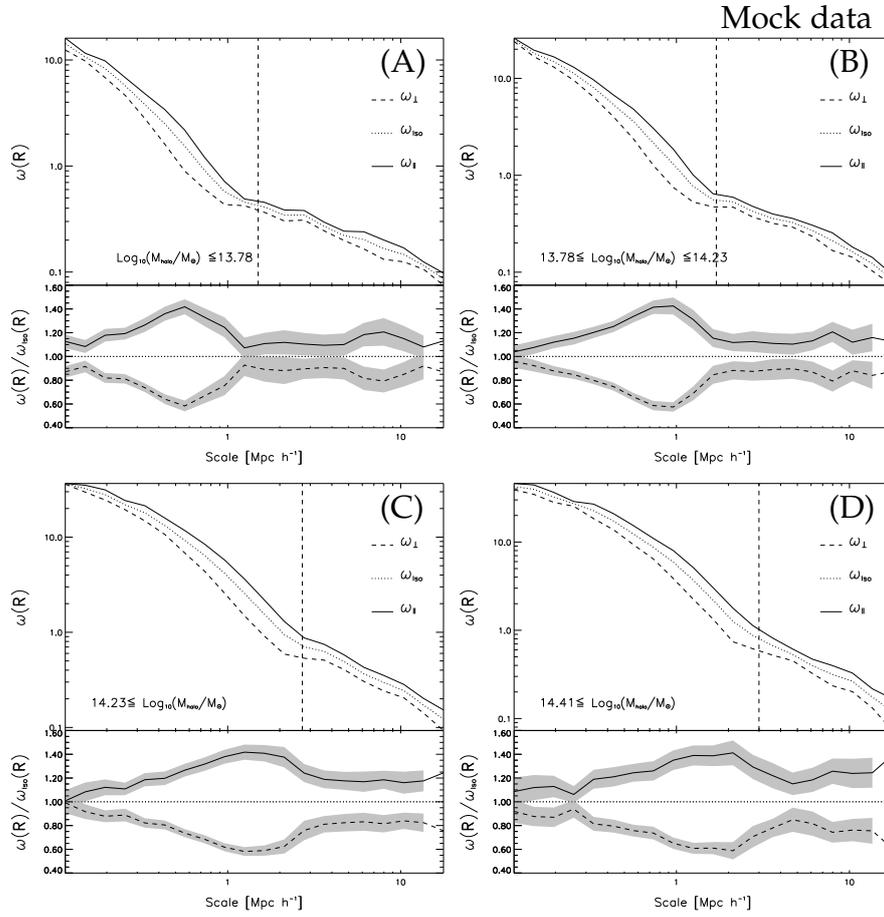


Figura 21: Función de correlación cruzada grupo-galaxia proyectada para tres rangos de masa de grupos extraídos del catálogo sintético. Las líneas de trazo corresponden a la función de correlación estimada en la dirección perpendicular al semieje mayor del tensor de forma proyectado sobre el plano del cielo mientras las líneas sólidas muestran los resultados en la dirección paralela a dicho semieje. Las líneas de punto muestran la función de correlación isotrópica para cada caso. Los tres primeros paneles A, B y C muestran los resultados para los terciles de masa más bajo, intermedio y más alto, respectivamente, de la muestra de grupos con más de 10 miembros. El panel D, muestra los resultados para el tercil de masa más alto para grupos de galaxias con más de 20 miembros ($M \geq 2.6 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$). Los cocientes entre las correlaciones en las diferentes direcciones y la función de correlación isotrópica son mostrados en la parte inferior de cada panel.

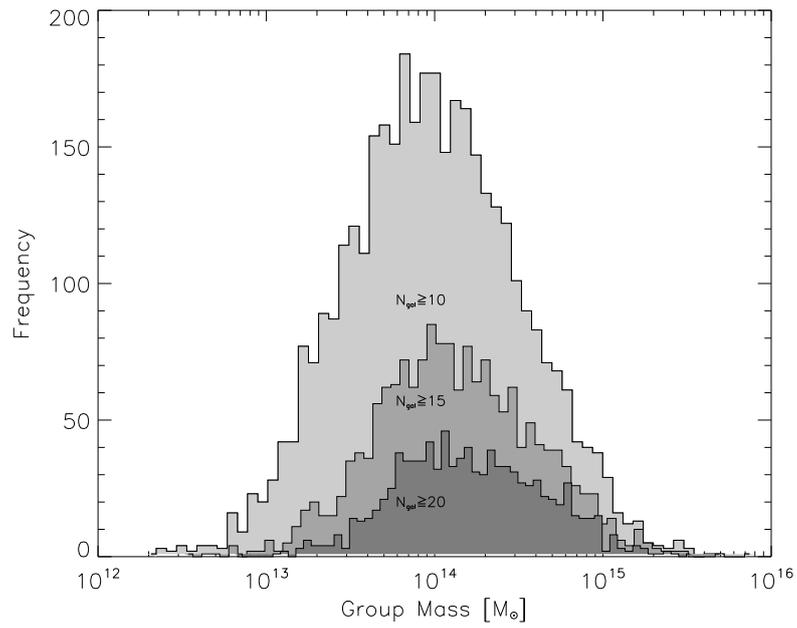


Figura 22: Distribuciones de masas de grupos de galaxias para diferentes muestras seleccionadas según un umbral en el número mínimo de miembros. Cada distribución corresponde a grupos con más de la cantidad de miembros que se indica en el gráfico.

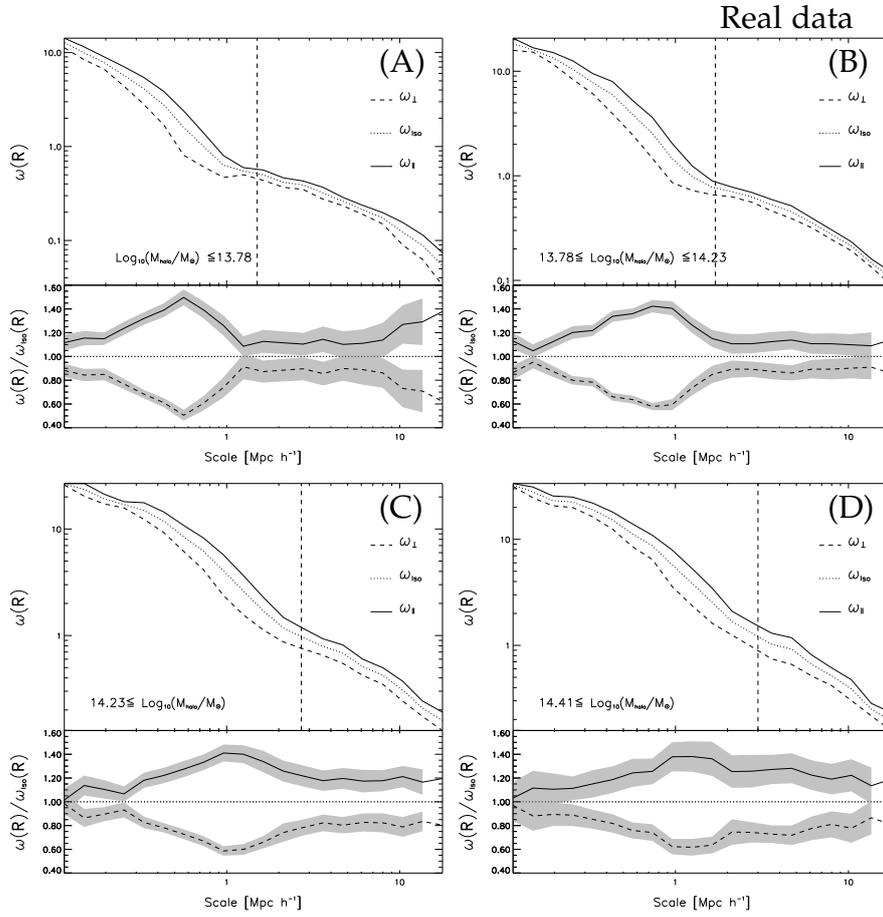


Figura 23: Función de correlación anisótropa grupo-galaxia proyectada para tres rangos de masa. Las líneas de trazo corresponden a la función de correlación estimada en la dirección perpendicular al semieje mayor del tensor de forma proyectado sobre el plano del cielo mientras las líneas sólidas muestran los resultados en la dirección paralela a dicho semieje. Las líneas de punto muestran la función de correlación isotrópica para cada caso. Los tres primeros paneles A, B y C muestran los resultados para los terciles de masa más bajo, intermedio y más alto, respectivamente, de la muestra de grupos con más de 10 miembros. El panel D, muestra los resultados para el tercil de masa más alto para grupos de galaxias con más de 20 miembros ($M \geq 2.6 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$). Los cocientes entre las correlaciones en las diferentes direcciones y la función de correlación isotrópica son mostrados en la parte inferior de cada panel.

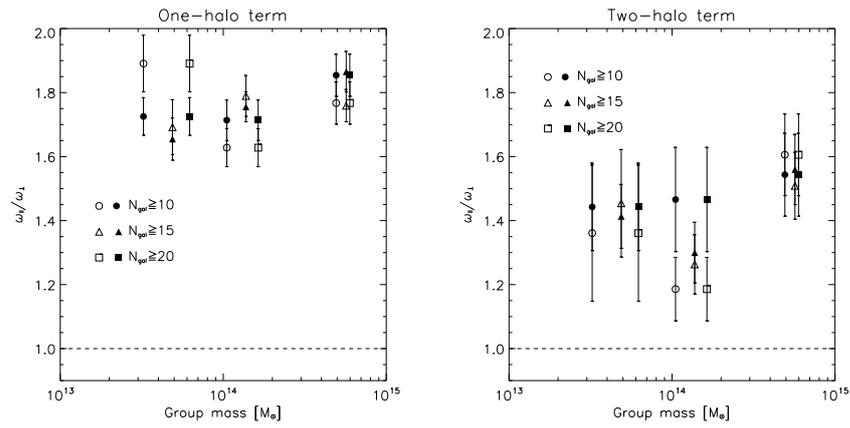


Figura 24: Cocientes globales entre las funciones de correlación estimadas en las direcciones paralelas y perpendiculares al semieje mayor del tensor de forma del grupo centro ($\omega_{\parallel}/\omega_{\perp}$). Los cocientes son computados en los dos rangos diferentes correspondientes a los términos de 1- y 2-halos, mostrados en el panel de la izquierda y la derecha, respectivamente. Los símbolos abiertos corresponden a los resultados obtenidos a partir de los datos observacionales. Mientras que los símbolos llenos muestran los cocientes correspondientes a los resultados obtenidos haciendo uso de un catálogo sintético. Para referencia, la línea de trazos horizontal muestra el valor correspondiente al cociente unitario (i. e., señal de anisotropía nula).

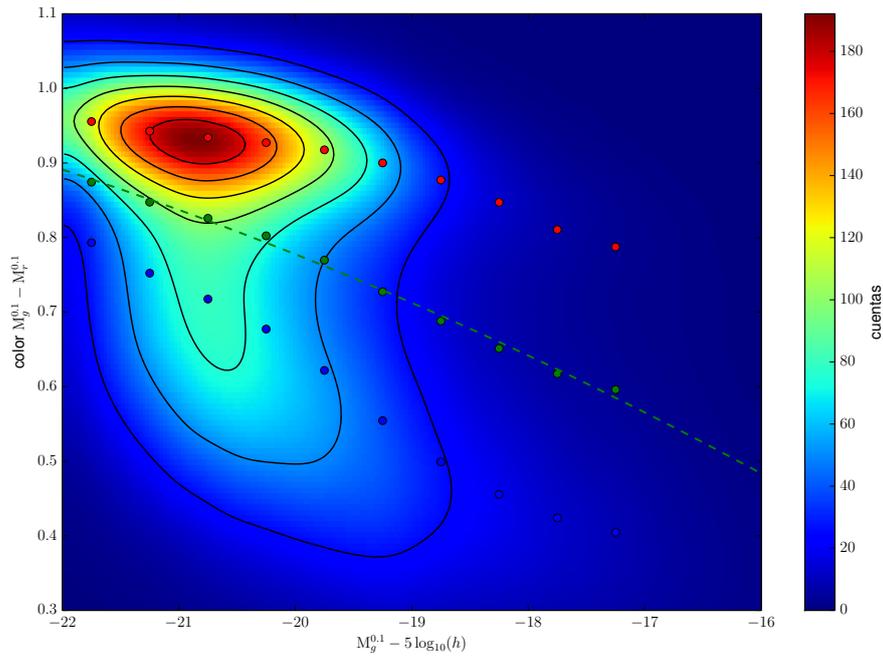


Figura 25: Diagrama color-magnitud de galaxias del catálogo espectroscópico SDDS-DR7. El color es computado como la diferencia entre las magnitudes en la banda g y en la banda r . El eje de las abscisas representa la magnitud absoluta $M_r^{0.1}$ en la banda r . Todas las magnitud son corregidas a $z = 0.1$. Los puntos rojos y azules muestran puntos máximos del ajuste con dos gaussianas para cada rango de magnitud absoluta, mientras que los puntos verdes muestran la media geométrica entre los dos anteriores. La línea de trazos verde muestra el ajuste utilizado para separar las poblaciones.

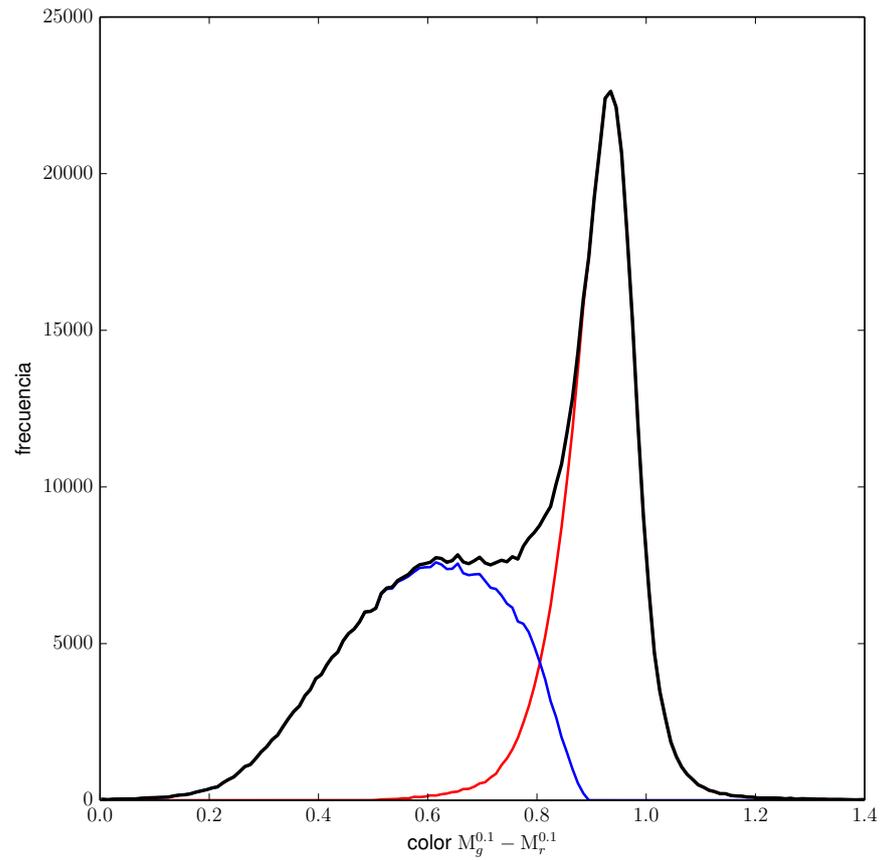


Figura 26: Distribución de color de galaxias donde pueden apreciarse la bimodalidad de galaxias rojas y azules.

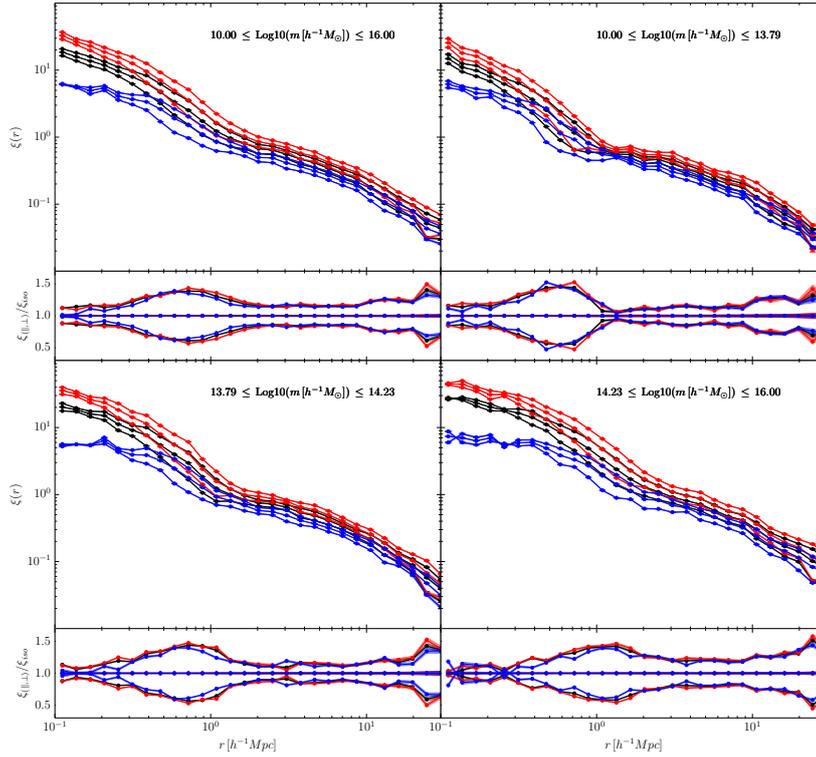


Figura 27: Funciones de correlación anisótropas por color para los tres terciles y todo el rango de masas de grupos con más de 10 miembros. En rojo y azul se muestran las funciones de correlación tomando como galaxias trazadoras galaxias rojas y azules, respectivamente, según la función descrita en el texto. En líneas negras se muestran las correlaciones sin distinción de color. En los paneles inferiores se muestran los cocientes entre las correlaciones direccionales y la respectivas funciones isotrópicas. De estas curvas puede inferirse que no existe señal evidente de alineación preferencial según el color de la galaxia trazadora.

MODELO ANISÓTROPO DE HALOS

6.1 INTRODUCCIÓN

A mediados del siglo XX, [Neyman & Scott \(1952\)](#) publicaron un trabajo el cual sería la base del formalismo que hoy conocemos con el nombre de Modelo de Halos (MH). En esta publicación los autores propusieron un novedoso modelo que intentaba describir la manera en que las galaxias se encontraban distribuidas espacialmente en el Universo. Dicho modelo estaba asentado en cuatro hipótesis fundamentales:

- Las galaxias se encuentran agrupadas en grupos y cúmulos.
- La cantidad de galaxias pertenecientes a un cúmulo o grupo de galaxias obedece una cierta ley probabilística.
- Existe una ley probabilística la cual describe cómo se distribuyen las galaxias dentro de los cúmulos o grupos.
- La distribución espacial de los cúmulos obedece una quasi-uniforme ley probabilística.

Si bien, inicialmente este formalismo estaba orientado a describir la distribución espacial de galaxias, más tarde fue generalizado para describir la distribución de materia oscura dando origen al MH (i. e. [Seljak, 2000](#); [Peacock & Smith, 2000](#); [Cooray & Sheth, 2002b](#)). Análogamente al modelo de [Neyman & Scott \(1952\)](#), el MH asume que toda la materia del Universo se encuentra contenida en halos de materia oscura y que éstos poseen un perfil de densidad determinado (e. g., [NFW](#)). Además, se asume que la auto-correlación halo-halo está gobernada por la función de correlación que surge de la teoría lineal de evolución de estructuras modulada por los factores de sesgo de cada uno de los halos. En la forma estándar del MH, se considera que los halos de materia oscura tienen un perfil de densidad esférico y la distribución de estructuras, en pequeñas y medianas escalas, es isotropa. En este sentido, el MH estándar no tiene en cuenta ni las posibles desviaciones de la isotropía existentes en la función de correlación halo-halo ni los posibles apartamiento de la forma esférica de los halos.

Sin embargo, las simulaciones numéricas han demostrado que los halos tienen formas sensiblemente no esféricas, y que preferentemente tienden a ser prolados * (véase por ejemplo [Paz et al., 2006](#), y referencias en ese artículo). Además, se ha evidenciado que la orientación de los halos está relacionada con la distribución de las estructuras circundantes ([Bond et al., 1996](#); [Colberg et al., 2005](#); [Altay et al., 2006](#); [Aragón-Calvo et al., 2007](#); [Brunino et al., 2007](#); [Bett et al., 2007](#); [Kasun & Evrard, 2005](#); [Allgood et al., 2006](#);

* La forma prolada es semejante al de una pelota de rugby en contraste con la forma oblada la cual es propia de un disco o platillo volador.

Basilakos et al., 2006; Hahn et al., 2007b; Cuesta et al., 2008; Noh & Cohn, 2011). Estos resultados son también apoyados por las observaciones en la alineación de grupos de galaxias las cuales muestran como las galaxias se distribuyen en relación a la orientación de la forma proyectada de los grupos (Paz et al., 2006; Lau et al., 2011; Paz et al., 2011; Smargon et al., 2012).

La mayoría de estos estudios realizan un análisis estadísticos de la inclinación de los ejes principales del tensor de forma de los halos o grupos de galaxias respecto a ciertas direcciones definidas por la estructura circundante. Esta estructura es caracterizada por la distribución de partículas a través de las diferentes características topológicas tales como filamentos, paredes y las grandes burbujas de vacío (Cautun et al., 2013, véase por ejemplo). Si bien todos estos trabajos acuerdan en que existe cierta alineación dentro del modelo cosmológico Modelo Cosmológico de Materia Oscura Fría con Constante Cosmológica. (Λ CDM), la magnitud del alineamiento depende fuertemente de como uno defina geoméricamente la estructura circundante.

