

# Simulaciones numéricas en Magnetohidrodinámica: Aplicaciones a la Física Solar

por Mariana Andrea Cécere

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física  
como parte de los requerimientos para obtener el título de  
Doctora en Física

Universidad Nacional de Córdoba

Marzo del 2013

©Famaf - UNC, 2013

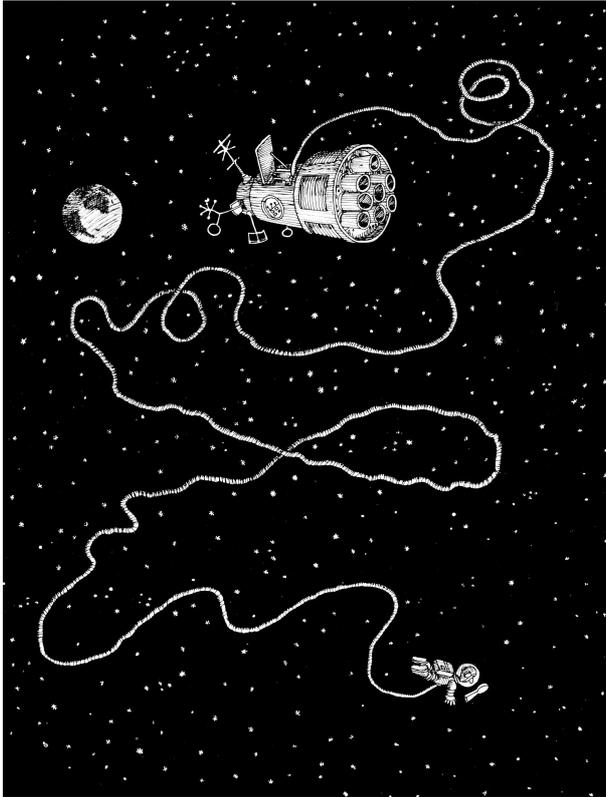
Director: Dr. Oscar Reula

Co-directora: Dra. Andrea Costa



A Dante,  
mi amado compañero





*Joaquín Salvador Lavado (Quino).*  
*"Déjenme Inventar"*

"Una de las principales enfermedades del hombre es su inquieta  
curiosidad por conocer lo que no puede llegar a saber."

*Blaise Pascal.* (Matemático, físico y filósofo francés)

La ilustración en la página anterior corresponde a la página n°1 del libro "Déjenme Inventar" de ©Joaquín S. Lavado, Quino, Ediciones de la Flor, Bs. As. 2008. Se publica por gentileza del autor.

## Agradecimientos

Agradezco a mis directores, por su paciencia y dedicación en su experiencia de enseñarme todo lo que saben. Por brindarme siempre su apoyo y confianza en cada proyecto en el que trabajé a lo largo de esta tesis. Por facilitarme oportunidades para crecer científicamente. Gracias por mostrarme siempre su pasión y entrega al hacer ciencia. En el camino que sigue, en cada decisión científica que tome, estarán las enseñanzas de mis mentores ayudándome. Gracias.

Gracias a mi amado Dante, por acompañarme en estos años de tesis, apoyándome con su ternura, nobleza y amor de siempre. Gracias por compartir a mi lado la lucha de crecer y ser feliz, basándonos en las cosas más simple y hermosa de la vida, el amor.

A mis padres y hermano, gracias por enseñarme con su ejemplo de vida, a encarar cualquier proyecto con humildad, trabajo y perseverancia. Gracias por haberme dado siempre lo mejor: respeto, amor, valor y fuerza.

A Gabriela, Luciana, Laura, Heliana y Florencia, mis amigas, por brindarme su cariño y consejos, cuando más lo he necesitado.

Gracias a la enorme ayuda incondicional que me han brindado siempre Carlos Palenzuela, Matthew Anderson, Steven Liebling, Luis Lehner, Carles Bona, Matias Schneiter, Sergio Elaskar y Florencia Parisi, en el desarrollo y entendimiento de los temas abarcados en esta tesis.

A los integrantes del Instituto de Astronomía, Teórica y Experimental por el buen recibimiento que siempre me han dado. En especial a Diego García Lambas, por abrirme las puertas de este espacio científico.

Gracias a la Facultad de Matemática, Astronomía y Física por el espacio físico otorgado para la realización de este trabajo de tesis doctoral. Gracias también a la ayuda brindada por los empleados administrativos de esta facultad, ya que debido a su buen desempeño y eficiencia, hacen que cada trámite sea una nimiedad.

Durante la realización de esta tesis usufruqué una beca de doctorado tipo I de SECyT y una beca tipo II del CONICET. Los trabajos de investigación fueron llevados a cabo con recursos de subsidios otorgados por la SECyT y el CONICET.



## Clasificación PACS:

---

02.60.Cb Numerical simulation; solution of equations  
02.60.Lj Ordinary and partial differential equations; boundary value problems  
95.30.Qd Magnetohydrodynamics and plasmas in astrophysics  
97.10.Sj Pulsations, oscillations, and stellar seismology

## Palabras clave:

---

Magnetohidrodinámica  
Corona solar  
Modos de oscilación, ondas de choque  
Métodos numéricos, condiciones de contorno  
Vínculo del monopolo magnético



RESUMEN

---

En esta tesis se estudió la dinámica de dos configuraciones magnéticas de la corona solar. Una de ellas representa vacíos de plasma que descienden hacia arcadas solares después de una fulguración. La otra configuración es la de arcos coronales, modelados como tubos magnéticos llenos de plasma. El medio coronal donde se encuentran estos objetos, tiene un número de Reynolds  $R \sim 10^{10}$ , de modo que en primera aproximación puede no considerarse procesos de disipación. En este caso, la dinámica de estas estructuras está bien descrita por las ecuaciones de MHD ideal. Estas ecuaciones en derivadas parciales son no-lineales, lo que hace dificultoso encontrar soluciones analíticas, salvo para pequeñas perturbaciones donde el sistema se vuelve lineal. En caso contrario, las ecuaciones deben resolverse a partir de un algoritmo numérico. La fidelidad del resultado numérico estará dada por el cuidado con el que se traten estas ecuaciones. En esta tesis, se realizaron estudios teóricos sobre la forma correcta de implementar condiciones de contorno en las ecuaciones MHD. Se implementaron métodos de alta resolución para capturar discontinuidades u ondas de choque dentro del dominio computacional, evitando introducir errores puramente numéricos.

En la parte I se desarrolla el marco teórico de la tesis en dos capítulos. El primero describe en forma general tópicos de la física del plasma y de la física solar. En el segundo, se describen las herramientas numéricas utilizadas para desarrollar las simulaciones. Se detalla a continuación los temas abarcados en cada uno de estos capítulos:

En el capítulo 1 se hace una descripción de las características más importantes de la estructura solar. Para abordar la temática se requiere introducir las bases de la física del plasma. Se presentan las ecuaciones de la MHD ideal, necesarias para describir la dinámica de las estructuras de plasma en la corona solar. En el estudio de estas estructuras, es importante analizar el tipo de ondas que se propagan, por lo que se presentan las distintas ondas características en un plasma magnetizado. Introducimos conceptos de la sismología coronal, rama de la física solar que da cuenta de métodos de diagnóstico remoto del plasma, que son la base del estudio de oscilaciones que se realiza en los trabajos que componen esta tesis.

En el capítulo 2 mostramos las herramientas numéricas utilizadas. Se describen y justifican los métodos que se utilizaron para resolver las ecuaciones de la MHD, de modo de realizar simulaciones numéricas fidedignas. Se describe el método de alta resolución de Kurganov–Tadmor implementado, que resuelve las ondas de choque con alta precisión. Este método se utilizó en las simulaciones bidimensionales y tridimensionales. Se presentan las pruebas numéricas realizadas con este método que garantizan la solidez del algoritmo utilizado. En este último caso, se describe esquemáticamente el algoritmo utilizado en *HAD* (*Hyper AMR Driver*), el cual cuenta con una jerarquía de mallas que resuelve con mayor resolución zonas donde se necesita más precisión, debido a la generación de gradientes grandes en las variables simuladas.

En la parte II de esta tesis, se presentan los trabajos realizados. Esta parte consta de 3 capítulos que se detallan a continuación:

En el capítulo 3, se presenta el trabajo publicado por Cécere et al. (2008b). Este trabajo consistió en el desarrollo de condiciones de contorno que preservan el vínculo de la divergencia del campo magnético para las ecuaciones de la MHD ideal en el límite Newtoniano. Se realizó un estudio tanto analítico como numérico sobre estas condiciones. Se analizó el comportamiento de las soluciones numéricas considerando

diferentes opciones. Nos concentramos en el sistema estándar de las ecuaciones de la MHD ideal y en el sistema aumentado por un función escalar que controla la divergencia del campo magnético. Se realizaron comparaciones entre la condición de contorno desarrollada y las empleadas usualmente: salientes y de congelamiento. Además, se analizaron las diferencias al comparar el empleo de estas condiciones, en el sistema estándar de la MHD con el sistema aumentado. También se estudió el comportamiento de la condición que preserva el vínculo al variar la velocidad de propagación del mismo. Todos estos análisis mostraron cómo las condiciones de contorno desarrolladas reducen significativamente la violación generada en los contornos a nivel numérico y cómo reduce su influencia en el interior del dominio computacional haciendo uso de la libertad disponible en las ecuaciones.

En el capítulo 4, se presenta el trabajo publicado recientemente por Cécere et al. (2012). Se describe el escenario propuesto para dar cuenta del origen y la dinámica de flujos subdensos que descienden hacia arcadas solares, luego de una fulguración. Se desarrolló una explicación alternativa a la ya existente. Se propuso que pulsos de energía iniciales (que simulan el efecto del proceso de reconexión), inhomogenizan la hoja de corriente que se forma encima de la arcada solar, y esta inhomogeneidad es la que facilita, una vez llenada la hoja de corriente con plasma, el descenso de nuevos vacíos con la forma característica observada en estos fenómenos (una cabeza seguida de una cola que zigzaguea en su descenso).

En el capítulo 5, se detalla el trabajo realizado sobre oscilaciones en arcos coronales. Resultados preliminares en dos dimensiones fueron publicados en Cécere et al. (2008a) y Cécere et al (2010). Se simularon, dos casos estudiados observacionalmente por otros autores. Las simulaciones emularon un corte bidimensional longitudinal al eje del arco magnético. Se despreciaron los efectos de la curvatura del arco y los efectos de la gravedad. En el dominio computacional se agregó una cromosfera, para garantizar la atadura de las líneas de campo magnético en las bases del arco. Se sacó al sistema del equilibrio, y se realizó un análisis sobre oscilaciones que acontecen en estas estructuras. Se obtuvieron oscilaciones acopladas compuestas por ondas magnetoacústicas rápidas y lentas. Al realizar las comparaciones de los resultados numéricos obtenidos con dichas observaciones, se encontró que los períodos obtenidos numéricamente están en buen acuerdo con los detectados observacionalmente. Además los modos encontrados por la simulación son del tipo *sausage*, como sugieren los autores de los datos observacionales. Se modelaron además distintas excitaciones a partir del estado de equilibrio y se encontró que para un salto en la presión magnética, las ondas del régimen atrapado, se vuelven *leaky*, liberando energía hacia la corona. En este capítulo también se presenta el estudio realizado en tres dimensiones. Se simularon los mismos dos casos observacionales estudiados en las simulaciones bidimensionales y se agregó un caso nuevo. Para este fin, se utilizó el código *HAD*, con la implementación del método de Kurganov–Tadmor. En este caso no se simuló la cromosfera en el dominio de cómputo. Se propuso un conjunto de condiciones de contorno que no generan inconsistencias con las ecuaciones de la MHD, ni divergencia de campo magnético. Nuevamente, se despreciaron los efectos de curvatura y gravitatorios y los arcos fueron representados como cilindros rectos. Para sacar al sistema del equilibrio, se utilizaron perturbaciones finitas; no sólo se perturbó mediante un salto en la presión del gas sino que también se implementó un salto en la presión magnética. Se analizaron las oscilaciones de estos cilindros, y se encontró un acople de ondas magnetoacústicas rápidas y lentas. Al comparar los períodos de oscilaciones encontradas se registró un buen acuerdo con los resultados observacionales. Además se estudiaron oscilaciones que son propias de la geometría tridimensional como

las torsionales. Se simuló el efecto de la torsión magnética en las bases del arco mediante una excitación del campo magnético transversal cerca de las bases. El análisis de oscilaciones que se propagan en este caso, da cuenta de un patrón general similar al caso sin torsión, con corrimientos en los períodos encontrados y estructuras oscilatorias más complejas.

En la parte III de esta tesis se hace un resumen de los resultados encontrados y consta de dos capítulos:

En el capítulo 6 se realiza un resumen de las conclusiones obtenidas en los trabajos realizados. Y en el capítulo 7, se mencionan las líneas de trabajo futuras.

El presente trabajo de tesis cuenta además con un Anexo, en el cual se detalla el trabajo realizado sobre el desarrollo de un método numérico eficiente para pasar información entre interfases de mallas numéricas para ecuaciones de onda de segundo orden. Para resolver la discretización espacial de esta ecuación, se utilizó un operador derivada segunda en diferencias finitas que satisface la suma por partes. Se realizaron varias pruebas numéricas, considerando distintas condiciones iniciales: un dato inicial suave para ver la convergencia del método y un dato inicial cuya evolución temporal es útil para mostrar la habilidad del método para conservar la fase de la solución. Se realizaron comparaciones entre distintos integradores temporales, como así también entre distintos discretizadores espaciales, estudiándose las respectivas convergencias. Además se comparó el comportamiento de los diferentes operadores en derivadas finitas, cuando la onda que se propaga alcanza la interfase y la traspasa. También se comparó el método propuesto con los otros métodos, habiéndoles aplicado disipación numérica. El análisis de estas comparaciones arroja que el método propuesto, produce de manera significativa menos error y necesita un traspaso de información mucho menor que los métodos más usuales.

También cuenta con dos Apéndices. En el primero se describe la descomposición característica de ondas MHD, utilizados en el trabajo desarrollado en los capítulos 3 y 5. En el segundo se describe el procedimiento empleado en el capítulo 5, para el reconocimiento de modos de oscilación.



## ABSTRACT

---

In this thesis we studied the dynamics of two magnetic configurations of the solar corona. One of these configurations presents descending voided flows towards the post-flare arcades. The other one is modelled as magnetic tubes filled with plasma, representing coronal loops. The coronal environment has a large Reynolds number ( $R \sim 10^{10}$ ), such that to a first approximation one can neglect dissipation processes. In this case the dynamic structures are well described by the ideal MHD equations. These are non-linear partial differential equations. Hence, it is difficult to find analytical solutions, even for small perturbations, where the system becomes linear. Normally, these non-linear equations are solved numerically.

This work presents theoretical studies on the correct way to implement boundary conditions for the MHD equations. High resolution methods that are able to capture discontinuities and shock waves were adapted to avoid numerical errors.

Part I, composed of two chapters, develops the theoretical frame of the thesis. The first one describes general topics of the plasma and solar physics involved. The second chapter describes the numerical tools employed. A detailed description of topics involved in each chapter is given below:

Chapter 1 gives a description of the main characteristics of the solar structure and the basics of the plasma physics involved.

When studying these structures it is important to analyze the kind of waves that propagates in a magnetized plasma. Therefore, we introduce coronal seismology concepts, solar physics branch employed for the remote diagnostic of a plasma, used for the study of plasma oscillations.

As mentioned above, chapter 2 shows the numerical tools employed. We describe and justify reliable methods for solving the MHD equations. Specifically, the Kurganov–Tadmor method is described. This method solves shock waves with high precision and was used for both, the 2D and 3D simulations. Also, the corresponding standard numerical tests are presented. Furthermore, a schematic description of the *Hyper AMR Driver* (HAD) algorithm is given. This algorithm consists of a hierarchical system of meshes that allow higher resolution in zones where higher precision is needed due to the presence of large gradients in the numerical variables.

Part II presents the applications of the numerical methods to different astrophysical problems, and it is composed by three chapters:

Chapter 3 presents the work published in Cécere et al. (2008b). This work consists on the development of boundary conditions that preserve the magnetic field divergence constraint for the ideal MHD equations in the Newtonian limit. Both an analytical and numerical study of these conditions were performed. We analyze the behavior of the numerical results for two cases, the standard system of ideal MHD equations, and a system incremented with a scalar functions that monitors the magnetic field divergence.

Comparisons between the boundary condition developed and the ones usually employed, outgoing and freezing, were carried out for both MHD systems of equations, the standard and the augmented one. Also, a study of the behavior of this constraint for a variety of propagations velocities was carried out. These studies show how the boundary conditions adopted in this thesis reduce the violation of the constraint generated numerically at the boundaries and its influence at the interior of the computational domain.

Chapter 4 shows the work published in Cécere et al. (2012), were a scenario describing the complex

descending voided structures present in the dynamic of post-flare coronal loop is proposed. An alternative scenario was introduced. Here, it was proposed that the energy pulse, that emulates the energy release that would occur in a reconnection event, perturbs the current sheet above the arcade, facilitating, once the current sheet is filled with plasma, the downflow of new voided cavities in agreement with the observed characteristics.

In chapter 5 we present the work done on the oscillations in coronal loops. Preliminary results in two dimensions were published in Cécere et al. (2008a) and Cécere et al. (2010). Simulations of two cases, that have been studied observationally were carried out. These simulations emulate a longitudinal bidimensional cut to the magnetic loop, neglecting the effects of curvature as well as gravity. The chromosphere was incorporated in the simulations with the aim of ensuring the tie of magnetic field lines to the base of the loop.

In order to study the oscillating modes that take place in these structures, the system was set out of equilibrium. Oscillations of coupled modes comprised of slow and fast magnetoacoustic waves were obtained. Later, these numerical results were compared with the observations, and it was found that their periods were in good agreement. Furthermore, it was found that these modes are *sausage* type, as suggested by the authors of the observational data. Also, several excited modes were modelled, finding that for a magnetic pressure jump the modes of the trapped regime become *leaky*, releasing energy to the corona. Also, results from a 3D study of the same problem are shown, with the HAD code with the implementation of the Kurganov–Tadmor method. In this case the corona was not included in the computational domain. A set of boundary conditions were proposed in order to avoid inconsistencies with the MHD equations and prevent magnetic field divergence. Again, the effects of curvature of the loop and gravity were neglected, simulating the first ones as straight tubes or cylinders. To bring the system out of equilibrium, different gas and magnetic pressure perturbations were employed.

An analysis of the oscillating modes of the cylinders was carried out, finding coupling among the fast and slow magnetoacoustic modes. A good agreement was found when comparing these results with the observations. The oscillation modes due to the three dimensional geometry such as torsion were investigated. The effect due to the magnetic torsion was simulated at the base of the loops through an excited transverse magnetic field close to the base. The analysis of modes that propagate in this case show mode coupling not only between the fast and the slow modes, but also with the incompressible Alfvén mode. Since the perturbation was finite, the specific torsional modes have been excited.

In part III of this thesis a summary of the results is presented divided in two chapters:

More specifically, chapter 6 shows the summary of the conclusions obtained in the different studies, and chapter 7 mentions the future line of work.

Also, this work includes an annex, where details about the development of an efficient numerical method to transfer information among the interfaces of the grid for the second order wave equations are shown. To solve the spatial discretization of these equations, a second derivative operator, that satisfies the summation by parts, was employed

Several numerical tests were carried out with different initial conditions: a smooth initial data to probe the convergence of the method, and an initial data, whose temporal evolution is useful to test the ability of the method to conserve the phase solution.

Comparisons among several temporal and spatial integrators were made, studying the respective convergences. Furthermore, the behavior of several finite difference operators was studied for the case when the propagating wave reaches the interface and crosses it. Also, the proposed method was compared with others that included numerical dissipation. In all the cases we studied, we find that the new method compares favorably with the first order scheme, producing a smaller error and using less information on the boundaries.

This work also includes two appendices. The first appendix describes the characteristic decomposition of the MHD modes employed and developed in chapters 3 and 5. The second one describes the procedure used in chapter 5, for the recognition of oscillation modes.



# Índice general

Índice general	XIX
Motivación	1
<b>I Marco Teórico</b>	<b>5</b>
<b>1 Estructura solar y herramientas de la teoría de plasma</b>	<b>7</b>
1.1. Estructura Solar . . . . .	7
El interior del Sol . . . . .	7
La fotosfera . . . . .	8
La cromosfera . . . . .	9
La corona solar . . . . .	10
1.2. Concepto de plasma . . . . .	11
Parámetros del plasma . . . . .	13
Frecuencia de plasma y longitud de Debye . . . . .	13
Parámetro de plasma $\Lambda$ . . . . .	14
Plasmas magnetizados . . . . .	16
Parámetro beta del plasma . . . . .	16
1.3. Ecuaciones Magnetohidrodinámicas . . . . .	18
Aproximación MHD ideal . . . . .	18
1.4. Ondas MHD . . . . .	21
1.5. Ondas de choque . . . . .	23
Choque hidrodinámico . . . . .	23
Choque magnético transversal . . . . .	24
1.6. Noción de reconexión magnética . . . . .	25
1.7. Sismología coronal . . . . .	28
Propiedades de modos MHD en plasmas estructurados . . . . .	29
<b>2 Herramientas numéricas: teoría y métodos</b>	<b>35</b>
2.1. Nociones de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas . . . . .	35
2.2. Leyes de conservación . . . . .	37

Forma integral . . . . .	37
Soluciones discontinuas . . . . .	37
2.3. Método de Volumen Finito . . . . .	37
Esquemas de alta resolución . . . . .	39
Noción de métodos que disminuyen la variación total de una función (TVD) . . . . .	39
Limitadores de pendientes . . . . .	40
Método de Kurganov–Tadmor . . . . .	41
Integrador temporal: Runge–Kutta TVD . . . . .	42
2.4. Ecuaciones de la MHD . . . . .	42
2.5. Problemas de prueba y convergencia numérica . . . . .	43
Convergencia para el método de Kurganov–Tadmor . . . . .	43
Dato suave . . . . .	43
Tubo de choque . . . . .	44
Brio-Wu . . . . .	45
2.6. Refinamiento de malla numérica . . . . .	46
<b>II Procedimiento y Resultados</b>	<b>49</b>
<b>3 Condiciones de contorno para las ecuaciones de MHD ideal</b>	<b>51</b>
3.1. Introducción . . . . .	51
3.2. Las ecuaciones newtonianas y la limpieza hiperbólica del vínculo . . . . .	52
Preliminares . . . . .	53
El sistema completo . . . . .	57
Condiciones de contorno . . . . .	58
3.3. Pruebas numéricas . . . . .	58
Prueba de la implementación . . . . .	61
Dato inicial <i>blast</i> . . . . .	61
Dato inicial del rotor. Efectos de las condiciones de contorno y del <i>divergence cleaning</i> . . . . .	62
3.4. Resultados . . . . .	63
<b>4 Simulación de flujos de plasma subdensos</b>	<b>67</b>
4.1. Introducción . . . . .	67
4.2. Código numérico y condiciones iniciales . . . . .	73
4.3. Resultados y Discusión . . . . .	74
Parámetros del plasma en <i>SAROs</i> . . . . .	74
Estructura y apariencia ondulatoria . . . . .	76
Una posible configuración <i>SAD</i> . . . . .	79
4.4. Conclusiones . . . . .	81
<b>5 Simulaciones numéricas de oscilaciones en arcos coronales</b>	<b>85</b>
5.1. Introducción . . . . .	86

5.2. Simulaciones numéricas bidimensionales . . . . . 88

    Condiciones iniciales y de borde . . . . . 88

        Prueba numérica de *divergence cleaning* . . . . . 89

    Resultados y discusión . . . . . 89

    Descomposición de modos de ondas planas . . . . . 95

        Desequilibrio de presión a través del arco . . . . . 96

    Conclusiones preliminares . . . . . 97

5.3. Simulaciones numéricas tridimensionales . . . . . 98

    Motivación . . . . . 98

    Métodos numéricos y datos implementados . . . . . 98

    Resultados . . . . . 100

        Comparación con datos observacionales: Asai y Melnikov . . . . . 100

        Modos *leaky* . . . . . 105

        Oscilaciones torsionales . . . . . 108

5.4. Conclusiones preliminares . . . . . 109

**III Conclusiones y sugerencias de futuros trabajos 113**

**6 Conclusiones Generales 115**

**7 Trabajo Futuro 119**

7.1. Líneas de trabajo futuras . . . . . 119

**Anexos 121**

**A1 Tratamiento numérico de interfases 121**

A1.1. Introducción . . . . . 122

A1.2. Esquema numérico . . . . . 124

A1.3. Pruebas numéricas . . . . . 127

    Conjunto de datos iniciales . . . . . 128

    Discretización espacial . . . . . 128

    Integración temporal . . . . . 129

    Convergencia . . . . . 130

    Precisión . . . . . 132

    Decaimiento de la energía . . . . . 134

    Disipación . . . . . 135

A1.4. Aplicaciones . . . . . 137

A1.5. Conclusiones . . . . . 139

<b>Apéndices</b>	<b>142</b>
<b>B1 Descomposición característica de modos MHD</b>	<b>143</b>
B1.1. Descomposición característica . . . . .	144
Base . . . . .	144
Co-base . . . . .	146
<b>B2 Tratamiento de Fourier de modos MHD</b>	<b>151</b>
B2.1. Tratamiento de Fourier de modos MHD . . . . .	152

# Motivación

Aquí se presentan las motivaciones que dieron origen al desarrollo de esta tesis.

Los avances llevados a cabo en las últimas décadas en la observación solar, revelaron distintos aspectos de la variabilidad y la constitución del Sol que tienen gran importancia para el conocimiento del plasma en condiciones extremas (imposibles de reproducir en laboratorios terrestres), por los desafíos que estas investigaciones plantean así como por sus implicancias prácticas como la posible incidencia en el clima espacial.

La variabilidad temporal del Sol abarca escalas que van desde los días, como por ejemplo la evolución de las manchas solares y la rotación solar, hasta horas y segundos como por ejemplo las fulguraciones solares y los fenómenos transitorios de la corona solar. Se pueden distinguir en la atmósfera solar una amplia variedad de fenómenos que se localizan a distintas alturas sobre la superficie solar, en las regiones denominadas cromosfera, región de transición y corona solar, los que se originan en la interacción del plasma que compone esta atmósfera con los intensos campos magnéticos presentes en el Sol. Estos fenómenos son observables mediante diversos telescopios y detectores que registran distintas bandas del espectro electromagnético, desde las ondas de radio hasta el ultravioleta y los rayos X. Entre estos fenómenos se pueden distinguir por su magnitud las fulguraciones solares en la cromosfera, y las eyecciones de masa coronal en la corona solar. Particularmente son de interés los fenómenos oscilatorios que ocurren en el plasma magnetizado que compone la atmósfera solar, el cual es capaz de soportar varios tipos de ondas tales como las ondas de sonido, las ondas de Alfvén y las oscilaciones de plasma. Generalmente las perturbaciones que excitan las ondas del medio son finitas, lo que da lugar a la interacción no-lineal de choques y ondas. Muchas de estas ondas pueden ser descritas desde una perspectiva macroscópica (no cinética) utilizando la aproximación de medio continuo dada por la magnetohidrodinámica (MHD en adelante), como variaciones de los parámetros locales de plasmas. Sin embargo, el ajuste de las formulaciones teóricas a los resultados experimentales es arduo, debido a la dificultad de conocer en forma precisa los parámetros del medio atmosférico tales como el campo magnético, la resistividad localizada, la densidad y la conducción térmica. A esto se le suma la variedad de modos MHD, que pueden existir en un medio en el cual habitualmente la geometría de los campos presentes es compleja (Nakariakov & Verwichte 2005). Es por ello que el estudio de la propagación de ondas y choques mediante simulaciones numéricas representa un aporte ineludible para el conocimiento del problema físico y para el diagnóstico remoto del plasma en general y del plasma solar en particular.

El número de Reynolds magnético es un valor adimensional que da cuenta de la importancia de los procesos convectivos respecto a los difusivos en la dinámica de un plasma. En la atmósfera solar este número es, por lo general, muy alto ( $\sim 10^{10}$ ) lo que indica que los procesos convectivos son dominantes, que la dinámica es no-lineal y que la MHD ideal es una buena primera aproximación en la descripción de la física de la atmósfera solar. El teorema de Alfvén establece que en condiciones ideales, o para altos valores del número de Reynolds magnético, el campo magnético y el plasma son solidarios. Es decir, un elemento de volumen de plasma asociado a una línea de campo sigue estándolo a lo largo del tiempo y se dice que el plasma y el campo están “congelados”.

Por otro lado, la velocidad del sonido ( $c_s$ ) y la de Alfvén ( $v_A$ ), remiten a dos propiedades características de los plasmas, su compresibilidad y elasticidad, respectivamente. Un parámetro importante para describir la magnetización de un plasma es el parámetro  $\beta = p_g/p_m \propto (c_s/v_A)^2$ , definido como el cociente de la presión del gas sobre la presión magnética del plasma, que a su vez resulta proporcional al cuadrado de el cociente entre las velocidades del sonido y la de Alfvén. En la baja corona solar, a diferencia de otras partes de la atmósfera del Sol, los valores de  $\beta$  son generalmente pequeños. Que  $\beta \simeq c_s^2/v_A^2 \ll 1$  implica que la velocidad del sonido es mucho menor que la velocidad de Alfvén. También puede decirse que la energía contenida en perturbaciones elásticas es mayor que la contenida en perturbaciones compresivas. Debido a la no-linealidad del medio coronal, con número de Reynolds grande, los modos de oscilación que se desarrollan son fuertemente acoplados. Por otro lado, debido al carácter “ideal” de la dinámica, el decaimiento de ondas debe ocurrir principalmente en forma no disipativa. En medios poco difusivos, donde es usual la liberación repentina de energía (por ejemplo en fulguraciones), no sería extraño que el drenado de energía de perturbaciones elásticas Alfvénicas, hacia perturbaciones compresibles de menor energía, conduzca al eventual empinamiento de los modos y a la formación de choques coronales. El estudio de la propagación de ondas no-lineales y choques mediante simulaciones numéricas representa un aporte ineludible para el conocimiento del problema físico y para el diagnóstico remoto del plasma.