Por otro lado, en un trabajo de Paz et al. (2008) se introdujo una nueva estrategia para estimar aquellas alineaciones, siendo esta alternativa independiente de la definición de la estructura circundante. Este nuevo enfoque hace uso de una versión modificada de la clásica función de correlación bipuntual cruzada con el objetivo de cuantificar el alineamiento entre halos de materia oscura o grupos de galaxias y la estructura en gran escala. Asimismo, esta versión modificada de la función de correlación cruzada permite una comparación robusta entre resultados obtenidos de simulaciones numéricas y datos observacionales. Diferentes trabajos han demostrado la eficiencia de este enfoque para caracterizar los alineamientos mencionados (Paz et al., 2008; Faltenbacher et al., 2009; Paz et al., 2011; Faltenbacher et al., 2012; Schneider et al., 2012). En el mismo sentido se encuentran los estudios realizados por Smith & Watts (2005). Estos autores investigaron como es afectado el espectro de potencia isótropo por la triaxialidad y las alineamientos en la estructura en gran escala. Ellos encuentran que la forma triaxial no esférica de los halos produce una pequeña supresión de la potencia del espectro en escalas correspondientes al término de 1-halo, mientras que para el término de 2-halos encuentran un límite superior del 10% de incremento en la potencia cuando se impone la condición de que los halos se encuentran perfectamente alineados con la materia circundante.

Nosotros desarrollamos un modelo analítico para la función de correlación cruzada halo-materia, el cual surge como una extensión del MH clásico incluyendo un perfil triaxial para los halos de materia oscura y una función probabilística describiendo el alineamiento de los halos con la estructura circundante.

6.2 MODELO ANISÓTROPO DE HALOS

En esta sección introducimos el desarrollo analítico de un nuevo Modelo de Halos que tiene en cuenta la naturaleza triaxial de los halos de materia oscura como así también los posibles alineamientos con el ambiente que los rodea. Análogamente con el MH clásico, consideraremos que toda la materia oscura del Universo de encuentra contenida en halos de diferentes masas. Cada halo de materia oscura es caracterizado en términos de su perfil de densidad normalizado que denotamos por $U(\vec{r}, m, \vec{a}, \vec{\epsilon}) \equiv \rho(\vec{r}, m, \vec{a}, \vec{\epsilon}) / m$ donde \vec{r} es la posición respecto al centro del halo de masa m , las componen-

tes del vector \vec{a} son los autovalores del tensor de forma del halo (utilizamos la siguiente convención $a_1 > a_2 > a_3$), y \vec{e} indica las direcciones de los autovectores (i.e. sus componentes son los tres ángulos de Euler del elipsoide de forma.). Con estas consideraciones el campo de densidad $\rho(\vec{x})$ puede ser computado de la siguiente manera:

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N m_i U(\vec{x} - \vec{x}_i, m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \quad (6.1)$$

donde N es el número total de halos en el Universo. Similarmente, la densidad numérica de halos $n_c(\vec{x})$ puede ser expresada de la forma siguiente:

$$n_c(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \quad (6.2)$$

donde el factor $\psi(m, \vec{a}, \vec{e})$ es una función de selección, y $\delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$ es la función delta de Dirac centrada en la posición del halo.

La distribución de probabilidad $p(m, \vec{a}, \vec{e})$ de halos con masa m , vector de forma \vec{a} y orientación \vec{e} es expresada en términos de la ecuación:

$$p(m, \vec{a}, \vec{e}) = \left\langle \sum_{i=1}^N \delta(m - m_i) \delta(\vec{a} - \vec{a}_i) \delta(\vec{e} - \vec{e}_i) \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \right\rangle, \quad (6.3)$$

donde los paréntesis angulares $\langle \rangle$ denotan un promedio sobre un ensamble de realizaciones de Universos. En el caso que la forma de los halos ni las orientaciones sean tenidas en cuenta, esta función se reduce a la función de masa de halos clásica. De las definiciones anteriores, la densidad de materia media y la densidad numérica media de halos pueden computarse como:

$$\bar{\rho} = \int dm d\vec{a} d\vec{e} m p(m, \vec{a}, \vec{e}) \quad (6.4)$$

$$\bar{n}_c = \int dm d\vec{a} d\vec{e} p(m, \vec{a}, \vec{e}) \psi(m, \vec{a}, \vec{e}) \quad (6.5)$$

Salvo que se especifique lo contrario los límites de integración deben ser entendidos como los extremos de todo el rango donde el integrando es válido. La función de selección $\Psi(m, \vec{a}, \vec{e})$ nos permite imponer algunas restricciones en el rango de masa, formas y orientaciones de los halos centros.

Utilizando estas funciones podemos computar la función de correlación cruzada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \xi_{hm}(\vec{r}) &= \left\langle \left(\frac{n_c(\vec{x})}{\bar{n}_c} - 1 \right) \left(\frac{\rho(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{\rho}} - 1 \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{n_c(\vec{x}) \rho(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{n}_c \bar{\rho}} - \frac{n_c(\vec{x})}{\bar{n}_c} - \frac{\rho(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{\rho}} + 1 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{n_c(\vec{x}) \rho(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{n}_c \bar{\rho}} \right\rangle - 1 \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde hemos asumido que el promedio en el ensamble de Universos, bajo la Hipótesis de Ergodicidad, puede ser reemplazado por un promedio espacial

$$\left\langle \frac{\rho(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{\rho}} \right\rangle = \frac{1}{V\bar{\rho}} \int d\vec{x} \rho(\vec{x} + \vec{r}) = 1 \quad (6.7)$$

y similarmente

$$\left\langle \frac{n_c(\vec{x})}{n_c} \right\rangle = \frac{1}{V n_c} \int d\vec{x} n_c(\vec{x}) = 1 \quad (6.8)$$

Reemplazando 6.1 y 6.2 la ecuación 6.6 obtenemos:

$$\begin{aligned} \xi_{hm}(\vec{r}) = -1 + \frac{1}{\rho n_c} \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \right) \right. \\ \left. \times \left(\sum_{j=1}^N m_j U(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_j, m_j, \vec{a}_j, \vec{e}_j) \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (6.9)$$

Es posible dividir esta ecuación en dos términos, aquellos donde $i = j$, que llamaremos término de 1-halo, y aquellos términos para los cuales $i \neq j$, que denominaremos término de 2-halos. Consecuentemente definimos:

$$\begin{aligned} \xi_{hm}^{1h}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho n_c} \left\langle \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \right. \\ \left. \times m_i U(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_i, m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \right\rangle \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \xi_{hm}^{2h}(\vec{r}) = -1 + \frac{1}{\rho n_c} \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \right) \right. \\ \left. \times \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N m_j U(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_j, m_j, \vec{a}_j, \vec{e}_j) \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (6.11)$$

Podemos reescribir la ecuación 6.10 como:

$$\xi_{hm}^{1h}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho n_c} \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N m_i \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \quad (6.12)$$

$$\times \int d\vec{x} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) U(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_i, m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \quad (6.13)$$

$$= \frac{1}{\rho n_c} \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N m_i \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) U(\vec{r}, m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \quad (6.14)$$

$$= \frac{1}{\rho n_c} \int dm d\vec{a} d\vec{e} m \psi(m, \vec{a}, \vec{e}) U(\vec{r}, m, \vec{a}, \vec{e}) \quad (6.15)$$

$$\times \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \delta(m - m_i) \delta(\vec{a} - \vec{a}_i) \delta(\vec{e} - \vec{e}_i) \quad (6.16)$$

Y utilizando la ecuación 6.3, la expresión final para el término de 1-halo resulta:

$$\begin{aligned} \xi_{hm}^{1h}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho n_c} \int dm d\vec{a} d\vec{e} m U(\vec{r}, m, \vec{a}, \vec{e}) \\ \times p(m, \vec{a}, \vec{e}) \psi(m, \vec{a}, \vec{e}). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Un procedimiento similar puede ser aplicado para derivar el término de 2-halos a partir de la ecuación 6.11 y de este modo obtener:

$$\begin{aligned} \zeta_{hm}^{2h}(\vec{r}) &= -1 + \frac{1}{\rho n_c} \int dm_1 d\vec{a}_1 d\vec{e}_1 dm_2 d\vec{a}_2 d\vec{e}_2 d\vec{y} \\ &\quad \times m_2 U(\vec{r} - \vec{y}, m_2, \vec{a}_2, \vec{e}_2) \psi(m_1, \vec{a}_1, \vec{e}_1) \\ &\quad \times \frac{1}{V} \sum_{j=0}^N \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N \delta(m_1 - m_i) \delta(\vec{a}_1 - \vec{a}_i) \delta(\vec{e}_1 - \vec{e}_i) \\ &\quad \times \delta(m_2 - m_j) \delta(\vec{a}_2 - \vec{a}_j) \delta(\vec{e}_2 - \vec{e}_j) \delta(\vec{y} - (\vec{x}_j - \vec{x}_i)) \end{aligned} \quad (6.18)$$

La probabilidad conjunta de encontrar dos halos cada uno con un dado conjunto de propiedades dadas (masa, forma y orientación) separados a una distancia $|\vec{y}|$, puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \sum_{j=0}^N \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N &\times \delta(m_1 - m_i) \delta(\vec{a}_1 - \vec{a}_i) \delta(\vec{e}_1 - \vec{e}_i) \\ &\times \delta(m_2 - m_j) \delta(\vec{a}_2 - \vec{a}_j) \delta(\vec{e}_2 - \vec{e}_j) \\ &\times \delta(\vec{y} - (\vec{x}_j - \vec{x}_i)) = p_1 p_2 (\zeta_{1,2}(\vec{y}) + 1), \end{aligned} \quad (6.19)$$

donde $p_i = p(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i)$, es la probabilidad de encontrar un halo con el conjunto de propiedades $(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i)$, el índice $i = 1, 2$ corresponde a cada uno de los halos, y $\zeta_{1,2}(\vec{y}) = \zeta(\vec{y}_{1,2}, m_1, \vec{a}_1, \vec{e}_1, m_2, \vec{a}_2, \vec{e}_2)$ es la probabilidad conjunta de tener el par de halos separados por una distancia $\vec{y}_{1,2}$. Notar que hemos asumido, en el lado derecho de la ecuación, que la probabilidad para las propiedades de los halos (p_1 y p_2) y la probabilidad conjunta ($\zeta_{1,2}(\vec{y}) + 1$) son independientes. Por lo tanto, utilizando esta última ecuación, la expresión final para el término de 2-halos estará dada por:

$$\begin{aligned} \zeta_{hm}^{2h}(\vec{r}) &= \frac{1}{\rho n_c} \int dm_1 d\vec{a}_1 d\vec{e}_1 dm_2 d\vec{a}_2 d\vec{e}_2 d\vec{y} \\ &\quad \times m_2 U(\vec{r} - \vec{y}, m_2, \vec{a}_2, \vec{e}_2) p_1 p_2 \zeta_{1,2}(\vec{y}) \\ &\quad \times \psi(m_1, \vec{a}_1, \vec{e}_1) \end{aligned} \quad (6.20)$$

De esta forma las ecuaciones 6.17 y 6.20 brindan un modelo para la función de correlación bipuntal cruzada anisótropa teniendo en cuenta la forma y la orientación de los halos.

6.2.1 El término de 1-halo

Para poder estimar el término de 1-halo (ecuación 6.17), necesitamos adoptar algún modelo para el perfil de densidad triaxial de los halos de materia oscura y para la función de distribución de los parámetros de los halos. En cuanto al perfil de densidad, utilizaremos el modelo triaxial descrito por [Jing & Suto \(2002\)](#), de aquí en adelante [JS](#)). Este modelo asume que los contornos de isodensidad de un halo de materia oscura puede ser descrito a través de elipsoides triaxiales concéntricos con un vector de forma \vec{a} y una orientación \vec{e} dados. Una forma simple de parametrizar estas superficies es a través del parámetro radial R como es definido por [Smith & Watts \(2005\)](#):

$$\frac{R^2}{a_3^2} = \frac{z^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{x^2}{a_3^2}. \quad (6.21)$$

De acuerdo a **JS**, esta definición permite expresar el perfil de densidad de los halos de materia oscura de una manera similar a la dada por **Navarro et al. (1997)**:

$$\frac{\rho(R)}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{\delta_c}{(R/R_0)(1+R/R_0)^2}, \quad (6.22)$$

donde δ_c es la densidad característica y R_0 es el radio de escala. Análogamente al radio de escala del perfil de **NFW**, **JS** definen $R_0 = c_e/r_e$, donde c_e es el parámetro de concentración y r_e es el radio característico. **JS** también proveen las relaciones $c_e = \chi c_{\text{vir}}$, $r_e = \chi r_{\text{vir}}$, donde c_{vir} , r_{vir} son la concentración y radio virial, respectivamente.

Es posible relacionar la densidad característica δ_c con el parámetro de concentración considerando que la densidad media dentro de un elipsoide con semi-eje mayor r_e debe ser Δ_e veces la densidad crítica del Universo (ρ_c), de esta forma obtenemos:

$$\delta_c = \frac{\Delta_e}{3} \frac{c_e^3}{\ln(1+c_e) - c_e/(1+c_e)} \quad (6.23)$$

JS proveen una relación que involucra esta densidad equivalente Δ_e como una función de la densidad de virialización para un modelo esférico **NFW**:

$$\Delta_e = 5\Delta_{\text{vir}} \left(\frac{a_1^2}{a_3 a_2} \right)^{0.75}. \quad (6.24)$$

JS proponen un valor de $\chi = 0.45$ el cual es determinado mediante el ajuste de simulaciones numéricas. Sin embargo, nosotros hemos encontrado que un valor de $\chi = 0.5$ también es consistente con los datos de las simulaciones y al mismo tiempo provee un mejor acuerdo entre el perfil de **JS** y el perfil de **NFW** en el límite cuando se consideran halos con perfil esférico. En este caso, nuestra elección para el valor de χ da valores similares para δ_c y la densidad característica de los perfiles de masa **NFW** en un rango de masas de 10^8 a $10^{15} M_\odot$.

El siguiente ingrediente que debemos definir es la distribución de probabilidad $p(\vec{a}, m, \vec{e})$. Por simplicidad, asumiremos que la orientación \vec{e} de los halos y la masa m son variables aleatorias independientes, mientras que el vector de forma \vec{a} solo depende de la masa del halo. Consecuentemente la distribución de probabilidad puede escribirse como:

$$p(m, \vec{e}, \vec{a}) = n(m)p(\vec{e})p(\vec{a}|m) \quad (6.25)$$

donde $n(m)$ es la función de masa de los halos, $p(\vec{e})$ y $p(\vec{a}|m)$ son las distribuciones de probabilidad de la forma y la orientación de los mismos, respectivamente. Por ejemplo, en el caso de una distribución uniforme para la orientación del halo, la función densidad $p(\vec{e})$ toma la forma:

$$\begin{aligned} p(\vec{e})d\vec{e} &\equiv p(\alpha, \beta, \gamma)d\alpha d\beta d\gamma \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} d\alpha d(\cos\beta) d\gamma \end{aligned} \quad (6.26)$$

donde los ángulos de Euler están restringidos a los rangos: $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, y $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

Dado que la ecuación 6.21 puede ser reescrita en término de los cocientes $a_{21} = a_2/a_1$ y $a_{32} = a_3/a_2$, definimos la distribución de probabilidad condicional $p(\vec{a}|m)$ como una función de esos cocientes $p(a_{21}, a_{32}|m)$, donde los

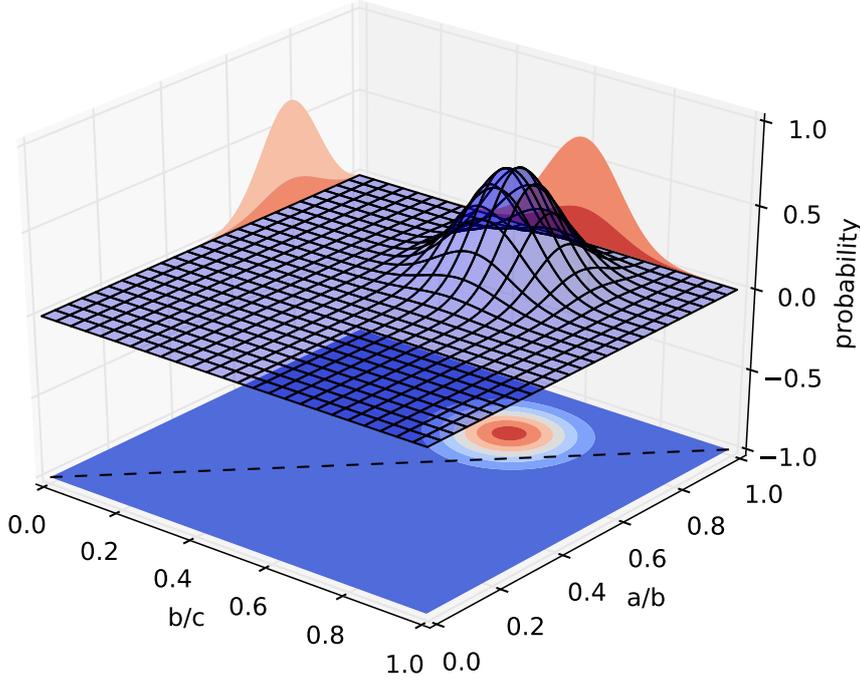


Figura 28: Función distribución de densidad normalizada para la forma de los halos de materia oscura. En la misma se han fijado arbitrariamente los parámetros $A = 0.6$ y $B = 0.8$ (véase ecuación 6.27).

dos argumentos están restringidos al intervalos $(0, 1)$. Con esta simplificación, podemos cambiar $d\vec{a} \rightarrow da_{21}da_{32}$ en las ecuaciones 6.17 y 6.20. Aproximamos esta distribución con el producto de dos leyes gaussianas y factores cuadráticos que aseguran que la probabilidad sea nula en los bordes de los intervalos. Consecuentemente, la distribución de formas tiene la siguiente expresión:

$$p(a_{21}, a_{32}|m) \propto a_{21} (1 - a_{21}) e^{-\frac{(a_{21}-A)^2}{2\sigma^2}} \times a_{32} (1 - a_{32}) e^{-\frac{(a_{32}-B)^2}{2\sigma^2}} \quad (6.27)$$

donde A y B son dos parámetros que dependen de la masa y deben ser estimados, mientras que para el valor de σ adoptamos un valor fijo de 0.1. La forma impuesta para la función de distribución $p(a_{21}, a_{32}|m)$ se encuentra inspirada en los resultados obtenidos de simulaciones numéricas. En la literatura es posible encontrar un expresión teórica para esta función (véase por ej., Lee et al., 2005). Sin embargo, sus resultados no se encuentran en buen acuerdo con los obtenidos por simulaciones numéricas.

El último ingrediente que necesitamos para estimar el término de 1-halo es la función de masa $n(m)$, la cual describe la abundancia de halos de materia oscura en un intervalo de masa alrededor de m . Esta función es estimada utilizando el modelo analítico provisto por Sheth et al. (2001).

6.2.2 El término de 2-halos

A continuación veremos cómo definir las funciones que nos hacen falta para poder calcular el término de 2-halos. Para computar la ecuación 6.20 necesitamos especificar la función $\xi_{1,2}(\vec{y}) \equiv \xi(\vec{y}_{1,2}|m_1, \vec{a}_1, \vec{e}_1, m_2, \vec{a}_2, \vec{e}_2)$. En escalas grandes la relación entre los halos y las sobredensidades de materia es determinista, por lo tanto, como en el Modelo de Halos clásico, podemos aproximar $\xi_{1,2}$ por la siguiente ecuación:

$$\xi(\vec{y})_{1,2} \approx f(\vec{y}_{1,2}|\vec{a}_1, \vec{e}_1, \vec{a}_2, \vec{e}_2)b(m_1)b(m_2)\xi_{lin}(\vec{y}_{1,2}) \quad (6.28)$$

donde $b(m_1)$ y $b(m_2)$ son los factores de sesgo para los halos centros y trazadores, respectivamente, y $\xi_{lin}(\vec{y}_{1,2})$ es la transformada de Fourier del espectro de potencia lineal (EPL). Hemos explícitamente introducido el factor $f(\vec{y}_{1,2}|\vec{a}_1, \vec{e}_1, \vec{a}_2, \vec{e}_2)$ el cual permite considerar las diferentes alineaciones. Para el EPL adoptamos la expresión analítica dada por Eisenstein & Hu (1999), mientras los factores de sesgo son computados a través del ajuste analítico dado por Sheth et al. (2001).

La función f que hemos definido arriba puede ser utilizada para describir dos tipos de alineamientos, a saber: (i) el alineamiento entre la posición de los halos trazadores y la dirección del semi-eje mayor del tensor de forma del halo centro; (ii) el alineamiento entre las orientaciones de los halos centro y trazadores. Es razonable esperar que el segundo tipo de alineamiento tenga un efecto de segundo orden en el modelo. Esto también es observado en el comportamiento de nuestro modelo, y en otros trabajos previos (véase por ejemplo van Daalen et al., 2012; Smith et al., 2006; Smith & Watts, 2005), donde el término de 2-halos es insensible a la forma de los halos. A su vez, esto es esperado dado que las diferencias entre los ejes mayor y menor son muy pequeñas en comparación a la distancia entre los centros de los halos centros y trazadores. Consecuentemente, y para hacer más sencillo el modelo, supondremos que la función de alineación no depende de la alineación entre los semi-ejes de los halos centros y trazadores. Además supondremos que esta función es independiente de la forma de los halos. Teniendo en cuenta estas consideraciones adoptamos la siguiente expresión:

$$f(\vec{y}_{1,2}|\vec{e}_1) \propto e^{-\frac{\theta^2}{2C^2}} + D e^{-\frac{(\theta-\pi/2)^2}{2C^2}} e^{-\frac{\phi^2}{2C^2}} \quad (6.29)$$

donde θ y ϕ son los ángulos polar y azimutal de $\vec{y}_{1,2}$ en un sistema de coordenadas definido por las direcciones dadas por el vector \vec{e}_1 . El primer (segundo) término de la ecuación precedente puede ser entendido como el exceso de correlación a lo largo del eje mayor (intermedio). Dado que la función de alineamiento es una distribución de probabilidad, la constante de proporcionalidad es definida por su normalización. Los factores C y D son parámetros libres que serán determinados en §6.6.2. La figura 29 muestra un ejemplo ilustrativo de la dicha función con parámetros $C = 0.3$ y $D = 1.0$. Debe notarse que aún cuando θ se aproxima a 0 y ϕ tiende a ser indeterminado, la función se vuelve constante por construcción, evitando cualquier comportamiento indeseado en su evaluación. El aumento de la función hacia valores bajos de θ representa el alineamiento de la distribución de materia alrededor del semi-eje mayor, mientras que el aumento hacia valores de $\theta = \pi/2$ y $\phi = 0$ representa el alineamiento correspondiente con el semi-eje intermedio.

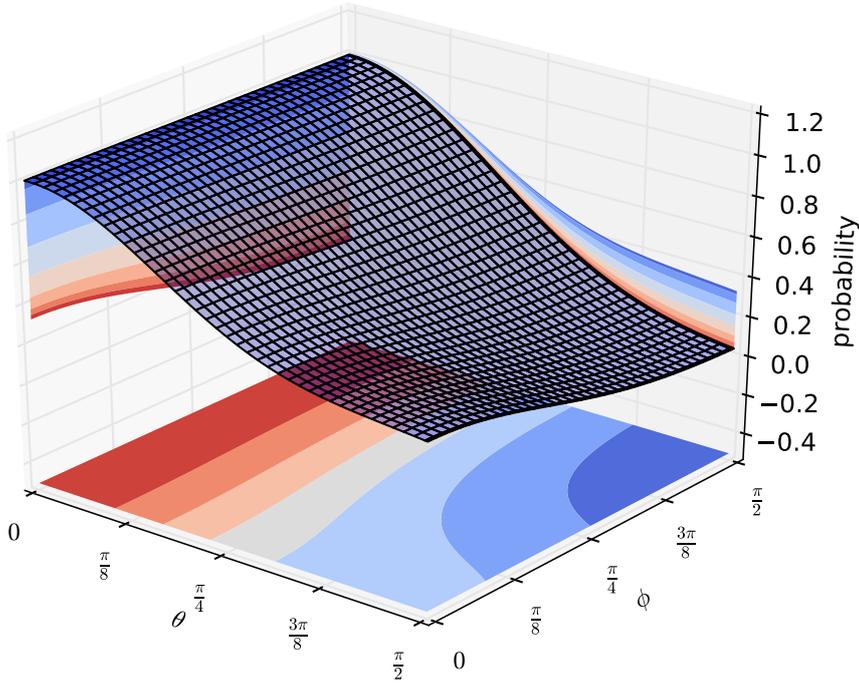


Figura 29: Función distribución de densidad normalizada para el alineamiento halo-halo con parámetros arbitrarios $C = 0.6$ y $D = 0.3$ (véase ecuación 6.29).

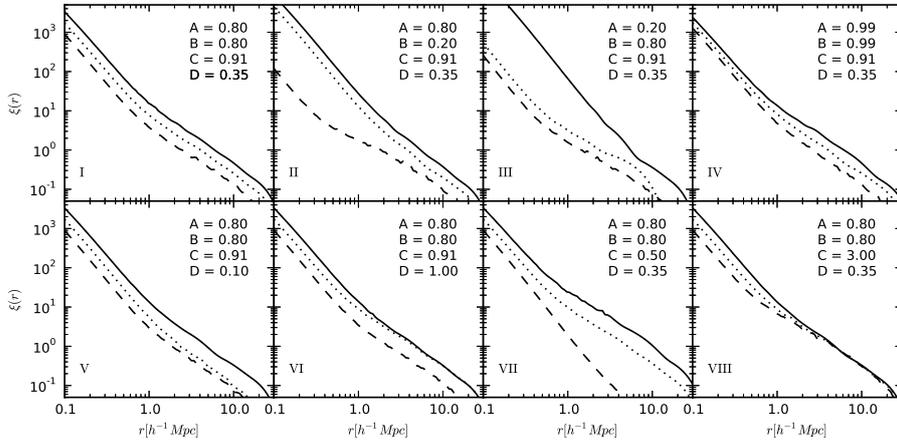


Figura 30: Resultados de la función de correlación anisótropa computada a lo largo de los 3 ejes del tensor de forma del halo para halos centro en el rango de masa: 10^{12} a $10^{16} M_{\odot} h^{-1}$. Las líneas sólidas, punteadas, y a trazos corresponden a la dirección del eje mayor, intermedio y menor, respectivamente. Cada uno de los paneles corresponde a un conjunto de parámetros diferentes como se explica en el texto y se muestra en la parte superior derecha de cada panel.

6.3 MODELO ANISÓTROPO DE HALOS Y LA DISTRIBUCIÓN DE GALAXIAS

No es posible contrastar el Modelo Anisótropo de Halos (MAH) con los resultados obtenidos de observaciones de la distribución de galaxias de manera directa. Por lo cual, es necesario realizar algunas consideraciones previas. Una de ellas, al igual que en el caso del MH descrito en §3.6, es la inclusión de la DOH.

Por otro lado, en el caso de las observaciones resulta más práctico computar la función de correlación realizando las cuentas con distancias proyectadas en el plano del cielo, como hemos descrito en §5.2. Por ello debemos de establecer una forma de computar el MAH de la misma manera.

6.3.1 Distribución de Ocupación de Halos

Como ya hemos mencionado la DOH es una función probabilística de la distribución de galaxias dentro de los halos de materia oscura. Dicha función es caracterizada por tres componentes: una ley probabilística de la cantidad de galaxias contenidas dentro de un halo de materia oscura, el valor medio de dicha ley (que puede depender de alguna/s propiedad/es del halo) y una función que establece como se distribuyen espacialmente las galaxias dentro del halo. En general, se asume que la ley probabilista es bien descrita por una ley de Poisson, y por lo tanto el valor medio es el único parámetro que debe especificarse. Para la distribución espacial de las galaxias, es válido pensar que las mismas siguen aproximadamente el mismo perfil de densidad que la materia oscura. Finalmente, para el valor medio generalmente se asume que solo depende de la masa del halo, es decir, una función condicional $P(N|m)$ que haciendo abuso de notación denotaremos como $\langle N|m \rangle$.

En la literatura existen varias formas funcionales para tal función. Una de las maneras más usuales de definirla es como la suma de dos funciones, separando en galaxias centrales y satélites:

$$\langle N|m \rangle = \langle N|m \rangle_{cen} + \langle N|m \rangle_{sat} \quad (6.30)$$

siendo los términos $\langle N|m \rangle_{cen}$ y $\langle N|m \rangle_{sat}$ el número medio de galaxias centrales y satélites, respectivamente. El primero de ellos es definido como una función escalón suave

$$\langle N|m \rangle_{cen} = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\log(m/m_{min})}{\sigma_{cen}} \right) \right] \quad (6.31)$$

donde erf es la función error dada por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (6.32)$$

En la ecuación 6.31 m_{min} y σ_{cen} son dos parámetros, el primero de los cuales representa la masa umbral mínima más arriba de la cual todos los halos tienen una galaxia central, mientras que el segundo, determina el ancho característico de transición. Para las galaxias satélites se asume que su contribución al número medio sigue una ley de potencia, es decir,

$$\langle N|m \rangle_{sat} = \left[\frac{m - M_0}{M_1} \right]^\alpha \quad (6.33)$$

donde M_0 es la masa de truncamiento, M_1 es la masa de normalización y α la pendiente.

De esta manera la DOH es descripta con cinco parámetros. Es importante notar que los mismos no son independientes entre sí ya que deben satisfacer la ecuación 3.41 para un dado valor de \bar{n}_g . Una manera indirecta de determinar dichos parámetros es ajustando los mismos de manera de que reproduzcan el espectro de potencia o la función de correlación de las galaxias observada (véase por ejemplo, Zheng et al., 2005). Mientras que una manera directa de determinar tales parámetros sería a través del estudio de grupos de galaxias (véase por ejemplo, Yang et al., 2008).

6.3.2 Modelo Anisótropo de Halos Proyectado

Podemos ahora construir el MAH para la función de correlación cruzada grupos-galaxia. Para ello escribamos el número de galaxia en una dada posición del espacio \vec{x} de la siguiente manera:

$$n_g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N N_i U(\vec{x} - \vec{x}_i, m_i, \vec{a}_i, \vec{\epsilon}_i) \quad (6.34)$$

donde hemos explicitado la dependencia del perfil de galaxias U con la forma \vec{a} y la orientación $\vec{\epsilon}$ del halo que las aloja. Vale recordar que asumiremos que la distribución de las galaxias es igual a la distribución de la materia oscura y, por lo tanto, el perfil U tiene la misma forma funcional que el perfil de JS que hemos utilizado en el capítulo anterior.

A partir de la ecuación precedente podemos obtener el número medio de galaxias, análogamente a como computamos la densidad media en la ecuación 6.4, de la siguiente manera:

$$\bar{n}_g = \int dm d\vec{a} d\vec{\epsilon} p(m, \vec{a}, \vec{\epsilon}) \langle N | m \rangle \quad (6.35)$$

Estamos ahora en condiciones de construir el MAH para la distribución de galaxias y grupos. Haciendo uso de las ecuaciones 6.3 y 6.5 la correlación cruzada grupo-galaxia se define como:

$$\begin{aligned} \xi_{cg}(\vec{r}) &= \left\langle \left(\frac{n_c(\vec{x})}{\bar{n}_c} - 1 \right) \left(\frac{n_g(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{n}_g} - 1 \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{n_c(\vec{x})n_g(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{n}_c \bar{n}_g} - \frac{n_c(\vec{x})}{\bar{n}_c} - \frac{n_g(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{n}_g} + 1 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{n_c(\vec{x})n_g(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{n}_c \bar{n}_g} \right\rangle - 1 \end{aligned} \quad (6.36)$$

donde hemos hecho uso de la ecuación 6.8 y la correspondiente para el número medio de galaxias:

$$\left\langle \frac{n_g(\vec{x} + \vec{r})}{\bar{n}_g} \right\rangle = \frac{1}{V \bar{n}_g} \int d\vec{x} n_g(\vec{x} + \vec{r}) = 1 \quad (6.37)$$

Reemplazando los factores de la ecuación 6.36 por sus definiciones dadas en las ecuaciones 6.5 y 6.34 obtenemos:

$$\xi_{cg}(\vec{r}) = -1 + \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{\epsilon}_i) \right) \left(\sum_{j=1}^N N_j U(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_j, m_j, \vec{a}_j, \vec{\epsilon}_j) \right) \right\rangle$$

(6.38)

La ecuación precedente puede ser separada de la misma manera que hemos hecho anteriormente, aquellos términos para los cuales $i = j$ y aquellos donde $i \neq j$. De esta manera el término de 1-halo queda expresado de la siguiente forma:

$$\zeta_{cg}^{1h}(\vec{r}) = \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \left\langle \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) N_i U(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_i, m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \right\rangle \quad (6.39)$$

mientras que el término de 2-halos es

$$\zeta_{cg}^{2h}(\vec{r}) = -1 + \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \right) \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N N_j U(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_j, m_j, \vec{a}_j, \vec{e}_j) \right) \right\rangle \quad (6.40)$$

Al igual que hicimos en la sección 6.2 podemos reemplazar los sumatorios por integrales mediante la utilización del teorema de ergodicidad y las funciones delta de Dirac. De esta manera la ecuación 6.39 queda de la forma:

$$\begin{aligned} \zeta_{cg}^{1h}(\vec{r}) &= \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N N_i \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \int_V d\vec{x} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) U(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_i, m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \\ &= \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N N_i \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) U(\vec{r}, m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) \\ &= \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \int_A dm \int d\vec{a} \int_E d\vec{e} \langle N|m \rangle \psi(m, \vec{a}, \vec{e}) U(\vec{r}, m, \vec{a}, \vec{e}) \times \\ &\quad \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \delta(m - m_i) \delta(\vec{a} - \vec{a}_i) \delta(\vec{e} - \vec{e}_i) \end{aligned}$$

resultando finalmente

$$\zeta_{cg}^{1h}(\vec{r}) = \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \int_A \langle N|m \rangle dm \int_E d\vec{e} U(\vec{r}, m, \vec{a}, \vec{e}) p(m, \vec{a}, \vec{e}) \psi(m, \vec{a}, \vec{e}) \quad (6.41)$$

donde las entidades A y E hacen referencia al espacio de las formas y las orientaciones de los halos, respectivamente. Por cuestiones de espacio hemos suprimido algunos símbolos de integrales, por lo que vale recordar que las integrales en A y E son integrales triples.

Realizando operaciones similares sobre el término de 2-halos, a partir de la 6.40, hayamos la expresión integral para dicho término

$$\bar{\xi}_{cg}^{2h}(\vec{r}) = -1 + \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \frac{1}{V} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) N_j \quad (6.42)$$

$$\int_V d\vec{x} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) U(\vec{x} + \vec{r} - \vec{x}_j, m_j, \vec{a}_j, \vec{e}_j) \quad (6.43)$$

$$= -1 + \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \frac{1}{V} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N \psi(m_i, \vec{a}_i, \vec{e}_i) N_j U(\vec{x}_i + \vec{r} - \vec{x}_j, m_j, \vec{a}_j, \vec{e}_j) \quad (6.44)$$

$$= -1 + \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \int_{A_1} dm_1 \int_{E_1} d\vec{a}_1 \int_{E_1} d\vec{e}_1 \psi(m_1, \vec{a}_1, \vec{e}_1) \int \langle N|m_2 \rangle dm_2 \int_{A_2} d\vec{a}_2 \int_{E_2} d\vec{e}_2 \times \quad (6.45)$$

$$\frac{1}{V} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N \delta(m_1 - m_i) \delta(\vec{a}_1 - \vec{a}_i) \delta(\vec{e}_1 - \vec{e}_i) \delta(m_2 - m_j) \delta(\vec{a}_2 - \vec{a}_j) \delta(\vec{e}_2 - \vec{e}_j) U(\vec{x}_i + \vec{r} - \vec{x}_j, m_2, \vec{a}_2, \vec{e}_2) \quad (6.46)$$

$$= -1 + \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \int dm_1 \int_{A_1} d\vec{a}_1 \int_{E_1} d\vec{e}_1 \psi(m_1, \vec{a}_1, \vec{e}_1) \int \langle N|m_2 \rangle dm_2 \int_{A_2} d\vec{a}_2 \int_{E_2} d\vec{e}_2 \int d\vec{y} U(\vec{r} - \vec{y}, m_2, \vec{a}_2, \vec{e}_2) \times \quad (6.47)$$

$$\frac{1}{V} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N \delta(m_1 - m_i) \delta(\vec{a}_1 - \vec{a}_i) \delta(\vec{e}_1 - \vec{e}_i) \delta(m_2 - m_j) \delta(\vec{a}_2 - \vec{a}_j) \delta(\vec{e}_2 - \vec{e}_j) \delta(\vec{y} - (\vec{x}_j - \vec{x}_i)) \quad (6.48)$$

siendo la expresión final:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{cg}^{2h}(\vec{r}) &= \frac{1}{\bar{n}_g \bar{n}_c} \int_{A_1} dm_1 \int_{E_1} d\vec{a}_1 \int_{E_1} d\vec{e}_1 \psi(m_1, \vec{a}_1, \vec{e}_1) \\ &\times \int \langle N|m_2 \rangle dm_2 \int_{A_2} d\vec{a}_2 \int_{E_2} d\vec{e}_2 \int_V d\vec{y} \\ &\times U(\vec{r} - \vec{y}, m_2, \vec{a}_2, \vec{e}_2) p(1) p(2) \bar{\xi}(\vec{y}, 1, 2) \end{aligned} \quad (6.49)$$

donde el subíndice 1 hace referencia al halo centro, mientras que el subíndice 2 indica el halo donde se encuentran alojadas las galaxias trazadoras. Notar nuevamente que las integrales sobre los espacios V , A_1 , E_1 , A_2 , E_2 son todas integrales triples.

6.3.3 Proyección sobre el plano del cielo

Hasta aquí hemos descrito el MAH para la función de correlación cruzada grupo-galaxia. Haremos ahora algunos comentarios sobre como debemos realizar las integraciones para obtener resultados que nos permitan compararlos con las observaciones de la función de correlación proyectada.

Una manera de abordar este propósito es pensando que existen dos sistemas de referencias que comparten el mismo origen. Uno de los cuales es solidario al elipsoide que mejor describe la forma del halo de materia oscura, que denotaremos con \mathbf{C} , y otro con un eje de coordenadas en la dirección de la línea de la visual, digamos el eje z' , y los

dos restantes sobre el plano del cielo, que denominaremos \mathbf{C}' . Por lo tanto, podemos estimar la función de correlación proyectada sobre el plano del cielo partiendo de la función de correlación computada en el sistema \mathbf{C} y realizando el cambio de coordenadas correspondiente al sistema \mathbf{C}' . Ejemplificaremos dicha transformación, mostrando como proyectar un perfil genérico $\rho(R)$ de un halo elipsoidal con autovalores del tensor de forma igual $a \leq b \leq c$, la aplicación a otros casos saldrá directamente.

Primero, notemos que solo necesitamos los dos primeros de los tres ángulos de Euler para efectuar tal transformación. Esto es debido a que una rotación intrínseca del sistema \mathbf{C} deformaría la proyección. En notación matricial la transformación $\mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{C}$ es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & -\cos(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Luego, en término de las coordenadas del sistema primado, R es escrito como:

$$R = \sqrt{fz'^2 + gz' + h} \quad (6.51)$$

donde

$$f = \sin^2(\theta) \left(\frac{c^2}{a^2} \cos^2(\phi) + \frac{c^2}{b^2} \sin^2(\phi) \right) + \cos^2(\theta) \quad (6.52)$$

$$g = \sin(\theta) \sin(2\phi) \left(\frac{c^2}{b^2} - \frac{c^2}{a^2} \right) x' + \sin(2\theta) \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \cos^2(\phi) - \frac{c^2}{b^2} \sin^2(\phi) \right) y' \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} h = & \left(\frac{c^2}{a^2} \sin^2(\phi) + \frac{c^2}{b^2} \cos^2(\phi) \right) x'^2 \\ & + \sin(2\phi) \cos(\theta) \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2} \right) x'y' \\ & + \left[\cos^2(\theta) \left(\frac{c^2}{a^2} \cos^2(\phi) + \frac{c^2}{b^2} \sin^2(\phi) \right) + \sin^2(\theta) \right] y'^2 \end{aligned} \quad (6.54)$$

Definamos ahora dos nuevas variables z'_* y ζ

$$z'_* \equiv \sqrt{f} \left(z' + \frac{g}{2f} \right) \quad (6.55)$$

$$\zeta \equiv h - \frac{g^2}{4f} \quad (6.56)$$

El significado de la variable ζ puede ser fácilmente entendido sustituyendo las ecuaciones 6.52-6.53 en la ecuación 6.56:

$$\zeta^2 = \frac{1}{f} (Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2) \quad (6.57)$$

donde

$$A \equiv \cos^2(\theta) \left(\frac{c^2}{a^2} \sin^2(\phi) + \frac{c^2}{b^2} \cos^2(\phi) \right) + \frac{c^2}{a^2} \frac{c^2}{b^2} \sin^2(\theta) \quad (6.58)$$

$$B \equiv \cos(\theta) \sin(2\phi) \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (6.59)$$

$$C \equiv \frac{c^2}{b^2} \sin^2(\phi) + \frac{c^2}{a^2} \cos^2(\phi) \quad (6.60)$$

La forma cuadrática de la ecuación 6.57 implica que los isocontornos de ζ constante son elipses en el plano $x'y'$ y que el ángulo de posición es

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{B}{A-C} \right) \quad (6.61)$$

La ecuación 6.57 puede ser diagonalizada rotando el plano $x'y'$ con dicho ángulo mediante la siguiente matriz

$$\mathbb{B} \equiv \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

quedando

$$\zeta^2 = \frac{x'^2}{q_x^2} + \frac{y'^2}{q_y^2} \quad (6.63)$$

donde

$$q_x^2 \equiv \frac{2f}{A+C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}} \quad (6.64)$$

$$q_y^2 \equiv \frac{2f}{A+C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}} \quad (6.65)$$

Notar que con el ángulo ψ dado por la ecuación 6.61 resulta $q_x \geq q_y$.

Es posible reescribir la ecuación 6.51 como

$$R = \sqrt{z_*'^2 + \zeta^2} \quad (6.66)$$

luego

$$\begin{aligned} \rho_{\text{proy}}(\zeta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(R) dz' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{f}} \rho \left(\sqrt{z_*'^2 + \zeta^2} \right) dz_*' \\ &= \frac{2}{\sqrt{f}} \int_0^{\infty} \rho \left(\sqrt{z_*'^2 + \zeta^2} \right) dz_*' \end{aligned} \quad (6.67)$$

Por lo tanto, si quisiéramos computar la integral proyectada en la dirección del semieje mayor del tensor de forma proyectado, deberíamos hacerlo en la dirección de q_x , es decir en la dirección x' . Mientras que si queremos hacerlo en la dirección del semieje menor, lo haríamos en la dirección y' .

6.4 MÉTODO DE INTEGRACIÓN

Dado que las integrales que debemos calcular son de orden alto, los métodos clásicos (e. g., métodos de cuadratura) no pueden aplicarse. Por lo tanto, debemos emplear una técnica Monte Carlo (MC) para computar las integrales multidimensionales (para una discusión un poco más extensa puede verse la sección C). De acuerdo a este método, la integral I de dimensión m de una dada función $f(\vec{x})$ en el volumen $V \subset R^m$ puede ser aproximada por medio de la siguiente expresión:

$$I = \int_V f(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_m \approx \frac{V_c}{N} \sum_{i=1}^N f(\vec{x}_i) \quad (6.68)$$

donde $\vec{x}_i = (x_i^1, \dots, x_i^m)$, son N vectores aleatorios de dimensión m lanzados dentro del volumen computacional $V_c \supseteq V$. Es posible demostrar que la incertidumbre en la determinación de I decrece como $N^{-1/2}$ independientemente de la dimensión del integrando. Así mismo, es importante mencionar que utilizando métodos clásicos de integración, para un número fijo de subdivisiones N del volumen V , el error σ_I crece rápidamente cuando el número de dimensiones aumenta ($\sigma_I \propto N^{-1/m}$). Es posible mejorar la precisión de la integración MC haciendo uso de la técnica de muestreo de importancia. Para poder aplicar esta técnica debemos especificar una función de densidad $w(\vec{x})$ para las variables aleatorias \vec{x} . De esta forma, en el lado derecho de la ecuación 6.68, $f(\vec{x}_i)$ debe ser reemplazado por $f(\vec{x}_i)/w(\vec{x}_i)$.