La naturaleza no-lineal de las ecuaciones de la MHD, implica que las soluciones de sistemas complejos deben ser obtenidas mediante métodos numéricos, y por ende debe realizarse una implementación computacional adecuada. Aún cuando las condiciones iniciales sean suaves, la evolución de la solución puede fácilmente devenir en propagación de ondas choque y discontinuidades que no son resueltas apropiadamente mediante los métodos estándar de diferencias finitas. Estos últimos incluso pueden fallar cuando la solución no es suficientemente suave. Para ello es conveniente implementar métodos para el tratamiento adecuado de discontinuidades que den la máxima precisión a la solución numérica encontrada, otorgando fiabilidad a la simulación.

Una dificultad computacional que a menudo surge en la resolución numérica de los problemas mencionados es que los recursos computacionales, incluyendo memoria, capacidad de disco y tiempo de cómputo, escalan con alguna potencia del número de puntos de malla. Al querer analizar la dinámica de estos problemas físicos de una forma más real, llevando el modelado a un espacio tridimensional, la cantidad de puntos utilizados en la malla uniforme hará ineficaz la representación de funciones, ya que dada la resolución para resolver la escala más fina, hará que la malla se vuelva sobredensa en regiones que cubren rangos de escala más grandes. Para resolver este problema, se utiliza un método de resolución más eficaz: refinamiento de malla numérica adaptable (Anderson et al. 2006, Lehner et al. 2006), por el cual el

dominio computacional es cubierto por una jerarquía dinámica o fija de las mallas numéricas uniformes de resoluciones diferentes.

La motivación de esta tesis es doble, por un lado, la de hacer una contribución al estudio del origen y evolución de oscilaciones en medios de alto número de Reynolds y por otro al desarrollo de herramientas específicas para el tratamiento de este tipo de problemas.



## Parte I

# Marco Teórico



# Estructura solar y herramientas de la teoría de plasma

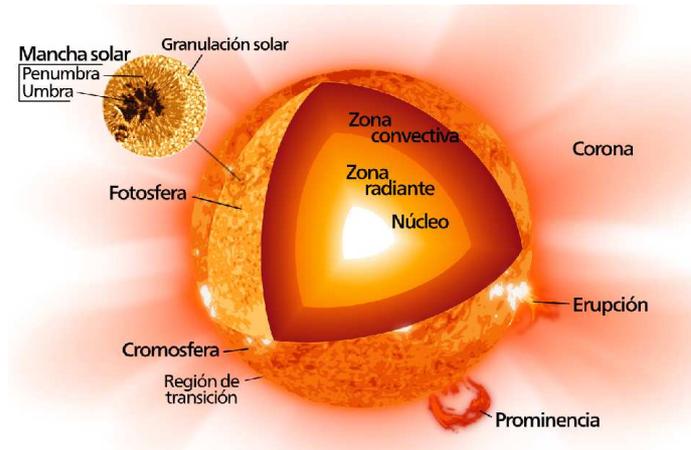
En este capítulo se describe brevemente la estructura fenomenológica general del Sol para luego caracterizar algunos aspectos de la corona solar que son de importancia para la tesis. Se presentan conceptos básicos de la física del plasma, se explica en qué consiste la aproximación Magnetohidrodinámica (MHD) y se presentan las ecuaciones a partir de las cuales se estudiarán los problemas astrofísicos que se tratan numéricamente en capítulos posteriores. Se mencionan algunos tópicos de la sismología coronal. Esta introducción al tema está basada en la bibliografía que se encuentra al final de este capítulo, y no contiene material inédito relevante a la tesis pero se incluye para lograr un tratamiento coherente del resto de la misma.

## 1.1. Estructura Solar

El Sol está compuesto principalmente por gases de hidrógeno (75 %) y helio (24 %), con una pequeña proporción de materia en forma de elementos pesados (1 %). Este material se encuentra en su mayor parte ionizado debido a las altas temperaturas desarrolladas en la estrella. La estructura del Sol consta de dos partes principales: el interior solar, debajo de la superficie óptica; y la atmósfera solar, o la parte directamente observable, ver figura 1.1.

### El interior del Sol

Como la estructura interna del Sol no es accesible a la observación directa, su conocimiento resulta de teorías y constataciones empíricas indirectas. Los principales avances en este sentido se han dado dentro



**Fig. 1.1:** Esquema de la estructura Solar (Adaptado de Wikipedia bajo la licencia Creative Commons).

del campo de la Heliosismología que estudia las oscilaciones de ondas producidas en el interior solar del que se discriminan tres zonas diferentes. En la figura 1.1 se presenta un esquema de dichas regiones.

La zona más interna, va desde el centro hasta una distancia de aproximadamente dos décimas del radio solar y se la denomina **núcleo**. En esta región se produce permanentemente, por fusión nuclear, la energía solar, que se utiliza para mantener la estrella en equilibrio mecánico, mientras que el sobrante energético emerge a la superficie. Se estima que la materia próxima al centro del Sol tiene una temperatura de 14 millones de grados Kelvin, con una densidad de  $130\text{g cm}^{-3}$ . El proceso termonuclear principal que ocurre en el interior solar es la cadena de reacciones denominada ciclo protón-protón. Mediante un conjunto de reacciones nucleares básicas y decaimientos se produce la combinación resultante de cuatro núcleos de hidrógeno, o protones, para formar un único núcleo de helio. El defecto de masa de la reacción resultante es de 0.7% de la masa total de los cuatro protones originales. De esta forma la materia perdida reaparece como energía transportada por fotones, de acuerdo con la relación:  $E = \Delta m c^2 = 4.2 \times 10^{-5}\text{erg}$ . Se distingue una segunda zona interior llamada **zona radiativa o radiante**, en la que la energía es transportada hacia la superficie del Sol en forma de radiación. Los fotones viajan a través del material, siendo absorbidos y dispersados por sucesivas colisiones con la materia. En la región interna superior el transporte de calor por radiación se vuelve inestable, debido al aumento del gradiente de temperatura más allá de un valor crítico, dando lugar al transporte de energía por medio de movimiento macroscópico turbulento del material caliente. Este material en contacto con la capa radiativa tiende a subir, mientras que el material frío desciende. La energía es transportada por el movimiento turbulento de la materia, y a la región se la denomina **zona convectiva**. La zona radiativa se extiende desde dos décimas hasta seis décimas del radio solar, mientras que la zona convectiva comienza a seis décimas y termina en ocho décimas del radio del Sol. Al final de la zona radiativa comienza la superficie solar visible.

## La fotosfera

La mayor parte de la energía solar que se recibe en la Tierra proviene de la **fotosfera**. Esta región consta de una capa de plasma de unos 300km de espesor. La fotosfera emite un espectro continuo de

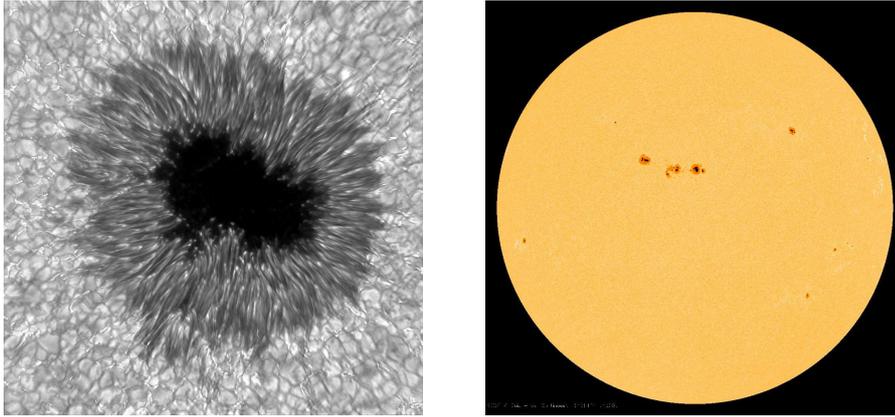
radiación electromagnética, el que puede aproximadamente modelarse como el espectro de un cuerpo negro a una temperatura de 5700K. Las capas superiores de la fotosfera además de emitir, absorben radiación, produciendo el espectro de líneas de absorción que se superpone al continuo de emisión solar. La capa baja de la fotosfera está compuesta por material parcialmente ionizado, en su mayor parte de hidrógeno mientras que en las capas altas el hidrógeno es principalmente neutro. La densidad de la fotosfera es aproximadamente de  $10^{15}$  partículas por centímetro cúbico y la temperatura disminuye del interior al exterior, desde los 8500K en su base hasta 4500K en su parte superior, siendo su temperatura media alrededor de 5700K.

Cuando se observa con detenimiento mediante diversos filtros de banda espectral, la fotosfera presenta un aspecto granulado, la superficie se revela cubierta por un sinnúmero de pequeñas celdas brillantes separadas por delgadas líneas oscuras que indican el aumento local de intensidad del campo magnético. Estas celdas, llamadas **gránulos** tienen un tamaño promedio de 2000km y son de vida media muy corta; del orden de 10 minutos después de lo cual se desvanecen. El aspecto granular de la superficie solar cambia de forma continua (ver imagen izquierda de la figura 1.2). Esta morfología es una manifestación del transporte convectivo de la energía producida en el interior solar.

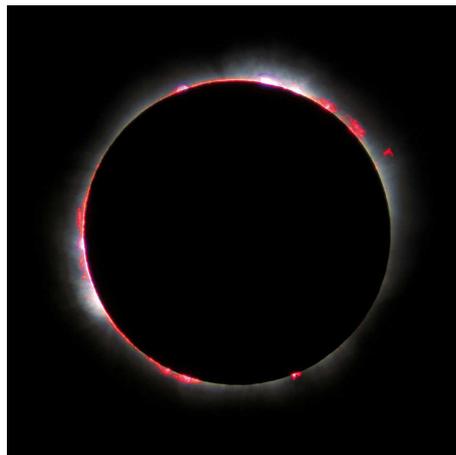
Las características más notables de la fotosfera son las llamadas **manchas solares**, enormes regiones oscuras con tamaños de entre 1000 y 10000km que rotan con el Sol y cuyo número aumenta y disminuye siguiendo un ciclo de aproximadamente 11 años (ver el panel derecho de la figura 1.2). Estas manchas son regiones de campos magnéticos muy intensos, lo que impide la convección, causando que la temperatura sea menor que el medio circundante. Una mancha solar consiste de un núcleo oscuro, la *umbra*, con una temperatura de 4500K, rodeada por un borde filamentosos menos oscuro llamado *penumbra*, la zona entre la umbra y la fotosfera. El diámetro de la umbra tiene entre 2000 y 20000km y el de la penumbra entre 4000 y 50000km (figura 1.2). La variabilidad en el número de manchas está relacionada con el ciclo de actividad magnética y de la irradiancia solar ( $\sim 22$  y  $\sim 11$  años respectivamente) y es estudiada por la teoría de dínamo.

## La cromosfera

Antes de la invención del coronógrafo, la **cromosfera** solo podía ser observada durante un eclipse solar, cuando por unos breves instantes la fotosfera es ocultada por la Luna. Durante un eclipse, se ve el Sol rodeado de un estrecho anillo de luz rojiza, la que es emitida desde una capa de la atmósfera solar denominada cromosfera. Este término significa **esfera de color**, haciendo referencia al aspecto de esta parte del Sol. En la figura 1.3 se presenta una fotografía tomada durante el eclipse solar del año 1999. Esta capa se localiza inmediatamente encima de la fotosfera y presenta un grosor muy variable, entre los 1000 y 8000 kilómetros. En la parte inferior de la cromosfera, la temperatura es de unos 4500K y sus primeros 3000 kilómetros están compuestos principalmente por átomos neutros de hidrógeno, con una densidad del orden de  $10^{12}$  partículas por centímetro cúbico. Alrededor de los 3000 kilómetros de altura, la temperatura empieza a subir rápidamente, alcanzando un valor de un millón de grados Kelvin. A esta altura la densidad ha bajado hasta unas  $10^9$  partículas por centímetro cúbico y todo el material se presenta ionizado. Esta región es la parte más alta de la cromosfera y se la denomina **región de**



**Fig. 1.2:** Panel izquierdo: Primer plano de una mancha solar tomado por Wöger, Berst y Komsa con el Telescopio Solar Dunn. Puede observarse las diferentes partes una mancha solar, la parte central oscura es la *umbra*, el anillo que la rodea se denomina *penumbra*. En la superficie también son visibles los gránulos burbujeantes, con tamaños que rondan los 1000km de diámetro. Puede apreciarse además pequeñas regiones brillantes llamadas féculas. El tamaño de la imagen corresponde a tres radios terrestres. Panel derecho: Imagen tomada por el observatorio *SDO-NASA* (*Solar Dynamics Observatory*) el 13 de enero del 2013. Las manchas solares pueden apreciarse como regiones oscuras. El tamaño de las manchas es comparable al diámetro terrestre.



**Fig. 1.3:** Eclipse Solar del año 1999. La imagen fue tomada por el fotógrafo Luc Viatour ([www.Lucnix.be](http://www.Lucnix.be)) en Francia. Puede apreciarse la cromosfera solar como una capa atmosférica circundante de color rojizo. La fotosfera es completamente ocultada por la Luna.

transición.

### La corona solar

La **corona** solar es una región de muy alta temperatura (mayor a  $10^6\text{K}$ ) que se extiende hasta más allá de los doce radios solares. La descripción y la importancia relativa de los mecanismos que hacen posible el calentamiento coronal es todavía hoy un problema abierto de la física solar. Hay consenso,

sin embargo, en que la fuente de calentamiento es la energía magnética y los diferentes mecanismos son aquellos que transforman esta energía en calor.

Debido a las altas temperaturas, el hidrógeno atómico de la corona está totalmente ionizado y, como todas las otras regiones, el estado de la materia es el de plasma (ver sección 1.2). La baja corona, definida como la región entre uno y dos radios solares (denotaremos con  $R_{\odot}$  a dicho radio) es un medio altamente estructurado e inhomogéneo. Esto se debe a que la dinámica del plasma y su topología es controlada por el campo magnético. Encontramos innumerables estructuras cerradas y filamentosas llamadas arcos magnéticos con plasma fluyendo a lo largo de las líneas de campo causando emisión brillante, siendo las regiones activas aquellas zonas donde la intensidad del campo magnético es mayor. Estas estructuras pueden verse en la figura 1.4. En la alta corona las líneas de campo son abiertas, la emisión es menor y el plasma fluye como viento solar. En la figura 1.7b) se esquematizan las regiones de líneas de campo magnético abiertas y cerradas en la corona solar. Las líneas abiertas que salen de los agujeros coronales en los polos son la fuente del denominado viento solar rápido ( $\sim 800\text{km s}^{-1}$ ), mientras que las líneas abiertas, cercanas a la zona del ecuador solar, resultan de la “apertura” de líneas cerradas debido a inestabilidades. Estas líneas de campo se indican en la zona gris de la figura 1.7b). Por encima de un  $R_{\odot}$  el confinamiento del plasma se vuelve débil, la presión del gas aumenta y la presión magnética disminuye; aparecen inestabilidades y ondas que drenan energía, se generan procesos de reconexión, lo que hace que las estructuras magnéticas cerradas no sean ya posibles. Este proceso es el responsable de lo que se conoce como viento solar lento (con velocidades que rondan los  $400\text{km s}^{-1}$ ). Las estructuras de la baja corona se detectan fundamentalmente debido a la emisión en rayos X blandos y en el extremo ultravioleta que trazan el campo magnético, dado que la emisión también resulta estructurada por el campo.

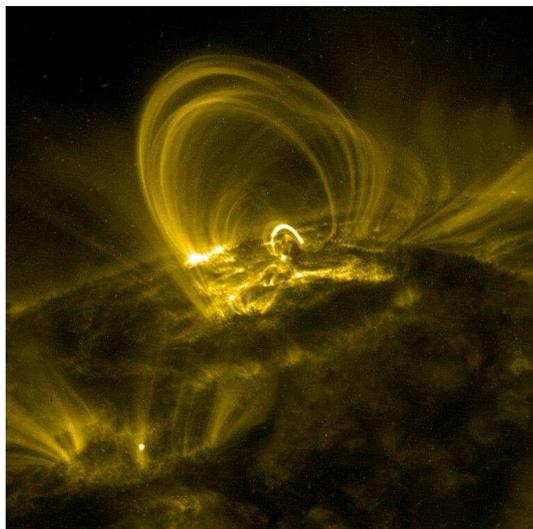
En la figura 1.5 se grafican la densidad de partículas ( $\text{part}/\text{cm}^3$ ) y la temperatura en función de la altura en la atmósfera, desde la fotosfera. En la zona de transición la densidad disminuye y la temperatura aumenta, ambas en forma abrupta. El aumento en la temperatura refleja el calentamiento de la corona.

## 1.2. Concepto de plasma

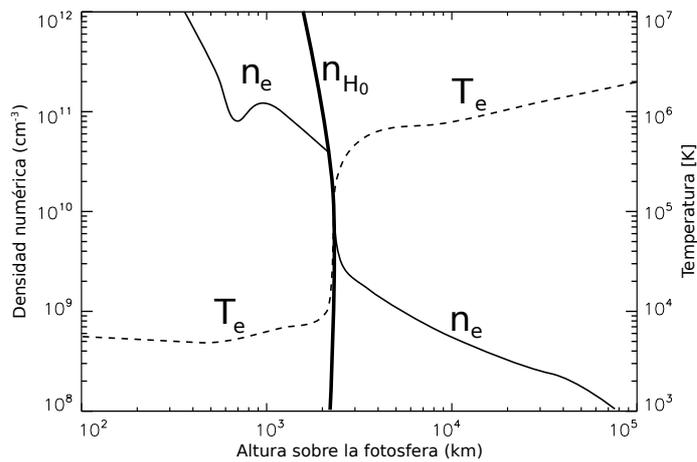
Se denomina **plasma** a un gas o conjunto de partículas libres, cargadas y cuasineutral en el que se dan comportamientos colectivos. En un plasma las desviaciones de la neutralidad de carga son generalmente microscópicas y el comportamiento colectivo se debe a que las partículas se vinculan a través de fuerzas de largo alcance, como la fuerza de Lorentz, aunque también lo hacen a través de colisiones. Se entiende éstas últimas (colisiones a secas) como aquellas colisiones que se producen entre partículas cercanas entre sí, generándose un gran ángulo de deflexión. En estos casos se considera que la interacción es binaria y la acción de otras partículas no la afecta apreciablemente.<sup>1</sup> Asimismo, los plasmas pueden contener cierta fracción de partículas neutras (las que interactúan entre sí y con las partículas cargadas mediante colisiones). La cuasineutralidad de los plasmas implica que

$$n_i \simeq n_e \equiv n \quad \text{con} \quad \frac{n_i - n_e}{n} \ll 1$$

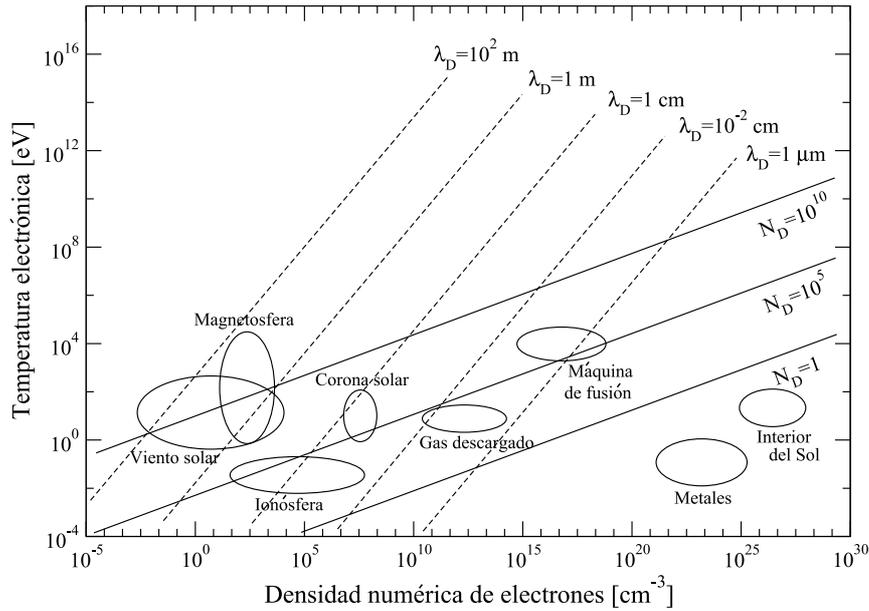
<sup>1</sup>El papel de las colisiones a secas y las colisiones colectivas queda claro en el tratamiento a nivel cinético, a partir del lugar que ocupan en la ecuación de Maxwell-Boltzmann. El comportamiento colectivo es expresado por los campos electromagnéticos y las colisiones deben agregarse como un término adicional ad-hoc.



**Fig. 1.4:** Arco coronal típico tomado por el telescopio espacial *TRACE* (*Transition Region And Coronal Explorer*).



**Fig. 1.5:** Esquema: variación de densidad y temperatura con la altura de la atmósfera solar. En línea delgada sólida se muestra la variación de la densidad numérica de electrones  $n_e$ , en línea gruesa sólida la densidad del hidrógeno neutro  $n_{H_0}$  y en línea a trazos la temperatura  $T_e$ .



**Fig. 1.6:** Se esquematiza la ubicación de distintos plasmas en función de la temperatura y la densidad electrónica, tanto para plasmas que se encuentran en la naturaleza, como artificiales (el caso de la máquina de fusión). Puede verse como la física de los plasmas se expande en un rango de 10 órdenes de magnitud en temperatura electrónica (ordenadas) y 35 órdenes de magnitud en densidad de electrones (abscisas). Se muestran además las longitudes de Debye características  $\lambda_D$  y el número de partículas contenidas dentro de la esfera de Debye,  $N_D$ .

donde  $n_i$  y  $n_e$  son la densidad numérica de partículas de iones y electrones respectivamente, y  $n$  es la densidad numérica de partículas totales del plasma. Algunos ejemplos de plasma son: la ionosfera de la Tierra, el medio interestelar, nubes moleculares en general, la atmósfera solar, así como las atmósferas de otras estrellas, cometas, discos de acreción alrededor de estrellas, púlsares y su magnetósfera, *jets* en galaxias activas, etc. En la figura 1.6 se muestra un esquema de la ubicación de distintos plasmas en un mapa de densidad electrónica y temperatura. Notar que la escala de densidad cubre 35 órdenes de magnitud y la de temperatura unos 10 órdenes.

## Parámetros del plasma

### Frecuencia de plasma y longitud de Debye

La **frecuencia de plasma** es la escala temporal más fundamental de los plasmas y determina sus tiempos característicos. Se define como:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}},$$

donde  $\epsilon_0$  denota la permeabilidad eléctrica del vacío. De esta definición resulta evidente que se obtiene una frecuencia diferente para cada especie, sin embargo la frecuencia electrónica es la más importante y se la denomina como “frecuencia de plasma”. Dado que el plasma es estadísticamente neutro, pequeños apartamientos de la cuasineutralidad generarán pequeños campos eléctricos debidos al desbalance de

cargas. La fuerza restitutiva generada por dicho campo conlleva oscilaciones electrostáticas espontáneas que ocurren a la frecuencia de plasma  $\omega_p$ . Dado que los electrones se mueven mucho más rápidamente que los iones, estos son los responsables fundamentales de la oscilación.

Así como la frecuencia del plasma define una escala temporal fundamental, la **longitud de Debye** define la escala espacial significativa para la descripción de un plasma. Se define como la longitud por debajo de la cual son esperables apartamientos significativos de carga. La expresión de la longitud de Debye puede obtenerse como la distancia recorrida, denotada con  $\lambda_D$ , por una partícula de plasma que se mueve con velocidad térmica  $v_t$  durante un tiempo típico  $\tau_p$ , correspondiente a la inversa de la frecuencia de plasma:

$$\lambda_D \equiv v_t \tau_p \equiv \sqrt{\frac{T}{m} \omega_p^{-1}}, \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 T}{n e^2}},$$

donde se utilizó

$$T \equiv \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

para denotar la temperatura cinética medida en unidades de energía, suponiendo que tanto los iones como los electrones están caracterizados por la misma temperatura  $T$ .<sup>2</sup> Tanto  $n$  como  $T$  son funciones de la posición en el plasma. Nótese que la velocidad térmica de los iones es usualmente mucho menor que la de los electrones,

$$v_{ti} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} v_{te},$$

por lo que en primera aproximación es correcto pensar, que en un plasma los iones están “fijos” y los electrones son móviles. Cabe destacar que la longitud de Debye no depende de la especie. Asimismo, puede deducirse que esta longitud es también la distancia a la que cargas de un mismo signo, son apantalladas por cargas de signo opuesto. Nótese que las oscilaciones del plasma podrán observarse si el plasma es estudiado en períodos  $\tau$  mayores que el período del plasma  $\tau_p \equiv 1/\omega_p$ , y si las acciones externas cambian al sistema a frecuencias no mayores que la frecuencia de plasma  $\omega_p$ . Si esto no ocurre, el sistema en estudio no puede ser considerado un plasma (e.g., reacciones nucleares). Tanto  $\lambda_D$  como  $\omega_p$  representan el límite, espacial y temporal, para el comportamiento colectivo del plasma.

## Parámetro de plasma $\Lambda$

A partir de la definición de la densidad numérica de partículas  $n$ , resulta natural definir la distancia media entre partículas como:

$$r_d \equiv n^{-1/3}. \quad (1.1)$$

Por otro lado, si se considera la energía debida a la interacción coulombiana de un par de cargas en el plasma:

$$U(r, v) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

podemos definir la distancia de máximo acercamiento  $r_c$  como la distancia obtenida a partir de suponer que la energía de Coulomb  $U(r, v)$  de una partícula cargada en el campo electrostático de la otra se anula.

<sup>2</sup>Un Joule es equivalente a  $6.24 \times 10^{18}$  eV;  $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}$  J =  $11600\text{K}/k_B$  donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Esto significa que  $1\text{eV}$  equivale  $\approx 10^4\text{K}$ .

En otras palabras definimos  $r_c$  como  $U(r_c, v_i) = 0$ , y por lo tanto:

$$r_c \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 T} . \quad (1.2)$$

Consideremos la relación  $r_d/r_c$ . Cuando esta razón es pequeña las partículas cargadas son dominadas por la influencia electrostática de las otras en forma más o menos continua y la energía cinética de las mismas es pequeña comparada con la energía potencial de interacción. Luego se dice que el plasma está fuertemente acoplado. En el otro extremo, cuando el cociente es grande las interacciones electrostáticas fuertes entre partículas individuales son eventos raros. Tales interacciones raramente ocasionan cambios abruptos en el movimiento. A este tipo de plasma se le denomina plasma débilmente acoplado. Un plasma fuertemente acoplado tiene más puntos en contacto con un líquido que un plasma convencional débilmente acoplado.

Establecido ya el concepto de acoplamiento de un plasma podemos proceder con el objetivo de esta subsección, la definición del **parámetro de plasma**  $\Lambda$ , el cual nos va a servir para discriminar los plasmas según su acoplamiento:

$$\Lambda = 4\pi n \lambda_D^3 . \quad (1.3)$$

De esta definición puede verse que este parámetro resulta adimensional. La cantidad de partículas  $N_D$  dadas dentro de una esfera de Debye, se obtiene de un tercio de esta expresión. Asimismo  $\Lambda$  es igual, con la excepción de un factor  $1/3$ , al número típico de partículas contenido dentro de una esfera de Debye. Las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) pueden combinarse para obtener esta expresión en términos de los parámetros introducidos en el párrafo anterior:

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{r_d}{r_c} \right)^{3/2} = \frac{4\pi\epsilon_0^{3/2} T^{3/2}}{e^3 n^{1/2}} .$$

Puede verse de esta última expresión que si  $\Lambda \gg 1$  la esfera contiene una gran cantidad de partículas, y por lo tanto este caso corresponde al de un plasma débilmente acoplado. En otras palabras, la condición  $\Lambda \gg 1$  puede obtenerse si la distancia media entre partículas es mucho mayor que la distancia de máximo acercamiento, o bien si la energía cinética de las partículas es mucho mayor que la energía electrostática. De la misma manera si  $\Lambda \ll 1$ , la esfera tiene pocas partículas, el acoplamiento es fuerte y la distancia media entre partículas es menor que la de máximo acercamiento. De modo que los plasmas fuertemente acoplados son densos y fríos, mientras que los débilmente acoplados son calientes y poco densos. Ejemplos de los primeros son los láseres de ablación (son muy fríos, tienen temperaturas muy cercanas a la energía de ionización), los plasmas asociados a los arcos de descargas o los plasmas asociados a las atmósferas de objetos colapsados como enanas blancas o estrellas de neutrones. Podemos mencionar como ejemplos de plasmas débilmente acoplados, calientes y poco densos, a los plasmas ionosféricos, espaciales, astrofísicos o los plasmas de fusión. En esta tesis se trabaja con plasmas no colisionales y débilmente acoplados.

En síntesis, el comportamiento característicamente colectivo de los plasmas es solamente observado para escalas de tiempos mayores a los períodos del plasma, y en escalas de longitud mayores que la longitud de Debye. El carácter estadístico del comportamiento del plasma es controlado por el parámetro de plasma  $\Lambda$ . Los parámetros  $\omega_p$ ,  $\lambda_D$  y  $\Lambda$  son los parámetros básicos de un plasma.

## Plasmas magnetizados

Un plasma magnetizado es aquel en que la intensidad del campo magnético es suficientemente grande como para alterar la trayectoria de las partículas. En particular, los plasmas magnetizados son anisótropos, responden en forma diferente a las fuerzas paralelas y perpendiculares al campo magnético.

Como es sabido, las partículas cargadas responden a la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} ,$$

moviéndose libremente en la dirección del campo magnético y ejecutando un movimiento circular en órbitas de Larmor en el plano perpendicular al campo. A medida que la intensidad del campo aumenta, las órbitas resultantes se vuelven más cercanas a las líneas de campo, haciendo que las partículas se vuelvan más atadas a las líneas.

El radio de Larmor típico, o giro-radio, de una partícula cargada girando en un campo magnético es

$$\varrho \equiv \frac{v_{\perp}}{\Omega} ,$$

donde  $\Omega = eB/m$  es la frecuencia de ciclotrón asociada al giro circundante de la línea, y  $v_{\perp}$  es la componente de la velocidad, perpendicular a dicho campo. Hay un giro-radio diferente para cada especie. Cuando las temperaturas de las especies son comparables, la frecuencia de ciclotrón de los electrones es significativamente menor que la de los iones, de esta forma:

$$\Omega_e = \frac{m_e}{m_i} \Omega_i, \quad \varrho_e \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \varrho_i .$$

Un plasma se dice magnetizado si su longitud característica  $L$  (con  $L \sim (\frac{1}{B} \frac{dB}{dt})^{-1}$ ) es grande comparada con el giro-radio. En el límite opuesto  $\varrho \gg L$ , las partículas cargadas tienen trayectorias esencialmente lineales. Por lo tanto la habilidad del campo magnético para afectar significativamente las trayectorias de las partículas puede medirse mediante el parámetro de magnetización  $\delta$ :

$$\delta \equiv \frac{\varrho}{L} .$$

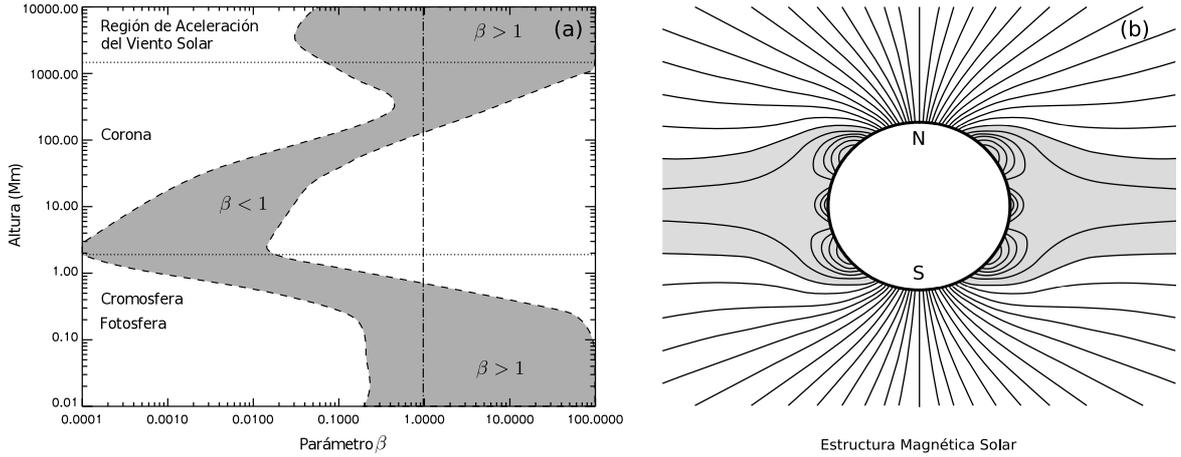
Existen algunos casos de interés en los cuales los electrones se presentan magnetizados mientras que los iones no. No obstante por convención, al referirse a un plasma magnetizado, este término implica que ambas especies, iones y electrones, se hallan magnetizadas. Esto último generalmente se alcanza cuando:

$$\delta_i \equiv \frac{\varrho_i}{L} \ll 1 .$$

## Parámetro beta del plasma

Como vimos en la sección anterior, el parámetro fundamental que da cuenta de un plasma magnetizado es el parámetro  $\delta$ . La medida del efecto inverso es el parámetro  $\beta$  y se define como la razón de la densidad de energía térmica  $nT$  con la densidad de energía magnética  $\frac{B^2}{2\mu_0}$  (también denominada presión magnética). Convencionalmente se identifica la densidad de energía del plasma con la presión:

$$p \equiv nT , \tag{1.4}$$



**Fig. 1.7:** a) Diferentes valores del parámetro  $\beta$  en la atmósfera solar. b) Esquema de las líneas de campo magnético en la atmósfera solar.

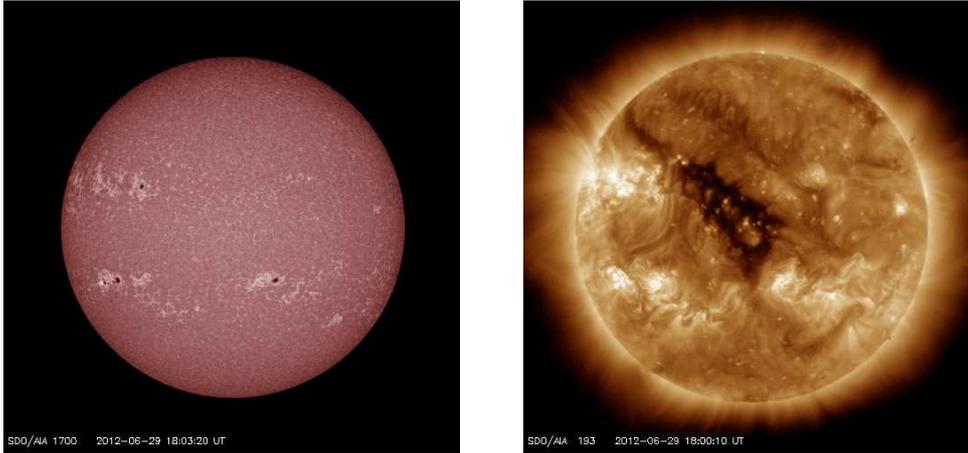
como en un gas ideal, con la temperatura en unidades de energía, y se define un valor de  $\beta_s$  para cada especie de plasma. Por lo tanto:

$$\beta_s = \frac{2\mu_0 p_s}{B^2} . \quad (1.5)$$

El valor total de  $\beta$  resulta

$$\beta = \Sigma_s \beta_s . \quad (1.6)$$

En los casos en que se puede despreciar la disipación (viscosa y Joule), el teorema de Alfvén nos asegura que el campo magnético y el fluido son solidarios. Es decir que las partículas cargadas sólo pueden moverse a lo largo de las líneas de campo; el movimiento transversal a las mismas es fuertemente inhibido. Esto es algo que ocurre a lo largo de toda la atmósfera solar y se dice que el campo y el plasma están congelados. En la fig. 1.7a) se muestra la dependencia del parámetro  $\beta$  con la altura en la atmósfera. Desde los valores fotosféricos y cromosféricos pasando por la baja corona hasta la alta corona. Nótese que sólo en la baja corona el valor de  $\beta < 1$  y en todos los otros casos  $\beta > 1$ . Debido al congelamiento entre el plasma y el campo, es decir en el caso en que  $\beta < 1$ , la presión magnética es mayor que la presión del gas y por lo tanto la dinámica es gobernada por el campo magnético. En cambio, cuando  $\beta > 1$  la dinámica es gobernada por el fluido debido a que la presión del gas es mayor. La figura 1.7b) muestra esquemáticamente las líneas de campo en la corona solar. Como se ve sólo en la baja corona las líneas son cerradas y esto es debido a que el campo domina la dinámica del plasma. Más allá de un radio solar las líneas de campo son abiertas debido a que el plasma gobierna la dinámica. En los paneles izquierdo y derecho de la figura 1.8 se muestran las imágenes de la cromosfera y la baja corona solar respectivamente, cuyas morfologías magnéticas son una consecuencia directa del cambio del parámetro  $\beta$ . En la cromosfera la dinámica es dominada por el movimiento del plasma, por lo que la imagen resulta homogénea y sin estructura. Por el contrario, en el caso en que la dinámica es gobernada por el campo magnético, se ve cómo tanto el plasma como la emisión del plasma son estructurados por el campo. Al parámetro  $\beta$  se lo conoce también como parámetro de estructuración del plasma.



**Fig. 1.8:** Imagen de la cromosfera (izquierda) y de la baja corona solar (derecha). Se pone de manifiesto el cambio determinado por la variación del parámetro  $\beta$ . (Imágenes de *SDO-NASA*).

### 1.3. Ecuaciones Magnetohidrodinámicas

La descripción física de un sistema hidrodinámico se realiza mediante las leyes de conservación para la masa (o densidad de masa,  $\rho$ ), la densidad de momento ( $\rho v$ ), y la densidad de energía del fluido ( $e$ ). Este conjunto de leyes son las ecuaciones de Euler para fluidos no viscosos, o las de Navier–Stokes para un fluido viscoso. En el caso de un fluido conductor, las ecuaciones de Euler se acoplan con las ecuaciones de Maxwell, las cuales describen la evolución del campo electromagnético. Este acoplamiento nos permite tratar al plasma como un fluido simple conductor, al más bajo nivel de aproximación de la Magnetohidrodinámica (MHD en adelante) ideal. El nivel alto de aproximación es el de la MHD resistiva, en la que mantenemos el término de difusión en la ecuación de inducción.

#### Aproximación MHD ideal

En la aproximación MHD el plasma es tratado como un gas magnetizado conductor de corriente y eléctricamente neutro. Muchos de los aspectos físicos que caracterizan al plasma se pierden, sin embargo, la descripción es una buena primera aproximación para muchos problemas en los que los procesos son lentos, es decir en los que las frecuencias son mucho menores que la frecuencia de plasma. La teoría de un fluido (MHD) describe un plasma en términos de promedios macroscópicos, es decir, como funciones de posición y tiempo. Para que esta aproximación sea válida, el tamaño, la duración, la densidad y la intensidad del campo magnético deben ser tales que el comportamiento de fluido pueda representarse promediando los fenómenos microscópicos. La escala de tiempo debe ser mayor que el inverso de la frecuencia ciclotrónica, y la escala espacial debe ser mayor que el radio ciclotrónico. Además no se toman en cuenta los efectos de separación de cargas y la diferencia entre las temperaturas de electrones e iones. Las ecuaciones son las siguientes:

- Las ecuaciones de Maxwell<sup>3</sup>

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.9)$$

donde se suponen variaciones pequeñas en el tiempo (bajas frecuencias) a fin de que se pueda despreciar el término de la corriente de desplazamiento,  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , en la ley de Ampère (1.9).

- La ley de Ohm resistiva:

$$\frac{1}{\sigma} \vec{J} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.10)$$

El límite difusivo corresponde a  $\sigma \rightarrow \infty$ .

- Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.11)$$

que describe la conservación de la masa.

- La ecuación de balance de las fuerzas por unidad de volumen o de conservación del momento:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{J} \times \vec{B} \quad (1.12)$$

donde  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ . El término  $\vec{J} \times \vec{B}$  es la fuerza de Lorentz (por unidad de volumen y despreciando el campo eléctrico), debida a la presencia del campo magnético.

Este término puede escribirse como:

$$\vec{F}_L = \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (1.13)$$

donde  $\mathbf{T}$  es el tensor de los esfuerzos de Maxwell:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} - \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{I}. \quad (1.14)$$

El primer término representa a la tensión magnética, que se opone a la deformación de las líneas de campo, y el segundo término representa la presión magnética, que tiende a crear una distribución uniforme de campo magnético.

- La ecuación de conservación de la densidad de energía:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{v}(e + p)] = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (1.15)$$

donde el término  $\vec{J} \cdot \vec{E}$  representa la tasa de calor producida por la corriente óhmica.

<sup>3</sup>La ecuación  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_c/\epsilon_0$  queda desacoplada de las demás ecuaciones. A escalas grandes se desprecian los efectos espaciales de las cargas, en la pequeña, el campo eléctrico no se puede despreciar dado que es el responsable de sostener la cuasineutralidad.

Las ecuaciones (1.7)-(1.15) representan el sistema de ecuaciones de la MHD resistiva.

Se puede eliminar el campo eléctrico  $\vec{E}$  de la ley de Faraday (1.7) utilizando la ley de Ohm resistiva (1.10) y la ley de Ampère (1.9), obteniendo:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times \vec{B} \right). \quad (1.16)$$

Recordando que la resistividad magnética está definida por:

$$\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \quad (1.17)$$

esta ecuación se puede escribir (si  $\eta$  es constante) como:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}. \quad (1.18)$$

El campo magnético tiende a moverse rígidamente con el fluido (por el primer término a la derecha en esta ecuación), y a difundirse (por el segundo término). Se puede estimar la importancia de la resistividad comparando los dos términos, y obteniendo el número de Reynolds magnético:

$$R_m = \frac{\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})}{\eta \nabla^2 \vec{B}} \approx \frac{L^{-1} v B}{L^{-2} \eta B} = \frac{Lv}{\eta}. \quad (1.19)$$

Por otro lado, la escala de tiempo típica de disipación difusiva se encuentra considerando sólo el término difusivo:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{t} \approx \frac{\eta B}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \tau \approx \frac{L^2}{\eta} \quad (1.20)$$

donde  $L$  es la escala típica de variación del campo magnético. Si la resistividad es despreciable, esta ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = -\nabla \cdot (\vec{v} \vec{B} - \vec{B} \vec{v}). \quad (1.21)$$

Integrando el término izquierdo sobre una cierta superficie  $A$ , y utilizando el teorema de Stokes, se obtiene la derivada parcial del flujo magnético  $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \vec{n} dA$ . Esta ecuación representa la conservación del flujo del campo magnético, o el hecho de que el campo magnético está congelado con el fluido en la teoría MHD, más conocido como Teorema de Alfvén. Se puede además reescribir la ecuación de conservación de la energía, utilizando la ley de Ampère (1.9), como:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{v}(e + p)] = \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{B}) - (\vec{v} \cdot \vec{B}) \nabla \cdot \vec{B} \right) \quad (1.22)$$

y la ley de conservación del momento (1.12) como:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} \left( \nabla \cdot (\vec{B} \vec{B}) - \nabla \cdot (B^2/2) \mathbf{I} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) \right). \quad (1.23)$$

Las ecuaciones de la MHD en su forma adimensional se pueden escribir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \\ \vec{B} \\ e \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \vec{v} + \mathbf{I} (p + B^2/2) - \vec{B} \vec{B} \\ \vec{v} \vec{B} - \vec{B} \vec{v} \\ (e + p + B^2/2) \vec{v} - \vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{B}) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.24)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. Estas ecuaciones están escritas en forma de ley de conservación.

El sistema de ocho ecuaciones está expresado como función de ocho variables: la densidad  $\rho$ , las velocidades  $\vec{v}$  (o los momentos  $\rho\vec{v}$ ), los campos magnéticos  $\vec{B}$  y la presión  $p$  o la energía  $e$  por unidad de volumen definida como:

$$e = c_V p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{B^2}{2}. \quad (1.25)$$

con  $c_V$  es el calor específico a volumen constante. En esta ecuación se supone que no hay pérdidas de energía por radiación, es decir se asume adiabaticidad. Además, si se desea conocer la temperatura se necesita una ecuación de estado, por ejemplo la del gas ideal.

En los problemas que se estudian en esta tesis asumimos que la presión y la tensión magnética pueden describirse por escalares y que el flujo de calor es despreciable.

## 1.4. Ondas MHD

En un gas encontramos ondas de sonido que son perturbaciones longitudinales no dispersivas, que se propagan en todas direcciones a la velocidad del sonido sin deformarse. La fuerza restitutiva de estas perturbaciones es el gradiente de presión y la relación de dispersión es

$$\omega^2 = c_s^2 k^2, \quad \text{con} \quad c_s^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (1.26)$$

de modo que las ondas se propagan en todas direcciones con velocidad de fase  $c_s$ , la velocidad del sonido.

En un plasma hay varios tipos de ondas, en particular si despreciamos la gravedad, las ondas MHD resultan ser perturbaciones del campo de velocidades, la densidad, la presión y el campo magnético. Cada tipo de onda tiene asociada su correspondiente relación de dispersión y es producida por una fuerza restitutiva. Las ondas magnéticas son de dos tipos, las de Alfvén de corte, que son ondas transversales dispersivas en las que la tensión magnética es la fuerza restitutiva y cuya relación de dispersión es

$$\omega = \pm k v_A \cos(\theta), \quad \text{con} \quad \vec{v}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad (1.27)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{B}_0$  y la dirección de propagación. El vector  $\vec{v}_A$  es la velocidad de Alfvén y las ondas son incompresibles: la densidad y la presión no son perturbadas. Entre las ondas magnéticas encontramos también a las ondas de Alfvén compresionales que son ondas no dispersivas. Cuando la propagación es paralela al campo no perturbado estas ondas son longitudinales: la perturbación del campo de velocidades es paralelo al vector de onda  $\vec{k}$ , la presión magnética es en este caso la fuerza restitutiva. La relación de dispersión resulta

$$\omega = \pm k v_A. \quad (1.28)$$

Las ondas magnetoacústicas son de tres tipos, las lentas, las rápidas y las ondas de Alfvén de corte que son una solución particular de las relación de dispersión de estas ondas. Las fuerzas que intervienen en la ecuación de momento para estas ondas son el gradiente de presiones y la fuerza de Lorentz. La relación de dispersión para el caso general resulta

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(v_A^2 + c_s^2)^2 - 4v_A^2 c_s^2 \cos^2(\theta)}. \quad (1.29)$$

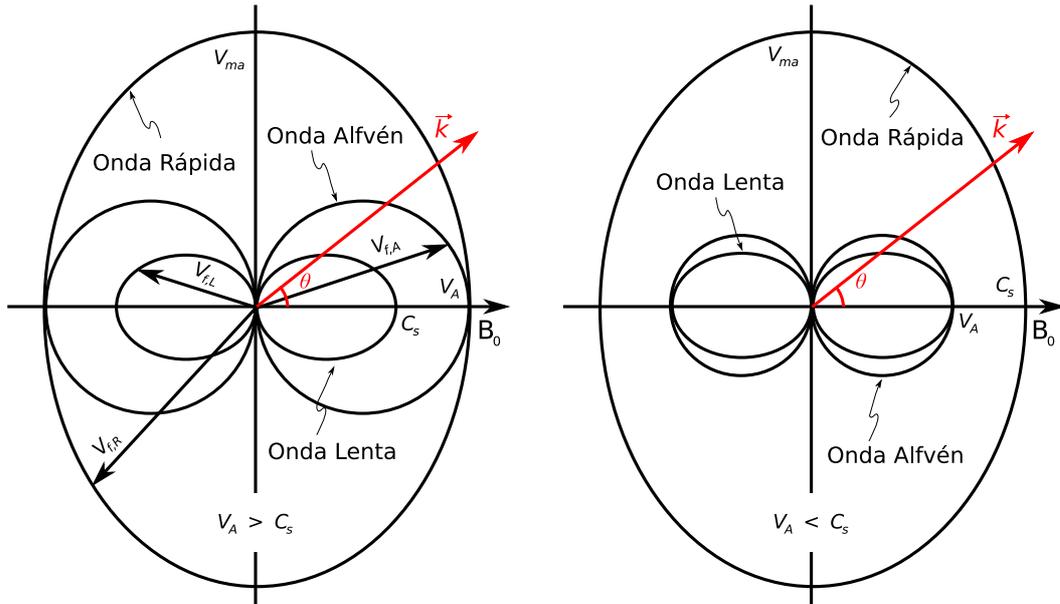


Fig. 1.9: Velocidad de fase de las ondas magnetoacústicas.

La figura 1.9 muestra la velocidad de fase  $v_f = \omega/k$  de las ondas magnetoacústicas para distintos ángulos  $\theta$  entre el campo sin perturbar  $\vec{B}_0$ , y el vector de onda  $\vec{k}$ . La velocidad máxima  $v_{ma}$  se alcanza cuando  $\theta = 90^\circ$ . La velocidad de fase de las ondas de Alfvén se encuentra entre la de la magnetoacústica lenta ( $v_{f,L}$ ) y la rápida ( $v_{f,R}$ ). Si comparamos estas ondas con las magnéticas y las ondas de sonido, en el caso en que  $v_A \ll c_s$  o  $\beta \gg 1$  (ejemplo de la cromosfera y fotosfera) que corresponde a la situación en la que la presión magnética es menor que la presión del gas, la onda acústica se transforma convirtiéndose en una onda magnetoacústica rápida, mientras que la onda magnética compresiva se convierte a la magnetoacústica lenta (panel derecho fig. 1.9). Si  $v_A \gg c_s$  o  $\beta \ll 1$  (ejemplo de la baja corona) que corresponde al caso en que la presión magnética es mayor que la presión del gas, la onda magnética de compresión se transforma dando lugar a la magnetoacústica rápida y aparece en lugar de la onda de sonido la magnetoacústica lenta (panel izquierdo fig. 1.9). Si  $v_A \sim c_s$  no es posible distinguir si las ondas rápidas y lentas provienen de la del sonido modificada o de la de Alfvén de compresión modificada.

Las ecuaciones MHD son muy diferentes a las ondas electromagnéticas obtenidas a partir de las ecuaciones de Maxwell; estas últimas se obtienen a partir de las ecuaciones de Maxwell en vacío, es decir considerando nulas las fuentes ( $q; \vec{j}$ ) de cargas y corrientes. Dado que en la MHD se desprecia la corriente de desplazamiento es claro que estas ondas electromagnéticas, no estarán presentes en dicha aproximación.

## 1.5. Ondas de choque

### Choque hidrodinámico

Las ondas de pequeña amplitud se propagan conservando su forma, en cambio cuando la amplitud es finita el perfil puede distorsionarse y es posible que la cresta de la onda viaje a mayor velocidad que la base haciendo que el perfil se empine. En esta circunstancia el gradiente se vuelve tan importante que la disipación deja de ser despreciable y es posible obtener una onda de choque estacionaria en la que se balancean los efectos de los términos difusivos con los de los términos convectivos no-lineales que generan el empinamiento de la onda. En este caso la disipación interna al frente de choque convierte gradualmente la energía transportada detrás del choque en calor. El efecto de la onda de choque es comprimir y calentar el gas a su paso. Para dar cuenta de la dinámica de una onda de choque, se plantean las ecuaciones de continuidad, momento y energía en el sistema fijo a la onda, modelada como una discontinuidad plana que se mueve con velocidad de componente  $U$  en la dirección transversal al choque en un gas en reposo. La condición de homogeneidad del medio y de estacionariedad dinámica no son tan restrictivas como puede parecer en primera instancia debido a que inhomogeneidades en el medio y no estacionariedades en la dinámica tienen en general tiempos y longitudes características mucho mayores que la dinámica rápida y localizada de las ondas de choque. La onda acelera al gas chocado hasta que alcance una velocidad de componente  $U_2$  en la misma dirección, como se esquematiza en la figura 1.10a). En un sistema de referencia que se mueve con el choque, el fluido adelante tendrá velocidad  $v_1 = U$ , densidad  $\rho_1$  y presión  $p_1$  mientras que las variables correspondientes detrás del choque resultan  $v_2 = U - U_2$ ,  $\rho_2$  y  $p_2$ ; ver figura 1.10b). Las ecuaciones de conservación: continuidad, energía y momento se expresan en términos de estas variables resultando:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma p_1}{\rho_1(\gamma - 1)} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\gamma p_2}{\rho_2(\gamma - 1)}$$

donde se ha utilizado que  $e = p/((\gamma - 1)\rho)$  como la expresión de la energía interna para cada medio. Estas ecuaciones permiten obtener las cantidades detrás del choque en función de las de delante del choque a las que se denomina relaciones de Rankine-Hugoniot. Utilizando además la condición de que la entropía debe aumentar debido a la segunda ley de la termodinámica para un sistema aislado

$$s_2 \geq s_1, \quad \text{donde} \quad s = c_V \log \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + cte$$

y definiendo

$$M_i = \frac{v_i}{c_{si}} = \frac{v_i}{\sqrt{\gamma p_i / \rho_i}} \quad (1.30)$$

como el número de Mach del medio  $i$ , se concluye

- $v_2 \leq v_1$ ;
- $\rho_2 \geq \rho_1$ : la onda de choque comprime el gas;

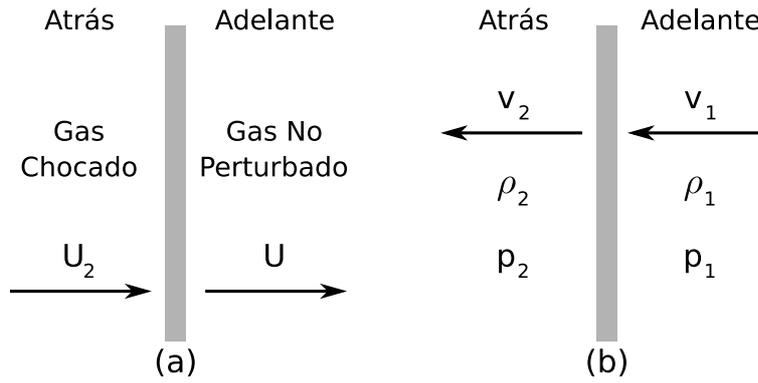


Fig. 1.10: Esquema del choque hidrodinámico.

- $M_1 \geq 1$ : el fluido entra en la onda de choque con velocidad supersónica. Volviendo al sistema de referencia en el que el fluido del medio 1 está en reposo, la velocidad de la onda de choque es supersónica;
- $M_2 \leq 1$ : el fluido sale de la onda de choque con velocidad subsónica en el sistema de referencia en el que el frente está en reposo;
- $p_2 \geq p_1$ : la presión del gas aumenta al pasar la onda;
- $T_2 \geq T_1$ : la temperatura también aumenta al pasar la onda de choque.
- A medida que  $M_1$  crece de uno a infinito,  $p_2/p_1$  crece sin límite pero la compresión  $\rho_2/\rho_1$  es limitada, dado que

$$1 < \frac{\rho_2}{\rho_1} < \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \lesssim 4.$$

El último valor se obtiene para valores de  $\gamma = 5/3$  que es el valor que corresponde para los casos de interés de esta tesis.

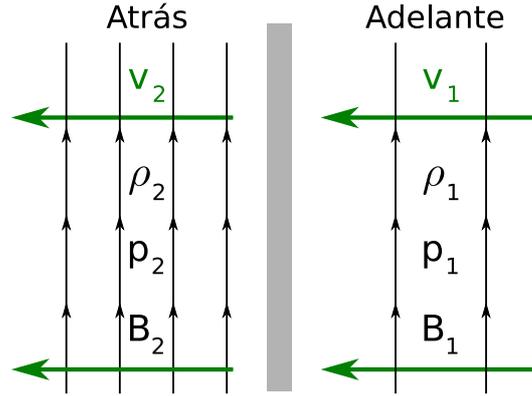
### Choque magnético transversal

Se dice que el choque es transversal cuando el campo de inducción magnético, en ambos medios, es paralelo al frente de onda. En un sistema de referencia en el que el frente está en reposo,  $v_1 \perp \vec{B}_1$  y  $v_2 \perp \vec{B}_2$ ; ver figura 1.11. En este caso se relacionan las cantidades detrás del choque en función de las de delante del choque ( $\rho_2, p_2, v_2$  y  $\vec{B}_2$  con  $\rho_1, p_1, v_1$  y  $\vec{B}_1$ ) a partir de las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía a las que se agrega la ecuación de inducción magnética. Introduciendo la notación

$$[f] = f_2 - f_1$$

se obtienen las ecuaciones de Rankine–Hugoniot para el choque transversal

$$[\rho v] = 0 \tag{1.31}$$



**Fig. 1.11:** Esquema del choque magnético transversal.

$$\left[ \rho v^2 + p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] = 0 \quad (1.32)$$

$$\left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) v + \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) v \right] = 0 \quad (1.33)$$

$$[vB] = 0 \quad (1.34)$$

donde se han agregado la presión magnética y la densidad de energía magnética. La última expresión se obtiene de la ecuación de inducción magnética para el caso estacionario. Utilizando la notación

$$\xi = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{se obtiene} \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{\xi} \quad \text{y} \quad \frac{B_2}{B_1} = \xi. \quad (1.35)$$

Resolviendo las ecuaciones para el caso transversal se concluye que:

- el choque es compresivo  $v_2 < v_1$ , con  $\xi \geq 1$ ;
- $\rho_2 > \rho_1$  : la onda de choque comprime el gas;
- el efecto del campo magnético es reducir  $\xi$  por debajo de su valor hidrodinámico;
- la velocidad del choque ( $v_1$ ) debe exceder la velocidad de la onda magnetoacústica rápida  $\sqrt{c_{s1}^2 + v_{A1}^2}$ ,
- la compresión magnética es limitada dado que

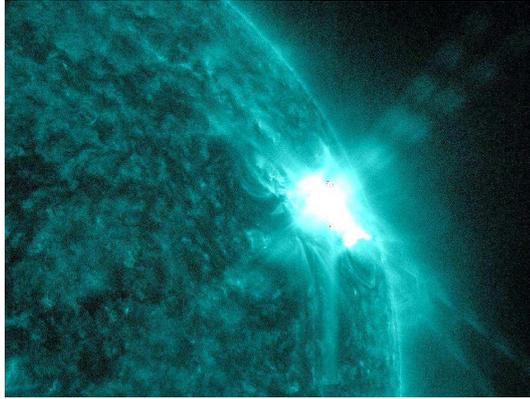
$$1 < \frac{B_2}{B_1} < \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \lesssim 4$$

donde  $\gamma = 5/3$ .