6.5 IMPLEMENTACIÓN

6.5.1 La función de correlación cruzada tridimensional

Con el fin de realizar un análisis cualitativo del comportamiento de nuestro modelo según la elección de los parámetros libres, comenzaremos computando la función de correlación cruzada a lo largo de las direcciones definidas por los semi-ejes del tensor de forma. Con este propósito, fijamos la orientación del halo centro tal que las direcciones del tensor de forma correspondan con los ejes cartesianos (denotados por $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$). De acuerdo a esta elección, las integrales en la ecuación 6.17 (6.20) se reducen a 3 (12) dimensiones. Seguidamente, definiremos tres funciones de correlación tomando $\vec{r} \parallel \hat{e}_i$ donde $i = 1, 2, 3$.

La figura 30 muestra el comportamiento de nuestro modelo para diferentes valores de los parámetros A , B , C & D , la masa de los halos centros ha sido fijada al rango $10^{12} - 10^{16} M_{\odot} h^{-1}$. En línea sólida, punteada y de trazos se muestran las correlaciones en la dirección del semi-eje mayor, intermedio y menor, respectivamente. Cada uno de los paneles corresponde a un conjunto diferente de parámetros. Los paneles superiores muestran el comportamiento del modelo cuando se varían los parámetros A y B , los cuales están relacionados con la distribución de formas de los halos centro. Como puede observarse en el panel (I) cuando $A = B$ y C y D son convenientemente elegidos, las tres funciones muestran una diferencia relativa aproximadamente constante. El panel II (III) muestra el resultado de considerar halos centro prolados (oblados), i. e. $B < A$ ($A < B$) mientras el panel IV muestra el comportamiento cuando consideramos halos aproximadamente esféricos (i. e., $A = B \approx 1$). Respecto a la función de alineamiento halo-halo, los paneles en la parte inferior de la figura 30 ilustran el efecto de cambiar los parámetros C y D . Los paneles V y VI (VII y VIII) muestran la influencia cuando valores bajos y altos son elegidos para el parámetro D (C). Como puede apreciarse, para valores grandes del parámetro C el alineamiento desaparece dado que la función distribución 6.29 se vuelve prácticamente constante. De este análisis cualitativo puede observarse que el modelo posee una gran versatilidad con diferentes conjuntos de parámetros. Además, como es de esperarse, los parámetros A y B afectan principalmente al término de 1-halo mientras que los parámetros C y D lo hacen en el término de 2-halos.

6.6 COMPARACIÓN CON SIMULACIONES NUMÉRICAS

6.6.1 Función de correlación cruzada isótropa

Una de las primeras pruebas que podemos realizar para comprobar el funcionamiento del modelo es computar la función de correlación cruzada isótropa. Esto lo logramos promediando en un volumen esférico (i. e. tomamos un volumen cónico con semi ángulo igual a π). La figura 31 muestra los términos de 1- y 2-halos resultado de realizar estos cálculos para diferentes rango de masas del halo centro, desde $10^{12.0} a 10^{15.0} M_{\odot}$ en intervalos logarítmicos de 0.5. En círculos llenos negros se muestran las medidas correspondiente de la función de correlación obtenidas a partir de la simulación numérica con sus respectivos errores jackknife representados por bandas grises. El panel de la izquierda muestra los resultados del modelo para los parámetros $A = B = 0.99$ y $C = D = 1.00$. Con esta elección de parámetros, los halos de materia oscura tienen forma esférica, preferentemente. Mientras el panel derecho muestra los resultados obtenidos cuando los parámetros A y B son establecidos a los mejores valores obtenidos

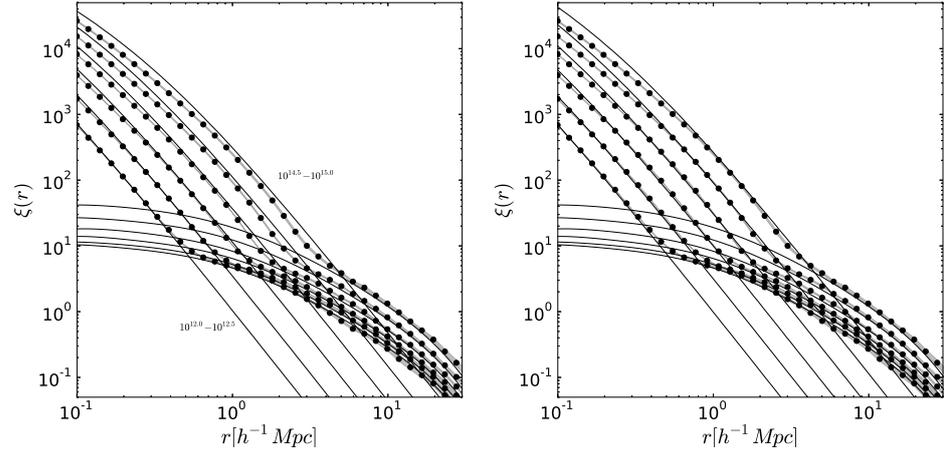


Figura 31: Modelo de Halos Isótropo. Los puntos negros en ambos paneles muestran la función de correlación isótropa estimada a partir de la simulación numérica para diferentes rangos de masa desde $10^{12}M_{\odot}$ hasta $10^{15}M_{\odot}$, según se indica en el gráfico. Las líneas sólidas muestran los resultados obtenidos con nuestro modelo anisótropo promediando en volúmenes cónicos con un ángulo igual a π . Los términos de 1-halo y 2-halos se muestran separadamente. El panel izquierdo muestra los resultados obtenidos considerando halos con perfiles preferentemente esféricos con los parámetros $A = B = 0.99$ y $C = D = 1.00$, mientras, en el panel derecho, los valores de los parámetros A y B corresponden a los mejores valores obtenidos utilizando el método de minimización χ^2 . Como puede apreciarse los resultados obtenidos utilizando los mejores valores para los parámetros describe mejor los resultados numéricos que los obtenidos con perfiles de halos casi esféricos.

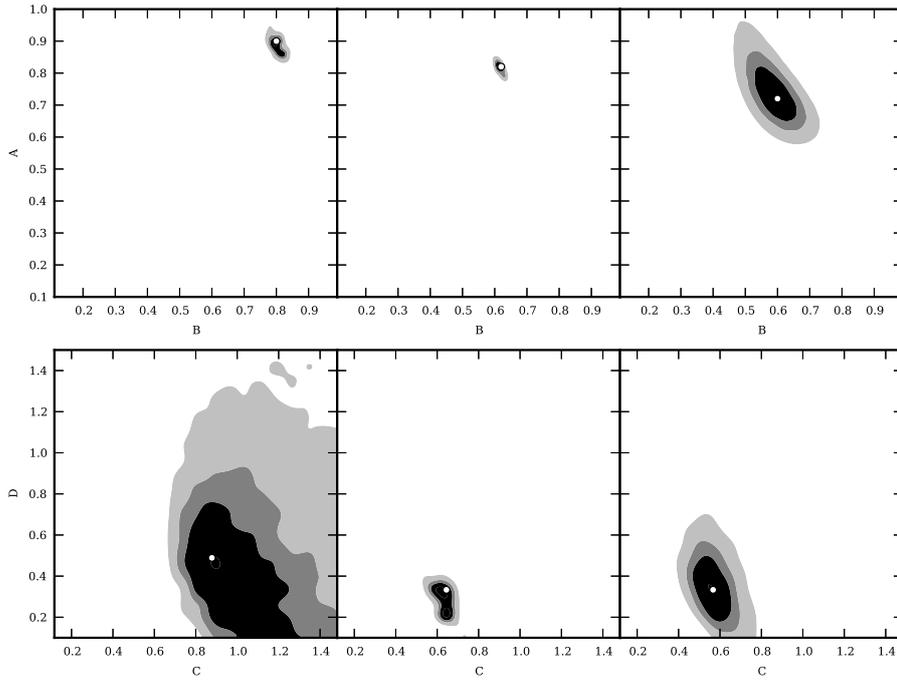


Figura 32: Curvas de nivel del método de χ^2 para la estimación de los mejores valores para los parámetros del modelo para 3 rangos de masa diferentes $10^{12} - 10^{12.5}$, $10^{13.5} - 10^{14}$ y $10^{14.5} - 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$, de izquierda a derecha. Los paneles superiores muestran las curvas nivel para los parámetros A y B mientras que los paneles inferiores muestran las correspondientes curvas para los parámetros C y D .

utilizando el método de minimización que veremos más adelante. Como puede apreciarse, las diferencias entre los resultados de la simulación y los del modelos para las dos elecciones de los parámetros son más significantes en las escalas correspondientes al término de 1-halo.

Además hemos encontrado que el modelo con halos triaxiales tiene una discrepancia media del %5 con los resultados simulados, mientras el modelo con halos esféricos tiene una discrepancia media del %20. De este modo, el primer modelos se encuentra en mejor acuerdo con los resultados simulados que el modelo con halos esféricos, como ha sido notado por otros autores también (Smith & Watts, 2005; van Daalen et al., 2012). Asimismo, vale notar que la discrepancia es mayor para halos de masa más grande. Esto último es un comportamiento esperado dado que los halos más masivos tienen perfiles que se apartan más de la esfericidad. Por otro lado es importante destacar que nuestro modelo no depende de la forma de los halos en escalas grandes.

Es importante considerar la forma triaxial de los halos.

6.6.2 Estimación de parámetros: Método de Maximo Likelihood

Nuestro modelo cuenta con 4 parámetros libres los cuales deben ser determinados. Para este proposito empleamos el método clásico de minimización χ^2 . Dado que los parámetros A y B afectan principalmente al término de 1-halo mientras que los parámetros C y D están solo involucrados en el término de 2-halos, podemos explorar el espacio de parámetros de forma separada. Podemos por un lado buscar los parámetros A y B ajustando el término de 1-halo, y por el otro, ajustando el término de 2-halos, encontrar los parámetros C y D . Para realizar esto, y con el fin de evitar la contaminación de los regímenes de 1- y 2-halos, aplicamos el método de minimización en dos escalas discontinuas (véase la regiones grises verticales en la figura 33).

Para estimar los parámetros que mejor ajustan, aplicamos el método de Estimación de Máxima Verosimilitud. La Figura 32 muestra los isocontornos de mayor probabilidad para tres rangos de masa diferentes, $10^{12} - 10^{12.5}$, $10^{13.5} - 10^{14}$ y $10^{14.5} - 10^{15}$, de izquierda a derecha respectivamente. Los paneles superiores muestran los isocontornos para los parámetros A y B mientras que los paneles inferiores los correspondientes niveles para los parámetros C y D . En color negro, gris, y gris claro se muestran los isocontornos de $1 - \sigma$, $2 - \sigma$ y $3 - \sigma$, mientras que los círculos blancos en la región negra de cada panel indica el mejor conjunto de parámetros para cada rango de masa.

Como es de esperarse, los halos más masivos tienen formas que se apartan más de la esférica con perfiles de masa más prolados que los halos de masa más chica. Esto puede observarse en los paneles superiores de la figura 32 donde los halos más masivos tienen parámetros A y B más chicos, al mismo tiempo el cociente A/B crece significativamente. Estos resultados son consistentes con el consenso actual que se tiene sobre la forma de los halos y la formación de estructuras (Paz et al., 2006; Altay et al., 2006; Robotham et al., 2008; Lau et al., 2011). Es importante notar que la incertidumbre en la estimación de los parámetros crece con la masa del halo. Esto puede ser entendido en término de la bondad de nuestro modelo para ajustar los resultados numéricos. En este sentido puede decirse que, para el término de 1-halo, nuestro modelo mejor reproduce los resultados para halos de masa más chica que para halos masivos.

Los paneles inferiores de la figura 32 muestran el comportamiento de la estimación de los parámetros C y D . Puede observarse que mientras el parámetro C decese con la masa del halo, el parámetro D crece. Vale notar que la región de $1 - \sigma$ es más grande para masas más pequeñas que para masa más grandes y que la forma de los isocontornos se encuentra elongada a lo largo del eje correspondiente

al parámetro D . Esto es debido a que para valores grandes de C la función de alineación depende suavemente del parámetro D *.

6.6.3 Modelo Anisótropo de Halos aplicado a la simulación

Utilizando los mejores valores para los parámetros que hemos estimado en la sección anterior, podemos calcular el modelo de halos anisótropo para los mismo tres rangos de masa. Los resultados son mostrados en la figura 33 donde cada panel corresponde a cada uno de los rangos de masa, siendo el superior el correspondiente a las masas más chicas. Las líneas de punto en los paneles superiores muestran las funciones de correlación anisótropas estimadas a partir de simulaciones numéricas de n -cuerpos. Cada una de esas estimaciones es realizada adoptando un volumen cónico con semi-ángulo igual a $\pi/4$. Las funciones de correlación a lo largo del eje mayor, intermedio y menor son mostradas con símbolos cuadrados, redondos y diamantes, respectivamente. Las regiones gris oscuras representan los errores jackknife al nivel de $1 - \sigma$. Los resultados correspondientes a nuestro Modelo de Halos Anisótropo son mostrados en líneas sólidas, a trazos y a trazos y puntos, en el mismo orden. Los paneles inferiores muestran el cociente entre cada una de las funciones de correlación anisótropas (i. e. en cada uno de los ejes) y la función de correlación isotropa, tanto para los resultados de nuestro modelo como para las mediciones realizadas en las simulaciones. Las bandas verticales de color gris claro muestran los intervalos en los cuales se ha realizada el ajuste para estimar los mejores parámetros del modelo. Como puede observarse, los resultados logrados con nuestro modelo se encuentran en muy buen acuerdo con aquellos obtenidos mediante las simulaciones numéricas.

Es importante notar que las predicciones de nuestro modelo describen mejor los resultados de las simulaciones en las escalas que corresponden al término de 2-halos que las correspondientes al término de 1-halo. Esto puede ser producto de que, si bien nosotros hemos asumido que los halos mantiene su perfil triaxial en cualquier escala, el perfil de densidad de los halos simulados se vuelve más esférico a medida que nos acercamos a las regiones centrales del mismo. Esto puede apreciarse en el panel inferior para cada una de las masa en la figura 33 donde el cociente de las medidas realizadas en la simulación se vuelve más pequeño para escalas más chicas, mientras nuestro modelo se mantiene prácticamente constante. Por otro lado, las predicciones de nuestro modelo reproducen satisfactoriamente el comportamiento en el término de 2-halos para rango de escalas considerablemente grande.

* En estas condiciones la función de alineamiento es prácticamente uniforme sobre todo el rango.

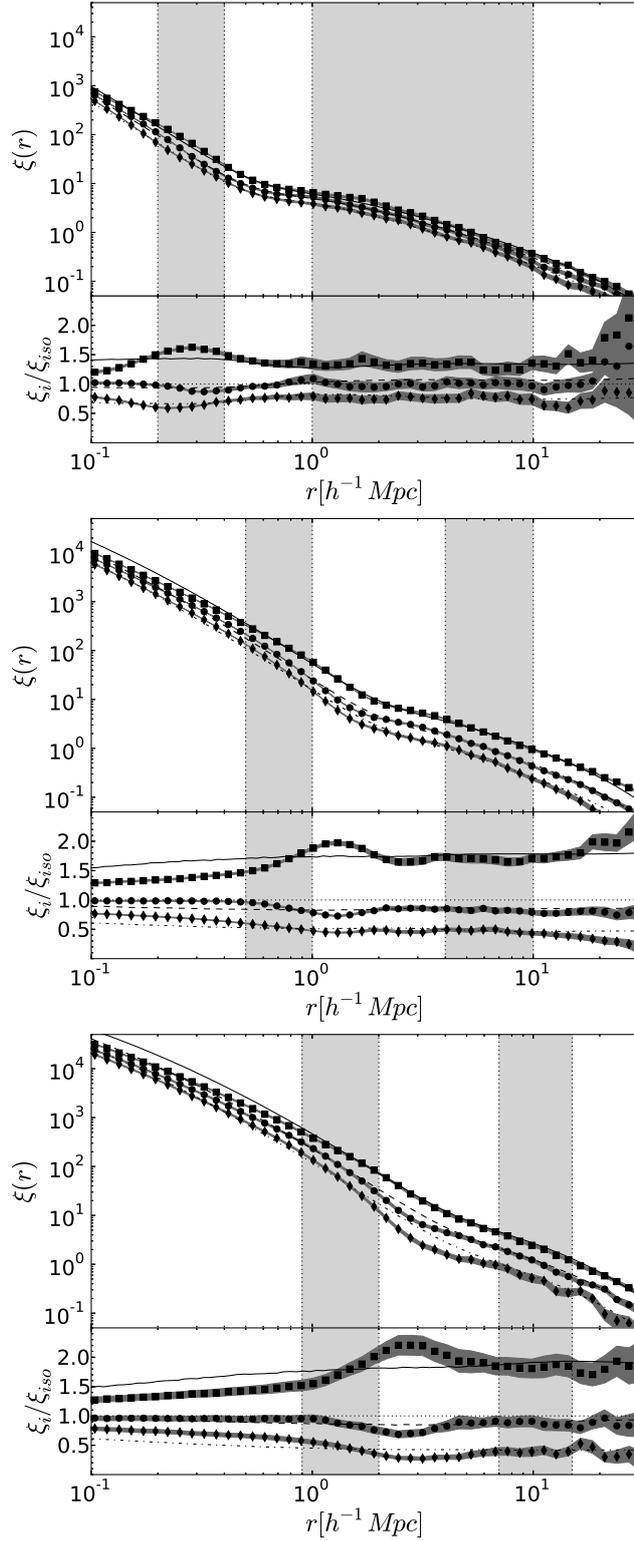


Figura 33: Modelo de Halos Anisótropo para halos centros en el rango de de masa $10^{12.00} - 10^{12.5}$, $10^{13.50} - 10^{14.0}$ y $10^{14.50} - 10^{15.0} h^{-1} M_{\odot}$ de arriba a abajo, respectivamente. Las líneas sólidas muestran los resultados obtenidos por nuestro modelo donde se han elegido los mejores valores, obtenidos según se describe en el texto, para los 4 parámetros. Los rangos de escala utilizados para la estimación de dichos parámetros se muestran las regiones verticales de color gris claro. Los puntos negros muestran las estimaciones de la función de correlación cruzada obtenidas a partir de la simulación numérica con los respectivos errores indicados con las bandas gris oscuro.

CONCLUSIONES

Durante el desarrollo de este trabajo de tesis hemos indagado sobre algunas cuestiones concernientes a la distribución de estructuras en el Universo siendo la espina dorsal de nuestros estudios las alineaciones de la materia con la forma de los halos. En astronomía, como en casi cualquier otra ciencia, uno puede escudriñar la realidad haciendo de herramientas fundadas en distintos enfoques. Ejemplos de ellos son las simulaciones numéricas, las aproximaciones analíticas y/o numéricas, y el estudio de los datos reales que representan los grandes catálogos de galaxias. En este trabajo hemos hecho uso de métodos fundados en cada uno de estos enfoques. Más aún, comparando los resultados analíticos con aquellos obtenidos de simulaciones numéricas y catálogos de galaxias nos ha permitido validar los primeros.

Los datos obtenidos a partir de los grandes relevamientos de galaxias requieren, usualmente, un procesamiento previo a su utilización. Uno debe asegurar de obtener la muestra correcta de galaxias o debe necesitar identificar grupos de ellas y estimar su masa, luminosidad, distancia, etc. En el mismo sentido, la realización de una simulación numérica del Universo es solo el primer paso cuando lo que se desea es estudiar las propiedades de la distribución de materia. Según los estudios que uno pretende llevar a cabo, posteriormente, se deben identificar las diferentes estructuras tales como halos y/o subhalos de materia oscura conjuntamente con la determinación de las propiedades físicas de los mismos.

Generalmente, resulta fructífero y conveniente desarrollar herramientas propias de las cuales uno posea un conocimiento acabado sobre su funcionamiento y desempeño. En estos tiempos modernos, la mayoría de las herramientas consisten en códigos numéricos o rutinas escritas con alguna técnica particular y en algún lenguaje específico. Algunas veces utilizamos códigos de terceros cuales cajas negras, y nos convertimos en meros usuarios estructurados de los mismo. En este sentido, nosotros hemos logrado desarrollar un algoritmo para la identificación de subestructuras en simulaciones numéricas. Empleando recursivamente el método tradicional de Amigos-de-los-Amigos logramos aislar estructuras y subestructuras en un orden jerárquico. La profundidad de tal escalafón es un parámetro libre dentro de nuestro algoritmo, como así también la longitud de vínculo

utilizada para el nivel más bajo. Las comparaciones realizadas contra otros algoritmos de identificación evidenciaron que el nuestro resulta deficiente cuando se tratan de aislar subestructuras en regiones muy densas (e. g., los centro de los halos), lo cual es una limitación propia del método base de nuestro algoritmo. Además dichas comparaciones han resaltado el papel fundamental que desempeñan los algoritmos de *limpieza* estando aún en debate cual es el modo apropiado de hacerlo. Personalmente, creemos que la respuesta dependerá de la clase de estructura que se desee identificar.