## 1.6. Noción de reconexión magnética

La ecuación de inducción magnética

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (1.36)$$



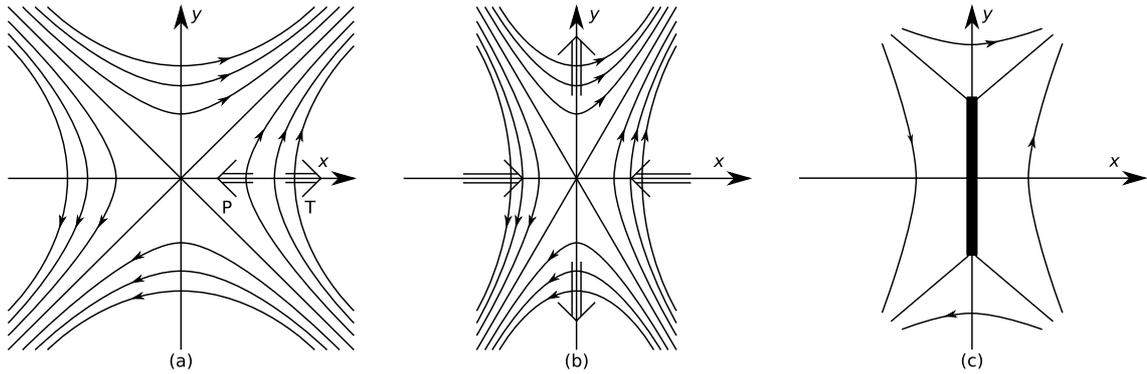
**Fig. 1.12:** Fulguración solar. Fuente: *NASA*

muestra que el campo magnético cambia debido a la convección y a la difusión. La escala temporal de difusión puede extrapolarse de esta ecuación dando:  $\tau_d = L^2\eta$ , donde  $L$  es una longitud astrofísica característica del problema en estudio. Esta cantidad es generalmente un tiempo muy largo para las escalas astrofísicas, de modo que en muchos de estos casos el término difusivo en la ecuación de inducción es despreciable. Es así que el número de Reynolds magnético ( $R_m$  equivalente al término convectivo sobre el difusivo de la ecuación de inducción) es mucho mayor que uno para las escalas globales de la mayoría de los casos astrofísicos. En estas circunstancias el teorema de Alfvén muestra que el campo y el plasma son solidarios o están “congelados”.

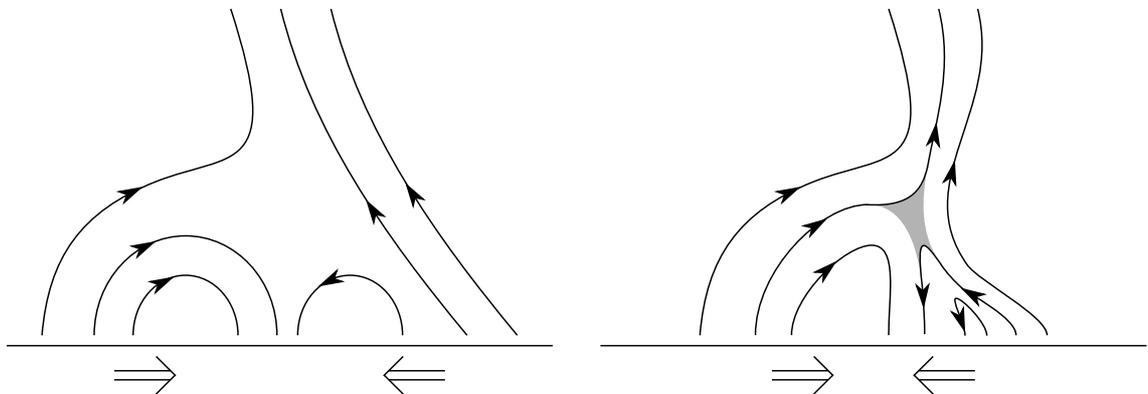
En el Sol y en muchas otras estrellas se producen fenómenos como fulguraciones en los que se libera una gran cantidad de energía en tiempos muy breves (Figura 1.12). La magnitud de la energía involucrada indica que ésta sólo puede ser almacenada en el campo magnético coronal. Pero surge el interrogante acerca de cómo es liberada y transmitida al plasma en forma de calor y energía cinética. Si se considera una fulguración típica con una longitud característica de  $L = 10^4\text{km}$ , la difusividad de la corona es  $\eta = 1/\sigma\mu_0 \sim 10^4\text{cm}^2 \text{ s}^{-1}$  se obtiene un tiempo de difusión  $\tau_d = \mu_0\sigma L^2 \sim 10^{14}\text{seg}$ , que es muy diferente al tiempo característico de una fulguración  $\lesssim 10^2\text{seg}$ .

Cuando localmente el gradiente del campo se hace grande, el producto del término difusivo  $\eta\nabla^2\vec{B}$  ( $\eta$  es un valor pequeño debido a la alta conductividad de los plasmas) puede volverse finito y el teorema de Alfvén deja de ser válido. Esto ocurre en regiones donde el campo magnético varía muy rápidamente en la coordenada espacial, de modo que la densidad de corriente eléctrica es muy alta. Estas regiones localizadas pueden ser, por ejemplo, hojas de corrientes o filamentos magnéticos. Se pueden formar por inestabilidad de un plasma en equilibrio estático o por movimientos del plasma que ponga en contacto regiones topológicamente diferentes. Un ejemplo del primer caso es un punto neutro X, que está en equilibrio inestable y que evoluciona de la forma que muestra la figura 1.13a)-c). La zona marcada en grueso es una región de alta densidad de corriente dado que en una distancia corta hay una gran variación de la componente tangencial del  $\vec{B}$ .

La segunda situación (ver figura 1.14 izq. y der.) resulta por ejemplo, cuando se tienen dos estructuras magnéticas topológicamente distintas y cuyas líneas de campo surgen de la fotosfera (las bases o *footpoints*



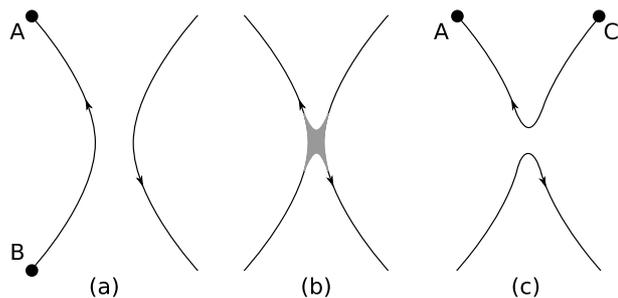
**Fig. 1.13:** Esquema de las líneas de campo para la inestabilidad de un punto neutro.



**Fig. 1.14:** Esquema de líneas de campo magnético para una reconexión inducida por el movimiento forzado desde las bases.

están anclados o atados (*line-tied*) a la fotosfera). Recordar que el parámetro  $\beta$  cambia de mayor que uno (domina el fluido al campo) a menor que uno (domina el campo al fluido) al pasar de la fotosfera a la corona. Los movimientos que se producen desde las bases pueden inducir el acercamiento de las estructuras formándose una hoja de corriente en la región de contacto coronal.

En las hojas de corriente, al ser la densidad de corriente muy grande, no se puede despreciar el término de difusión en la ecuación de inducción y por lo tanto no se tendrá congelamiento de las líneas y el plasma; el plasma se puede mover perpendicularmente a las líneas sin arrastrarlas y se dice que ocurre la reconexión. Parte de la energía magnética se transforma en energía cinética y térmica y puede haber aceleración de partículas cargadas a velocidades no térmicas. Al ser la longitud característica de la zona de difusión en la hoja de corriente mucho menor que la escala de longitud global de la estructura, el tiempo de difusión es mucho menor ( $\tau_d \sim 1\text{seg}$ ), aunque la dinámica general está limitada por la velocidad con que el campo magnético es transportado por el plasma en su movimiento hacia la hoja. Hacia 1960 aparecieron los primeros modelos de aniquilación del campo magnético (Parker 1957) y de reconexión magnética bidimensional (Sweet 1958). Este último da un tiempo final del orden de  $10^7\text{seg}$  que sigue siendo mucho



**Fig. 1.15:** Esquema de reconexión magnética.

mayor que el observado. Más tarde surgieron otros modelos bidimensionales y luego los tridimensionales. En este apartado sólo se presenta una descripción cualitativa del fenómeno de reconexión, dado que en la tesis no se trabajan plasmas difusivos y la reconexión es modelada numéricamente como deposiciones de energía o pulsos de presión localizados. La reconexión ocurre cuando dos elementos de plasma que originariamente están en una misma línea de campo de inducción resultan finalmente separados y pasan a pertenecer a líneas de campo diferente. A su vez, elementos de plasma en líneas diferentes aparecen en una misma línea, y se dice que se pierde la identidad de las líneas. Para que esto suceda una parte del plasma sobre las líneas originales debe pasar por una zona de alta difusión donde el campo puede difundir en el plasma y deja de valer el congelamiento.

Para describir esquemáticamente el efecto de la resistividad a pequeña escala y el impacto global en la gran escala se consideran las configuraciones magnéticas de las figuras 1.15. Cuando líneas de campo se acercan, fig. 1.15a), llega un punto en que aparece una región de difusión, fig. 1.15b). La figura 1.15c) es una configuración de menor energía, ha ocurrido la reconexión magnética y la pérdida de identidad de las líneas, i.e., no se conserva el flujo magnético.

## 1.7. Sismología coronal

A diferencia de la heliosismología, la sismología coronal es una rama relativamente reciente de la física solar impulsada por la puesta en funcionamiento de telescopios espaciales de nueva generación con alta resolución espacial y temporal como *TRACE* (*Transition Region And Coronal Explore*) y *SOHO* (*The Solar and Heliospheric Observatory*).

Como se mencionó, la corona solar puede representarse como un medio compresible y elástico en el que se propagan varios tipos de ondas cuya descripción se ajusta a la aproximación MHD en las condiciones coronales: longitud de onda y períodos suficientemente grandes comparados con el radio de Larmor ( $< 1\text{m}$ ) y la girofrecuencia ( $< 10^{-4}\text{seg}$ ) respectivamente. Estas ondas perturban parámetros globales del plasma como la densidad, la temperatura, la velocidad y el campo magnético afectando así las observaciones y dando lugar a métodos de diagnóstico específicos provistos por la sismología.

Las velocidades características de los fenómenos MHD se relacionan por un lado, con la compresibilidad y la elasticidad del campo (presión y tensión magnética respectivamente) y por otro, con la presión del gas ( $p_0$ ) y la inercia de los iones descrita en términos de la densidad  $\rho_0$ . Ellas son: la velocidad de Alfvén,

$v_A = B_0/(\mu_0\rho_0)^{1/2}$ , y la velocidad del sonido en el medio:  $c_s = (\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$ , ( $\gamma$  el índice adiabático, para los casos de interés de esta tesis,  $\gamma = 5/3$ ).

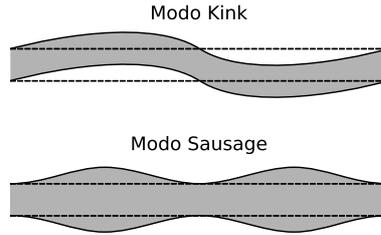
Resumiendo lo mencionado anteriormente, en condiciones de plasma uniforme -en los que el campo magnético es infinito, homogéneo y unidireccional- los modos MHD son fundamentalmente de tres tipos básicos, como se vió en la sección 1.4 (la relación de dispersión tiene tres ramas): I) ondas de Alfvén: modos transversales puros e incompresibles que se propagan a lo largo de las líneas de campo a la velocidad de Alfvén. La perturbación del campo produce un desplazamiento de las líneas que es restituido por la acción de la tensión magnética. Y modos compresibles de dos tipos: II) modos magnetoacústicos rápidos, con velocidades mayores o iguales a la velocidad de Alfvén; tanto el campo magnético como la presión del plasma resulta perturbada. En condiciones coronales ( $\beta \ll 1$ ) estos modos son casi transversales y describen una oscilación entre la energía cinética -asociada a la componente transversal del plasma- y la energía magnética -asociada al efecto combinado de la presión y la tensión de las líneas-. La tercera rama de la relación de dispersión es la de III) los modos magnetoacústicos lentos. Estos modos tienen velocidades menores o iguales a la velocidad del sonido. Su polarización es similar a la de los modos magnetoacústicos rápidos, es decir, resultan tanto de la compresión del plasma como de la del campo magnético. En el límite de  $\beta \ll 1$  resultan longitudinales (ondas de sonido  $v = c_s$ ); alternan la perturbación de la energía cinética asociada a la componente paralela del plasma con la energía interna (perturbación en la temperatura) del mismo (Fig. 1.9).

En el caso uniforme todos los modos resultan estables, pero el plasma confinado y afectado por la filamentación y estructuración de la corona modifica y acopla entre sí las diferentes ondas dando lugar a configuraciones de estabilidad no garantizada. En condiciones coronales usuales los arcos magnéticos se comportan como guías de ondas (si la velocidad del Alfvén interna al tubo es menor que la externa las ondas MHD son atrapadas) y la estructuración del campo es responsable de mecanismos de disipación anómala como la absorción resonante, la mezcla de fases o de inestabilidades en superficies de discontinuidad (ondas de superficie) que dependen de la geometría y de los parámetros del plasma.

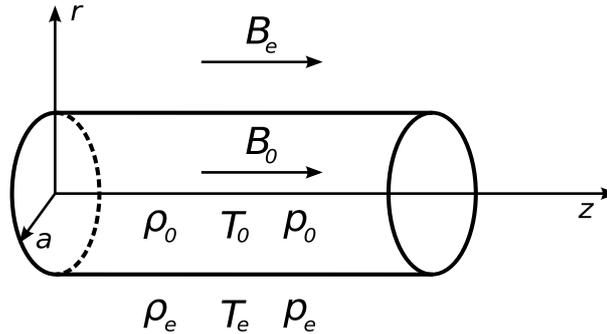
### Propiedades de modos MHD en plasmas estructurados

En cilindros magnéticos se reconocen tres tipos básicos de modos o periodicidades diferenciadas por su velocidad: los modos magnetoacústicos lentos, los rápidos y los de Alfvén; esencialmente los dos primeros son compresibles y el último incompresible; la velocidad del sonido es, por lo general en la corona, hasta un orden de magnitud menor que la velocidad de Alfvén. Las ondas de Alfvén en tubos magnéticos son perturbaciones en la componente acimutal del tubo. Los modos rápidos comprometen la estructura global del tubo magnético y se diferencian entre sí por la forma del modo y por sus períodos: los simétricos (modos *sausage*) tienen períodos del orden de unos pocos segundos y los asimétricos (modos *kink*) períodos de unos pocos minutos (Fig. 1.16). A diferencia de los modos rápidos -con velocidades de fase entre la de Alfvén interna y externa-, los modos lentos son poco dispersivos. Si bien los lentos son también del tipo *sausage* y *kink*, generalmente se los menciona como lentos, a secas, dado que no modifican el radio del cilindro en forma apreciable, al menos para la resolución de las observaciones.

La relación de dispersión para cilindros infinitos -que representan un buen modelo de las estructuras



**Fig. 1.16:** Esquema de modos de oscilación: arriba) *kink*, abajo) *sausage*.



**Fig. 1.17:** Esquema de un tubo de flujo magnético embebido en un plasma magnetizado.

coronales más comunes— se obtiene linealizando las ecuaciones MHD alrededor del equilibrio, considerando balance de presiones entre el plasma interno y el externo al cilindro (Fig. 1.17). Para perturbaciones de la forma

$$\delta P(r) \exp[i(k_z z + m\phi - \omega t)] \quad (1.37)$$

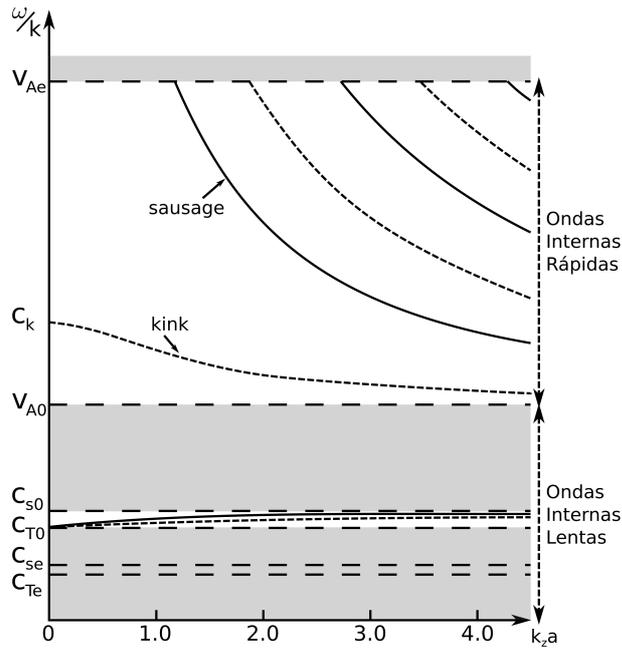
se puede reducir el sistema de ecuaciones de cada medio a la ecuación,

$$(\omega^2 - v_{A\alpha}^2 k_z^2) \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left( \kappa_\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right] \delta P(r) = 0 \quad (1.38)$$

donde  $\alpha = 0$  para el medio interno y  $\alpha = e$ , para el externo. El primer término de la ecuación representa la solución de Alfvén para los modos del cilindro infinito,  $\omega = \pm v_{A\alpha} k_z$ . El segundo factor es una ecuación de Bessel que describe los modos magnetoacústicos. Aplicando las condiciones de borde para estas ecuaciones: las soluciones internas y externas deben cumplir con la condición de continuidad en la presión total y la velocidad normal. Imponiendo una condición de localización de modos (la energía de la onda debe amortiguarse con la distancia lateral al arco o cilindro magnético) se obtiene la relación de dispersión para ondas internas lineales

$$\rho_e (\omega^2 - v_{Ae}^2 k_z^2) \kappa_0 \frac{J'_m(\kappa_0 a)}{J_m(\kappa_0 a)} - \rho_0 (\omega^2 - v_{A0}^2 k_z^2) \kappa_e \frac{K'_m(\kappa_e a)}{K_m(\kappa_e a)} = 0 \quad (1.39)$$

donde  $J_m(x)$  la función de Bessel de primera especie y  $K_m(x)$  la función de Bessel modificada de segunda especie de orden  $m$ , el primado denota la derivada de la función respecto al argumento. Las funciones  $\kappa$



**Fig. 1.18:** Diagrama de dispersión de velocidades de fase de ondas MHD de cilindros infinitos en función del parámetro adimensional  $k_z a$ . Las velocidades típicas en el medio interno y externo se miden en unidades de la velocidad del sonido interno:  $v_{A0} = 2c_{s0}$ ,  $v_{Ae} = 5c_{s0}$ , y  $c_{se} = 0.5c_{s0}$ . Las líneas sólida y con guiones, corresponden a distintos armónicos de las soluciones  $m = 0$  y  $m = 1$  respectivamente. La solución de Alfvén torsional se muestra con línea de guiones largos en  $\omega/k_z = v_{A0}$ .

representan los números de onda transversales en el medio correspondiente. El entero  $m = 0$  representa el modo *sausage*,  $m = 1$  el modo *kink*, mayores valores de  $m$  son llamados modos *ballooning* o *flute*. La propia existencia de modos en cilindros infinitos así como sus propiedades, en la aproximación lineal, son determinadas por las propiedades físicas del equilibrio lo que se resume en el diagrama de dispersión que se muestra en la figura 1.18.

En el caso en que la velocidad de Alfvén externa es mayor que la interna (tubo de plasma denso), el tratamiento analítico en la aproximación lineal determina que los modos son atrapados en el tubo magnético. Los modos simétricos (*sausage*) poseen un corte en el número de onda: sólo son observables para longitudes de onda chicas  $k_z a \geq 1$  ( $a$  el radio del tubo), como se ve en la figura 1.18. En cambio, en el límite de longitud de onda grande,  $k_z a \ll 1$ , la velocidad de fase del modo asimétrico principal resulta en un valor intermedio entre la velocidad de Alfvén interna y la externa al tubo de plasma. Los modos con el menor valor del número de onda son denominados globales o fundamentales. Si se relaja la condición de localización de modos, se obtienen modos rápidos con soluciones *leaky*. Estos modos tienen frecuencias complejas, las funciones de Bessel son reemplazadas por las de Hankel, y la oscilación interna es amortiguada por el drenado de energía hacia el exterior.

En arcos coronales, o tubos magnéticos de líneas cerradas, el número de onda longitudinal de oscilaciones estacionarias es usualmente prescripto por la condición de *line-tied* en la fotosfera. Por otro lado, las perturbaciones en el medio coronal son generalmente finitas, la dinámica es altamente no-lineal, el acoplamiento de ondas, el drenaje de energía, la resonancia, la mezcla de fases y la existencia de continuos de

frecuencia hacen que las oscilaciones en arcos magnéticos sean amortiguados por lo general en muy pocos períodos, aun antes de que la disipación sea efectiva. Además, muy pocas de las propiedades globales de los modos pueden ser determinadas observacionalmente, e.g. la mera distinción entre los modos *kink* y los *sausage*, cuando no es detectada visualmente, requiere una serie de consideraciones, (los modos *sausage* modulan la densidad y el campo magnético y tienen menor período que los *kink*). En el Apéndice B2.1, se introduce el tratamiento de oscilaciones que se utilizará en el capítulo 5, apropiado para la comparación con el tratamiento de modos observacionales de la literatura.

Respecto a una bibliografía general: para una revisión sistemática de la fenomenología coronal, una introducción a la teoría de plasma y a la MHD solar ver por ejemplo Aschwanden (2006), Priest (1984), Priest & Hood (1991), Priest & Hood (1991). La presentación de las ecuaciones de la MHD se puede encontrar, de manera más o menos similar a la presentada aquí, en un gran número de libros como: Alfvén, H. and Fälthammar, C.G. (1963), Goedbloed & Poedts (2004), Hazeltine & Waelbroeck (2004). Para una visión general de los modelos analíticos y numéricos de reconexión magnética ver por ejemplo Priest & Forbes (2007). Una revisión de la sismología coronal se puede encontrar en Schwenn & Marsch (2011) y Nakariakov & Verwichte (2005).

**BIBLIOGRAFÍA**

- Alfvén, H. and Fälthammar, C.G. 1963, *Cosmical electrodynamics: fundamental principles*, International series of monographs on physics No. v. 1 (Clarendon Press)
- Aschwanden, M. 2006, *Physics of the Solar Corona*, Springer Praxis Books / Geophysical Sciences (Springer)
- Goedbloed, J. P. H. & Poedts, S. 2004, *Principles of Magnetohydrodynamics*
- Hazeltine, R. & Waelbroeck, F. 2004, *The Framework Of Plasma Physics*, *Frontiers in Physics* (Westview Press)
- Nakariakov, V. M. & Verwichte, E. 2005, *Living Reviews in Solar Physics*, 2, 3
- Parker, E. N. 1957, *J. GEOPHYS. RES.*, 62, 509
- Priest, E. 1984, *Solar Magnetic Hydrodynamics*, *Geophysics and Astrophysics Monographs* (Kluwer Academic Pub)
- Priest, E. & Forbes, T. 2007, *Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications* (Cambridge University Press)
- Priest, E. & Hood, A. 1991, *Advances in Solar System Magnetohydrodynamics* (Cambridge University Press)
- Schwenn, R. & Marsch, E. 2011, *Physics of the Inner Heliosphere I: Large-Scale Phenomena*, *Physics and Chemistry in Space Series* (Springer)
- Sweet, P. A. 1958, in *IAU Symposium, Vol. 6, Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*, ed. B. Lehnert, 123



# Herramientas numéricas: teoría y métodos

En este capítulo se describirán los métodos y técnicas implementadas en dos códigos numéricos, dos y tres dimensionales. Estos códigos evolucionan las ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal. Los códigos están basados en el método de volumen finito de alta resolución de Kurganov & Tadmor (2000) el cual es capaz de resolver con precisión discontinuidades y ondas de choque. De igual manera que el capítulo anterior, este resumen no contiene material inédito. El material usado para hacer este compendio, se detalla en la bibliografía al final de este capítulo.

## 2.1. Nociones de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas

Los sistemas hiperbólicos de ecuaciones diferenciales parciales se usan en una gran variedad de fenómenos físicos que involucran propagación de ondas en un medio. Los problemas que consideramos son generalmente dependientes del tiempo, por lo que la solución depende tanto del tiempo como de las variables espaciales. En una dimensión espacial, un sistema de primer orden de este tipo de ecuaciones diferenciales parciales en  $x$  y  $t$  tiene la forma:

$$u_t(x, t) + Au_x(x, t) = 0 \quad (2.1)$$

en el caso lineal más simple a coeficientes constantes. Aquí  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un vector con  $m$  componentes que representan funciones desconocidas (presión, velocidad, etc.) las cuales queremos determinar, y  $A$  es una matriz real  $m \times m$  constante. Para que este problema sea hiperbólico la matriz  $A$  debe satisfacer ciertas propiedades que se mencionarán más adelante. El caso más simple es un problema escalar a coeficientes constantes, en el cual  $m = 1$  y la matriz  $A$  se reduce a un valor escalar  $a$  (real), por ejemplo. Luego la solución del problema (2.1) admite solución de la forma

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - at)$$

para cualquier función  $\tilde{u}(\xi)$ . El perfil descrito por  $\tilde{u}$  simplemente se propagará con velocidad constante  $a$  sin cambiar la forma del perfil. En este contexto, la ecuación resultante  $u_t(x, t) + au_x(x, t) = 0$  es generalmente llamada *ecuación de advección*. Cuando elegimos más variables ( $m > 1$ ) y más dimensiones, el sistema de ecuaciones se descompondrá en varias ecuaciones escalares que modelarán distintas ondas que se propagarán con distintas velocidades en distintas direcciones. Este tipo de descomposición es posible para este tipo de sistemas hiperbólicos, ya que la definición de hiperbólico está estrechamente relacionada a esto: para que el sistema (2.1) sea hiperbólico se debe satisfacer que la matriz  $A$  sea diagonalizable con autovalores reales. La matriz es diagonalizable si existe un conjunto completo de autovectores, i.e., si existen vectores distinto de cero  $\vec{r}^1, \vec{r}^2, \dots, \vec{r}^m \in \mathbb{R}^m$  tal que:

$$A\vec{r}^p = \lambda^p \vec{r}^p \quad \text{para } p = 1, 2, \dots, m,$$

y estos vectores son linealmente independientes. Esto nos permite que el sistema (2.1) pueda ser reescrito como:

$$\vec{\omega}_t + A\vec{\omega}_x = 0 \tag{2.2}$$

con  $\vec{\omega}(x, t) \equiv R^{-1}\vec{u}(x, t)$  donde  $R$  es la matriz compuesta por los autovectores  $\vec{r}^p$  puestos en columnas; y  $A$  la matriz diagonal cuyas componentes  $\lambda^p$  con  $p = 1, 2, \dots, m$  son los autovalores. Entonces, ya que  $A$  es diagonal, este sistema se desacopla en  $m$  ecuaciones de advección para las componentes  $\omega^p$  de  $\vec{\omega}$ :

$$\omega_t^p + \lambda^p \omega_x^p = 0 \quad \text{para } p = 1, 2, \dots, m.$$

Ya que cada  $\lambda^p$  es real, estas ecuaciones de advección tienen sentido físico y pueden ser usadas para resolver el sistema original (2.1). Se pueden ver los detalles completos por ejemplo en LeVeque (2002); Toro (2009), pero claramente la solución consistirá de una combinación lineal de  $m$  ondas que viajan a *velocidades características*  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m$ . (Recordemos que los autovalores suelen llamarse “valores característicos”.) Estos valores definirán *curvas características*  $X(t) = x_0 + \lambda^p t$  a lo largo de la cual se propagará la información en las ecuaciones de advección desacopladas. Las funciones  $\omega^p(x, t)$  son llamadas *variables características*.

Existen algunas clases especiales de matrices  $A$  para los cuales el sistema es hiperbólico. Si  $A$  es *simétrica* ( $A = A^T$ ), luego  $A$  es siempre diagonalizable con autovalores reales y el sistema se dice *simétricamente hiperbólico*. Si  $A$  tiene todos los autovalores distintos  $\lambda^1 < \lambda^2 < \dots < \lambda^m$ , luego los autovectores deben ser linealmente independientes y el sistema se dice *estrictamente hiperbólico*. Si  $A$  tiene autovalores reales pero no es diagonalizable, luego el sistema es *débilmente hiperbólico*.

Como mencionamos con anterioridad, dado que estamos tratando con ondas viajeras, los autovalores  $\lambda$  representan la velocidad de fase de la onda. En el caso que la matriz  $A$  sea diagonalizable, luego la solución que tiene como dato inicial  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ , puede escribirse de la forma  $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - (\lambda/k)t)}$ , donde  $\vec{k}$  es el vector número de onda. Si  $\lambda$  es real la solución oscila, de lo contrario crece exponencialmente. En el caso débilmente hiperbólico, aún cuando  $\lambda$  sea puramente imaginario, la solución tendrá términos exponenciales multiplicados por un polinomio en  $k\lambda t$  (puesto que  $A$  es no diagonalizable, reduciéndose a su forma de Jordan) los cuales harán que la solución crezca para cualquier valor arbitrario grande de  $k$  o  $\lambda$ .

## 2.2. Leyes de conservación

Una clase importante de las ecuaciones hiperbólicas homogéneas, son las llamadas leyes de conservación. El ejemplo más simple de una ley de conservación en una dimensión es la EDP:

$$u_t(x, t) + f(u(x, t))_x = 0, \quad (2.3)$$

donde  $f(u)$  es la función flujo. Reescribiendo ésta a la forma cuasi-lineal

$$u_t + f'(u)u_x = 0, \quad (2.4)$$

sugiere que la ecuación es hiperbólica si la matriz del flujo Jacobiano  $f'(q)$  satisface con las condiciones dadas para  $A$ . De hecho el problema lineal (2.1) es una ley de conservación con la función de flujo lineal  $f(u) = Au$ . Muchos problemas físicos dan lugar a leyes de conservación no-lineales donde  $f(u)$  es una función no-lineal de  $u$ , un vector de *variables conservadas*.

### Forma integral

Las leyes de conservación surgen naturalmente de las leyes de la física en una forma integral:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t)). \quad (2.5)$$

Cada componente de  $u$  mide la densidad de alguna cantidad conservada, y la ecuación (2.5) establece que la “masa total” de esta cantidad entre cualquier dos puntos  $x_1, x_2$  puede cambiar debido sólo al flujo que atraviesa estos puntos.

### Soluciones discontinuas

La ecuación diferencial (2.3) puede derivarse de la ecuación integral (2.5) ya que  $u$  y  $f(u)$  son suficientemente suaves. Esta suposición es importante ya que en la práctica muchas soluciones de interés no son suaves, sino que contienen discontinuidades tales como ondas de choque. Un comportamiento fundamental de las leyes de conservación no-lineales es que estas discontinuidades pueden fácilmente desarrollarse espontáneamente aún, a partir de datos iniciales suaves, por lo que deben ser tratados de manera adecuada matemática y computacionalmente.

## 2.3. Método de Volumen Finito

Estas discontinuidades mencionadas con anterioridad, pueden acarrear varias dificultades computacionales al tratar de resolver el sistema en cuestión. Si se trata de resolver con métodos de diferencias finitas, en los cuales las derivadas son aproximadas por diferencias finitas, es de esperarse que la solución se rompa cerca de las discontinuidades, donde la ecuación diferencial ya no es válida. En cambio los métodos de volumen finito, se basan en la forma integral (2.5) de la ecuación en vez de la forma diferencial. Más que hacer aproximaciones punto a punto en cada punto de la malla numérica, se parte el dominio en celdas y se aproxima la integral total de  $u$  sobre cada celda, o en realidad el promedio de  $u$  en la celda, que es la integral dividida por el volumen de la celda. Estos valores se modifican en cada paso temporal por el flujo

a través de las caras de las celdas de la malla, y el problema principal es determinar buenas funciones de flujo numérico que aproximen los flujos razonablemente bien, basados en los promedios aproximados de las celdas, el único dato disponible. Los métodos de volumen finito de alta resolución han demostrado ser muy efectivos para calcular soluciones discontinuas.

Consideremos el problema de Cauchy en una dimensión:

$$u(x, t)_t + f(u(x, t))_x = 0 \quad (2.6)$$

con la condición inicial  $u(x, t = 0) = u_0(x)$ . Para resolver estas ecuaciones con un método de volumen finito se divide el eje  $x$  en celdas de manera que la celda  $i$  ocupe la región  $(i - \frac{1}{2})\Delta x \leq x \leq (i + \frac{1}{2})\Delta x$  (ver figura 2.1) donde  $\Delta x$  es el tamaño constante de la celda (con  $1 \leq i \leq N$  y  $x = [0, N\Delta x]$ ). Además, consideramos incrementos  $\Delta t$  en el tiempo, e indicamos el vector de las variables conservadas al tiempo  $t^n$  y en la posición  $x_i$ , como  $u(t^n, x_i) = u_i^n$ . Integrando sobre el volumen ocupado por una celda se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{(i-1/2)\Delta x}^{(i+1/2)\Delta x} u_i^n dx + \int_{(i-1/2)\Delta x}^{(i+1/2)\Delta x} \frac{\partial f_i^n}{\partial x} dx = 0 \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{u}_i^n}{dt} + \frac{f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0; \quad (2.8)$$

donde

$$\bar{u}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{(i-1/2)\Delta x}^{(i+1/2)\Delta x} u_i^n dx \quad (2.9)$$

es el vector de las variables promediadas espacialmente sobre la celda  $i$ , y los flujos  $f$  son evaluados en las interfases entre las celdas. Integrando en el tiempo se obtiene:

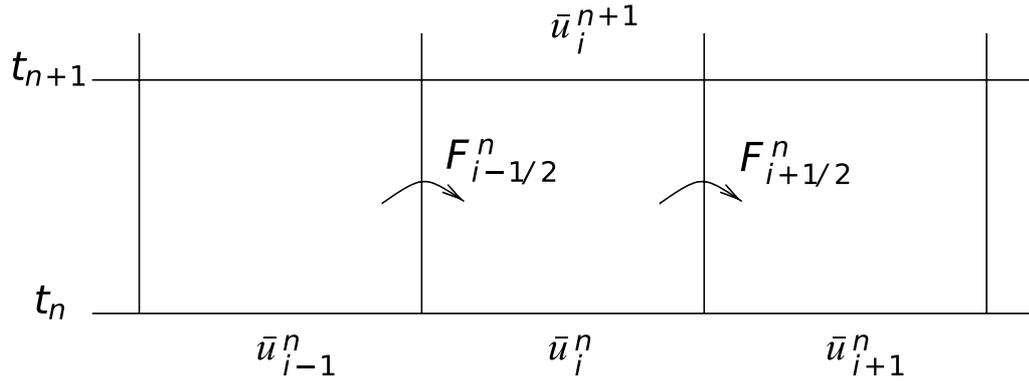
$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{d\bar{u}_i^n}{dt} dt + \int_t^{t+\Delta t} \frac{(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n)}{\Delta x} dt = 0 \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow \bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) \quad (2.11)$$

donde

$$F_{i-1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(u(x_{i-1/2}, t)) dt. \quad (2.12)$$

En esta notación,  $F$  y  $\bar{u}$  representan los valores integrados sobre una cierta región del espacio o en el tiempo (de flujos y variables conservadas, respectivamente), mientras que  $f$  y  $u$  representan los valores definidos en la posición  $x$  y al tiempo  $t$ . La ecuación (2.11) es una solución exacta de la ecuación (2.6), y parece invitar a utilizar algún procedimiento iterativo, ya que para encontrar los flujos promedios (ecuación (2.12)) es necesario conocer la solución en el intervalo temporal  $[t, t + \Delta t]$ . Por otro lado, la manera más práctica de tratar este término es introduciendo aproximaciones en la determinación de los promedios temporales de los flujos. La calidad de la solución depende entonces del método que se utiliza para determinar la solución aproximada de los flujos, y existen maneras para encontrarlos, como veremos en las secciones siguientes: utilizar un método centrado y/o utilizar la información contenida en la propagación de las ondas asociadas a las ecuaciones hiperbólicas.



**Fig. 2.1:** Ilustración de un método de volumen finito para la actualización de la celda promedio  $\bar{u}_i^n$  por los flujos en las caras de la celda. Se muestra en el espacio  $x - t$ .

### Esquemas de alta resolución

Estos esquemas se usan en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, donde se precisa alta precisión en presencia de choques o discontinuidades. Estos esquemas tienen las siguientes propiedades:

- Se obtiene orden 2 o más alto en la precisión espacial en las partes suaves de la solución.
- Las soluciones están libres de oscilaciones espúreas.

Estos esquemas suelen usar limitadores de flujo o pendiente para limitar el gradiente alrededor de los choques o discontinuidades.

### Noción de métodos que disminuyen la variación total de una función (TVD)

¿Cuanto podemos limitar una pendiente? Idealmente nos gustaría tener una prescripción matemática que nos permita utilizar un limitador que tenga una precisión de segundo orden mientras garantice que no se presenten oscilaciones no físicas. Estas oscilaciones pueden generarse ya sea por el uso de operadores de diferencia finita (por lo que se usa operadores de volumen finito) o cuando se realiza la evolución temporal. Para lograr esto necesitamos una manera de medir las oscilaciones en la solución. Esto lo provee la noción de *variación total* ( $TV$  en sus siglas en inglés, *Total Variation*) de una función. Para una función de malla  $u_i$  definimos

$$TV(u) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_i - u_{i-1}|. \quad (2.13)$$

Para que  $TV(u)$  sea finito, uno debe asumir que  $u_i = 0$  o  $u_i = \text{constante}$  cuando  $i \rightarrow \pm\infty$ . Luego, para evitar que se produzcan oscilaciones, se requerirá que el método no incremente la variación total, es decir:

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n). \quad (2.14)$$

Notemos que la variación total no necesita en realidad disminuir en el sentido de decrecer; puede permanecer constante en el tiempo. Si un método *TVD* (*Total Variation Diminishing*) tiene un dato inicialmente monótono, es decir

$$u_i^n \geq u_{i+1}^n \quad \text{para todo } i \quad (2.15)$$

permanecerá monótono en los pasos temporales futuros. Por lo tanto, si discretizamos una discontinuidad que se propaga, la discontinuidad puede suavizarse en pasos temporales futuros, pero no podrá volverse oscilatoria.

### Limitadores de pendientes

La fórmula de flujo presentada en la sección 2.3 requiere el conocimiento de algunas predicciones de la derecha y de la izquierda para los valores de los campos dinámicos en cada interfase entre celdas. En la aproximación de volúmenes finitos sin embargo, sólo tenemos los valores promedios  $\bar{u}$  sobre toda la celda. Para obtener los valores de la interfase a partir de estos promedios, necesitaremos asumir algún perfil para los campos dinámicos  $u$ . La suposición más simple es que el perfil sea constante a trozos, como se muestra en la figura 2.2a). Notar que aparece en cada interfase una discontinuidad, donde el valor  $u_I$  se obtiene de la celda previa y los valores  $u_D$  se obtiene de la celda siguiente. Para ser más específico, en la interfase  $i + 1/2$  uno tiene que

$$u_I = u_i, \quad u_R = u_{i+1}.$$

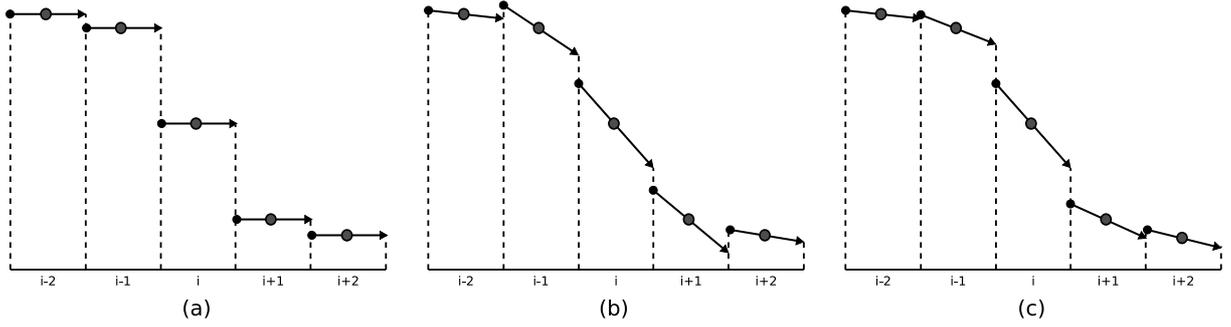
Estas predicciones hechas con la información obtenida de un solo lado, provee la predicción más simple (menor orden) para cualquier elección específica de la fórmula de flujo. Este tipo de reconstrucción asegura la estabilidad del algoritmo. Sin embargo, desde el punto de vista de la precisión el algoritmo no es muy bueno. Los métodos de alta resolución se contruyen asumiendo una reconstrucción lineal a trozos de los valores de las interfases, como se muestra en la figura 2.2b) y c). Pero esta reconstrucción debe realizarse con mucho cuidado para no perder la monotonicidad de la función original y así generar oscilaciones espúreas, como la que se produciría en la figura 2.2b) debido a que la reconstrucción no preserva la monotonicidad. Notemos en esta figura que la función original es monótonamente decreciente: todas las pendientes son negativas. Sin embargo, el valor a la izquierda de la interfase  $i - 3/2$  y el valor de la derecha de la interfase  $i + 3/2$  rompen con la monotonicidad de la función original. Un algoritmo que preserve la monotonicidad, y que se obtiene usando una reconstrucción de las pendientes lineal monótonamente centrada (MC, fig. 2.2 c)) (van Leer 1977):

$$\Delta^{MC} = \minmod \left( 2(u_i - u_{i-1}), \frac{(u_{i+1} - u_{i-1})}{2}, 2(u_{i+1} - u_i) \right). \quad (2.16)$$

La función *minmod* esta definida como:

- Si todos los argumentos tienen el mismo signo, luego se selecciona el que tiene menor valor absoluto.
- Si uno de los argumentos tiene signo diferente que los otros, luego se elige cero.

De esta forma, como puede verse de la figura 2.2c), las pendientes están limitadas para evitar las oscilaciones espúreas.



**Fig. 2.2:** a) Reconstrucción constante a trozos, b) reconstrucción lineal a trozos que no preserva la monotonicidad c) reconstrucción lineal a trozos monótonamente centrada, desde los valores promedios de los campos dinámicos.

### Método de Kurganov–Tadmor

Existen muchos métodos para resolver y capturar ondas de choque. Algunos, como Godunov, son métodos de primer orden en precisión, que introducen una gran difusión numérica generando resultados suavizados. Aumentar el orden del método no mejora del todo la precisión de la solución obtenida, ya que como es sabido, esquemas de alto orden producen oscilaciones no físicas, tales como el método Lax–Wendroff. El método Kurganov & Tadmor (2000) aquí descrito, combina la alta precisión con limitadores de pendiente que evita que se produzcan las oscilaciones no deseadas. Una característica muy relevante de este esquema central semi–discreto de segundo orden es que no requiere información de toda la descomposición característica del sistema (como lo necesitaría un esquema solucionador de Riemann), ya que sólo necesita la velocidad máxima local  $a_{i+1/2}(t)$ :

$$a_{i+1/2}(t) := \max \left[ \rho \left( \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+1/2}^+(t)) \right), \rho \left( \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+1/2}^-(t)) \right) \right] \quad (2.17)$$

donde  $\rho(A) := \max_i |\lambda^i(A)|$  se denota al radio espectral siendo  $\lambda^i(A)$  los autovalores de  $A$ . Este esquema admite la forma conservativa:

$$\frac{d}{dt} u_i(t) = - \frac{H_{i+1/2}(t) - H_{i-1/2}(t)}{dx} \quad (2.18)$$

con el flujo numérico

$$H_{i+1/2}(t) := \frac{f(u_{i+1/2}^+(t)) - f(u_{i-1/2}^-(t))}{dx} - \frac{a_{i+1/2}(t)}{2} [u_{i+1/2}^+(t) - u_{i+1/2}^-(t)]. \quad (2.19)$$

Aquí, los valores intermedios  $u_{i+1/2}^\pm$  están dados por

$$u_{i+1/2}^+ := u_{i+1} - \frac{dx}{2} (u_x)_{i+1}(t), \quad u_{i+1/2}^- := u_i + \frac{dx}{2} (u_x)_i(t). \quad (2.20)$$

Uno verifica que  $H_{i+1/2}(t) \equiv H(u_{i-1}(t), u_i(t), u_{i+1}(t), u_{i+2}(t))$  es decir, que la evolución de un paso temporal necesita dos puntos a ambos lados de  $u_i$ . El cálculo de las derivadas numéricas,  $(u_x)_i(t)$  se realiza componente a componente utilizando:

$$(u_x)_i^n := \min_{\text{mod}} \left( \theta \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{dx}, \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2dx}, \theta \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{dx} \right), \quad 1 \leq \theta \leq 2. \quad (2.21)$$

Este esquema genera menos viscosidad numérica que los esquemas usuales (Lax–Friedrichs, por ejemplo). Tiene propiedades de no generar oscilaciones espúreas, y no viola la propiedad *TVD*.

### Integrador temporal: Runge–Kutta *TVD*

Los métodos de Runge–Kutta son un conjunto de métodos iterativos (implícitos y explícitos) para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente, del problema de valores iniciales. Para evolucionar  $u_i^n$  en el tiempo, se puede discretizar al tiempo con una precisión de alto orden. Gottlieb & Shu (1998) desarrollaron un método de Runge–Kutta que además tiene la propiedad de ser *TVD*. La ecuación a resolver es

$$u_t = L(u) = -f(u)_x. \quad (2.22)$$

El método:

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t L(u^n) \quad (2.23)$$

$$u^{(2)} = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}) \quad (2.24)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{4}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}) \quad (2.25)$$

donde  $u^{(i)}$  con  $i = 1, 2$  son los pasos intermedios para calcular finalmente la evolución de  $u^n$  a lo largo de un  $\Delta t$ , es decir, el valor  $u^{n+1}$ .

## 2.4. Ecuaciones de la MHD

Las ecuaciones adimensionalizadas que describen las ecuaciones MHD ideal newtoniana en términos de las variables conservadas  $(\rho, e, S_i, B_i)$ , i.e. densidad, energía, momento lineal y campo magnético en la dirección  $i$ , son:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_j S_j &= 0 \\ \partial_t S_i + \partial_j \left[ \frac{S_j S_i}{\rho} + \left( p + \frac{B^2}{2} \right) \delta_{ij} - B_j B_i \right] &= 0 \\ \partial_t B_i + \partial_j (v_j B_i - B_j v_i) &= 0 \\ \partial_t e + \partial_i \left( (e + p + \frac{1}{2} B^2) v_i - v_j B_j B_i \right) &= 0 \\ \partial_j B_j &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

con

$$p = (\gamma - 1) \left( e - \frac{1}{2} \frac{S^2}{\rho} - \frac{1}{2} B^2 \right).$$

En esta forma, este sistema de ecuaciones es *débilmente hiperbólico* ya que no es un conjunto completo de autovectores. Esto indica que es probable que surjan inestabilidades, a menos que algunos modos estén cuidadosamente controlados.

Para remediar la pérdida de hiperbolicidad fuerte y asegurar una buena propagación del vínculo de la divergencia del campo magnético, se puede adoptar una aproximación que hace uso de la libertad de sumar al sistema de ecuaciones (2.26) cualquier término proporcional a la divergencia. El sistema

propuesto es (en analogía con el de Dedner et al. (2002)):

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + \partial_j S_j &= 0 \\
\partial_t S_i + \partial_j \left[ \frac{S_j S_i}{\rho} + \left( p + \frac{B^2}{2} \right) \delta_{ij} - B_j B_i \right] &= 0 \\
\partial_t B_i + \partial_j (v_j B_i - B_j v_i) + c_l \partial_i \phi &= 0 \\
\partial_t e + \partial_i \left( (e + p + \frac{1}{2} B^2) v_i - v_j B_j B_i \right) + c_l B_k \partial_k \phi &= 0 \\
\partial_t \phi + c_l \partial_j B_j &= -s\phi
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Notar que para  $\phi = 0$  el sistema modificado es equivalente al original, y  $\phi$  tiene una fuente proporcional al vínculo. La ventaja de esta modificación es que ahora el sistema es fuertemente hiperbólico, por lo que tiene un problema inicial bien puesto y es estable independientemente de si la divergencia del campo magnético es nula o no. Además, la ecuación de evolución inducida para  $\nabla \cdot \vec{B}$  ya no es más trivial, y esto implica que el campo  $\nabla \cdot \vec{B}$  se propaga con velocidad  $c_l$ . Por consiguiente, podemos hacer que la violación del vínculo se propague fuera de la región de integración, y si se dan condiciones de contorno correctas, la violación deja completamente la región computacional. Más aun, el último término en la ecuación para  $\phi$  en (2.27) induce un decaimiento del vínculo para  $s > 0$  cuando viaja a lo largo de la región de integración para ayudar a mantener el vínculo bajo control.

## 2.5. Problemas de prueba y convergencia numérica

### Convergencia para el método de Kurganov–Tadmor

En el trabajo de Nessyahu & Tadmor (1992) se presenta la tasa de convergencia de un método numérico cuando se desarrollan choques en la evolución numérica. En este trabajo se demuestra que el orden de la tasa de convergencia obtenida a partir de la norma  $L_1$  es igual a 1 ( $\mathcal{O}(\epsilon)$ ), mientras que en norma  $L_2$  es igual a 0.5 ( $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$ ). Se realizaron varias pruebas numéricas para comprobar que la convergencia del método K–T cae a estos valores cuando hay ondas de choque presentes. Las condiciones de contorno implementadas son periódicas. En lo que sigue, usaremos al factor  $Q$  como el orden de convergencia del método. Para realizar estas pruebas se tomó  $\theta = 1.5$ .

#### Dato suave

Utilizamos la ecuación de Burgers  $\left( u_t + \left( \frac{u^2}{2} \right)_x = 0 \right)$  con  $u = (\rho, p, v)$  y un dato inicial suave para producir choques en la evolución temporal. El dato inicial es el siguiente:  $\rho = 1 + 4^4(x+1)^4 x^4$ ,  $p = (\gamma - 1)(0.1 + 8 * 4^4(x+1)^4 x^4)$ ,  $v = 0$ .

Como puede verse en la figura 2.3 antes que se produzca el choque ( $t < 0.15$ ) el factor de convergencia es 2. Cuando se produce el choque, la tasa de convergencia cae a 1 para el caso de la norma  $L_1$  y a 0.5 para la norma  $L_2$  como es de esperarse. A tiempo  $t = 1$ , la onda de choque todavía no ha llegado al contorno.

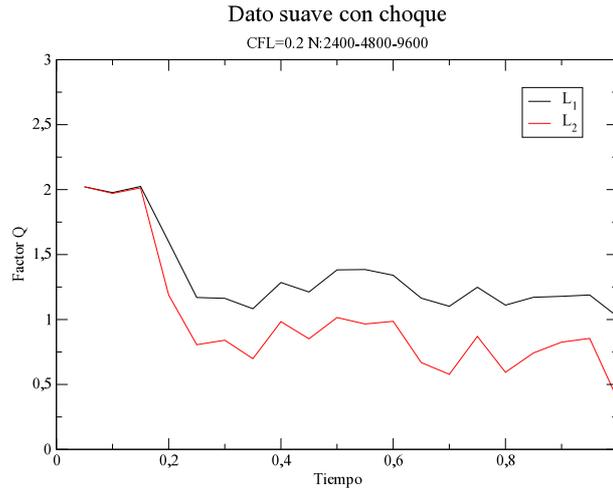


Fig. 2.3: Convergencia de K–T cuando se produce una onda de choque a partir de un dato suave.

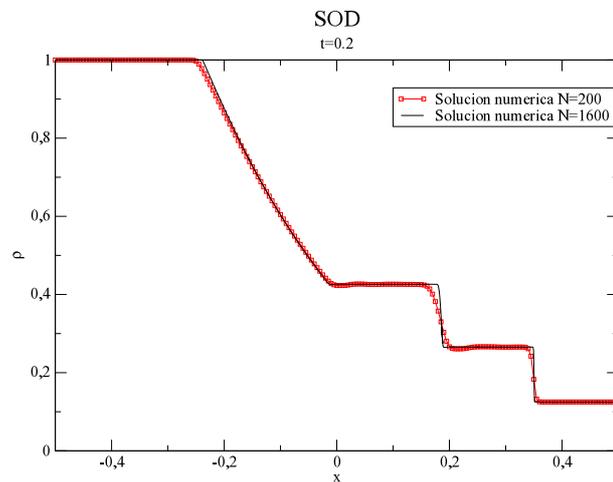
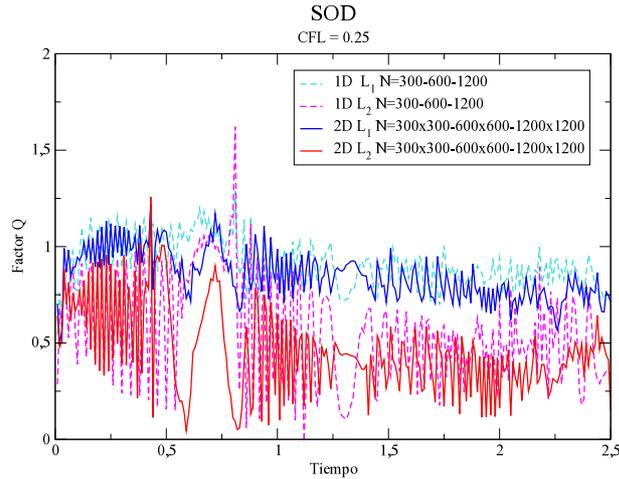


Fig. 2.4: Comparación del resultado obtenido para la densidad con varias resoluciones en el caso de SOD.

### Tubo de choque

El problema de tubo de choque hidrodinámico o como suele llamarse, problema de SOD, en un problema de discontinuidad de flujo que provee una buena manera de probar la habilidad del código de capturar ondas de choque y discontinuidades de contacto y producir el perfil correcto en una onda de expansión. Se construye las condiciones iniciales para este problema estableciendo una interfase en un punto, en el caso unidimensional o en un plano con algún ángulo en el plano  $x - y$ . El fluido inicialmente se encuentra en reposo en ambos lados de la interfase, y el salto en densidad y presión se escoge de tal modo que se desarrollen los tres tipos de ondas no-lineales hidrodinámicas (choque, discontinuidad de contacto y onda de expansión). A la Izquierda y a la Derecha de la interfase tenemos:  $\rho_I = 1$ ,  $v_I = 0$ ,  $p_I = 1$ ; y  $\rho_D = 0.125$ ,  $v_D = 0$ ,  $p_D = 0.1$ . La tasa del calor específico  $\gamma = 1.4$  en ambos lados de la interfase. Se impuso una condición de contorno periódica para calcular la convergencia.



**Fig. 2.5:** Convergencia de K-T para el tubo de choque hidrodinámico.

En la figura 2.4 se muestra la solución numérica de la densidad obtenida a partir de distintas resoluciones al tiempo  $t = 0.2$ . Se observa que el método captura las tres ondas no-lineales. Cuando se aumenta la resolución la solución converge a la solución analítica.

En la figura 2.5 se muestran las convergencias calculadas con la normas  $L_1$  y  $L_2$  para el caso del tubo de choque en 1 y 2 dimensiones. En el caso bidimensional se tomó una interfase oblicua en el plano  $x - y$ . Las condiciones de contorno impuestas son periódicas. Se ve como la convergencia oscila entre los valores esperados para el factor  $Q$ .

### Brio-Wu

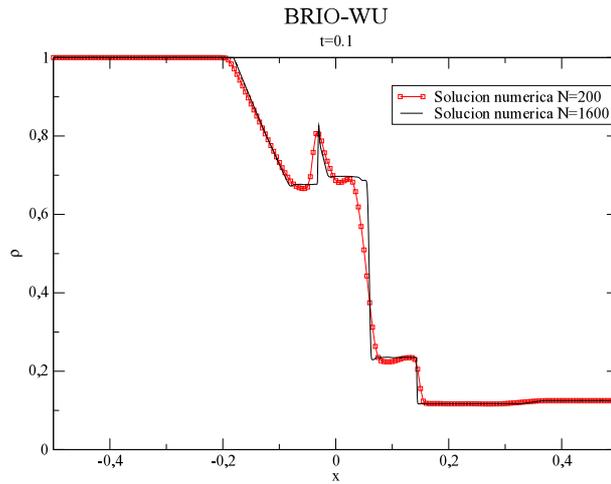
El problema de tubo de choque magnetohidrodinámico de Brio-Wu es la contraparte magnetohidrodinámica coplanar del problema hidrodinámico de SOD. Los estados iniciales de la izquierda y derecha de la interfase, están dadas por:  $\rho_I = 1$ ,  $u_I = v_I = 0$ ,  $p_I = 1$ ,  $(B_y)_I = 1$ ; y  $\rho_D = 0.125$ ,  $u_r = v_D = 0$ ,  $p_D = 0.1$ ,  $(B_y)_D = -1$ . Además,  $B_x = 0.75$  and  $\gamma = 2$ . Este es un buen problema para probar la captura de ondas de la MHD, porque involucra dos ondas rápidas de expansión, una onda compuesta lenta, una discontinuidad de contacto y una onda de choque lenta.

En la figura 2.6 se muestra la solución numérica de la densidad obtenida a partir de distintas resoluciones al tiempo  $t = 0.1$ . Se

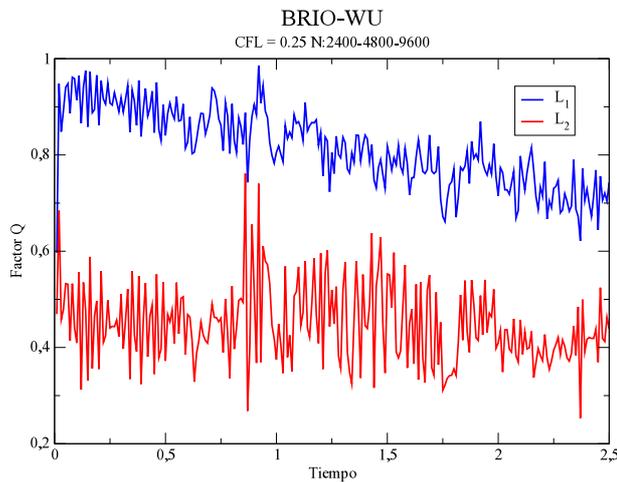
observa que el método captura las ondas no-lineales de la MHD. Cuando se aumenta la resolución la solución converge a la solución analítica.