Las investigaciones sobre los alineamientos fueron realizados de la manera que se nos presentó más natural. Comenzamos indagando sobre la existencia de tales señales en simulaciones numéricas. Estas representan un marco ideal para trabajar en el sentido que uno no debe batallar contra los vicios o sesgos de los catálogos reales a la vez que brindan una cantidad suficiente de datos para poder realizar estadísticas confiables. A través de la función de correlación anisótropa logramos detectar las señales de alineamiento entre la forma de los halos y la distribución de materia circundante. Para ello estimamos la función de correlación alrededor de las tres direcciones definidas por los semiejes del tensor de forma de los halos de materia oscura. Comparando dichas mediciones con la función de correlación isotrópica (i. e., promediada sobre todas las direcciones), encontramos que la dirección de máxima elongación de los halos se encuentra alineada con la estructura adyacente hasta al menos 30 Mpc de distancia. Las mediciones de la función de correlación en todos los casos han mostrado el perfil característico donde se resaltan los dos regímenes de 1- y 2-halos. Las señales de alineación presentes en el primero son entendidas como un reflejo de la naturaleza triaxial del perfil del halo de materia oscura. Mientras que las alineaciones en escalas más grandes son una manifestación del proceso de formación de dichas estructuras. El paradigma actual del desarrollo de los halos de materia oscura establece que los mismos son el producto de sucesivas fusiones de objetos más pequeños, conocido como crecimiento jerárquico. Estas fusiones ocurren de manera anisótropa en direcciones que son trazadas por la distribución de materia. En este sentido, la alineación presente en el término de 2-halos es un remanente de la historia de formación de las estructuras. Asimismo, como hemos logrado observar, es esperable que cuerpos de mayor masa tengan una señal de anisotropía mayor debido a que estos objetos se han formado más recientemente.

Los resultados obtenidos a partir de los grupos y galaxias del catálogo real estuvieron en la misma dirección. La diferencia sustancial radicó en que, en este caso, debimos computar la función de correlación proyectada sobre el plano del cielo en vez de la función en tres dimensiones. Por lo tanto, el tensor de forma debió ser definido de la misma manera, obteniendo solo dos direcciones sobre las cuales

estimar las correlaciones. La señal de anisotropía se observó como un incremento en la amplitud de la función de correlación paralela al semieje mayor frente a la estimada en la dirección perpendicular. Nuevamente, los resultados mostraron un aumento de dicha señal a medida que la masa del grupo centro aumenta.

El conjunto de estos resultados, y el acuerdo entre ellos, pueden ser utilizados como una evidencia a favor del modelo de inestabilidad gravitacional que describe la formación de estructuras en el Universo.

Una vez detectada la señal de alineamiento tanto en simulaciones numéricas como en el catálogo de galaxias, nos dispusimos a realizar la extensión del Modelo de Halos. Este consiste en una expresión analítica que permite realizar predicciones sobre la función de correlación tanto en su variedad de autocorrelación o correlación cruzada. Contrariamente a lo que demuestran las observaciones, dicho modelo asume que los halos de materia oscura poseen un perfil de densidad esférico. Además, descarta la existencia de alineamiento de los halos con la estructura en gran escala. En este contexto, el Modelo de Halos solo es posible computarlo en una sola dirección, a saber, la dirección radial. Nosotros desarrollamos el Modelo Anisótropo de Halos el cual tiene en cuenta la característica triaxial de los halos como así también la señal de alineamiento en gran escala. Basándonos en nuestros estudios previos, nuestro modelo puede ser computado en las tres direcciones definidas por el tensor de forma de los halos. El carácter triaxial de los halos es incorporado tomando el perfil de densidad propuesto por [Jing & Suto \(2002\)](#) el cual es una generalización para halos elipsoidales del perfil NFW. Para determinar los semiejes de estos elipsoides propusimos una función de distribución bigaussiana con dos parámetros libres. En cuanto al alineamiento en escalas grandes propusimos una distribución como función de dos ángulos definidos en el sistema de coordenadas cuyos ejes se corresponden con los semiejes del elipsoide y con dos parámetros libres que controlan la predilección por una dirección u otra.

Como primer test del modelo observamos que la inclusión de perfiles triaxiales para los halos de materia oscura, mejora en aproximadamente el 15% las predicciones de la función de correlación isótropa, en comparación con el modelo estándar que considera halos con perfil esférico. Este mejoramiento del modelo son especialmente apreciables las escalas correspondiente al término de 1-halo.

Para estimar los cuatro parámetros de las dos funciones que hemos introducido utilizamos el método de χ^2 ajustando las funciones de correlación anisótropas obtenidas de la simulación. Considerando que la función de alineamiento solo tiene influencia en el término de 2-halos y que el perfil de densidad tiene mayor incidencia en el término de 1-halo, el ajuste fue realizado separadamente en dos espacios biparamétricos y en escalas diferentes. Un análisis sobre los mejores parámetros obtenidos muestra que recuperamos la conocida

tendencia de que halos más masivos tienen a mostrar formas menos esféricas preferentemente proladas. Asimismo, los halos con mayor masa presentan señales de alineamiento más pronunciadas en escalas más grandes. Vale notar que hemos asumido un perfil elipsoidal en toda escala, es decir, la razón entre los semiejes del elipsoide se mantiene constante dentro del halo. Sin embargo, las simulaciones han mostrado que los perfiles de los halos se vuelven más esféricos hacia el centro. Por esta razón, los ajustes en escalas del término de 1-halo muestran tanta discrepancia con las mediciones en la simulación.

Resumiendo, podemos decir que durante el desarrollo de este trabajo de tesis hemos estudiado las correlaciones entre los halos y la distribución de materia oscura, como así también entre grupos y galaxias. Especialmente nos interesamos en el alineamiento de la forma de los halos con la distribución de materia circundante. Estos análisis fueron realizados desde tres puntos de vista: a partir de simulaciones numéricas, catálogos de galaxias y métodos analíticos. Con respecto a este último enfoque, realizamos la extensión del clásico Modelo de Halos con el objetivo de considerar perfiles triaxiales para los halos de materia oscura e introducir una función de probabilidad que de cuenta de los alineamientos en escalas más grandes que el tamaño típico de los halos. Hemos encontrado un buen acuerdo entre predicciones y observaciones en un rango de masa de halos de varios órdenes de magnitud, respaldando la teoría de crecimiento jerárquico por inestabilidad gravitacional actualmente aceptada.

Parte III

APÉNDICE

A

PEQUEÑA INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA TENSORIAL

A.1 ALGEBRA TENSORIAL

Definimos y denotamos x_μ un vector en un espacio N-dimensional, de modo que cada componente del vector corresponde a un valor particular de $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1$. Así un punto en el espacio-tiempo tetradimensional $P = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ lo denotamos

$$x_\mu \quad \text{con } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{A.1})$$

En el caso del espacio-tiempo tomaremos como convención que las componentes x_1, x_2, x_3 denotan a las coordenadas espaciales y la componente x_0 a la coordenada temporal ct . Además utilizaremos la convención de que índices griegos representan tetra vectores e índices latinos representan tri vectores.

El paso siguiente es establecer cómo se transforman las cantidades desde un sistema de referencia en otro. Entonces, dado un cambio de coordenadas $x \rightarrow x'$

$$x^\mu = x^\mu(x') \quad (\text{A.2})$$

llamamos escalar $\phi(x)$ a una función que no cambia al cambiar el sistema de coordenadas:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (\text{A.3})$$

es decir $\phi(x)$ es invariante bajo el cambio de coordenadas [A.2](#). Si tomamos el gradiente de esta cantidad obtenemos una cantidad de cuatro índices:

$$A_\mu = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} \quad (\text{A.4})$$

Si aplicamos el cambio de coordenadas de [A.2](#) y utilizamos la regla de la cadena de la derivación tenemos

$$\frac{\partial \phi(x')}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'_\mu} \quad (\text{A.5})$$

Y ésta es la ley de transformación de un vector covariante. En este punto es importante aclarar que utilizaremos la convención de Einstein para los índices, en la cual índices repetidos indican que se debe realizar la suma sobre todos los valores posibles. En general definimos un vector covariante A_μ como toda función vectorial tetradimensional que bajo una transformación de coordenadas A.2 se transforma como

$$A'_\mu = A_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'_\mu} \quad (\text{A.6})$$

Notemos que hemos escrito los índices como sub-índices ya que estos vectores pueden pensarse que provienen de derivadas (donde la variación en x está en el denominador). De modo análogo podemos construir un vector multiplicando un escalar por el vector diferencial dx^μ :

$$B^\mu = \phi(x) dx^\mu \quad (\text{A.7})$$

Si aplicamos el cambio de coordenadas A.2 obtenemos

$$B'^\mu = B^\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \quad (\text{A.8})$$

Ésta es la definición de un vector contravariante B^ν . Notemos además que el vector diferencial dx^μ es un vector contravariante.

Para formar un escalar a partir de un vector realizamos el producto de un vector covariante A_μ con otro contravariante B^μ . Tendremos así

$$A'_\mu B'^\mu = A_\mu B^\mu \quad (\text{A.9})$$

y observamos que este producto es invariante ante un cambio de coordenadas del tipo A.2. Es importante notar que el producto de dos vectores covariantes o el producto de dos vectores contravariantes no es un escalar.

Como hicimos con los vectores covariantes y contravariantes, definimos los tensores como entes algebraicos con más de un índice en base a las leyes de transformación. Así, un tensor de dos índices covariantes se transforma como:

$$T'_{\mu\nu} = T_{\lambda\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'_\nu} \quad (\text{A.10})$$

Podemos construir un escalar multiplicando varios tensores y vectores. Un ejemplo de tensor covariante es la métrica de Minkowski para el espacio-tiempo: $\eta_{\mu\nu}$ dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}[1, -1, -1, -1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

o, en general cualquier otra métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$. Luego, el elemento de línea en el espacio tiempo puede escribirse como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.12})$$

donde, recordemos, ds^2 es invariante ante transformaciones de coordenadas puesto que es un escalar. De igual manera podemos definir el módulo al cuadrado de un vector contravariante A^μ de la siguiente manera

$$A^2 \equiv g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \quad (\text{A.13})$$

y el producto escalar (invariante) entre dos vectores A^μ y B^μ como

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \quad (\text{A.14})$$

El tensor métrico también nos permite pasar un vector covariante a su versión de vector contravariante de la siguiente forma

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (\text{A.15})$$

También nos permite bajar y subir índices de tensores, por ejemplo

$$R_{\nu\lambda\rho}^\mu = g^{\mu\eta} R_{\eta\nu\lambda\rho} \quad (\text{A.16})$$

A.2 LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Las transformaciones de Galileo no son aplicables a las ecuaciones del electromagnetismo y a sistemas de referencia que se mueven con velocidades cercanas a la velocidad de la luz c . Esta es una constante de la naturaleza independientemente de la velocidad del sistema de referencia que utilicemos para medirla. Las transformaciones de Lorentz respetan esta constante universal, no así las transformaciones galileanas. En lenguaje cuadvectorial las transformaciones de Lorentz pueden escribirse como

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + d^\mu \quad (\text{A.17})$$

donde d^μ y Λ_ν^μ son constantes con la condición:

$$\Lambda_\nu^\mu \Lambda_\beta^\alpha \eta_{\mu\alpha} = \eta_{\nu\beta} \quad (\text{A.18})$$

La propiedad fundamental de las transformaciones de Lorentz es que dejan invariante el elemento de línea ds . Consideremos dos observadores, uno de los cuales O ve una partícula en reposo, mientras que el otro O' la observa moviéndose a una velocidad constante \vec{v} . En este caso las transformaciones de Lorentz se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dx'^i &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v^i dt \\ dt' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

donde $i = 1, 2, 3$ y $v = \sqrt{g_{\mu\nu} \bar{v}^\mu \bar{v}^\nu}$ es el módulo de la velocidad.

B

ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN DE HALOS Y SUBHALOS

Luego de realizar una simulación numérica del sistema físico que se desea estudiar, el Universo en gran escala, por ejemplo, el siguiente paso consiste en identificar las estructuras de interés y las cuales serán los objetos de estudio. Para ello existen diferentes algoritmos con una variada gama de enfoques. Están aquellos métodos que solo trabajan con las posiciones de las partículas, aquellos que lo hacen en el espacio 6-dimensional de las fases, algunos no realizan ninguna suposición sobre la forma de las estructuras a identificar mientras que otros presuponen cierta simetría, por ejemplo esférica, para el perfil de los halos de materia oscura. En este apéndice haremos un resumen de al menos los algoritmos más utilizados en la literatura.

B.1 FOF: FRIENDS-OF-FRIENDS

El método FoF (Audit et al., 1997; Davis et al., 1985; Lacey & Cole, 1993) busca halos de materia oscura en simulaciones numéricas de N-cuerpos haciendo uso de un algoritmo de percolación. Este último consiste en encontrar todos los pares de partículas que se encuentren separadas por una distancia menor que una dada fracción b de la separación media entre partículas (\bar{n}). El nombre del algoritmo proviene del hecho de que el método es aplicado sucesivamente, partiendo de una dada partícula, sobre todos los vecinos que se van encontrando. Una vez que no es posible ligar más vecinos, todo el subconjunto de partículas ligadas son definidas como un halo de materia oscura.

Al final la aplicación del algoritmo sobre toda la simulación que se desea analiza, los grupos de partículas encontrados corresponden a conjuntos ligados por una superficie de densidad local constante, $\rho/\bar{\rho} \approx 3/(2\pi b^3)$. El valor usualmente utilizado para el valor adimensional del factor de percolación es $b = 0.2$, el cual corresponde a una densidad umbral de $\rho/\bar{\rho} \approx 60$. Si el halo de materia oscura posee un perfil de densidad esférico $\rho(r) \propto r^{-2}$, la densidad umbral antes dicha corresponde a una sobredensidad media $\langle \rho \rangle / \bar{\rho} \approx 180$, cuyo valor es próximo al valor $18\pi^2 \approx 178$ predicho por el modelo de colapso esférico *top hat* para un objeto en equilibrio virial. Otro valor utilizado

en la literatura es $b = 0.17$, con el cual se identifican halos de materia oscura con una sobredensidad media de $\langle \rho \rangle / \bar{\rho} \approx 305$.

Es importante notar que el algoritmo FoF no usa información sobre la velocidad de las partículas, y que no tiene una escala privilegiada. Esto último es importante si uno desea realizar estudios sobre las propiedades de los halos tales como la distribución de masas.

Ventajas:

- Produce un catálogo de grupos único para el valor de b dado.
- Los catálogos construidos con este algoritmo satisfacen la condición de anidado, i.e., todos los miembros de cualquier grupo definido para un valor particular de b son también miembros del mismo grupo en cualquier otro catálogo construido con un valor de b más grande.
- El método no hace ninguna suposición *a priori* sobre la forma de los halos.
- Sencillo de implementar.

Desventajas:

- Problema de solapamiento: pequeños filamentos pueden conectar dos objetos que son realmente diferentes y que pueden no encontrarse en equilibrio virial.

B.2 SO: SPHERICAL OVERDENSITY

El método SO busca, en una simulación, regiones con simetría esférica cuya sobredensidad media dentro de la misma sea igual a un cierto valor dado que denotamos con $\kappa \equiv \langle \rho \rangle / \bar{\rho}$.

Esquemáticamente el método puede ser descrito de la siguiente manera:

Primero, calcula la densidad local de cada partícula mediante la búsqueda de la distancia r_N al N -ésimo vecino más cercano. De este modo, la densidad local de la partícula, es definida como $3(N + 1) / (4\pi r_N^3)$. Luego, las partículas son ordenadas según su densidad y la partícula con la densidad más alta es tomada como una candidata a centro de una región esférica.

Seguidamente, se toman sucesivamente regiones esféricas alrededor de la partícula antes seleccionada aumentando el radio en cada paso hasta que la sobredensidad media dentro de la región alcanza o apenas sobrepasa el valor κ . Una condición que se impone en este

punto es que la región esférica debe contener al menos 2 partículas.

El siguiente paso consiste en calcular el centro de masa de las partículas que se encuentran dentro de la región esférica y se lo toma como el nuevo candidato para el centro y se repite el proceso de hacer crecer una región esférica hasta que la sobredensidad media dentro de la misma se igual al valor κ .

Este proceso es iterado hasta que el corrimiento del centro entre dos iteraciones sucesivas es menor a $\epsilon \bar{n}^{-1/3}$.

Finalmente, todas las partículas que se encuentran en la región esférica hasta aquí definida son nombradas y marcadas como pertenecientes al mismo grupo y removidas de la lista de partículas libres sobre las que opera el algoritmo.

El siguiente paso consiste en tomar la siguiente partícula con mayor densidad que no se encuentre en un grupo ya definido, y se repite todo el proceso descrito anteriormente.

Una vez que todos los grupos han sido identificados se procede a fusionar los grupos menores que forman partes de otros mayores según el siguiente esquema: cada grupo es considerado como una esfera de sobredensidad media κ y centrada en su centro de masa real. Comenzando con la esfera más grande, cualquier esfera más pequeña cuyo centro se encuentre dentro de la esfera más grande es fusionada con este grupo, pero el radio de la esfera más grande permanece constante. Este proceso se repite iterativamente disminuyendo en tamaño de las esferas consideradas hasta finalizar el proceso.

En general, y basándose en el modelo de colapso esférico, se elige el parámetro $\kappa = 180$, y el parámetro N se fija en 10, sin embargo los resultados han mostrado no ser muy sensibles a este último parámetro. Para el proceso de convergencia del centro de los grupos se elige el parámetro $\epsilon = 0.1$.

Con los parámetros elegidos de esta manera en promedio se necesita iterar 0.1 veces por grupo para encontrar el centro del mismo, y la fracción de partículas involucradas en el proceso de fusión de los grupos más pequeño es menor que $10^{-3}\%$ (Lacey & Cole, 1993).

Ventajas:

- El algoritmo SO no presenta el problema de solapamiento de grupos, tal cual aparece con el método FoF.

Desventajas:

- Tiende a recortar las partes externas de los halos elipsoidales.

- Difícil de implementar y computacionalmente costoso.

B.3 AHF: AMIGA HALO FINDER

El algoritmo AHF (Knollmann & Knebe, 2009) comienza creando una grilla regular de tamaño definido por el usuario, en todo el box de la simulación. En cada una de las celdas de la grilla se computa la densidad a través de un esquema de peso triangular. Si la densidad en alguna de las celdas excede cierto umbral, entonces dicha celda es refinada con una grilla de la mitad de su tamaño. Luego, se vuelve a computar la densidad en las celdas refinadas, se fija otro umbral de corte para la densidad, y el proceso se repite hasta que ninguna celda necesita ser refinada.

El uso de dos criterios de refinamiento diferentes (uno para la grilla de primer nivel y otro para las celdas refinadas) proviene del hecho de requerir que, para una simulación cosmológica, debe resolverse la separación media entre partículas de la distribución inicial y por lo tanto el tamaño de grilla inicial debe ser igual a $2N$, siendo N^2 el número total de partículas de la simulación.

Siguiendo este procedimiento obtenemos una grilla jerárquica que traza el campo de densidad y puede ser utilizada para encontrar las estructuras tales como halos y subhalos de materia oscura. El proceso para buscar dichas estructuras puede resumirse como sigue: comenzando por la grilla más fina, se identifican las regiones aisladas y se marcan como posibles centros de halos de materia oscura. Seguidamente se realiza el mismo proceso (i.e., identificar regiones aisladas y marcarlas como posibles centros) en la grilla siguiente más gruesa, pero además ahora las regiones identificadas en el grilla más fina son ligadas al volumen correspondiente en la grilla más gruesa. Por construcción, el volumen ocupado por la grilla más fina es un subconjunto del volumen ocupado por la grilla más gruesa. Finalmente, uno puede construir un árbol de grillas anidadas y recorrerlo siguiendo los halos desde adentro hacia afuera. En cada uno de los pasos de este último proceso uno va encontrando isocontornos de densidad desde las densidades más altas (grilla más fina) hasta la densidad de fondo (nivel de grilla más grueso). En el caso de que dos ramas que se encuentran separadas en un nivel fino pero luego se juntan en el nivel más grueso de la grilla, estas dos ramas son fusionadas en una sola.

Una vez que todo el árbol de grillas anidadas ha sido construido es posible realizar la clasificación de subestructuras. Para este fin, se recorren cada uno de las ramas comenzando por las grillas más gruesa hacia las más finas. Si en un paso, una grilla más fina se divide en dos o más regiones aisladas, se debe definir cual será la rama principal y

cual o cuales las secundarias. Para ello se cuentan cuantas partículas se encuentran contenidas en cada una de las regiones aisladas de la grilla más fina y se elige la que contiene la mayor cantidad de partículas como la rama principal, mientras que las restantes son marcadas como subestructuras. Este procedimiento es aplicado recursivamente con el fin de identificar toda la jerarquías de sub-sub-estructuras también.

B.4 DENMAX

Este algoritmo (Bertschinger & Gelb, 1991; Gelb & Bertschinger, 1994a) comienza computando un campo de sobredensidad estático $\delta\rho/\rho$ sobre una grilla de tamaño N_{grid} interpolando la posición de las partículas. Luego las partículas son movidas utilizando un tiempo ficticio τ y de acuerdo a la ecuación

$$\frac{dx}{d\tau} = \nabla \frac{\delta\rho}{\rho} \quad (\text{B.1})$$

De esta manera todas la partículas son desplazadas hacia el máximo de densidad más cercano. Todas las partículas que se encuentran dentro de un contorno de isodensidad alrededor de un pico de densidad son asociadas a dicho pico. Luego, un halo es identificado como el conjunto de partículas (con sus posiciones originales) asociadas a un pico de densidad. Los resultados de DENMAX dependen del grado y función de suavizado utilizada para definir el campo de densidad $\delta\rho/\rho$.

Una vez que los halos son identificados se aplica un algoritmo para remover las partículas no ligadas gravitacionalmente, tratando cada halo como estructura aislada. Para ello, primero se computa la energía potencial E_p de cada partícula dentro del grupo considerando las interacciones entre cada par de partículas y la energía interna de la misma. La energía potencial es calculada una sola vez y se mantiene constante durante todo el proceso de remoción. Además, la energía cinética E_c de cada partícula es computada con respecto a la velocidad del centro de masa del halo. Luego, todas las con $E_c + E_p > 0$ son desligadas del grupo.