En la figura 2.7 se muestran las convergencias calculadas con la normas  $L_1$  y  $L_2$  para el caso del tubo de choque magnetohidrodinámico unidimensional. Las condiciones de contorno impuestas son periódicas. Se ve como la convergencia oscila entre los valores esperados para el factor  $Q$ .

Con estas pruebas realizadas, aseguramos que el método fue bien implementado y esto da confianza a los resultados numéricos encontrados.



**Fig. 2.6:** Comparación del resultado obtenido para la densidad con varias resoluciones en el caso de Brio-Wu.

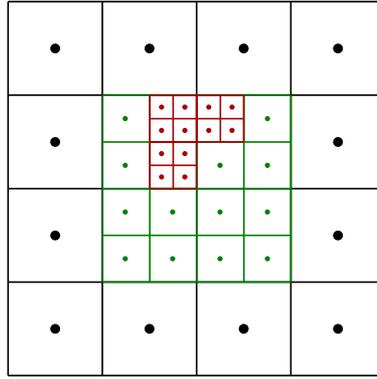


**Fig. 2.7:** Convergencia de K-T para el tubo de choque magnetohidrodinámico.

## 2.6. Refinamiento de malla numérica

Al resolver numéricamente problemas de la física, las soluciones suelen presentar regiones donde los gradientes son mucho mayores que en otras regiones. Por lo tanto, estas regiones requieren mayor resolución numérica y se necesita superponer mallas con mayor cantidad de puntos en estos lugares. Esto puede hacerse de una manera fija (*Fixed Mesh Refinement, FMR*), que es el caso utilizado en esta tesis, o puede hacerse de manera dinámica o adaptable (*Adaptive Mesh Refinement, AMR*).

En esta dirección Anderson et al. (2006) desarrollaron un código numérico tridimensional, *HAD (Hyper AMR Driver)*. La aproximación de refinamiento de malla, usa una colección de mallas rectangulares que conforman una malla gruesa. Los refinamientos cubren un subconjunto del dominio y usa parches de mallas rectangulares más pequeñas, como puede verse de la figura 2.8. Estos parches finos pueden anidarse

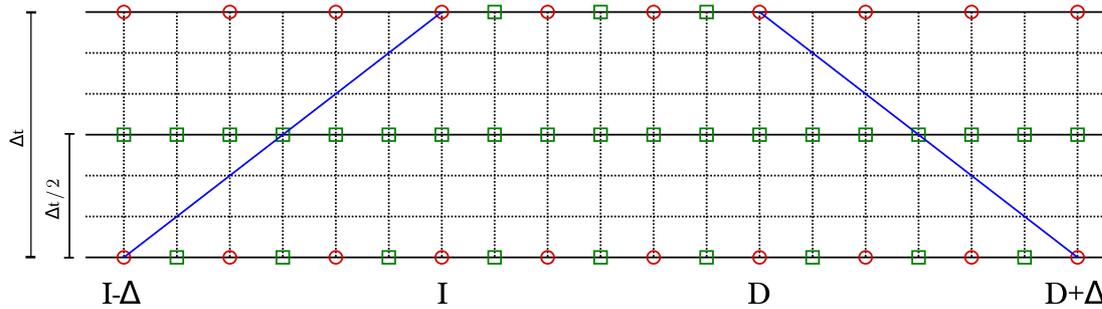


**Fig. 2.8:** Jerarquía *AMR* que consiste de 4 parches y 3 niveles. En este caso, el nivel 3 está compuesto de una grilla cuadrada y una rectangular.

recursivamente hasta que se alcanza un dado nivel de precisión. Típicamente, si un parche al nivel  $L$  es refinado en  $x$  e  $y$  por un entero par  $R_L$ , luego el paso temporal se define también por el mismo factor, tal que se deben tomar  $R_L$  pasos temporales sobre la malla refinada en el nivel  $L + 1$  por cada paso sobre el nivel  $L$ . Las razones de las mallas  $\Delta t/\Delta x$  y  $\Delta t/\Delta y$  son las mismas en toda la malla, asegurando la estabilidad con diferencia explícita.

Se usa un método de volumen finito para avanzar la solución sobre la jerarquía de malla obtenida. Las celdas promediadas para cada variable se almacena en cada celda de la malla. Cuando se resuelve una ley de conservación, estas celdas promedio se actualizan por un algoritmo de diferencias de flujos basados en los flujos que atraviesan los bordes de las celdas. Se procede con la integración por nivel de malla. Todas las mallas al nivel 1 se integran primero sobre un paso temporal. Luego las mallas al nivel 2 se integran  $R_1$  pasos temporales para alcanzar el mismo paso temporal alcanzado por el nivel 1. Esta aproximación se aplica recursivamente sobre cada nivel.

Las condiciones de contorno sobre las mallas se imponen usando “celdas fantasmas”. El dominio computacional se extiende por  $G$  celdas fantasmas en cada dirección, y los valores son asignados a las celdas fantasmas en el comienzo de cada paso temporal (aquí usamos  $G = 2$ ). En el contorno físico, se debe establecer los valores de las celdas fantasmas en cada paso temporal basado en la especificación del problema (por ejemplo, extrapolación en un contorno de flujo saliente, o reflexión en una pared sólida). Sin embargo, el contorno de una malla fina puede ser interior al dominio. En ese caso, se debe usar interpolación espacial sobre la malla gruesa vecina, ya que se necesitan más valores disponibles de la malla fina. En este caso, la elección del método más adecuada, ya que garantiza la estabilidad del método, es el método de contorno cónico: si la malla fina en el tiempo avanzado  $n + 1$  está definida en  $x \in [I, D]$ , la actualización desde el tiempo  $n$  debe llevarse a cabo en la región  $x \in [I - \Delta, D + \Delta]$  con  $\Delta \equiv n_p dx$  dado por un número suficiente de puntos para asegurar que el dominio numérico de dependencia de  $[I, D]$  que comienza en  $n + 1$  está completamente contenido en  $[I - \Delta, D + \Delta]$ . Esto está ilustrado en la figura 2.9. El tamaño de  $\Delta$  está determinado por el orden de precisión del operador discreto involucrado y la velocidad máxima del problema hiperbólico considerado (Lehner et al. 2006).



**Fig. 2.9:** Los círculos/cuadrados denotan los puntos de la malla gruesa/fina. Las líneas continuas indican el dominio de dependencia pasado de la región refinada en el nivel  $n + 1$  y su intersección con el nivel  $n$  indica la región que necesita tener valores en la malla fina. Por lo tanto, todos los puntos fuera del dominio de dependencia son efectivamente descartados.

## BIBLIOGRAFÍA

- Anderson, M., Hirschmann, E. W., Liebling, S. L., & Neilsen, D. 2006, *Classical and Quantum Gravity*, 23, 6503
- Dedner, A., Kemm, F., Kröner, D., et al. 2002, *Journal of Computational Physics*, 175, 645
- Gottlieb, S. & Shu, C. W. 1998, *Mathematics of Computation*, 67, 73
- Kurganov, A. & Tadmor, E. 2000, *Journal of Computational Physics*, 160, 241
- Lehner, L., Liebling, S. L., & Reula, O. 2006, *Classical and Quantum Gravity*, 23, 421
- LeVeque, R. 2002, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics (Cambridge University Press)
- Nessyahu, H. & Tadmor, E. 1992, *SIAM J. of Numerical Analysis*, 29, 1505
- Toro, E. 2009, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg)
- van Leer, B. 1977, *Journal of Computational Physics*, 23, 276

## Parte II

# Procedimiento y Resultados



# Condiciones de contorno que preservan el vínculo para las ecuaciones de la MHD ideal newtoniana

En este capítulo se desarrolla el trabajo publicado por Cécere et al. (2008). Se describe el estudio y desarrollo de condiciones de contorno que preservan el vínculo para las ecuaciones de la MHD ideal en el límite newtoniano; y el análisis del comportamiento de las soluciones numéricas considerando diferentes opciones. El trabajo se concentró en el sistema estándar de las ecuaciones de la MHD ideal y en el sistema aumentado por una función escalar que controla la divergencia del campo magnético. Dados los diferentes estudios numéricos realizados, se muestra cómo las condiciones de contorno desarrolladas reducen significativamente las violaciones generadas en los contornos al nivel numérico y cómo reduce su influencia en el interior del dominio computacional haciendo uso de la libertad disponible en las ecuaciones.

## 3.1. Introducción

Los campos magnéticos juegan un rol importante en el comportamiento de plasmas, y se estudian en efectos importantes tales como dínamos en el núcleo de los planetas, la formación de *jets* en núcleos activos galácticos (*AGN*) y explosiones de rayos gamma; en una variedad de inestabilidades magnéticas; tales como fulguraciones solares, sistemas de arcos coronales, etc (Goedbloed & Poedts 2004; Davidson 2001). La MHD ideal, describe con buena aproximación la física de la atmósfera solar. La no-linealidad de las ecuaciones de la MHD, dificulta la obtención de soluciones analíticas. Esto implica que las soluciones para sistemas complejos deben obtenerse por medio de implementaciones numéricas. Tal implementación,

debe ser capaz de evolucionar la solución, desde alguna configuración inicial y garantizar su calidad. Para estimar esto se puede supervisar una cantidad subsidiaria. Esta cantidad es el vínculo del monopolo magnético,  $\nabla \cdot \vec{B}$  que debe ser cero en el nivel analítico para una solución consistente. Este vínculo no es parte de las variables principales que evolucionan, sino que es una cantidad derivada, y que debe satisfacerse en la solución física real. En la práctica, a menos que se diseñe cuidadosamente una implementación numérica de las ecuaciones de la MHD, este vínculo puede ser violado severamente, y así obtener soluciones numéricas erróneas. Por estas razones, se han investigado y desarrollado distintas propuestas para garantizar el comportamiento controlado de esta cantidad. Uno de estos enfoques es la técnica de transporte del vínculo, donde Evans & Hawley (1988) y Tóth, G. (2004) adoptaron un algoritmo que alterna las variables de forma apropiada para asegurar que se satisfaga el vínculo al nivel de redondeo con técnicas de diferencias finitas y de elementos finitos. Sin embargo, la implementación de esta técnica impone límites sobre las opciones del algoritmo. Estas limitaciones pueden introducir complicaciones, con aplicaciones donde se requiera un refinamiento adaptable de malla numérica y/o cuando se requiera implementar técnicas numéricas avanzadas. Otra opción alternativa, que controla el vínculo al nivel del error de truncamiento, es la técnica de la limpieza de la divergencia o *divergence cleaning* que pone el peso del control del vínculo no en el algoritmo, sino en el sistema de ecuaciones a resolver (Kim et al. 1999; Dedner et al. 2002). Esto se logra considerando una variable adicional acoplada al sistema de ecuaciones a través de otra ecuación, tal que, en la evolución, el vínculo se mantenga bajo control. Aunque este método ha recibido menos atención que la técnica del transporte del vínculo, ha sido utilizado satisfactoriamente en varias aplicaciones en diversos escenarios (Dedner et al. 2002; Balsara & Kim 2004; Tóth, G. 2004; Anderson et al. 2006; Neilsen et al. 2006).

Mas allá de la técnica empleada, las condiciones de contorno juegan un rol importante. Claramente, aún cuando se adopte una opción estable, ésta no es necesariamente consistente con el hecho de que debe preservarse el vínculo (sea al nivel de redondeo o de truncamiento) por lo que se deben formular las condiciones de contorno con cuidado. Comunmente, las opciones empleadas incluyen condiciones del tipo flujo saliente –las cuales no se imponen al vínculo– o condiciones de absorción cuya meta es reducir la influencia de efectos espúreos inducidos por la solución numérica en el contorno.

Como parte de esta tesis, formulamos e implementamos condiciones de contorno que preserven el vínculo para las ecuaciones de la MHD newtoniana ideal (para sistemas con y sin *divergence cleaning*). Esta tarea está íntimamente relacionada a las propiedades hiperbólicas de las ecuaciones y así reanalizamos el sistema de ecuaciones y discutimos alternativas para controlar el vínculo a través de la técnica del *divergence cleaning*. En la sección 3.2 analizamos el sistema de ecuaciones y la formulación de las condiciones de contorno, comenzando con un modelo simplificado para extraer la estrategia a aplicar en el sistema MHD completo. En la sección 3.3 presentamos una serie de pruebas numéricas que resaltan los beneficios obtenidos por esta nueva reconstrucción.

### 3.2. Las ecuaciones newtonianas y la limpieza hiperbólica del vínculo

Las ecuaciones que describen las ecuaciones MHD ideal newtoniana en términos de las variables  $(\rho, p, v_i, B_i)$  son:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho &= -\partial_j(\rho v_j) \\
 \partial_t p &= -v_i \partial_i p - \gamma p \partial_j v_j \\
 \rho \partial_t v_i &= -\rho v_j \partial_j v_i - \partial_i p - \partial_j \left( \delta_{ij} \frac{B_k B_k}{2} - B_j B_i \right) \\
 \partial_t B_i &= -\partial_j (v_j B_i - B_j v_i)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como vimos en la sección 2.4 este sistema de ecuaciones es *débilmente hiperbólico*. Como mencionamos en la sección anterior, el vínculo puede ser controlado con la adición de un campo extra acoplado al sistema. En la sección siguiente, mostramos cómo funciona esta técnica.

### Preliminares

Para mostrar como funciona esta técnica, consideremos un modelo simple para poder mostrar las características esenciales de este método. Este modelo comparte los principales aspectos problemáticos del sistema MHD original (3.1). Este caso simple consiste de un campo magnético el cual evoluciona bajo:

$$\partial_t B_i = -\partial_j (v_j B_i - v_i B_j). \tag{3.2}$$

Esta ecuación es débilmente hiperbólica, ya que un análisis de onda plana indica que si el vector número de onda es perpendicular al vector velocidad, existen sólo dos autovectores linealmente independientes. Para ver esto, consideremos el caso donde el vector número de onda es normal al vector velocidad, y definamos el eje coordenado tal que el primer eje yace a lo largo del vector de onda  $-k_i = (k, 0, 0)$ – el segundo a lo largo del vector velocidad,  $-v_i = (0, v, 0)$ – y el tercero, perpendicular a ellos. Luego el problema de autovalores/autovectores, obtenido a partir de proponer la solución  $B_i = U e^{i(\sigma t + \vec{k} \cdot \vec{x})}$ , da el siguiente problema:  $\sigma U = M U$  (con  $\sigma$  y  $U$  una frecuencia y un vector a determinar), y  $M$  definido como:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ kv & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

la cual claramente no es diagonalizable. Así vemos que no existe estabilidad en el sentido usual de la norma  $L_2$ . La divergencia del campo magnético se preserva por la ecuación (3.2), esto es, si definimos  $D := \partial_k B_k$  y tomamos la divergencia de la ecuación (3.2), obtenemos la ecuación de evolución inducida para  $D$ :  $\partial_t D = 0$ . Por lo tanto, si  $D$  es cero inicialmente, permanecerá cero mientras las líneas de integración temporal no intersecten un contorno. Sin embargo, notemos que si en vez de considerar la norma  $L_2$ , consideramos una norma diferente definida a partir de sumar un término proporcional a la divergencia de  $B_i$ :

$$\mathcal{E} = \int_{\Sigma_t} [B^2 + c(\partial_k B_k)^2] dV \tag{3.4}$$

podemos mostrar que  $\dot{\mathcal{E}} = 0$  y así la energía está controlada. Por lo tanto, desde el punto de vista analítico, la ecuación (3.2) no es mala.

Al nivel numérico, las cosas se vuelven más delicadas, ya que surgen violaciones del vínculo debido a los errores de truncamiento o de redondeo. Estos errores crecerán a menos que se haga una implementación adecuada de las ecuaciones. Además, aún cuando el esquema de integración sea capaz de controlar el vínculo en ausencia de bordes, las condiciones de contorno modifican las ecuaciones en los bordes. Esto

puede causar que el vínculo crezca y se propague hacia el interior. El próximo paso es encontrar una manera de lograr un comportamiento más robusto. Para ello, primero trabajamos al nivel analítico y adoptamos una estrategia que ayudará más allá del problema simple que estamos tratando ahora.

Para remediar la pérdida de hiperbolicidad fuerte y asegurar una buena propagación del vínculo, se puede adoptar una aproximación que hace uso de la libertad de sumar a la ecuación (3.2) cualquier término proporcional a la divergencia. El sistema propuesto es fuertemente hiperbólico (en analogía con el de Dedner et al. 2002, para el caso hiperbólico):

$$\begin{aligned}\partial_t B_i &= -\partial_j(v_j B_i - v_i B_j) - c_l \partial_i \phi, \\ \partial_t \phi &= -c_l \partial_k B_k - s\phi,\end{aligned}\tag{3.5}$$

como vimos en la sección 2.4, y por lo tanto el sistema tiene un problema bien puesto y es estable ya sea que la divergencia del campo magnético se anule o no.

### *Condiciones de contorno*

Para fijar ideas, estudiaremos las posibles condiciones de contorno (CC) para el sistema descrito anteriormente. Nuestro objetivo es definir condiciones que produzcan un problema bien puesto y si es posible, que garantice que no se introduzcan violaciones dentro del dominio computacional. Para tal fin debemos determinar cuales son los modos entrantes y salientes fuera de la superficie del contorno, ya que esta información nos proporciona la clave para entender que dato puede especificarse libremente. Para esto buscamos una solución de la forma  $(B_i, \phi) = U e^{i(\sigma t + n_j x_j)}$ , donde  $U$  es un vector que se determina junto con la frecuencia  $\sigma$  y  $n_i$  es la normal saliente al contorno considerado. Aplicando esta solución al sistema obtenemos:

$$\begin{aligned}\sigma B_i &= -B_i v_n + v_i B_n - c_l n_i \phi \\ \sigma \phi &= -c_l B_n,\end{aligned}\tag{3.6}$$

donde  $B_n := B_i n_i$  y  $v_n := v_i n_i$ . Este problema de autovalores/autovectores puede resolverse para determinar los modos entrantes ( $\sigma > 0$ ), tangenciales ( $\sigma = 0$ ) y salientes ( $\sigma < 0$ ). Una condición necesaria para un problema bien puesto para sistemas hiperbólicos, indica que el dato debe estar dado sólo para los modos entrantes, ya que los otros están determinados desde el interior de la región de integración (Gustafsson et al. 1996; Reula 2004). Recordemos que los modos entrantes pueden definirse incluso como funciones lineales de los modos salientes, siempre que los coeficientes sean lo suficientemente pequeños. Dado un contorno, hay tres autovalores ( $\sigma_0 := v_n, \sigma_{\pm} := \pm c_l$ ). El primero corresponde a dos modos linealmente independientes, que expanden el espacio tangente al punto del contorno (i.e. ellos son perpendiculares a  $n_i$ ). Son positivos siempre y cuando la velocidad sea entrante. Estos modos son arrastrados a lo largo de  $v_i$  y corresponden a condiciones de contorno especificables físicamente, es decir, en puntos donde la velocidad es entrante a la región de integración, debemos especificar las componentes tangenciales al campo magnético. En cualquier otro punto no podemos dar ningún dato de contorno, porque eso sería generalmente inconsistente con la solución. Los otros autovalores corresponden a los casos donde podemos elegir  $B_n := b$  arbitrariamente y,

$$\begin{aligned}B_i &= \frac{(v_i \pm n_i c_l) b}{v_n \pm c_l} \\ \phi &= \mp b\end{aligned}$$

los cuales aparecen, gracias a la introducción artificial del campo  $\phi$ . Notemos que siempre podemos elegir un valor para  $c_l$  más grande que la velocidad máxima esperada, de modo que el denominador nunca se anule. El autovector correspondiente al autovalor positivo determinará la combinación de la variable que debe darse adecuadamente para preservar el vínculo. La expresión completa para la autobase y su cobase es:

$$\begin{aligned} U_1^0 &:= (0, e_1, 0), \quad \sigma = -v_n \\ U_2^0 &:= (0, e_2, 0), \quad \sigma = -v_n \\ U^\pm &:= \left( 1, \frac{v_i \pm n_i c_l}{v_n \pm c_l}, \mp 1 \right), \quad \sigma = \pm c_l, \end{aligned}$$

donde el vector  $U := (B_n, \tilde{B}_i, \phi)$  con  $\tilde{B}_i n_i = 0$ , y  $e_1, e_2$  son dos vectores ortonormales sobre el espacio tangencial al contorno.

La cobase está dada por

$$\begin{aligned} \theta_1^0 &:= \left( \frac{v_n v_1}{c_l^2 - c_n^2}, e_1, \frac{c_l v_1}{c_l^2 - c_n^2} \right) \\ \theta_2^0 &:= \left( \frac{v_n v_2}{c_l^2 - c_n^2}, e_2, \frac{c_l v_2}{c_l^2 - c_n^2} \right) \\ \theta_\pm &:= \frac{1}{2}(1, 0, \mp 1), \end{aligned}$$

donde  $v_1 := (e_1)_i v_i$ , y  $v_2 := (e_2)_i v_i$ . Estas expresiones se pueden combinar fácilmente para definir un operador proyector que nos sirva para definir condiciones de contorno **no-entrantes** (NE). Estas condiciones anulan los modos que se propagan hacia dentro del dominio de cómputo. Para este fin, uno puede emplear los vectores base/cobase correspondientes al modo entrante y definir el operador proyector  $\Xi^+$  como

$$\Xi^+ = U^+ \theta_+ .$$

Las condiciones de contorno no-entrantes se pueden definir simplemente como  $\Xi^+(\dot{U}) = 0$ .

La definición de la condición de contorno que **preserva el vínculo** (de aquí en adelante, CCPV) requiere de un trabajo adicional. Para ello debemos analizar el sistema subsidiario determinando la evolución del vínculo. Con el fin de tratarlo como un sistema de primer orden, definimos una nueva variable  $\delta_i := \partial_i \phi$ , cuya ecuación de evolución se determina por (la derivada temporal de) la ecuación de evolución de  $\phi$ . El sistema subsidiario completo luego es:

$$\begin{aligned} \partial_t D &= -c_l \partial_i \delta_i, \\ \partial_t \delta_i &= -c_l \partial_i D - s \delta_i. \end{aligned}$$

Aquí nuevamente investigamos cuales son los modos entrantes y salientes para este sistema. La idea es imponer condiciones de contorno al sistema principal de modo que nos aseguremos que no se creen modos entrantes para este sistema subsidiario. De esta forma, la unicidad de la solución (trivial) nos garantizará que la solución del sistema principal tenga vínculo nulo y por lo tanto, sea una solución del sistema original. Como se hizo previamente, las soluciones de onda plana del sistema perpendicular al contorno

dan el siguiente problema de autovalores/autovectores:

$$\begin{aligned}\kappa D &= -c_l n_i \delta_i, \\ \kappa \delta_i &= -c_l n_i D,\end{aligned}$$

y sus autovalores son  $\kappa_0 = 0, \kappa_{\pm} = \pm c_l$  con los correspondientes autovectores:

$$\begin{aligned}V_1^0 &:= (0, e_1, 0), \quad \kappa_0 = 0 \\ V_2^0 &:= (0, e_2, 0), \quad \kappa_0 = 0 \\ V^{\pm} &:= \left(1, \frac{v_i \pm n_i c_l}{v_n \pm c_l}, \mp 1\right), \quad \kappa_{\pm} = \pm c_l,\end{aligned}$$

donde el vector  $V := (\delta_n, \tilde{\delta}_i, D)$  con  $\tilde{\delta}_i n_i = 0$ , y  $e_1, e_2$  son dos vectores ortonormales que viven en el espacio tangente al contorno. La cobase está dada por:

$$\begin{aligned}\Theta_1^0 &:= (0, e_1, 0) \\ \Theta_2^0 &:= (0, e_2, 0) \\ \Theta_{\pm} &:= \frac{1}{2}(1, 0, \mp 1).\end{aligned}$$

Aquí de nuevo la teoría de las condiciones de contorno indica que deberíamos dar como condición de contorno el modo entrante como función lineal de un modo saliente. Esto es, deberíamos asegurar que el dato del contorno para el sistema principal sea tal que:

$$\Theta_+(V) + a\Theta_-(V) \hat{=} 0, \quad |a| < 1$$

(donde  $\hat{=}$  significa que se puede sumar términos fuente y conservar la estabilidad, Gustafsson et al. 1996). Esta es una combinación lineal de las derivadas espaciales de los campos y puede implementarse de diferentes maneras dependiendo del problema a tratar. Esta condición de contorno implica que la amplitud del modo entrante depende de la amplitud del modo saliente, ya que  $|a| < 1$  implica atenuación. A estas condiciones se las llama generalmente **disipativas**. Existen dos valores límite:  $|a| = 0$  el cual se refiere a la “máximamente disipativo” y  $|a| \rightarrow 1$  que da lugar a una reflexión perfecta. Los casos con  $|a| > 1$  corresponden a sistemas donde el contorno amplifica los campos. Estas condiciones además de no ser físicas para muchos casos de interés, son mucho más dificultosas de tratar. En el caso máximamente disipativo (con  $a = 0$ ), no hay reflexión y las ondas se disipan lejos del borde. Por esta razón, se suele decir que esta condición es también no-entrante (Gustafsson et al. 1996).

Implementamos las condiciones de contorno antes mencionadas, al nivel de la evolución de las ecuaciones. Para ello se modificaron las ecuaciones de evolución en el contorno de manera que el vínculo se satisfaga allí. Desde las ecuaciones de evolución del sistema principal podemos resolver  $D$  y  $\delta_n$  en términos de la derivada temporal de  $B_n$  y  $\phi$  (y las ecuaciones restantes). Por lo tanto

$$\begin{aligned}\delta_n &= -\frac{1}{c_l}(\partial_t B_n - F_n), \\ D &= -\frac{1}{c_l}(\partial_t \phi - F_{\phi}),\end{aligned}\tag{3.7}$$

donde  $F_n = -n_i \partial_j (v_j B_i - v_i B_j)$  y  $F_\phi = -s\phi$ .

Podemos luego traducir la condición de contorno anterior como:

$$-\dot{B}_n(1+a) + \dot{\phi}(1-a) + F_n(1+a) - F_\phi(1-a) \hat{=} 0,$$

lo cual puede reescribirse como:

$$-2(\theta_+(U) + a\theta_-(U)) + F_n(1+a) - F_\phi(1-a) \hat{=} 0.$$

Para el caso particular de escoger los modos de vínculo entrante a cero ( $a = 0$ ), esto implica que:

$$\theta_+(U) = \frac{1}{2}(F_\phi - F_n). \quad (3.8)$$

Así la condición de contorno definida por la ecuación anterior no sólo es máximamente disipativa sino que además hace cumplir el vínculo.

### El sistema completo

Aplicamos una estrategia análoga a la anterior para el caso del sistema completo. En la mayoría de los trabajos sobre MHD, las variables del sistema suelen ser  $U = (\rho, e, v_i, B_i)$  en vez de  $U = (\rho, p, v_i, B_i)$  –energía interna  $e$  en vez de presión  $p$ –. En el último caso, es más simple la descomposición característica. Por lo tanto, la evolución del sistema será en las variables conservativas, y obtendremos la estructura de características haciendo un cambio de variables. Nuestro sistema de interés es una variación de las ecuaciones MHD iniciales:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= -\partial_j (\rho v_j) \\ \rho \partial_t v_i &= -\rho v_j \partial_j v_i - \partial_i p - B_k (\partial_i B_k - \partial_k B_i) + \alpha B_i \partial_k B_k \\ \partial_t B_i &= -\partial_j (v_j B_i - B_j v_i) - \alpha v_i \partial_j B_j - c_l \partial_i \phi \\ \partial_t e &= -\partial_i \left( (e + p + \frac{1}{2} B^2) v_i - v_j B_j B_i \right) - \alpha v_i B_i \partial_k B_k - c_l B_k \partial_k \phi \\ \partial_t \phi &= -\alpha v_j \partial_j \phi - c_l \partial_j B_j - s\phi \end{aligned} \quad (3.9)$$

con  $p = (\gamma - 1) (e - \frac{1}{2} \rho v^2 - \frac{1}{2} B^2)$  y  $c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  la velocidad del sonido.

Este sistema posibilita hacer la limpieza de la divergencia ( $c_l \neq 0$ ) y la invariancia Galileana ( $\alpha = 1$ ) y es fuertemente hiperbólico, por lo que tiene un sistema completo de autovectores. Esto nos permitirá introducir un nuevo tratamiento del contorno el cual asegura que no se introduzcan violaciones del vínculo a través de contorno computacional. El parámetro  $\alpha$  controla la libertad de agregar la ecuación del vínculo. En lo que sigue, usaremos los valores  $\alpha = 0, 1$ . El valor  $\alpha = 0$  corresponde a un sistema puramente hiperbólico (notar que la ecuación de velocidad puede reescribirse con la ayuda de la primera ecuación como una conservación del momento). El caso  $\alpha = 1$  da lugar a un sistema que es invariante Galileano (ver Dedner et al. 2002) y también al caso donde el sistema es fuertemente hiperbólico (Godunov 1972; Barth 1999) irrespecto del campo  $\phi$ . Por lo tanto podemos estudiar el límite donde el campo  $\phi$  se desacopla y el vínculo se propaga a lo largo del campo de velocidades.

#### **El sistema del contorno**

Como hicimos anteriormente, consideremos ahora un contorno con una normal unitaria saliente  $n_i$  y obtengamos la descomposición característica en este contorno. Por notación, emplearemos una barra que

denota la perturbación de una dada variable, por ejemplo  $\bar{\rho}$  denotará la perturbación de  $\rho$  la cual será considerada como una cantidad fija de fondo. La descomposición característica se determina del sistema  $\sigma U = AU$ , donde  $A$  es

$$A = \begin{pmatrix} -v_n & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_n & 0 & B_n/\rho & -\tilde{B}_i/\rho & -1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & -v_n & \tilde{B}_i/\rho & B_n/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_l \\ 0 & -\tilde{B}_i & B_n & \tilde{v}_i & -v_n & 0 & 0 \\ 0 & -c_s^2\rho & 0 & -(\gamma-1)B_j v^j & 0 & -v_n & -(\gamma-1)c_l B_n \\ 0 & 0 & 0 & -c_l & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

La solución de este sistema es muy complicada y requiere un tratamiento especial para distintos casos. El análisis completo y la solución se presenta en el Apéndice A en términos del vector perturbación  $U = (\bar{\rho}, \bar{v}_n, \tilde{v}_i, \bar{B}_n, \tilde{B}_i, \bar{p}, \bar{\phi})$  indicando perturbaciones de  $(\rho, v_n, \tilde{v}_i, B_n, \tilde{B}_i, p, \phi)$  respectivamente, con  $\tilde{v}_i, \tilde{B}_i$  las componentes de  $v_i, B_i$  ortogonales al contorno. Mientras la descomposición característica es muy larga (como puede verse del Apéndice B1.1), la descomposición característica asociada a  $B_n$  y  $\phi$  es particularmente simple. De hecho, el elemento asociado a la co-base está dado por

$$\Theta_{L\pm} = \frac{1}{2B_n}(0, 0, 0, 1, 0, 0, \pm c_l^{-1}),$$

es decir, involucra sólo  $B_n$  y  $\phi$ , por lo tanto, la imposición de una condición de contorno adecuada estará directamente relacionada con la discusión del modelo simplificado de la sección 3.2.

### Condiciones de contorno

Teniendo la estructura completa de las características podemos determinar las posibles condiciones de borde. Una condición simple es establecer todos los modos entrantes a cero, pero esto, generalmente, no será consistente con el vínculo. Para este fin, debemos analizar la evolución inducida por el vínculo y obtener de esta evolución una receta que proporcione los modos entrantes. En el caso general, notemos que  $\Theta_{L\pm}$  es esencialmente el mismo que da lugar a la ecuación (3.8), ya que es no trivial sólo para las componentes  $B_n$  y  $\phi$ . Entonces podemos seguir con la misma estrategia y formular las condiciones de contorno que preservan el vínculo haciendo cumplir:

$$0 = UL_+ \Theta_{L+} \dot{U} = UL_+ \left( \frac{1}{2}(F_\phi - F_n) \right) \equiv S(U) \quad (3.11)$$

donde  $UL_+$  denota el vector base asociado a los campos  $\{B_n, \phi\}$  y  $S(U)$  la condición de contorno (máximamente disipativa) que preserva el vínculo.

### 3.3. Pruebas numéricas

En esta sección presentamos los resultados de las pruebas realizadas para examinar el comportamiento de la solución con las diferentes elecciones posibles. Para ello construimos una implementación de las ecuaciones MHD (3.9) sobre un dominio 2 dimensional con coordenadas cartesianas  $(x, y) \in [-L, L] \times [-L, L]$ . Para discretizar el sistema, utilizamos un conjunto de técnicas con las cuales garantizamos la estabilidad

de los sistemas hiperbólicos lineales. Estas técnicas se contruyen para satisfacer a nivel discreto, las condiciones que se satisfacen al nivel analítico. Esto se realiza para demostrar lo bien puesto del problema a través de la estimación de la energía (Gustafsson et al. 1996). Adoptamos operadores derivadas discretos que satisfacen suma por partes, un integrador de tercer orden Runge–Kutta y sumamos disipación artificial a través de un operador tipo Kreiss–Oliger consistente con la suma por partes. Finalmente, en todas las pruebas realizadas sumamos una “atmósfera” homogénea abarcando el dominio computacional en el dato inicial (y un “piso” durante la evolución) para la densidad y la presión, para prevenir valores negativos que surjan de la simulación. Típicamente ajustamos los valores de la atmósfera (piso) a  $10^{-4}$  ( $10^{-6}$ ) veces el máximo de los valores iniciales de  $\rho$  y  $e$ , respectivamente. Notar que esta sencilla implementación no está pensada para manejar choques o discontinuidades, sin embargo, ya que nuestro objetivo es examinar las condiciones de contorno, restringimos los escenarios en donde estos efectos no se manifiestan dentro del tiempo de interés. Sólo hemos usado condiciones de contorno no–entrantes para todos los modos donde esta condición es consistente.

Desde el punto de vista de la preservación del vínculo, los casos más críticos son aquellos donde el campo de velocidad es entrante. En tal caso, las violaciones del vínculo que se generadan en el contorno se pueden propagar dentro de la región computacional, donde está ocurriendo el proceso físico.

Para fines de prueba, adoptamos unos pocos escenarios iniciales que están basados en modificaciones de dos conjuntos de datos iniciales comunmente empleados:

**Prueba del rotor** Esta es una varación del problema del Rotor MHD (Balsara & Spicer 1999) que es suave y permite considerar un campo de flujo adicional y violación inicial del vínculo,

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 10 & \text{if } r \leq r_0 \\ 1 + 9f(r) & \text{if } r_0 < r < r_1 \\ 1 & \text{if } r_1 \leq r \end{cases} \quad (3.12)$$

$$v_x(x, y) = v_x + \begin{cases} -f(r)v_0\frac{y}{r_0} & \text{if } r \leq r_0 \\ -f(r)v_0\frac{y}{r} & \text{if } r_0 < r < r_1 \\ 0 & \text{if } r_1 \leq r \end{cases} \quad (3.13)$$

$$v_y(x, y) = v_y + \begin{cases} f(r)v_0\frac{x}{r_0} & \text{if } r \leq r_0 \\ f(r)v_0\frac{x}{r} & \text{if } r_0 < r < r_1 \\ 0 & \text{if } r_1 \leq r \end{cases} \quad (3.14)$$

y

$$\begin{aligned} p &= 1 \\ B_x &= B_0 + \mathcal{B}_x \\ B_y &= 0 \\ \phi &= 0 \end{aligned}$$

con  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = 2$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $v_0$  una constante y  $f(r)$  una función interpolante. Para el caso general adoptamos

$$f(r) = \frac{(r_1 - r)}{(r_1 - r_0)}. \quad (3.15)$$

Sin embargo, para la prueba de convergencia adoptamos un polinomio interpolante suave y un perfil de velocidad como:

$$\begin{aligned} f(r) &= P_5(r) \\ v_0 &= \tilde{v}_0 r^4 / (1+r)^4, \end{aligned}$$

con  $P_5(r)$  un polinomio de orden 5 tal que  $P_5(r_0) = 1$ ;  $P_5(r_1) = 0$  y sus derivada primera y segunda son cero en  $r = \{r_0, r_1\}$ . Así el dato correspondiente inicial es al menos  $C^2$  a lo largo del dominio computacional. Finalmente, las funciones  $(\nu_x, \nu_y)$  y  $\mathcal{B}_x$  se incluyen para examinar más a fondo las modificaciones realizadas en las pruebas, en particular elegimos:

- $\mathcal{B}_x = \kappa e^{-r^2}$  permite introducir un dato que viola el vínculo.
- $(\nu_x, \nu_y) = -\epsilon \left(1 - e^{-r^2}\right) (x, y)$  define un dato de flujo entrante.

### **Prueba *blast***

Esta es una varación del problema Blast MHD (Del Zanna et al. 2003).

El dato inicial está dado por:

$$\begin{aligned} \rho &= 1.0 \\ v_x &= 0.0 \\ v_y &= 0.0 \\ B_x &= 4.0 \\ B_y &= 0.0 \\ p &= e^{-r^2/2} \\ \phi &= 0.0. \end{aligned}$$

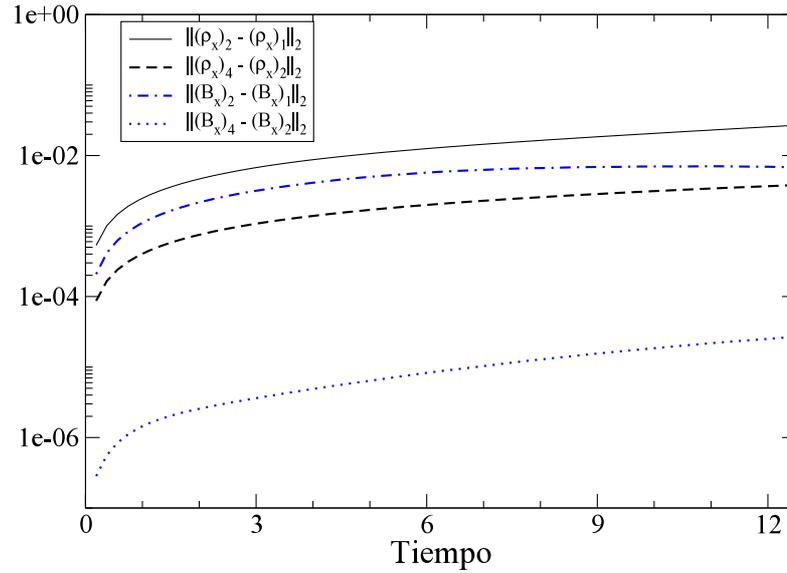
Adicionalmete, también estudiamos el comportamiento de la solución empleando ligeras variaciones de este conjunto de datos. En particular, casos con campos de velocidades iniciales entrantes y salientes a los puntos del contorno. De esta manera, podemos probar los diferentes modos sobre el contorno los cuales se volverán salientes o entrantes de acuerdo a las velocidades elegidas.

### **Condiciones de contorno adoptadas**

Para las condiciones de contorno adoptamos uno de los siguientes 3 casos:

1. Condición de contorno de **congelamiento**. Definida por  $\dot{U}_i = 0$ , para  $i = 1..7$  (denotado por C).
2. Condición de contorno de flujo saliente (modos **entrantes** fijos a **cero**). Definido como  $\Xi^+ \dot{U} = 0$ , con  $\Xi^+ = \sum_j U_j^+ \theta_j^+$ , con  $j$  tal que  $\lambda_j > 0$  (denotado por NE).
3. Condición de contorno que **preserva el vínculo**. Definido como  $\mathcal{L}(U) = 0$ , como se definió en la ecuación (3.11) (denotado por PV)

en todas las pruebas, y comparamos el comportamiento de las soluciones cuando empleamos cada opción. Comenzamos considerando la forma de las ecuaciones de conservación de flujo (manteniendo  $\alpha = 0$ ) y luego examinamos casos particulares con la forma invariante de Galileo ( $\alpha = 1$ ). Estas condiciones de contorno se implementaron siguiendo el método de la proyección de Olsson (Olsson 1995a,b). Esto es, si una condición de contorno definida por un operador  $\Theta(\dot{U}) = 0$ , esto se puede hacer cumplir redefiniendo el lado derecho de las ecuaciones en los puntos del contorno de la siguiente forma:  $\dot{U} \rightarrow \dot{U} - \Theta(\dot{U})$ . Así calculamos el lado derecho en todo el dominio computacional, modificándolo en los puntos del contorno mediante el método de proyección e integrando todos los puntos mediante el método de líneas.



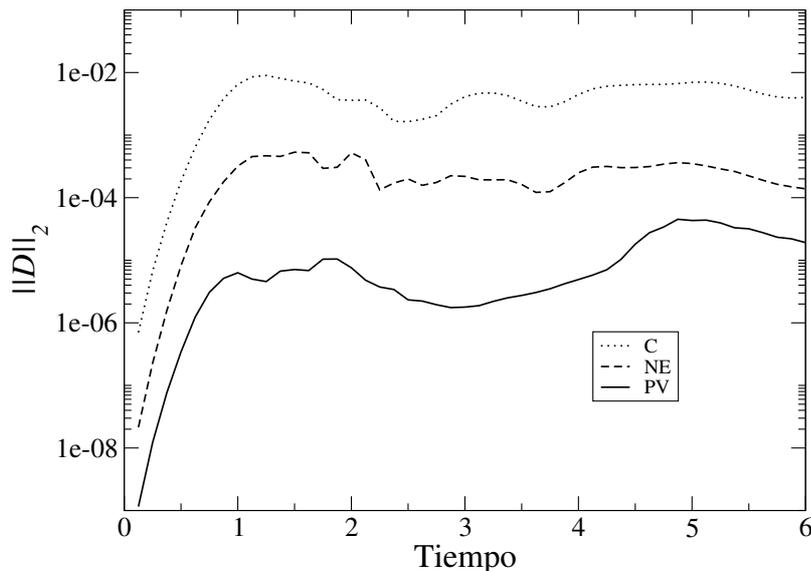
**Fig. 3.1:** Comportamiento de la norma  $L_2$  de la diferencia entre las soluciones obtenidas con resoluciones gradualmente aumentadas. La diferencia entre ellas converge a cero como se espera.

### Prueba de la implementación

En la primera prueba confirmamos el comportamiento global convergente de la solución numérica al considerar los datos iniciales suficientemente suaves. Evolucionamos la versión  $C^2$  del dato inicial del Rotor (sin violación del vínculo ni flujo de fondo) para tres resoluciones diferentes  $\Delta_l = 1.5/2^l$  ( $l = 0, 1, 2$ ) y verificamos que la diferencia de las soluciones numéricas tomadas de a pares, decrece como se espera. La figura 3.1 ilustra el comportamiento de  $\|F(\Delta_l) - F(\Delta_{l+1})\|_2$  (con  $F = \rho, B_x$ ). Como es evidente en la figura, cuando se aumenta la resolución, las diferencias decrecen como es de esperar. Para todas las pruebas restantes, se presentan los resultados obtenidos de la red numérica más fina ( $l = 2$ ).

### Dato inicial *blast*

En esta prueba, adoptamos el dato inicial *blast* y lo evolucionamos para diferentes opciones de las condiciones de contorno ajustando  $\alpha = 0, c_l = 20$  y  $s = 1$ , y examinamos el comportamiento del vínculo en cada caso. La figura 3.2 muestra la norma  $L_2$  del vínculo para las diferentes condiciones de contorno. Claramente la solución numérica que se obtiene con la CCPV es superior en aproximadamente un orden de magnitud al caso NE y casi tres órdenes mejor que la obtenida con la condición de contorno C. Un punto importante a enfatizar es que al realizar una inspección más cercana de las soluciones obtenidas, se revela que la principal contribución al error se origina en todos los casos, en el contorno (aunque esencialmente con el mismo comportamiento en cuanto a la magnitud del error, respecto a la condición de contorno adoptada). La norma presentada en la figura 3.2 se calcula sobre todo el dominio computacional *ignorando* los últimos dos puntos (en todos los contornos) para evitar colocar un peso excesivo a la violación en el contorno. No obstante, las CCPV dan lugar a una solución cuyo vínculo se viola lo mínimamente posible.



**Fig. 3.2:** Comportamiento de la norma  $L_2$  del vínculo para las diferentes condiciones de contorno. Las violaciones en cada caso crecen desde valores de redondeo, antes de establecerse a un valor aproximadamente constante. Los valores para esta norma mejoran durante toda la corrida cuando se refina la condición de contorno adoptada, como es de esperar: la solución que se obtiene con CCPV, preserva el vínculo al menos tres órdenes de magnitud mejor que la solución obtenida con la condición C.

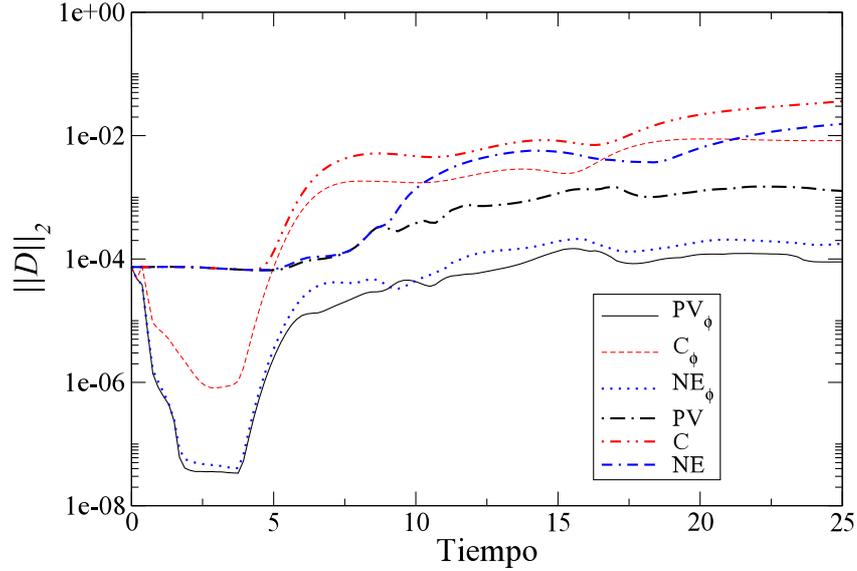
### Dato inicial del rotor. Efectos de las condiciones de contorno y del *divergence cleaning*

Elegimos este dato para examinar más a fondo el comportamiento de la solución y permitir una violación inicial al vínculo. Para esto escogimos  $\kappa = 10^{-4}$ .

La figura 3.3 ilustra el comportamiento de la solución con las diferentes condiciones de contorno, con y sin el uso de la limpieza de la divergencia. La adición de esta limpieza permite una reducción dinámica en la violación del vínculo hasta  $t \simeq 4.6$ . En este tiempo los modos que se propagan interactúan con los bordes, y estos comienzan a ser la fuente principal del error. Aquí nuevamente vemos que la condición que preserva el vínculo da lugar a errores significativamente pequeños en la solución. Sin embargo es interesante notar que si adoptamos modos no-entrantes *junto* con el campo que amortigua el vínculo, el comportamiento es razonablemente similar. Esto se debe al hecho de que las condiciones de contorno no-entrantes le permite al modo saliente que viola el vínculo, salir del dominio computacional, mientras que el modo entrante que viola el vínculo (que se genera por no imponer la condición que preserva el vínculo) es amortiguado en un grado significativo por el *divergence cleaning*.

Otro comportamiento interesante se revela cuando variamos  $c_l$ . Esto afecta las velocidades de propagación de los modos que violan el vínculo, lo cual tiene una fuerte influencia en el comportamiento del vínculo de la solución. En lo que sigue se adopta la CCPV. Para esta prueba usamos el sistema invariante Galileano, fijando  $s = 0$  (a fin de no incluir amortiguamiento) y escogimos que  $c_l$  varíe desde 10 a 80 <sup>1</sup>, junto con el ajuste del paso temporal a fin de no violar la condición de Courant. Las figuras 3.4 y 3.5

<sup>1</sup>Para valores menores de  $c_l$  ( $c_l < 10$ ) el código se vuelve inestable debido a las inestabilidades generadas en las esquinas del dominio computacional.

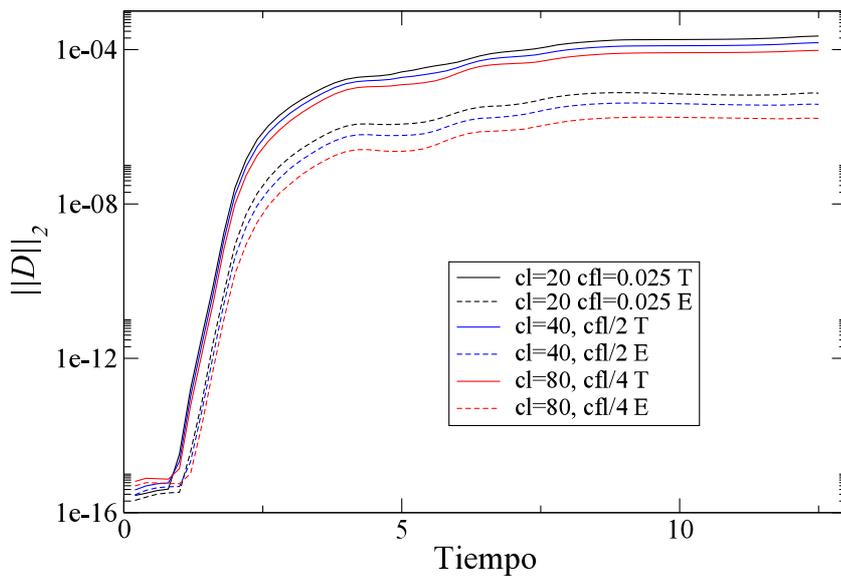


**Fig. 3.3:** Comportamiento de la norma  $L_2$  del vínculo con una violación inicial con las distintas condiciones de contorno, con ( $CC_\phi$ ) y sin ( $CC$ ) el uso de la técnica del *divergence cleaning*. Como es evidente de la figura, la limpieza de la divergencia es capaz de amortiguar los vínculos varios órdenes de magnitud, mientras la violación está presente en el volumen del dominio computacional. Después que la solución alcanza el borde, los valores del contorno inducidos allí dominan la violación del vínculo y nuevamente el comportamiento aumenta significativamente por las condiciones no-entrante y la que preserva el vínculo.

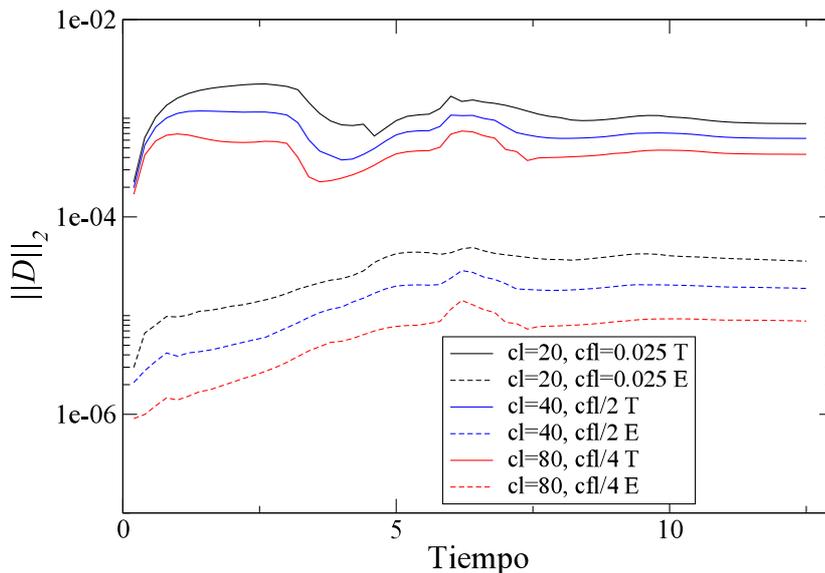
(con violación inicial del vínculo) muestran el efecto de la variación de  $c_l$  en dos casos, para el dato inicial del Rotor y para su modificación que incluye un piso de velocidad dado por ( $\nu_x = \pm 0.1x, \nu_y = \pm 0.1y$ ). Nos concentramos en el último caso porque allí el efecto es más notable. Notar que, en la figura 3.4, el valle inicial corresponde a valores de redondeo, ya que inicialmente el vínculo se satisface a ese nivel. Una vez que la parte no trivial de la solución alcanza el borde se genera una violación significativa del vínculo. Dependiendo de la condición de contorno, y de las velocidades características del sistema bajo consideración, esta violación se propaga hacia adentro o deja el dominio. En nuestro caso la habilidad de la CCPV de permitir que los modos que violan el vínculo dejen el dominio, resulta en errores más pequeños para casos de propagación más rápidos. Esto se debe a que la violación inducida por la evolución deja el dominio computacional más rápidamente.

### 3.4. Resultados

Hemos investigado la solución numérica de las ecuaciones de la MHD ideal y desarrollado condiciones de contorno que al nivel continuo preservan el vínculo por lo que no introduciría violaciones adicionales en el dominio computacional. Al nivel numérico estas condiciones introducen algunas violaciones al nivel del error de truncamiento lo cual converge con resolución. Estas condiciones de contorno desarrolladas son consistentes con condiciones de contorno máximamente disipativas y así la energía discreta del sistema permanece acotada. También examinamos el comportamiento del vínculo cuando se amplía el sistema al acoplar un campo adicional. La adición de este campo, junto con modificaciones adecuadas de las



**Fig. 3.4:** Comportamiento de la norma  $L_2$  del vínculo para diferentes valores de la constante de acoplamiento  $c_l$  con CCPV. La norma se calcula en todo el dominio computacional (“T”=Todo) o sobre la región interior de 3/4 de su tamaño (“E”=Enmascarado). Lo último pretende ilustrar que a pesar de no incluir una región cercana al borde, los efectos del contorno son evidentes en todo el dominio. A medida que los valores de  $c_l$  aumentan, se consigue una ligera mejora.



**Fig. 3.5:** Similar a la figura 3.4 pero con un dato inicial que contiene violaciones iniciales del vínculo.

ecuaciones, inducen una velocidad distinta de cero en la propagación del vínculo y permite llevar su valor a cero. Hemos estudiado en particular, dos sistemas equivalentes. Un sistema que es completamente conservativo –el cual es débilmente hiperbólico sin la adición de un campo extra que lo hace simétrico hiperbólico– y otro sistema que es invariante Galileano –el cual es simétrico hiperbólico, incluso sin la adición de un campo extra– pero que no puede expresarse en la forma conservativa.

Para examinar el comportamiento de la solución implementamos las ecuaciones en coordenadas cartesianas y con una discretización espacial que preserve el error inicial del vínculo. Esto nos permitió separar efectos del contorno, de aquellos producidos en el volumen interior y observar que las principales violaciones ocurren en el contorno. Para examinar los efectos de las condiciones de contorno sobre la evolución adoptamos tres tipos de condiciones de contorno:

- La más directa es fijar a cero todos los lados derechos de las ecuaciones en una zona del contorno. Esto podría dar lugar a inconsistencias por lo que uno podría estar determinando condiciones para los modos salientes. Esta condición esencialmente es equivante a la que se usa más comunmente, donde se copia los flujos cercanos a los puntos del contorno.
- La segunda es la condición de contorno no–entrante donde uno proyecta hacia afuera todos los modos entrantes en las ecuaciones de evolución dejando al resto (modos tangenciales y salientes) intactos. La implementación de esta condición es un poco delicada debido a que los modos pueden cambiar de dirección a lo largo del tiempo, y así se pueden volver de modos entrantes a salientes y viceversa.
- La tercera condición preserva el vínculo en el sentido de que se deduce de la puesta a cero del modo entrante relacionado con la propagación del vínculo. Esta condición es una modificación a la condición previa donde ahora en vez de proyectar hacia afuera todos los modos entrantes, se fija un modo entrante tal que el modo entrante del vínculo sea cero como resultado.

No es sorprendente que la primera opción muestre el peor comportamiento del vínculo, ya que no sólo esta condición no hace nada para reducir al mínimo las violaciones de vínculo introducidas a través de las fronteras, sino que además se inducen en el borde inconsistencias en la solución. En el mejor de los casos, el modo del vínculo rebota desde el borde a la región de integración. La segunda opción adoptada mejora substancialmente, mostrando una ganancia de un orden de magnitud en la preservación del vínculo. Este es el resultado de la condición de contorno que deja salir a uno de los modos  $\phi$  –que lleva la violación del contorno– de la región de integración. Con la tercera alternativa se gana un orden de magnitud adicional (al menos) con respecto a la condición no–entrante. Esta condición no sólo permite a la violación del vínculo salir del dominio computacional, sino que no introduce violaciones significativas al contorno.

Así vemos que el manejo apropiado de las condiciones de contorno pueden controlar significativamente el problema del comportamiento del vínculo. Cabe mencionar que aún no tenemos una prueba matemática rigurosa de que la condición de contorno que preserva el vínculo sea bien puesta. Sin embargo, en los sistemas más simples –como el modelo de juguete discutido al comienzo, sección 3.2– podría concebirse una prueba por lo menos para el caso en que los valores propios no cambien de signo.