El proceso de remoción reduce la masa de los halos sobre todo el rango de masas, aunque el efecto es más grande para los halos de menor masa, como es de esperarse. Gelb & Bertschinger (1994a) encontraron que los resultados de DENMAX sin realizar el proceso de remoción se encuentran en muy buen acuerdo con los obtenidos mediante el algoritmo FoF con $l = 0.2$. Sin embargo, ellos argumentan que las partículas no ligadas son miembros temporarios de los halos y por lo tanto no deben ser consideradas como miembros definitivos. Por otro lado, muestran que diferentes valores para el número de celdas N_{grid} de la grilla producen diferentes catálogos de halos y que el

efecto es equivalente a considerar diferentes parámetros de percolación en el algoritmo FoF.

B.5 SKID

The SKID (Stadel et al., 1997; Weinberg et al., 1997) algoritmo comienza desplazando las partículas al mismo modo que lo hace el algoritmo DENMAX, y luego identifica los grupos de partículas haciendo uso de un algoritmo FoF. Una característica importante del algoritmo SKID es que este puede ser aplicada a diversos tipos de partículas (e.g. materia oscura, estrellas, gas) al mismo tiempo.

El procedimiento puede ser resumido como sigue:

Primero, se calcula la densidad asociada a cada partícula utilizando una función de suavizado simétrica (similar a la utilizada en los cálculos SPH) y se toman aquellas que satisfacen cierto criterio de corte. Estas partículas son llamadas partículas móviles. El criterio de corte depende del tipo de partícula que se considere (materia oscura, estrellas o gas). Para partículas de materia oscura y estrellas solo se toman aquellas cuya densidad sea mayor o igual a una densidad mínima ρ_{min} especificada por el usuario. Para las partículas de gas, solo se toman aquellas que cumplan con el criterio de densidad mínima y además aquellas que satisfacen un criterio de temperatura máxima, también especificado por el usuario. De esta forma, el algoritmo solo retiene las partículas de gas más densas y frías.

Luego cada una de las partículas móviles es desplazada iterativamente a lo largo del gradiente de densidad local hacia las densidades más altas. En cada paso de la iteración cada partícula es desplazada una distancia del orden de la longitud de suavizado. Si una partícula se mueve menos que una distancia eps especificada durante varias iteraciones, indica que dicha partícula se encuentra oscilando alrededor de la posición de un pozo de potencial. Entonces esta partícula deja de ser desplazada y se saca de la lista de partículas móviles. El proceso de desplazamiento continua hasta que todas las partículas paran de moverse y se encuentran a una distancia menor a eps de un pico de densidad. Para simulaciones de solo materia oscura, la densidad y el gradiente de densidad son calculados haciendo uso de todas las partículas mientras que las partículas móviles son solo aquellas que cumplen con el criterio de densidad.

El próximo paso consisten en aplicar un algoritmo FoF con longitud de percolación eps sobre todas las partículas. Es importante notar que dos regiones de alta densidad separadas por una distancia menor que $2 \times eps$ serán pegadas en este paso. Todos aquellos grupos con menos de N_{min} partículas son desechados.

El último paso consiste en realizar un proceso de limpieza de partículas no ligadas, para la cual deben utilizarse las posiciones originales de las partículas. Este procedimiento consiste de los siguientes pasos:

Paso 1: Se calcula la energía potencial de todas las partículas del grupo.

Paso 2: Se computa la posición y velocidad del centro de masa del grupo. Se calcula la velocidad relativa a la velocidad del centro de masa de cada partícula y se le añade la corrección para incluir el flujo de Hubble. Luego, se calcula la energía cinética con respecto al centro de masa de cada partícula.

Paso 3: Se busca la partícula menos ligada (i.e. la que tienen energía total más chica.). Si esta partícula tiene energía total negativa (i.e. está ligada) entonces el proceso de limpieza se termina. Si la partícula tiene energía total positiva (i.e. no está ligada), se la remueve del grupo y se vuelve al paso 1.

Vale notar que cada vez que una partícula es removida la posición y velocidad del centro de masa del grupo cambia y, por lo tanto, también cambia la energía cinética y potencial de las partículas.

Los parámetros libres del algoritmo SKID son: el umbral de densidad ρ_{min} empleado en el criterio de corte, el parámetro eps para la longitud de percolado del algoritmo FoF, y la cantidad mínima de miembros N_{min} del grupo.

B.6 BOUND DENSITY MAXIMA ALGORITHM (BDM)

Este algoritmo (Klypin et al., 1999) está basado en las ideas del método DENMAX.

Comienza buscando la posición de los picos de densidad que tomará como posibles candidatos a halos. Para ello se elige un radio de suavizado r_{sp} con el cual se buscará los máximos de densidad. Si bien este radio define la escala de los objetos que se identificarán, no quiere decir que los halos de materia oscura tendrán este tamaño o masa. El tamaño final de un halo puede ser mayor o menor a r_{sp} . Luego, se posicionan al azar un número grande de esferas de tamaño r_{sp} en el volumen de la simulación. El número de esferas es típicamente del orden o mayor que el número de halos que se espera identificar. Para cada una de las esferas se calcula el centro de masa y la masa dentro del radio r_{sp} . El centro de la esfera es desplazado al nuevo centro de masa, este proceso se repite iterativamente hasta que se logra la convergencia. El número de iteraciones depende de las características particulares de la simulación pero en general se encuentran en el rango entre 10 a 100 iteraciones. Al finalizar este proceso se han encontrado máximos locales de masa dentro del radio r_{sp} . Por como ha sido realizado el proceso es de esperar que algunos de los máximos haya sido encontrado más de una vez, por lo cual hace falta remover centros duplicados. Aquellas esferas con pocas partículas o con una sobredensidad central muy baja son descartadas de la lista final de esferas.

Una vez que se tiene la lista de posibles halos, se comienza el proceso de remoción de partículas no ligadas. Con tal fin, se definen cascarones esféricos concéntricos alrededor de cada uno de los centros de las esferas. Para cada cascarón se computa la masa de partículas de materia oscura, la velocidad media y la dispersión de velocidad relativa a la media. Para determinar si una partícula se encuentra ligada o no, se computa la velocidad de escape a la posición en la que se encuentra dicha partícula. Si la velocidad de la partícula es mayor que la velocidad de escape, entonces la partícula es marcada como no ligada.

El único parámetro libre es este algoritmo es la escala de suavizado r_{sp} . Al mismo tiempo, esto representa una limitación del algoritmo. Por ejemplo, si uno desea identificar halos de tamaños similar al del halo de nuestra galaxia, una elección razonable sería $r_{sp} \approx 10$ kpc. En cambio, si uno está interesado en grupos de galaxias la elección apropiada sería $r_{sp} \approx 200$ kpc. Por esta razón este algoritmo no es capaz de identificar halos en todo el rango de masas.

B.7 HOP

Este método (Eisenstein & Hut, 1998) comienza calculando la densidad de cada partícula utilizando la posición de ella y sus $N_{HOP} - 1$ vecinos. Para cada grupo de N_{HOP} partículas se busca cuál posee la densidad más alta y cada partícula es asociada a dicho vecino, luego este vecino es asociado a su vecino con mayor densidad y así sucesivamente hasta que se encuentra una partícula cuyo vecino con mayor densidad es ella misma, i.e. un máximo de densidad. Dado que uno siempre avanza aumentando la densidad, es imposible que se entre en un círculo que no converja. Todas las partículas que son asociadas al mismo máximo son marcadas como pertenecientes al mismo grupo. Vale notar que cada partícula es asociada a solo un grupo.

Luego, HOP asigna una nueva densidad a cada partícula utilizando la posición radial de sus N_{dens} vecinos más cercanos. Para calcular la densidad se utiliza un núcleo de suavizado esféricamente simétrico conocido como *spherically symmetric cubic spline kernel*, dando peso unidad a las partículas que se encuentran a una distancia nula de la partícula en cuestión y peso nulo a aquellas que se encuentran a una distancia mayor o igual a la distancia del N_{dens} -ésimo vecino más cercano.

Si uno está interesado en distinguir regiones densas de otras regiones menos densas, sin preocuparse de la subestructura dentro de las regiones más densas, entonces aparecen dos problemas. Primero, todas las partículas asignadas son asignadas a grupos, y por lo tanto no se ha hecho distinción entre halos densos y su ambiente. Segundo, dado que la densidad ha sido determinada adaptativamente, incluso los halos más densos pueden tener máximos múltiples, causando que

los grupos se partan en diferentes piezas. Para el primer problema la solución es incluir en los grupos solo partículas que excedan cierto umbral de densidad δ_{outer} . Y para resolver el segundo problema, uno puede definir dos umbrales de densidad adicionales, δ_{saddle} y δ_{peak} , usualmente elegidos de tal forma que $\delta_{outer} \leq \delta_{saddle} \leq \delta_{peak}$. El paso siguiente consiste en definir pares de partículas que representen el borde entre dos halos. Cada una de las partículas de un par tiene N_{merge} vecinos en grupos diferentes. Para cada par de partículas se define una densidad igual al promedio de las densidades de las dos partículas. Si la densidad del par de partículas con mayor densidad excede la densidad δ_{saddle} , entonces los dos grupos se fusionan. Aquellos grupos cuya densidad máxima es menor que δ_{peak} son diluidos al menos que compartan un par de partículas más densas que δ_{outer} con un grupo cuya densidad excede δ_{peak} , tales grupos son fusionados con los grupos que tienen mayor densidad.

El algoritmo HOP es espacialmente adaptativo, libre de coordenadas, e involucra 6 parámetros: N_{hop} , N_{dens} , N_{merge} , δ_{peak} , δ_{saddle} y δ_{outer} . Eisenstein & Hut (1998) mostraron que la sola modificación del parámetro δ_{outer} produce que el catálogo final de halos se muy diferente, mientras que la variación de los 5 parámetros restantes provoca pequeñas diferencias en los resultados. La cantidad de parámetros libres que posee el algoritmo tiene sus ventajas. Suponiendo que uno eligiera $\delta_{peak} = \delta_{saddle} = \delta_{outer}$ (lo cual equivaldría a tener un solo parámetro libre en vez de tres) esto podría producir que grupos diferentes aparecieran unidos por a penas un delgado puente de partículas. Sin embargo, eligiendo $\delta_{saddle} > \delta_{outer}$, uno puede separar dicho grupos unidos ficticiamente de acuerdo a la topología de un segundo isocontorno de densidad interior. Además, utilizando $\delta_{peak} > \delta_{saddle}$ se diluyen los bordes del grupo de modo de impedir que un grupo se divida ficticiamente por las pequeñas fluctuaciones en la densidad δ_{saddle} del contorno.

B.8 SUBFIND

El algoritmo SUBFIND define subestructuras como regiones auto-ligadas y localmente sobredensas dentro de un grupo huésped mayor. El grupo huésped es un conjunto de partículas previamente identificado haciendo uso de un algoritmo FoF. Por esta razón, este algoritmo es capaz de separar los halos que el método FoF no puede resolver.

El primer paso de este método consiste en estimar la densidad local en las posiciones de cada una de las partículas de un grupo FoF que ya ha sido identificado anteriormente. La longitud de suavizado local se calcula tomando la distancia a la N_{dens} -ésima partícula más cercana y la densidad es calculada interpolando entre esos vecinos. Toda región localmente sobredensa es considerada como candidata a ser

una subestructura, dicha región se identifica a partir del isocontorno definido por los punto silla de densidad.

Una vez que la densidad SPH es calculada, todas las partículas son ordenadas de acuerdo a su densidad, comenzando con las de mayor densidad. Luego, para cada partícula i con densidad ρ_i se buscan el conjunto A_i de las N_{ngb} partículas vecinas más próximas. Dentro de A_i se busca el subconjunto de partículas con densidades más grandes que ρ_i , y de ellas se seleccionan un conjunto B_i conteniendo las dos partículas más cercanas. Notar que este conjunto puede contener dos o solo una partícula o puede estar vacío. Deben por lo tanto considerarse 3 casos:

(i) El conjunto B_i está vacío: esto significa que dentro del conjunto A_i de N_{ngb} vecinos no hay partículas cuya densidad sea mayor que la densidad de la partícula i . En este caso, la partícula i es marcada como un máximo local alrededor de la cual crecerá un subgrupo.

(ii) Si el conjunto B_i contiene una sola partícula, o dos que se encuentran dentro del mismo subgrupo, entonces la partícula i también es incluida en dicho subgrupo.

(iii) Si el conjunto B_i contiene dos partículas que se encuentran en subgrupos diferentes, entonces la partícula i es un punto silla, y los dos subgrupos de los cuales forman parte las partículas de B_i son marcados como candidatos a subhalos.

Después de aplicar este esquema se obtiene una lista de candidatos a subhalos. En este punto es importante notar que una partícula puede formar parte de varios candidatos a subhalos, y que el algoritmo es capaz de detectar la jerarquía completa de subhalos dentro de subhalos.

Luego de que se ha construido la lista de candidatos a subhalos cada uno de estos es sometido a un proceso de limpieza para descartar partículas que no se encuentren ligadas gravitacionalmente. Esencialmente esto consiste en calcular la energía total de cada partícula dentro del subhalo y descartar aquellas para las cuales esta cantidad es positiva. La energía potencial y cinética de cada partícula debe ser calculada en unidades físicas. La energía cinética es calculada relativa a la velocidad media de las partículas del subhalo y además se le suma la componente correspondiente al flujo de Hubble. Para este último es necesario definir un centro para el cual se toma la posición de la partícula con menor energía potencial. Todas las partículas que sobreviven, es decir, aquellas con energía total negativa, son marcadas como un subhalo. Para decidir a donde pertenece una partícula asociada a dos subhalos diferentes, SUBFIND solo considera el subhalo candidato más pequeño de cada una de las ramas del árbol generado por los puntos de silla.

En resumen, SUBFIND descompone un dado grupo de partículas en un conjunto de subhalos auto-ligados separados, cada uno de ellos identificado como una región localmente sobredensa dentro del cam-

po de densidad original. Este algoritmo es adaptable a cualquier disposición espacial y solo tiene dos parámetros libres, N_{dens} y N_{ngb} . Este último establece la masa mínima que se desea identificar, y usualmente se emplea $N_{ngb} = 10$. Los resultados del algoritmo muestran que son poco sensibles a la elección del parámetro N_{dens} , pero típicamente se emplea un valor un poco mayor que N_{ngb} .

B.9 ADAPTAHOP

Este algoritmo identifica halos de materia oscura aplicando el principio más simple de la Teoría de Morse el cual involucra relacionar la topología de un problema con el conjunto de puntos críticos que contiene y con las líneas de punto que conectan dichos puntos críticos. Por ejemplo, las regiones del espacio con una densidad por encima de cierto valor umbral, $\rho > \rho_t$, los puntos silla donde $\mathbf{x}, \nabla\rho(\mathbf{x}) = 0$ y las curvas obtenidas siguiendo el gradiente del campo de densidad. Siguiendo esta idea, las subestructuras más pequeñas pueden identificarse como picos de curvas, i.e. conjuntos de líneas de campo que convergen en un mismo máximo local. La conectividad entre las subestructuras se produce por medio de los puntos de silla, los cuales máximos locales en las superficies que definen los contornos de los picos.

El método involucra 4 pasos:

Paso 1: Se aplica un suavizado adaptativo a la distribución de materia oscura utilizando el método estándar de SPH. Cada una de las partícula es tratada como una nube suave y esférica de tamaño R . Además para cada partícula se construye una lista de los N_{SPH} vecinos más próximos haciendo uso de un algoritmo Oct-tree. El valor de R es fijado por la distancia a la partícula más lejana de estos N_{SPH} vecinos, mientras que la densidad de la partícula es estimada sumando las contribuciones de los vecinos pesados por el spline $S(r)$, donde r es la distancia al vecino correspondiente.

Paso 2: Se construye un árbol de estructuras y subestructuras, y cada partícula es asociada al pico al cual pertenece. Para tal fin se recorren las partículas una por una siguiendo el gradiente de densidad hasta converja.

Paso 3: Para cada una de las hojas del árbol de estructuras, se determina la conexión el el resto de las hojas buscando los punto de silla en las superficie de intersección S_{ij} entre los picos i y j . Cada una de las superficies S_{ij} está formada por partículas que pertenecen a alguno de los dos picos i o j y tienen al menos uno de sus N_{HOP} en el otro pico. Si el conjunto S_{ij} solo contiene partículas que pertenecen a i o j , se elimina la conexión entre los picos i y j . Los punto de silla son máximos locales en S_{ij} y para establecer una relación entre la conectividad y la densidad umbral, solo hacen falta considerar los punto de silla con densidad más alta. Para realizar una estima precisa

de la densidad en S_{ij} se procede como sigue: se toma una partícula A en S_{ij} , que supongamos pertenece al pico i y cuya densidad es ρ_A , y se toman los $N_j \leq N_{HOP}$ vecinos que pertenecen al pico j . Luego, la densidad asociada a la partícula en cuestión estará dada por $\rho = \min(\rho_A, \rho_k)$ con $k = 1, \dots, N_j$. Con este procedimiento se evita la subestimación de la densidad en los puntos de silla.

Paso 4: La construcción del árbol de estructuras y subestructuras se realiza de manera recursiva incrementando progresivamente un parámetro de umbral, ρ_t , partiendo de un valor inicial ρ_{TH} , el cual corresponde a la sobredensidad típica de los halos de materia oscura. Generalmente se elige $\rho_{TH} = 81$, la cual corresponde a la sobredensidad de los halos de materia oscura identificados con el método de FoF con un parámetro de percolación de $b = 0.2$. Para ilustrar el proceso, supongamos que nos encontramos en el paso n y queremos avanzar al paso $n + 1$. En este punto, nos encontramos en una rama del árbol, ya sea una estructura o una subestructura, y queremos analizar los detalles de la rama. Esta (sub)estructura contiene un número de picos conectados por puntos silla con densidades ρ_s , las cuales son examinadas y destruidas si $\rho_s < \rho_t$. Luego, la (sub)estructura es dividida en tantas partes como picos dentro de ella sobrevivan. Durante este proceso, todas aquellas partículas que pertenecen a cada uno de los picos y que poseen densidades sobre ρ_t son etiquetadas para poder computar diversas propiedades de la dada (sub)estructura, por ejemplo, la cantidad de partículas que contiene, su masa, su densidad máxima y promedio, y con lo cual es posible aplicar criterio de selección basados en la morfología. Uno de tales criterios puede ser el ruido Poisson. Para decidir si una dada estructura que contiene N partículas debe ser considerada como estadísticamente significativa comparada al ruido Poisson, su densidad promedio debe ser significativa comparada con ρ_t , es decir:

$$\langle \rho \rangle_{substructure} > \rho_t \left(1 + \frac{f_{Poisson}}{\sqrt{N}} \right) \quad (\text{B.2})$$

donde $f_{Poisson}$ es un ' $f_{Poisson}\sigma'$ parámetro de detección, típicamente se elige un valor de $f_{Poisson} = 4$. Si la subestructura se encuentra por debajo de este nivel se elimina. Al final de este proceso de selección pueden ocurrir dos casos: (i) se detectan dos o más subestructuras, con lo cual se crea un nuevo nodo en el árbol de estructuras; (ii) la (sub)estructura no se divide en múltiples componentes y por lo tanto nada relevante para dicha estructura ocurre en este paso. El proceso se repite sobre la nueva subestructura aumentando el umbral de corte ρ_t :

$$\rho_t \rightarrow \rho_t \left(1 + \frac{f_{Poisson}}{\sqrt{N}} \right) \quad (\text{B.3})$$

hasta que solamente sobrevive un pico en la (sub)estructura. La selección por ruido Poisson no es aplicada cuando la densidad del halo es $\rho_t = \rho_{TH}$.

Al finalizar todo el proceso, uno obtiene un árbol donde cada uno de los nodos corresponde a una estructura o subestructura con su correspondiente posición, número de partículas, radio medio cuadrado, densidades máximas y promedio, y la densidad más hasta ρ_s de los punto silla que la conectan con otra subestructura. Vale notar que este algoritmo no aplica ningún criterio para extraer de las estructuras identificadas aquellas partículas que no se encuentren gravitacionalmente ligadas.

MÉTODOS MONTE CARLO DE INTEGRACIÓN

En muchas aplicaciones científicas aparece el problema de calcular integrales. En estos casos, uno debe estimar exacta o aproximadamente expresiones del tipo:

$$I = \int_A f(x) dx \quad (\text{C.1})$$

donde A es un subconjunto del espacio de Riemann \mathbb{R}^k y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. En general, el cómputo de estas integrales mediante los métodos tradicionales (por ejemplo, métodos de cuadraturas, regla de Simpson, etc) resulta difícil y/o computacionalmente costoso de realizar, especialmente para dimensiones k mayores que 1. Por esta razón es preciso recurrir a métodos alternativos que nos permitan al menos lograr una aproximación hasta el nivel de precisión deseado.

Uno de los inconvenientes que se presentan a la hora de evaluar numéricamente las integrales está relacionado con la fracción del hipervolumen ocupada por el subconjunto de integración. Para ilustrar esto emplearemos el siguiente ejemplo: supongamos que deseamos calcular el volumen de una hiperesfera unidad de dimensión k . La expresión matemática para esta integral es:

$$\int_{S^{k-1}} dx_1 \dots dx_k \quad (\text{C.2})$$

donde $S^{k-1} = \{x | x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq 1\}$ representa todo el volumen dentro de la hiperesfera. El resultado exacto de esta integral puede ser encontrado analíticamente y el mismo está dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} \quad (\text{C.3})$$

Ahora bien el cálculo numérico de la integral 2 puede ser realizado tomando en cuenta que una hiperesfera unidad de encuentra incluida en el volumen del hyperrectángulo $[-1, 1]^k$ y, por lo tanto, podemos escribir:

$$\int_{[-1,1]^k} I_{S^{k-1}}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k \quad (\text{C.4})$$

donde

$$I_{S^{k-1}} = \begin{cases} 1 & \forall x \in S^{k-1} \\ 0 & \forall x \notin S^{k-1} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Uno de los métodos más sencillos para calcular integrales consiste en dividir cada eje del hypervolumen de integración en m subintervalos de igual longitud (i. e., distribuir uniformemente m puntos en cada dirección ortogonal del volumen) y luego computar la aproximación:

$$\frac{1}{m^k} \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m I_{S^{k-1}} \left(-1 + 2\frac{i_1-1}{m-1}, \dots, -1 + 2\frac{i_k-1}{m-1} \right) \quad (\text{C.6})$$

Como puede observarse esta aproximación requiere evaluar m^k veces el integrando, lo cual significa, por lo tanto, que el número de evaluaciones aumenta exponencialmente con el número de dimensiones. Consecuentemente, el tiempo de cómputo se incrementa en igual proporción. Una forma de lograr una aproximación en menor tiempo de cómputo se consigue distribuyendo los puntos aleatoriamente dentro del hypervolumen $[-1, 1]^k$. En este sentido, supongamos que lanzamos N puntos aleatorios, los cuales responden a una cierta distribución de probabilidad elegida *a priori*. En este caso, la integral puede ser estimada de la siguiente manera:

$$\frac{1}{N} \sum_{i_1=1}^N I_{S^{k-1}} (x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) \quad (\text{C.7})$$

La ventaja de esta variante consiste en que uno puede controlar el número de evaluaciones del integrando, y consecuentemente disminuir el costo computacional. Sin embargo es preciso notar que a medida que la dimensión de la integral aumenta la fracción de volumen ocupada por la hiperesfera es significativamente menor. Consecuentemente, si uno lanza al azar N puntos dentro del volumen $[-1, 1]^k$ la mayor parte de ellos caerán en un volumen fuera de la región de interés, y consecuentemente, la estimación de la integral poseerá una mayor incertidumbre. Para ilustrar esto la tabla 2 muestra el valor de la fracción del hyperrectángulo ocupada por la hiperesfera para diferentes dimensión k . Como puede apreciarse la fracción de volumen disminuye drásticamente a medida que la dimensión aumenta.

Como veremos más adelante, una forma de salvar este problema consiste distribuir los puntos aleatorios según alguna ley de distribución la cual debe estar motivada por las características particulares del integrando.

En este punto vale recalcar que el aumento de la dimensión no solo conyeva a un aumento en el número de evaluaciones que se debe hacer del integrando sino también produce un aumento en la incertidumbre en la estimación de la integral.

Dimensión k	Fracción
1	1.0×10^0
2	7.85×10^{-1}
3	5.24×10^{-1}
4	3.08×10^{-1}
5	1.64×10^{-1}
10	2.49×10^{-3}
20	2.46×10^{-7}
50	1.54×10^{-27}
100	1.87×10^{-69}
1000	2.87×10^{-1186}

Tabla 2: Fracción de volumen ocupado por la hipersfera unidad de dimensión k .

C.1 MÉTODO MONTE CARLO

El método Monte Carlo para la estimación de ciertas cantidades ha sido utilizado en diferentes ramas de la ciencia. Uno de los primeros registros del uso del mismo fue el que hizo el Conde de Buffon en 1777. Él propuso un experimento en el cual se arroja sucesivamente una varilla de longitud L sobre un arreglo de rectas paralelas equidistantes. Siendo $d > L$ la distancia entre las rectas paralelas, el Conde demostró que la probabilidad de que la varilla interseccione una recta es

$$p = \frac{2L}{\pi d} \quad (\text{C.8})$$

Algunos años más tarde Laplace propuso que esto podría ser utilizado para estimar el valor de π . En otro contexto, Lord Kelvin utilizó el Método Monte Carlo para estudiar algunos aspectos de la teoría cinética de los gases. Extrayendo trozos de papel numerados de una jarra de cristal él pretendía calcular integrales temporales de la energía cinética que aparecen en dicha teoría.

El término Monte Carlo fue por primera vez utilizado después de la Segunda Guerra Mundial en el Laboratorio Nacional Los Álamos y fue sugerido por Metropolis quien se inspiró en la ciudad de Mónaco, la cual es famosa por sus casinos.

C.2 MÉTODO DE INTEGRACIÓN MONTE CARLO

Como ya hemos dicho anteriormente, este método nos permite aproximar integrales de dimensiones grandes con un bajo costo compu-

tacional. Al mismo tiempo nos brinda una estima de la incertidumbre de dicha aproximación. Según el método MC la integral C.1 puede ser aproximada por la siguiente expresión:

$$E = \frac{A}{N} \sum_{i=1}^N f(\vec{x}_i) \quad (\text{C.9})$$

donde los N vectores \vec{x}_i son puntos distribuidos aleatoriamente en el hiperespacio k -dimensional. Aplicando la ley de los grandes números a esta ecuación, podemos asegurar que la estimación MC converge al valor de la integral

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A}{N} \sum_{n=1}^N f(\vec{x}_n) = I \quad (\text{C.10})$$

A continuación veremos diferentes alternativas del método MC de integración:

C.2.1 Método de rechazo

La integral de una función positiva unidimensional puede pensarse como el área bajo la curva descrita por dicha función. Supongamos que deseamos calcular la integral de una dada función positiva $f(x)$ entre los límites $a < b$, para ello imaginemos un rectángulo de altura h y ancho $(b - a)$. El área de dicho rectángulo será $A = h(b - a)$. Destaquemos que el valor de la altura h debe ser elegido de tal manera que se cumpla la condición $\max(f(x)) < h$ dentro del rango $[a, b]$. Para estimar el área bajo la curva procedemos a tirar n pares de números aleatorios (x_i, y_i) , con $a \leq x_i \leq b$ y $0 \leq y_i \leq h$. La fracción de puntos n_s para los cuales se cumple la condición $y_i \leq f(x_i)$ representan una estima del cociente entre el área del rectángulo y el área bajo la curva. De este modo, podemos estimar la integral según la relación:

$$E_n = A \frac{n_s}{n} \quad (\text{C.11})$$

C.2.2 Método del valor medio

Esté método está basado en el teorema del valor medio el cuál establece, en su forma integral, que para una dada función $f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$, existe un valor ξ en dicho intervalo, tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a) \quad (\text{C.12})$$

Es posible demostrar que el valor de $f(\xi)$ se corresponde con el valor medio $\langle f(x) \rangle$ de la función en el rango $[a, b]$. Para determinar el

valor medio de la función en el intervalo en cuestión lanzamos n números aleatorios x_i que se encuentren en dicho rango. De esta forma, podemos estimar el valor medio de $f(x)$ como

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f(x_i) \quad (\text{C.13})$$

Luego la estimación de la integral estará dada por

$$E_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^k f(x_i) \quad (\text{C.14})$$

c.2.3 Estimación de errores en integración MC

Antes de continuar debemos hacer algunos comentarios sobre cómo estimamos el valor del error en el método MC de integración. Para ello definamos la varianza $\sigma^2(f)$ de la función $f(x)$ dentro del intervalo de integración de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = \int (f(x) - I)^2 dx \quad (\text{C.15})$$

donde la integral se realiza sobre la región de interés e I es el valor exacto de la integral.

Ahora, consideremos un conjunto de m realizaciones con n tiradas de números aleatorios cada una. La estimación de la integral obtenida con la j -ésima realización estará dada por

$$E_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{j,i}) \quad (\text{C.16})$$

(por simplicidad hemos supuesto que la integral se realiza sobre un volumen unitario, de tal forma que no aparece el factor multiplicativo delante de la sumatoria). Por otro lado, el valor medio de los $m \times n$ valores de $f(x)$ puede ser calculado mediante la siguiente expresión:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m E_j = \frac{1}{m n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_{j,i}) \quad (\text{C.17})$$

Luego, la diferencia entre la j -ésima E_j estima de la integral y el valor medio $\langle f(x) \rangle$ se define de la forma siguiente:

$$\epsilon_j = E_j - \langle f(x) \rangle \quad (\text{C.18})$$

De este modo, la varianza de los valores medios puede ser escrita como:

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \epsilon_j^2 \quad (\text{C.19})$$

Para relacionar esta última expresión con la varianza de los valores individuales $f(x_{j,i})$ definimos la discrepancia entre dicho valor y el valor medio de todas las muestras:

$$d_{j,i} = f(x_{j,i}) - \langle f(x) \rangle \quad (\text{C.20})$$

entonces, la varianza σ^2 de las $m n$ tiradas individuales estará dada por la expresión:

$$\sigma^2 = \frac{1}{m n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_{j,i}^2 \quad (\text{C.21})$$

En este punto, podemos reescribir la ecuación C.19 haciendo uso de la siguiente expresión:

$$\epsilon_j = E_j - \langle f(x) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_{j,i}) - \langle f(x) \rangle) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{j,i} \quad (\text{C.22})$$

Luego, sustituyendo en ecuación C.19 obtenemos:

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{j,i} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_{k,i} \right) \quad (\text{C.23})$$

Esta última ecuación puede pensarse como dos términos, aquellos para los cuales $i \neq k$ y aquellos para los cuales $i = k$. Como esperamos que las tiradas dentro de las mismas realizaciones sean independientes hemos de esperar, en el límite de los grandes números, que los términos cruzados se anulen unos con otros, y solo sobrevivan los términos para los cuales $i = k$. En dicho límite la ecuación C.23 puede escribirse como:

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{m n^2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_{j,i}^2 \quad (\text{C.24})$$

Ahora, combinando esta última ecuación con la ecuación C.21 obtenemos:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{N} \quad (\text{C.25})$$

donde, el valor de σ^2 puede estimarse utilizando la relación estándar:

$$\sigma^2 = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2 \quad (\text{C.26})$$

donde

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n)^2 \quad (\text{C.27})$$

Es importante notar que la estimación del error de esta manera debe ser interpretada en términos de probabilidades. El teorema central

del límite nos dice que la probabilidad de que nuestra estimación MC para la integral se encuentre entre los valores $I - a\sigma(f)/\sqrt{N}$ y $I + b\sigma(f)/\sqrt{N}$ es:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(-a \frac{\sigma(f)}{\sqrt{N}} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - I \leq b \frac{\sigma(f)}{\sqrt{N}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^b dt \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \quad (\text{C.28})$$

De este modo concluimos que el error en la estimación de la integral con métodos MC escala como σ/\sqrt{N} (independiente de la dimensión del integrando), donde σ es la varianza de la función en el intervalo y N la cantidad de números aleatorios utilizados en la estimación de la integral. Entonces, si deseamos disminuir el error debemos, o bien aumentar el número de números aleatorios, o bien disminuir la varianza de la función. Evidentemente lo último es menos costoso en términos computacionales. El siguiente método fue propuesto para cumplir ese objetivo.

c.2.4 Muestreo con importancia

El muestreo con importancia consiste en tirar números aleatorios no ya en una manera uniforme sino que describan alguna función de distribución escogida *a priori* por el usuario. De esta manera se pretende disminuir el valor de la varianza σ^2 y así el error en la estimación de la integral. En el sentido matemático, el muestreo con importancia consiste en un cambio de variables de integración.

$$\int f(x) dx = \int \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx = \int \frac{f(x)}{p(x)} dP(x) \quad (\text{C.29})$$

Bajo la hipótesis de que $p(x) \geq 0$ es definida positiva y está normalizada (es decir, la integral sobre todo el rango de integración de interés debe ser igual a la unidad) podemos pensar a $p(x)$ como una densidad de probabilidad correspondiente a la distribución $P(x)$. Luego, generando números aleatorios distribuidos según $P(x)$ es posible calcular la integral de la siguiente manera

$$E = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{p(x_n)} \quad (\text{C.30})$$

En este caso el estimador de la varianza será:

$$\sigma^2 \left(\frac{f}{p} \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{f(x_n)}{p(x_n)} \right)^2 - E^2 \quad (\text{C.31})$$

De esta última ecuación observamos que para disminuir la varianza es necesario elegir $p(x)$ de tal manera que se asemeje lo más posible a $|f(x)|$ especialmente en aquellas regiones donde la función $f(x)$ toma

los valores más grandes.

La desventaja de este método reside en el hecho de que la elección de una $p(x)$ que se anule o se aproxime a cero muy rápidamente puede hacer que la varianza se vuelva muy grande, pues, si $p(x)$ se anula en alguna región donde $f(x)$ es no nula, entonces la varianza tomará valores muy grandes (tenderá a ser infinita).

C.3 EJEMPLOS

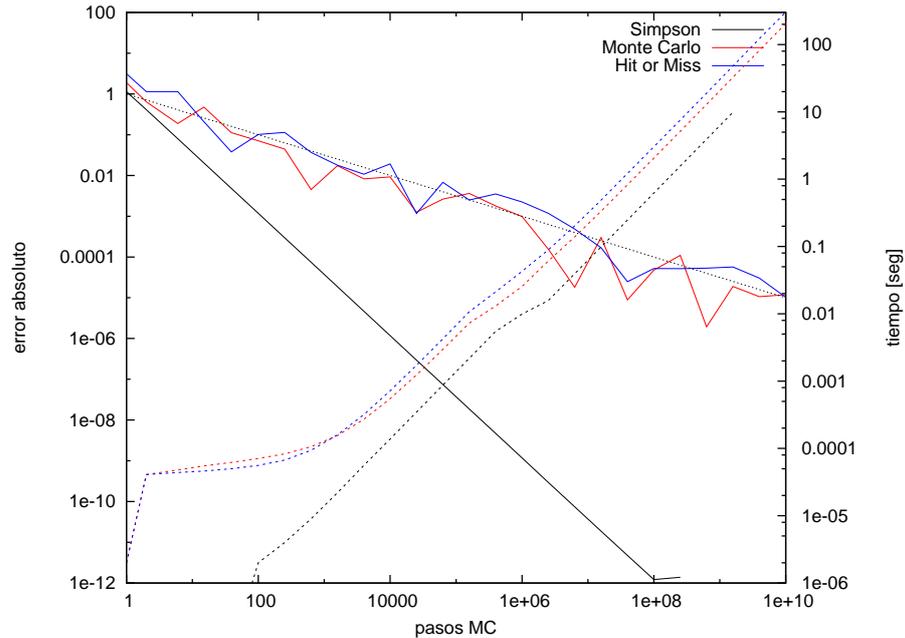


Figura 34: Comparación del error absoluto obtenido con el método de Simpson y el MC. Las abscisas representan cantidad de intervalos o de números aleatorios, según corresponda. Se utilizaron dos versiones del método MC, el del valor medio (rojo) y el de rechazo (azul). Se observa que con el método de Simpson el error disminuye como n^{-2} , mientras que para ambos métodos MC lo hace como $n^{-1/2}$.

C.3.1 comparación con regla de simpson

En la figura 34 se muestra la comparación entre el método de Simpson y el método MC (tanto para el método de rechazo y el del valor medio) para la estimación del error absoluto. En este caso se realizó la integral unidimensional

$$I = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx \quad (\text{C.32})$$

Como puede observarse en este caso el método de Simpson resulta conveniente ya que presenta una mejor precisión para un dado valor fijo n de intervalos al mismo tiempo que resulta computacionalmente

menos costoso. Para el caso unidimensional el error del método de Simpson escala como n^{-2} donde mientras que los métodos MC lo hacen como $n^{-1/2}$ (recordar que el error de los métodos MC escala como $n^{-1/2}$ independientemente de la dimensión de la integral). Para dimensiones $d > 1$ el error del método de Simpson escala como $n^{-2/d}$, es por esto que para dimensiones mayores resulta conveniente los métodos MC, si bien el costo computacional es mayor.

C.3.2 independencia de la cantidad de dimensiones

Hemos dicho que el error estimado del método MC es independiente de la dimensión de la integral. Para observar esto se realizó la integración de una esfera multidimensional con este método para diferentes dimensiones $d = 2, 4, 6, 8$. La figura 35 muestra los resultados obtenidos, donde se observa que la tendencia del error absoluto para los 4 casos escala aproximadamente como $n^{-1/2}$. Realizando un ajuste lineal de los datos las pendientes obtenidas resultaron $a = -0.50(d = 2)$, $-0.41(d = 4)$, $-0.50(d = 6)$ y $-0.55(d = 8)$.

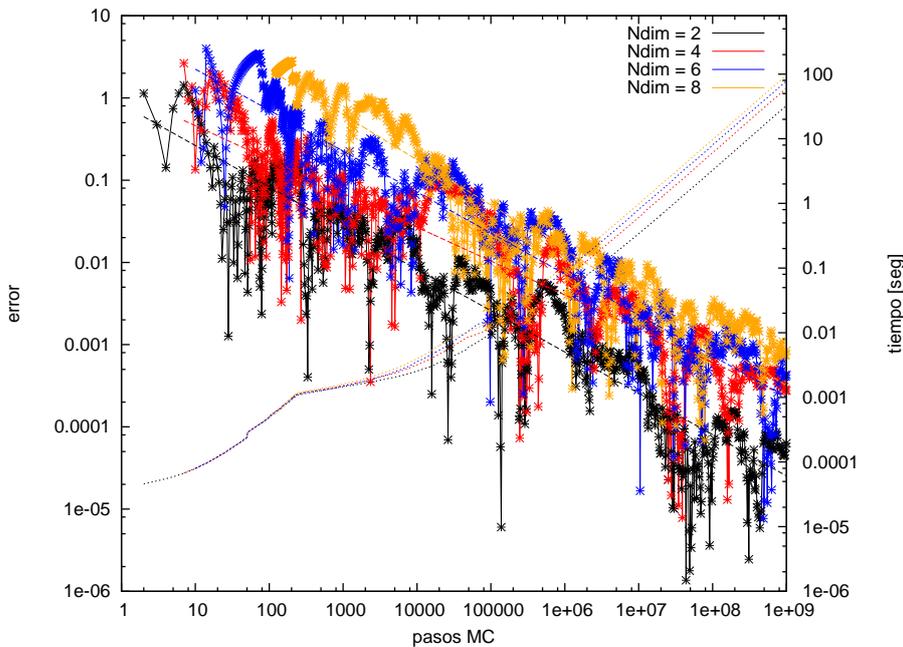


Figura 35: Error absoluto de la integral de una esfera n -dimensional estimada con el método MC para diferentes cantidad de números aleatorios y diferentes dimensiones, $n = 2, 4, 6, 8$. Se observa que el error absoluto disminuye como $n^{-1/2}$ independientemente de la dimensión.

C.3.3 importance sampling

Para ver la importancia de un buen muestreo de los números aleatorios se realizó la integral de la ecuación C.32 utilizando un muestreo

uniforme y otro que imite el comportamiento del integrando. Aquí se observa que para un valor fijo N de números aleatorios el error absoluto con el método de Importance Sampling resulta menor.

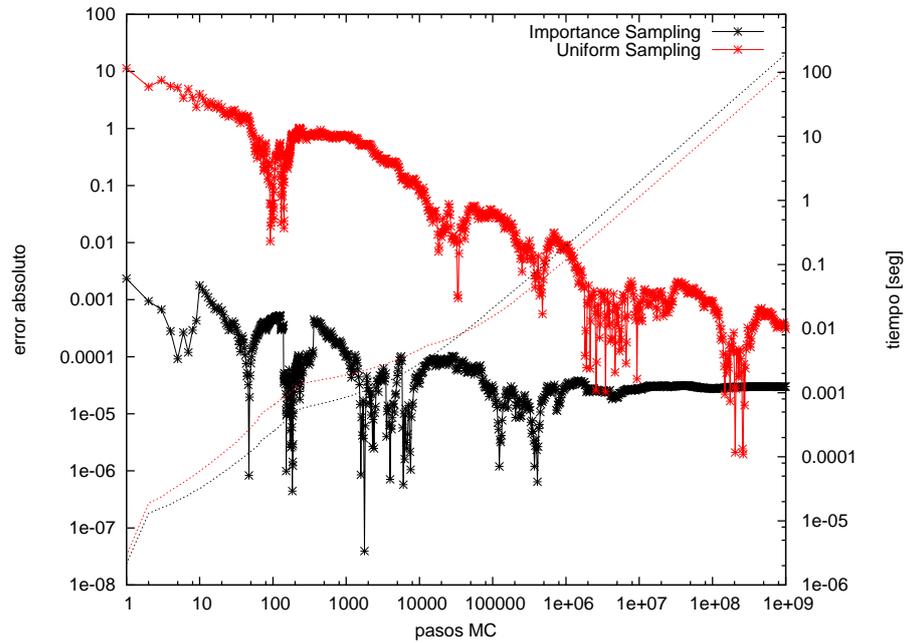


Figura 36: Comparación del error absoluto obtenido en la estimación de la integral unidimensional [C.32](#) utilizando el método MC del valor medio y con *importance sampling*. Se observa que el error estimado resulta menor para el método con *importance sampling*, mejorando en 4 ordenes de magnitud aproximadamente.

D

NÚMEROS ÚTILES

Constantes

Constante de Gravitación	G	$= 6.674 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Velocidad de la luz	c	$= 2.998 \times 10^{10} \text{ cms}^{-1}$
Masa del Protón	m_p	$= 1.673 \times 10^{-24} \text{ g}$ $= 938.3 \text{ MeV} / c^2$
Masa del Neutrón	m_n	$= 1.675 \times 10^{-24} \text{ g}$ $= 939.6 \text{ MeV} / c^2$
Masa del Electrón	m_e	$= 9.109 \times 10^{-28} \text{ g}$ $= 0.511 \text{ MeV} / c^2$
Carga del Electrón	e	$= -4.803 \times 10^{-10} \text{ esu}$ $= -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

Unidades

Masa Solar	$1 M_\odot$	$= 1.99 \times 10^{33} \text{ g}$
Radio Solar	$1 R_\odot$	$= 6.960 \times 10^{10} \text{ cm}$
Luminosidad Solar	$1 L_\odot$	$= 3.827 \times 10^{33} \text{ ergs}^{-1}$
Unidad Astronómica	$1 UA$	$= 1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$
Parsec	$1 pc$	$= 3.086 \times 10^{18} \text{ cm}$
Electron Volt	$1 eV$	$= 1.602 \times 10^{-12} \text{ erg}$
Angstrom	1 \AA	$= 1 \times 10^{-8} \text{ cm}$

Parámetros Cosmológicos

Constante de Hubble	H_0	$= 100 h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Tiempo de Hubble	H_0^{-1}	$= 9.78 h^{-1} \text{ Gyr}$
Radio de Hubble	cH_0^{-1}	$= 2997.9 h^{-1} \text{ Mpc}$
Densidad Crítica	ρ_{crit}	$= 1.879 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}$ $= 2.775 \times 10^{11} h^{-1} M_\odot / (h^{-1} \text{ Mpc})^3$
Densidad de Fotones	$\Omega_{\gamma,0}$	$= 2.488 \times 10^{-5} h^{-2}$

- Abazajian, K. N., Adelman-McCarthy, J. K., Agüeros, M. A., Allam, S. S., Allende Prieto, C., An, D., Anderson, K. S. J., Anderson, S. F., Annis, J., Bahcall, N. A., & et al. (2009). The Seventh Data Release of the Sloan Digital Sky Survey. *ApJS*, 182, 543–558.
- Aguilar, L. A., & Merritt, D. (1990). The structure and dynamics of galaxies formed by cold dissipationless collapse. *ApJ*, 354, 33–51.
- Allgood, B., Flores, R. A., Primack, J. R., Kravtsov, A. V., Wechsler, R. H., Faltenbacher, A., & Bullock, J. S. (2006). The shape of dark matter haloes: dependence on mass, redshift, radius and formation. *MNRAS*, 367, 1781–1796.
- Altay, G., Colberg, J. M., & Croft, R. A. C. (2006). The influence of large-scale structures on halo shapes and alignments. *MNRAS*, 370, 1422–1428.
- Aragón-Calvo, M. A., van de Weygaert, R., Jones, B. J. T., & van der Hulst, J. M. (2007). Spin Alignment of Dark Matter Halos in Filaments and Walls. *ApJ*, 655, L5–L8.
- Audit, E., Teyssier, R., & Alimi, J. M. (1997). Non-linear dynamics and mass function of cosmic structures. i. analytical results. *ApJ*, 325, 439–449.
- Bardeen, J. M., Bond, J. R., Kaiser, N., & Szalay, A. S. (1986). The statistics of peaks of gaussian random fields. *ApJ*, 304, 15–61.
- Barnes, J., & Efstathiou, G. (1987). Angular momentum from tidal torques. *ApJ*, 319, 575–600.
- Barnes, J., & Hut, P. (1986). A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm. *Nature*, 324, 446–449.
- Basilakos, S., Plionis, M., Yepes, G., Gottlöber, S., & Turchaninov, V. (2006). The shape-alignment relation in Λ cold dark matter cosmic structures. *MNRAS*, 365, 539–547.
- Bernardeau, F. (1994). The effects of smoothing on the statistical properties of large-scale cosmic fields. *A&A*, 291, 697–712.
- Bertschinger, E. (1985). Self-similar secondary infall and accretion in an Einstein-de Sitter universe. *ApJS*, 58, 39–65.
- Bertschinger, E., & Gelb, J. M. (1991). Cosmological N-body simulations. *Computers in Physics*, 5, 164–175.
- Bett, P., Eke, V., Frenk, C. S., Jenkins, A., Helly, J., & Navarro, J. (2007). The spin and shape of dark matter haloes in the Millennium simulation of a Λ cold dark matter universe. *MNRAS*, 376, 215–232.

- Blanton, M. R., Hogg, D. W., Bahcall, N. A., Brinkmann, J., Britton, M., & Connolly, A. J. (2003). The Galaxy Luminosity Function and Luminosity Density at Redshift $z = 0.1$. *ApJ*, 592, 819–838.
- Bond, J. R., Kofman, L., & Pogosyan, D. (1996). How filaments of galaxies are woven into the cosmic web. *Nature*, 380, 603–606.
- Brunino, R., Trujillo, I., Pearce, F. R., & Thomas, P. A. (2007). The orientation of galaxy dark matter haloes around cosmic voids. *MNRAS*, 375, 184–190.
- Bullock, J. S., Dekel, A., Kolatt, T. S., Kravtsov, A. V., Klypin, A. A., Porciani, C., & Primack, J. R. (2001). A Universal Angular Momentum Profile for Galactic Halos. *ApJ*, 555, 240–257.
- Cautun, M., van de Weygaert, R., & Jones, B. J. T. (2013). NEXUS: tracing the cosmic web connection. *MNRAS*, 429, 1286–1308.
- Colberg, J. M., Krughoff, K. S., & Connolly, A. J. (2005). Intercluster filaments in a Λ CDM Universe. *MNRAS*, 359, 272–282.
- Cole, S., & Lacey, C. (1996). The structure of dark matter haloes in hierarchical clustering models. *MNRAS*, 281, 716.
- Cooray, A., & Sheth, R. (2002b). Halo models of large scale structure. *Phys. Rep.*, 372, 1–129.
- Cuesta, A. J., Betancort-Rijo, J. E., Gottlöber, S., Patiri, S. G., Yepes, G., & Prada, F. (2008). Spin alignment of dark matter haloes in the shells of the largest voids. *MNRAS*, 385, 867–874.
- Davis, M., Efstathiou, G., Frenk, C. S., & White, S. D. M. (1985). The evolution of large-scale structure in a universe dominated by cold dark matter. *ApJ*, 292, 371–394.
- Davis, M., & Peebles, P. J. E. (1983). A survey of galaxy redshifts. V - The two-point position and velocity correlations. *ApJ*, 267, 465–482.
- de Vaucouleurs, G. (1948). Recherches sur les Nebuleuses Extragalactiques. *Annales d'Astrophysique*, 11, 247.
- Dicke, R. H., Peebles, P. J. E., Roll, P. G., & Wilkinson, D. T. (1965). Cosmic Black-Body Radiation. *ApJ*, 142, 414–419.
- Doroshkevich, A. G. (1970). Spatial structure of perturbations and origin of galactic rotation in fluctuation theory. *Astrophysics*, 6, 320–330.
- Dubinski, J., & Carlberg, R. G. (1991). The structure of cold dark matter halos. *ApJ*, 378, 496–503.

- Einstein, A. (1915). Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 844-847., (pp. 844–847).
- Eisenstein, D. J., & Hu, W. (1999). Power Spectra for Cold Dark Matter and Its Variants. *ApJ*, 511, 5–15.
- Eisenstein, D. J., & Hut, P. (1998). HOP: A New Group-Finding Algorithm for N-Body Simulations. *ApJ*, 498, 137–+.
- Eke, V. R., Cole, S., & Frenk, C. S. (1996). Cluster evolution as a diagnostic for Omega. *MNRAS*, 282, 263–280.
- Faltenbacher, A., Li, C., & Wang, J. (2012). Anisotropy in the Matter Distribution Beyond the Baryonic Acoustic Oscillation Scale. *ApJ*, 751, L2.
- Faltenbacher, A., Li, C., White, S. D. M., Jing, Y., Shu-DeMao, & Wang, J. (2009). Alignment between galaxies and large-scale structure. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 9, 41–58.
- Fillmore, J. A., & Goldreich, P. (1984). Self-similar gravitational collapse in an expanding universe. *ApJ*, 281, 1–8.
- Gamow, G. (1948a). The Evolution of the Universe. *Nature*, 162, 680–682.
- Gelb, J. M., & Bertschinger, E. (1994a). Cold dark matter. 1: The formation of dark halos. *ApJ*, 436, 467–490.
- Gunn, J. E., & Gott, J. R., III (1972). On the Infall of Matter Into Clusters of Galaxies and Some Effects on Their Evolution. *ApJ*, 176, 1.
- Hahn, O., Porciani, C., Carollo, C. M., & Dekel, A. (2007b). Properties of dark matter haloes in clusters, filaments, sheets and voids. *MNRAS*, 375, 489–499.
- Hamilton, A. J. S. (1993). Toward Better Ways to Measure the Galaxy Correlation Function. *ApJ*, 417, 19.
- Hernquist, L. (1990). An analytical model for spherical galaxies and bulges. *ApJ*, 356, 359–364.
- Hoffman, Y. (1988). On the formation and structure of galactic halos. *ApJ*, 328, 489–498.
- Holmberg, E. (1941). On the Clustering Tendencies among the Nebulae. II. a Study of Encounters Between Laboratory Models of Stellar Systems by a New Integration Procedure. *ApJ*, 94, 385.

- Hubble, E. (1929). A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15, 168–173.
- Hubble, E. P. (1925). Cepheids in Spiral Nebulae. *Popular Astronomy*, 33, 252.
- Hubble, E. P. (1926). Extragalactic nebulae. *ApJ*, 64, 321–369.
- Huchra, J. P., & Geller, M. J. (1982). Groups of galaxies. i - nearby groups. *ApJ*, 257, 423–437.
- Jenkins, A., Frenk, C. S., White, S. D. M., Colberg, J. M., Cole, S., Evrard, A. E., Couchman, H. M. P., & Yoshida, N. (2001). The mass function of dark matter haloes. *MNRAS*, 321, 372–384.
- Jing, Y. P., & Suto, Y. (2002). Triaxial Modeling of Halo Density Profiles with High-Resolution N-Body Simulations. *ApJ*, 574, 538–553.
- Kasun, S. F., & Evrard, A. E. (2005). Shapes and Alignments of Galaxy Cluster Halos. *ApJ*, 629, 781–790.
- Kerscher, M., Szapudi, I., & Szalay, A. S. (2000). A Comparison of Estimators for the Two-Point Correlation Function. *ApJ*, 535, L13–L16.
- Klypin, A., Gottloeber, S., Kravtsov, A., & Khokhlov, A. (1999). Galaxies in n-body simulations: overcoming the overmerging problem. *The Astrophysical Journal*, 516, 530.
- Knollmann, S. R., & Knebe, A. (2009). Ahf: Amiga's halo finder. URL <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0904.3662>
- Lacey, C., & Cole, S. (1993). Merger rates in hierarchical models of galaxy formation. *MNRAS*, 262, 627–649.
- Landy, S. D., & Szalay, A. S. (1993). Bias and variance of angular correlation functions. *ApJ*, 412, 64–71.
- Lau, E. T., Nagai, D., Kravtsov, A. V., & Zentner, A. R. (2011). Shapes of Gas, Gravitational Potential, and Dark Matter in Λ CDM Clusters. *ApJ*, 734, 93.
- Lee, J., Jing, Y. P., & Suto, Y. (2005). An Analytic Model for the Axis Ratio Distribution of Dark Matter Halos from the Primordial Gaussian Density Field. *ApJ*, 632, 706–712.
- Lemson, G., & Kauffmann, G. (1999). Environmental influences on dark matter haloes and consequences for the galaxies within them. *MNRAS*, 302, 111–117.

- Ma, C.-P., & Fry, J. N. (2000). Halo Profiles and the Nonlinear Two- and Three-Point Correlation Functions of Cosmological Mass Density. *ApJ*, 531, L87–L90.
- Macciò, A. V., Dutton, A. A., van den Bosch, F. C., Moore, B., Potter, D., & Stadel, J. (2007). Concentration, spin and shape of dark matter haloes: scatter and the dependence on mass and environment. *MNRAS*, 378, 55–71.
- Maoz, E. (1990). When did cores of clusters of galaxies form? *ApJ*, 359, 257–262.
- Merchán, M. E., & Zandivarez, A. (2005). Galaxy Groups in the Third Data Release of the Sloan Digital Sky Survey. *ApJ*, 630, 759–763.
- Mo, H. J., Jing, Y. P., & White, S. D. M. (1997). High-order correlations of peaks and haloes: a step towards understanding galaxy biasing. *MNRAS*, 284, 189–201.
- Mo, H. J., & White, S. D. M. (1996). An analytic model for the spatial clustering of dark matter haloes. *MNRAS*, 282, 347–361.
- Moore, B., Ghigna, S., Governato, F., Lake, G., Quinn, T., Stadel, J., & Tozzi, P. (1999). Dark Matter Substructure within Galactic Halos. *ApJ*, 524, L19–L22.
- More, S., Kravtsov, A. V., Dalal, N., & Gottlöber, S. (2011). The Overdensity and Masses of the Friends-of-friends Halos and Universality of Halo Mass Function. *ApJS*, 195, 4.
- Nakamura, T. T., & Suto, Y. (1997). Strong Gravitational Lensing and Velocity Function as Tools to Probe Cosmological Parameters — Current Constraints and Future Predictions —. *Progress of Theoretical Physics*, 97, 49.
- Navarro, J. F., Frenk, C. S., & White, S. D. M. (1997). A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. *ApJ*, 490, 493.
- Neyman, J., & Scott, E. L. (1952). A Theory of the Spatial Distribution of Galaxies. *ApJ*, 116, 144.
- Noh, Y., & Cohn, J. D. (2011). The geometry of the filamentary environment of galaxy clusters. *MNRAS*, 413, 301–312.
- Onions, J., Ascasibar, Y., Behroozi, P., Casado, J., Elahi, P., Han, J., Knebe, A., Lux, H., Merchán, M. E., Muldrew, S. I., Neyrinck, M., Old, L., Pearce, F. R., Potter, D., Ruiz, A. N., Sgró, M. A., Tweed, D., & Yue, T. (2013). Subhaloes gone notts: spin across subhaloes and finders. *MNRAS*, 429, 2739–2747.

- Onions, J., Knebe, A., Pearce, F. R., Muldrew, S. I., Lux, H., Knollmann, S. R., Ascasibar, Y., Behroozi, P., Elahi, P., Han, J., Maciejewski, M., Merchán, M. E., Neyrinck, M., Ruiz, A. N., Sgró, M. A., Springel, V., & Tweed, D. (2012). Subhaloes going notts: the subhalo-finder comparison project. *MNRAS*, *423*, 1200–1214.
- Oukbir, J., & Blanchard, A. (1997). X-ray clusters: towards a new determination of the density parameter of the universe. *A&A*, *317*, 1–13.
- Paz, D. J., Lambas, D. G., Padilla, N., & Merchán, M. (2006). Shapes of clusters and groups of galaxies: comparison of model predictions with observations. *MNRAS*, *366*, 1503–1510.
- Paz, D. J., Lambas, D. G., Padilla, N., & Merchán, M. (2006). Shapes of clusters and groups of galaxies: comparison of model predictions with observations. *MNRAS*, *366*, 1503–1510.
- Paz, D. J., Sgró, M. A., Merchán, M., & Padilla, N. (2011). Alignments of galaxy group shapes with large-scale structure. *MNRAS*, *414*, 2029–2039.
- Paz, D. J., Sgró, M. A., Merchán, M., & Padilla, N. (2011). Alignments of galaxy group shapes with large-scale structure. *MNRAS*, *414*, 2029–2039.
- Paz, D. J., Stasyszyn, F., & Padilla, N. D. (2008). Angular momentum-large-scale structure alignments in Λ CDM models and the SDSS. *MNRAS*, *389*, 1127–1136.
- Peacock, J. A., & Smith, R. E. (2000). Halo occupation numbers and galaxy bias. *MNRAS*, *318*, 1144–1156.
- Peebles, P. J. E. (1969). Origin of the Angular Momentum of Galaxies. *ApJ*, *155*, 393.
- Penzias, A. A., & Wilson, R. W. (1965). A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *ApJ*, *142*, 419–421.
- Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., Armitage-Caplan, C., Arnaud, M., Ashdown, M., Atrio-Barandela, F., Aumont, J., Baccigalupi, C., Banday, A. J., & et al. (2013). Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *ArXiv e-prints*.
- Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Baker, M., Balbi, A., Banday, A. J., & et al. (2011). Planck early results. I. The Planck mission. *A&A*, *536*, A1.
- Press, W. H., & Schechter, P. (1974). Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. *ApJ*, *187*, 425–438.

- Prunet, S., & Pichon, C. (2013). MPgrafic: A parallel MPI version of Grafic-1. Astrophysics Source Code Library.
- Robotham, A., Phillipps, S., & De Propris, R. (2008). The Shapes of Galaxy Groups: Footballs or Frisbees? *ApJ*, 672, 834–848.
- Ryden, B. S. (1988). Galaxy formation - The role of tidal torques and dissipational infall. *ApJ*, 329, 589–611.
- Schechter, P. (1976). An analytic expression for the luminosity function for galaxies. *ApJ*, 203, 297–306.
- Schneider, M. D., Frenk, C. S., & Cole, S. (2012). The shapes and alignments of dark matter halos. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 5, 30.
- Scoccimarro, R., Sheth, R. K., Hui, L., & Jain, B. (2001). How Many Galaxies Fit in a Halo? Constraints on Galaxy Formation Efficiency from Spatial Clustering. *ApJ*, 546, 20–34.
- Seljak, U. (2000). Analytic model for galaxy and dark matter clustering. *MNRAS*, 318, 203–213.
- Sheth, R. K., Mo, H. J., & Tormen, G. (2001). Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes. *MNRAS*, 323, 1–12.
- Sheth, R. K., & Tormen, G. (1999). Large-scale bias and the peak background split. *MNRAS*, 308, 119–126.
- Smargon, A., Mandelbaum, R., Bahcall, N., & Niederste-Ostholt, M. (2012). Detection of intrinsic cluster alignments to 100 h⁻¹ Mpc in the Sloan Digital Sky Survey. *MNRAS*, 423, 856–861.
- Smith, R. E., & Watts, P. I. R. (2005). Triaxial haloes, intrinsic alignments and the dark matter power spectrum. *MNRAS*, 360, 203–215.
- Smith, R. E., Watts, P. I. R., & Sheth, R. K. (2006). The impact of halo shapes on the bispectrum in cosmology. *MNRAS*, 365, 214–230.
- Spergel, D. N., Bean, R., Doré, O., Nolta, M. R., Bennett, C. L., Dunkley, J., Hinshaw, G., Jarosik, N., Komatsu, E., Page, L., Peiris, H. V., Verde, L., Halpern, M., Hill, R. S., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Odegard, N., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E., & Wright, E. L. (2007). Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology. *ApJS*, 170, 377–408.
- Springel, V. (2005). The cosmological simulation code GADGET-2. *MNRAS*, 364, 1105–1134.
- Springel, V. (2012). Larger, faster, better: Current trends in cosmological simulations. *Astronomische Nachrichten*, 333, 515–522.

- Springel, V., Wang, J., Vogelsberger, M., Ludlow, A., Jenkins, A., Helmi, A., Navarro, J. F., Frenk, C. S., & White, S. D. M. (2008). The Aquarius Project: the subhaloes of galactic haloes. *MNRAS*, *391*, 1685–1711.
- Springel, V., White, S. D. M., Jenkins, A., Frenk, C. S., Yoshida, N., Gao, L., Navarro, J., Thacker, R., Croton, D., Helly, J., Peacock, J. A., Cole, S., Thomas, P., Couchman, H., Evrard, A., Colberg, J., & Pearce, F. (2005). Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, *435*, 629–636.
- Springel, V., White, S. D. M., Tormen, G., & Kauffmann, G. (2001a). Populating a cluster of galaxies - I. Results at $z=0$. *MNRAS*, *328*, 726–750.
- Springel, V., Yoshida, N., & White, S. D. M. (2001b). GADGET: a code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations. *New A*, *6*, 79–117.
- Stadel, J., Katz, N., Weinberg, D. H., & Hernquist, L. (1997). Skid. URL <http://www-hpcc.astro.washington.edu/tools/SKID>
- van Albada, T. S. (1982). Dissipationless galaxy formation and the R to the $1/4$ -power law. *MNRAS*, *201*, 939–955.
- van Daalen, M. P., Angulo, R. E., & White, S. D. M. (2012). The effects of halo alignment and shape on the clustering of galaxies. *MNRAS*, (p. 3417).
- Warren, M. S., Quinn, P. J., Salmon, J. K., & Zurek, W. H. (1992a). Dark halos formed via dissipationless collapse. I - Shapes and alignment of angular momentum. *ApJ*, *399*, 405–425.
- Weinberg, D. H., Hernquist, L., & Katz, N. (1997). Photoionization, numerical resolution, and galaxy formation. *ApJ*, *477*, 8.
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology*. Wiley, New York.
- White, S. D. M., & Rees, M. J. (1978). Core condensation in heavy halos - a two-stage theory for galaxy formation and clustering. *MNRAS*, *183*, 341–358.
- Wirtz, C. (1922). Einiges zur Statistik der Radialbewegungen von Spiralnebeln und Kugelsternhaufen. *Astronomische Nachrichten*, *215*, 349.
- Yang, X., Mo, H. J., & van den Bosch, F. C. (2008). Galaxy Groups in the SDSS DR4. II. Halo Occupation Statistics. *ApJ*, *676*, 248–261.
- York, D. G., & et al. (2000). The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary. *AJ*, *120*, 1579–1587.

- Zandivarez, A., Martínez, H. J., & Merchán, M. E. (2006). On the Luminosity Function of Galaxies in Groups in the Sloan Digital Sky Survey. *ApJ*, 650, 137–147.
- Zehavi, I., Zheng, Z., Weinberg, D. H., Frieman, J. A., Berlind, A. A., Blanton, M. R., Scoccimarro, R., Sheth, R. K., Strauss, M. A., Kayo, I., Suto, Y., Fukugita, M., Nakamura, O., Bahcall, N. A., Brinkmann, J., Gunn, J. E., Hennessy, G. S., Ivezić, Ž., Knapp, G. R., Loveday, J., Meiksin, A., Schlegel, D. J., Schneider, D. P., Szapudi, I., Tegmark, M., Vogeley, M. S., York, D. G., & SDSS Collaboration (2005). The Luminosity and Color Dependence of the Galaxy Correlation Function. *ApJ*, 630, 1–27.
- Zel'dovich, Y. B. (1970). Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations. *A&A*, 5, 84–89.
- Zheng, Z., Berlind, A. A., Weinberg, D. H., Benson, A. J., Baugh, C. M., Cole, S., Davé, R., Frenk, C. S., Katz, N., & Lacey, C. G. (2005). Theoretical Models of the Halo Occupation Distribution: Separating Central and Satellite Galaxies. *ApJ*, 633, 791–809.

COLOFÓN

Este documento fue escrito haciendo uso de la tipografía `classicthesis` desarrollada por André Miede. El estilo fue inspirado por el libro de tipografía “The Elements of Typographic Style” de Robert Bringhurst. `classicthesis` está disponible tanto para \LaTeX como para \LyX :

<http://code.google.com/p/classicthesis/>

Final Version as of 25 de abril de 2014 (`classicthesis` versión 1.0).