**BIBLIOGRAFÍA**

- Anderson, M., Hirschmann, E. W., Liebling, S. L., & Neilsen, D. 2006, *Classical and Quantum Gravity*, 23, 6503
- Balsara, D. S. & Kim, J. 2004, *The Astrophysical Journal*, 602, 1079
- Balsara, D. S. & Spicer, D. 1999, *Journal of Computational Physics*, 148, 133
- Barth, T. 1999, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 5, 195
- Cécere, M., Lehner, L., & Reula, O. 2008, *Computer Physics Communications*, 179, 545
- Davidson, P. 2001, *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge Texts in Applied Mathematics (Cambridge University Press)
- Dedner, A., Kemm, F., Kröner, D., et al. 2002, *Journal of Computational Physics*, 175, 645
- Del Zanna, L., Bucciantini, N., & Londrillo, P. 2003, *Astronomy and Astrophysics*, 400, 397
- Evans, C. R. & Hawley, J. F. 1988, *The Astrophysical Journal*, 332, 659
- Godunov, S. 1972, *Numer. Methods Mech. Contin. Media*, 1, 26
- Goedbloed, J. P. H. & Poedts, S. 2004, *Principles of Magnetohydrodynamics*
- Gustafsson, B., Kreiss, H., & Olinger, J. 1996, *Time Dependent Problems and Difference Methods*, Pure and Applied Mathematics (Wiley)
- Kim, J., Ryu, D., Jones, T. W., & Hong, S. S. 1999, *Astrophysical Journal*, 514, 506
- Neilsen, D., Hirschmann, E. W., & Millward, R. S. 2006, *Classical and Quantum Gravity*, 23, 505
- Olsson, P. 1995a, *Mathematics of Computation*, 64, 1035
- Olsson, P. 1995b, *Mathematics of Computation*, 64, 1473
- Reula, O. 2004, *J. Hyper. Differential Equations*, 01, 251
- Tóth, G. 2004, *Journal of Computational Physics*, 161, 605

# Simulación de flujos de plasma subdensos luego de fulguraciones

En este capítulo se describe el trabajo realizado por Cécere et al. (2012). A partir de las recientes observaciones tomadas con SDO/AIA (Solar Dynamics Observatory/Atmospheric Imaging Assembly) realizadas por Savage et al. (2012), revisamos los escenarios propuestos por distintos autores para explicar la formación y la dinámica de estructuras oscuras que descienden, luego de fulguraciones, hacia arcadas magnéticas en el plasma coronal. A dichas estructuras las denominaremos *SAROs*, debido a las siglas en inglés de *Supra-Arcade Reconnection Outflows*, en castellano, flujos de reconexión suprarca. En este trabajo mostramos que un escenario con múltiples *SAROs*, puede ser modelado por cavidades de plasma enrarecido, generadas por la interacción de ondas de choque y expansión, colimadas en la dirección del campo magnético. Analizamos la producción y la interacción de múltiples *SAROs* y la estructura individual de los mismos. Dicha estructura es tal que hace de los *SAROs* vacíos relativamente estables a la vez que móviles. Finalmente comparamos nuestros resultados con las observaciones y con escenarios alternativos propuestos por otros autores.

## 4.1. Introducción

El telescopio de rayos X blandos *Yohkoh* fue el primero en detectar la presencia de trazos oscuros descendiendo hacia la superficie solar. Mediante este instrumento se observó que estas estructuras se originan típicamente a unos [40 – 60]Mm sobre arcadas magnéticas originadas luego de eventos de fulguración. El movimiento descendente resulta levemente desacelerado con velocidades en el rango de  $\sim [50-500]\text{km s}^{-1}$ .

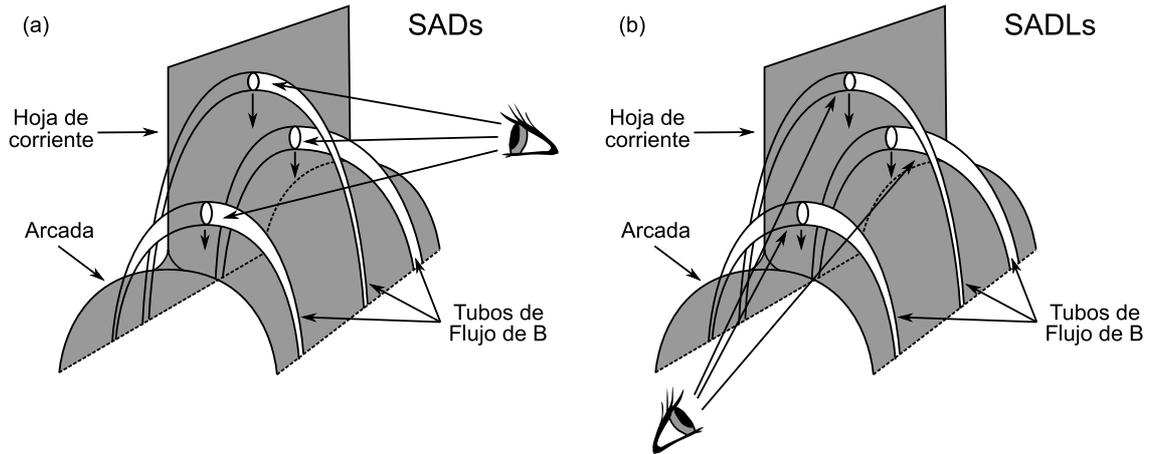


**Fig. 4.1:** Imagen de *TRACE*. Se observan surcos oscuros que penetran una región donde el plasma es aparentemente más denso.

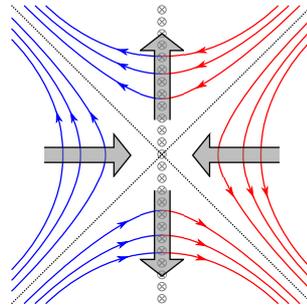
Estos eventos han sido extensamente reportados mediante el uso de otros instrumentos como *TRACE* (Innes et al. 2003a,b), *SOHO/SUMER* (Innes et al. 2003b) y *SDO/AIA* (Savage et al. 2012; Warren et al. 2011). Una imagen de este fenómeno tomada con *TRACE* puede verse en la figura 4.1.

La ausencia de emisión en rayos X y en el extremo ultravioleta, tanto en las imágenes como en los espectros, ha llevado a la conclusión y al consenso de la comunidad científica de que estas estructuras son regiones subdensas o vacíos de plasma, generados por procesos de reconexión magnética en hojas de corriente ubicadas sobre arcadas solares. Además de estas estructuras oscuras móviles, se han reportado otras, menos frecuentes, descendentes y brillantes, que se pueden observar también durante las fulguraciones solares (McKenzie 2000).

McKenzie & Savage (2009) y Savage & McKenzie (2011) han sugerido que los flujos oscuros generados luego de fulguraciones (*SADs*, *supra-arcade downflows*) son la sección transversal de tubos o arcos magnético (*SADLs*, *supra-arcade downflow loops*), también observados como filamentos finos y vacíos al retraerse desde posiciones ubicadas por encima de las arcadas, donde se produce la reconexión magnética, ver figura 4.2. La retracción sería producida por la propia reconexión según lo sugiere el esquema de la figura 4.3. Siguiendo la interpretación de estos autores, dependiendo de si el fenómeno es observado de frente en relación al sistema de arcos, panel izquierdo de la figura 4.2, o de perfil como se muestra en el panel derecho de figura 4.2, se observan las secciones oscuras de los arcos, los *SADs*, o los arcos retrayéndose, los *SADLs*. Sugieren además que la alta presión magnética interna de estos tubos podría explicar porqué los vacíos resisten ser llenados inmediatamente por el plasma relativamente denso (y con mayor presión del gas) que los circunda y son detectados durante tiempos compatibles con la observación. Trabajos teóricos que modelan el proceso de reconexión como el de Linton et al. (2009) proponen un escenario donde la dinámica de los campos magnéticos descendentes es excitada por eventos de reconexión localizados, los cuales producirían tubos de flujo reconectados tanto ascendentes como descendentes (figura 4.3). Para explicar la desaceleración proponen que el plasma es frenado por la presión magnética de los campos magnéticos subyacentes a la arcada. Las velocidades observadas de los *SADs* son menores



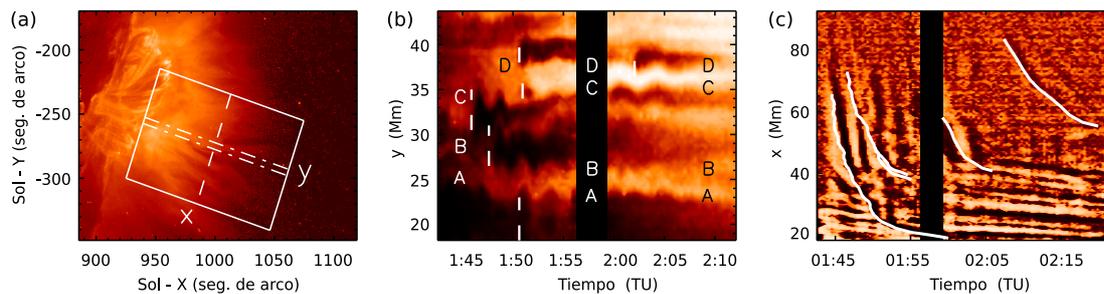
**Fig. 4.2:** Esquema tomado de Savage & McKenzie (2011) para ejemplificar los objetos llamados *SAD* y *SADL*.



**Fig. 4.3:** Esquema de reconexión magnética, las líneas de campo ingresan lateralmente y egresan radialmente. El movimiento de descenso hacia la superficie de un conjunto de líneas formando un arco correspondería al movimiento de los *SADLs*. La línea de cruces representa la hoja de corriente.

a las esperadas en regiones donde la velocidad de Alfvén característica es de  $\sim 1000\text{km s}^{-1}$ . Linton et al. (2009) han sugerido que ciertas fuerzas de arrastre podrían realizar un trabajo en contra del flujo de reconexión, justificando así las bajas velocidades observadas.

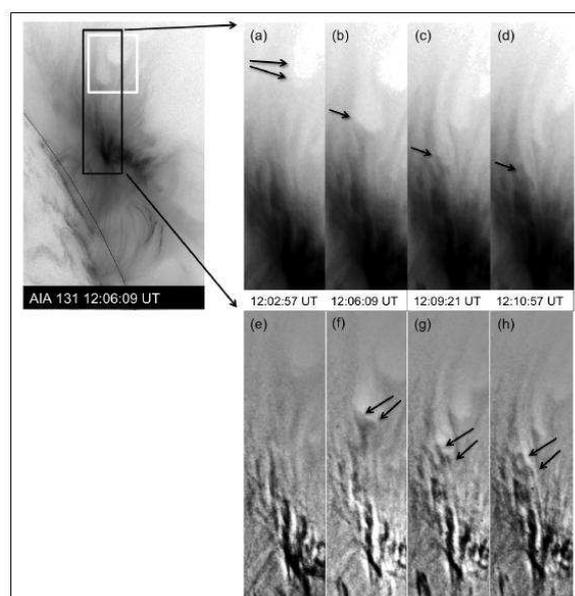
Verwichte et al. (2005) analizaron datos de *TRACE* y detectaron la presencia de oscilaciones descendentes y transversales al campo magnético. El panel izquierdo de la figura 4.4, muestra la imagen de *TRACE* de los datos analizados. La coordenada  $x$  se supone transversal a las líneas de campo radiales, la coordenada  $y$  corresponde a la dirección radial. La evolución temporal en la dirección transversal al campo se muestra en el panel central de la figura 4.4, y la evolución temporal en la dirección del campo se muestra en el panel derecho de dicha figura. Estos autores encontraron que la velocidad inicial y las amplitudes de oscilación transversal disminuyen a medida que la perturbación se propaga. La oscilación detectada es del tipo de modos *kink* en cilindros, sin embargo, las velocidades de estos modos rápidos resultaron bajas, del orden de la velocidad del sonido y no del orden de la velocidad de Alfvén como se hubiera esperado. El tamaño de las cavidades oscuras varía dentro del rango  $[\sim 2 - 9]\text{Mm}$  y el periodo de oscilación permanece aproximadamente constante con la altura.



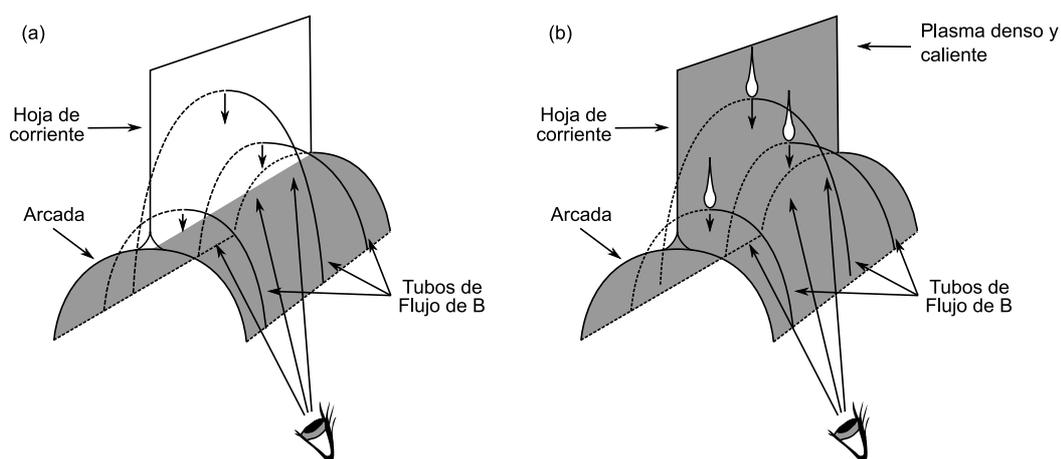
**Fig. 4.4:** Datos tomados de Verwichte et al. (2005). Izq.) Coordenadas  $x$  e  $y$  en la posición de los *SADs*. Cent.) Evolución transversal. Der.) Evolución radial.

Recientemente a la luz de las observaciones de AIA, de mayor resolución espacial y temporal que las disponibles hasta entonces, Savage et al. (2012) reinterpretaron su modelo de *SADs* de la figura 4.2. En estas observaciones notaron una diferencia importante en los tamaños de los trazos oscuros observados (ver figura 4.5 en negativo, donde lo claro corresponde a las regiones subdensas), reconsiderando el escenario propuesto. En este esquema los arcos finos (*SADLs*) coexisten con los *SADs* que ya no corresponderían a la sección de los arcos sino a estelas dejadas por dichos arcos magnéticos al retraerse en la hoja de corriente. En el nuevo escenario (ver figura 4.6) los arcos oscuros son estructuras de tamaños  $[\sim 0.9 - 1.3]\text{Mm}$  durante las fases tempranas del evento de erupción. Los *SADs* de tamaños de  $\sim 9\text{Mm}$ , se harían evidentes posteriormente, debido al contraste con el plasma a alta temperatura en la hoja de corriente, luego de que ésta se llena por el plasma. La desaceleración sería resultado de la acumulación de presión magnética del material descendente y/o la presencia de fenómenos de arrastre. En la reinterpretación, la observación de arcos o de *SADs* ya no estaría relacionada con la dirección de observación (figura 4.2), sino con el llenado o no de la hoja de corriente en etapas tempranas o tardías de la evolución. Además, los *SADs* no serían la sección de arcos magnéticos sino estelas oscuras dejadas por los mismos.

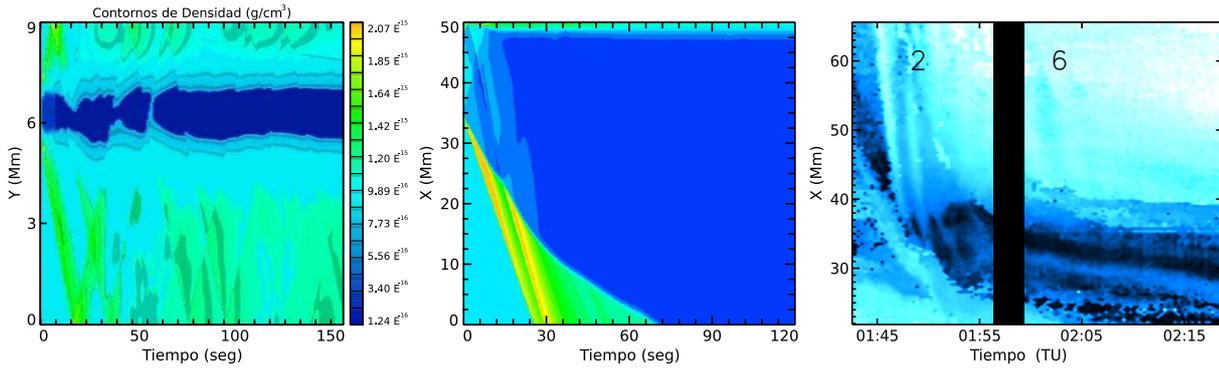
En los trabajos Costa et al. (2009), Schulz et al. (2010) y Maglione et al. (2011) se ha mostrado, mediante simulaciones MHD en una y dos dimensiones, que los canales oscuros son consistentes con vacíos de plasma generados por el rebote e interferencia de ondas de expansión y choque, creadas a partir de una deposición localizada de energía que simula el efecto de una reconexión magnética. Este pulso de presión genera un patrón inicial que puede pensarse como la composición de un choque de tipo hidrodinámico, dirigido hacia el Sol, en la dirección del campo, y otro choque transversal, perpendicular al campo magnético. En la evolución posterior, la composición de ondas no-lineales, genera y sostiene una estructura de vacío que se propaga hacia la superficie solar en tiempos comparables a los observados. Los comportamientos tanto transversal como longitudinal (en la dirección del Sol) pueden verse en la figura 4.7 en comparación con resultados obtenidos por Verwichte et al. (2005). La primera figura (panel izquierdo de la figura 4.7) resulta de la simulación 2D utilizando condiciones de contorno abiertas en dirección a las arcadas magnéticas (asumiendo que la perturbación se absorbe en esa dirección), de rebote en los laterales (asumiendo regiones de mayor densidad lateral; Schulz et al. 2010) y también condición de rebote en la dirección opuesta a la superficie solar emulando el efecto de la región de reconexión. En el caso 1D las oscilaciones obtenidas no se amortiguan, en cambio en el caso 2D la oscilación dura pocos períodos



**Fig. 4.5:** Observaciones con AIA, en negativo, lo claro es vacío. Las estructuras con forma de esferas con cola son los *SADs* (también conocidos como *tadpoles* o renacuajos). Las esferas tienen tamaños apreciablemente mayores que los de la sección de un arco magnético.



**Fig. 4.6:** Nuevo escenario propuesto por Savage et al. (2012). Izq) Arcos en retracción *SADLs*, cuando la hoja de corriente aun no ha sido llenada por el plasma. Der.) Hoja de corriente llena de plasma y estelas o *SADs* dejadas por los *SADLs* o arcos al retraerse.



**Fig. 4.7:** Izquierda: resultado numérico 2D de la oscilación transversal, comparar con el panel central de la figura 4.4. Centro: Resultado numérico 1D de la oscilación radial hacia el Sol, se compara con Derecha: los datos observacionales de la oscilación radial.

y luego se amortigua (el panel izquierdo de la figura 4.7 reproduce en buena medida las observaciones mostradas en el panel central de la figura 4.4). El panel central de la figura 4.7 es el resultado numérico que reproduce las observaciones obtenidas por Verwichte et al. (2005), mostradas en el panel derecho de la figura 4.7 (ver e.g. Costa et al. 2009). Los tamaños, amplitudes, velocidades y las distancias obtenidas numéricamente son comparables a los datos observacionales obtenidos por Verwichte et al. (2005).

A diferencia de los resultados 1D, donde la dinámica hacia el Sol es independiente de la intensidad de campo magnético el cual tiene el rol exclusivo de guiar la onda, en las simulaciones 2D la velocidad hacia el Sol es mayor para valores mayores de campo magnético. Esto puede interpretarse como la capacidad del plasma de la baja corona solar de colimar la deposición de energía en la dirección del campo magnético.

Como los valores de  $\beta$  interiores a la cavidad vacía, fueron mayores que los exteriores (Schulz et al. 2010), con sus contornos en equilibrio dados por valores de la presión total constante, se concluyó que la presión magnética interna no puede ser responsable de prevenir el colapso del vacío. En cambio se encontró que los valores más altos de  $\beta$  dentro de los canales oscuros son debidos a que el plasma es muy caliente, con valores bajos de densidad interna ( $\sim 2 \times 10^7 \text{cm}^{-3}$ ), y temperatura  $T > 20\text{MK}$  (Warren et al. 1999). De hecho, las observaciones no muestran una significativa emisión de la región vacía en cualquier longitud de onda observada (e.g. los filtros fotométricos de alta temperatura de AIA). Luego las observaciones pueden ser consistentes con estos parámetros del plasma.

Según Savage et al. (2012) los arcos que se retraen o *SADLs* son siempre seguidos de estructuras tipo *SAD*. Los *SADs* y *SADLs* son ambos interpretados como flujos creados durante la reorganización del campo magnético durante procesos de reconexión. No obstante, para estos autores, los *SADs* sólo pueden ser vistos una vez que la hoja de corriente se ha llenado apreciablemente de plasma debido a que los interpretan como estelas que dejan los arcos descendentes. En este capítulo, a la luz de las nuevas observaciones de AIA, revisamos el escenario propuesto en los trabajos de Costa et al. (2009), Schulz et al. (2010) y Maglione et al. (2011). Realizamos una reinterpretación de los resultados de simulaciones previas en una y dos dimensiones, analizando las estructuras vacías como flujos de reconexión suprarcaada (*SAROs*), para diferenciarlos de la descripción de *SADs* establecida por Savage et al. (2012). En nues-

tro modelo bidimensional no simulamos la arcada ni la posible interacción de ésta con los *SAROs*. La reconexión es modelada como un pulso de presión, representado mediante una deposición de energía que genera la dinámica que configura los canales vaciados de plasma a los que llamamos *SAROs*.

Con el objeto de probar el alcance de nuestro modelo, primero nos enfocamos en reproducir la dinámica y la interacción oscilatoria entre varias estructuras vacías tipo *SARO*. Como se mencionó, en los trabajos de Costa et al. (2009), Schulz et al. (2010) y Maglione et al. (2011) se encontró que para reproducir el patrón oscilatorio se requieren condiciones de borde cerradas. Sin embargo, en Schulz et al. (2010) se obtuvo que el patrón de oscilación es robusto bajo una gran variedad de condiciones de borde, contemplando diferentes valores de densidad en los extremos y permitiendo rebotes totales o parciales en los mismos. Surge entonces la cuestión acerca del rol que juegan las condiciones de contorno. Las observaciones muestran que los flujos salientes mantienen su configuración individual durante todo el camino hacia la estructura tipo arcada. Luego, la simulación de múltiples flujos salientes excitados por diferentes pulsos de presión deben mantener estas individualidades al mismo tiempo que involucran una desaceleración en dirección a la superficie solar. No obstante, ¿podemos considerar la dinámica de varias estructuras de flujo saliente como la superposición de individuos? (como se describe en Costa et al. 2009; Schulz et al. 2010; Maglione et al. 2011). Si este es el caso, ¿qué produce los rasgos oscilatorios descritos en Verwichte et al. (2005)?

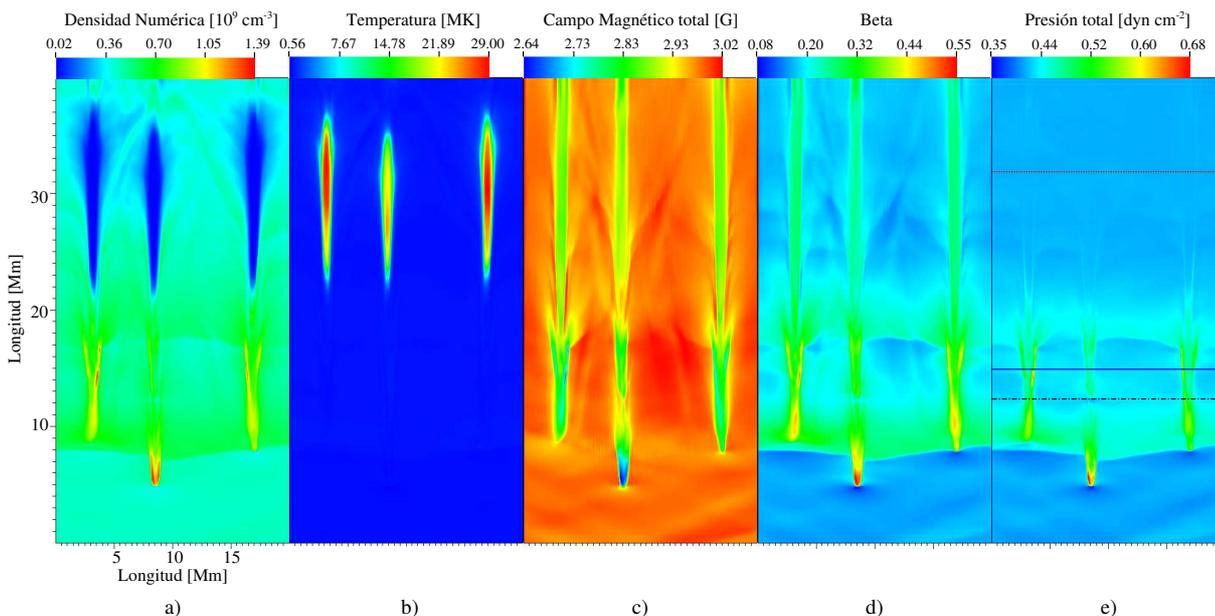
## 4.2. Código numérico y condiciones iniciales

Para estudiar el fenómeno hemos realizado simulaciones MHD en dos dimensiones mediante el código Mezcál, el cual se encuentra intensivamente probado numéricamente en muchos y diversos escenarios (ver por ejemplo De Colle & Raga 2006; De Colle et al. 2008). Todos los cálculos se realizaron en una cuadrícula numérica de  $(x, y) = (400, 800)$  puntos, correspondiente a una región física de  $(20, 40)$ Mm, lo que da una resolución para cada celda de  $(50, 50)$ km. La coordenada  $y$  representa la dirección hacia la superficie solar, mientras que la coordenada  $x$  representa la dirección transversal al campo magnético. Hemos asumido que la estructura del campo es inicialmente constante en la dirección radial, y una temperatura de fondo típica de unos  $T = 10^6$ K. Simultáneamente en la condición inicial ( $t = 0$ seg), disponemos pulsos circulares  $(\Delta P/P)_i = (110, 90, 110)$ ,  $i = 1, 3$  (donde  $\Delta P$  es el pulso de presión de disparo y  $P$  es la presión de fondo del gas de la corona) a un radio de 0.6Mm, localizados en las posiciones  $(67, 720)$ ,  $(167, 680)$  y  $(333, 720)$  correspondientes a las coordenadas físicas  $(3.35, 36.0)$ Mm,  $(8.35, 34.0)$ Mm y  $(16.65, 36.0)$ Mm, respectivamente.

Se realizaron varias simulaciones, variando el campo magnético  $B$  y la densidad  $\rho$ . Además añadimos una posterior deposición localizada de energía, modelada como otro pulso de presión  $(\Delta P/P)_4$  que representa un nuevo evento de reconexión (al tiempo  $t = 200$ seg), el que evoluciona en un ambiente previamente modificado por los pulsos iniciales. La tabla 4.1 muestra los modelos que hemos empleado para discutir nuestros resultados. Hemos utilizado condiciones de contorno abiertas para las fronteras laterales, mientras que, inicialmente, se asumió una condición reflectante fija para el límite superior de la dirección radial. Esta última condición de borde se utilizó para simular la acción de flujos salientes del sitio donde ocurre el evento de reconexión. Asimismo, asumimos que las perturbaciones son absorbidas en

Modelo	$B$ [G]	$n \times 10^9$ [ $\text{cm}^{-3}$ ]	$(\Delta P/P)_4$
$M1$	3	0.46	400
$M2$	10	0.46	400
$M3$	10	3.0	400
$M4$	3	0.46	200

**Tabla 4.1:** Modelos Simulados:  $B$  es la densidad de fondo de campo magnético en la dirección radial,  $n$  es la densidad numérica de fondo, y  $(\Delta P/P)_4$  es el pulso de presión sobre la presión de fondo impuesto en  $t = 200$ seg.



**Fig. 4.8:** Salida de la simulación al tiempo  $t = 196$  segundos. En cada panel se muestra: a) densidad, b) temperatura, c) campo magnético total d) parámetro  $\beta$  y e) presión total de los tres flujos descendentes.

la dirección al Sol. Finalmente, para estudiar una configuración provista de zonas subdensas, impusimos una condición de borde abierta en la dirección superior radial, con una densidad de fondo inicial no-homogénea ( $n = n_0 \sin(\pi x/2) + n_1$ ,  $(n_0, n_1) = (2.07, 2.53) \times 10^9 \text{cm}^{-3}$ ,  $x$  en Mm) con el objeto de emular la modificación del medio que provocaría el pasaje de *SAROs*, y a fin de explorar otras configuraciones de plasma. Los parámetros caraterísticos fueron elegidos en concordancia con los valores observados típicos de los *SAROs*, como se describen en Verwichte et al. (2005) y McKenzie & Hudson (1999).

### 4.3. Resultados y Discusión

#### Parámetros del plasma en *SAROs*

En la figura 4.8 mostamos la evolución del modelo  $M1$  para tres flujos de vacío al tiempo  $t = 196$  segundos. En cada uno de los paneles se presenta respectivamente: a) la densidad numérica de las cavidades debidas a tres eventos de reconexión simultáneos, b) la temperatura, c) el campo magnético,

d) el parámetro  $\beta$  y e) la presión total, para condiciones de contorno abiertas.

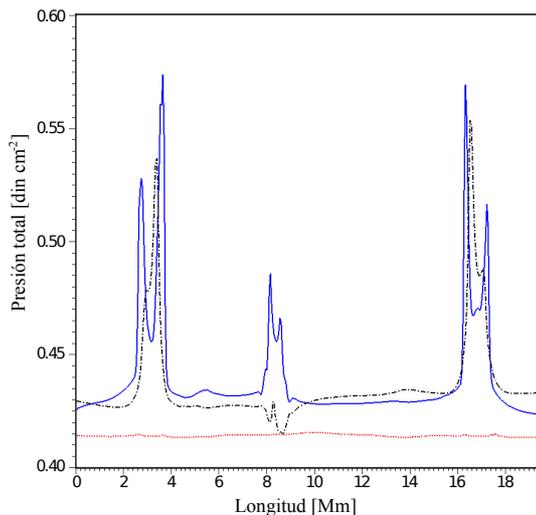
De este gráfico puede apreciarse, tal como se esperaba (por ejemplo McKenzie & Hudson 1999), que las densidades de las cavidades son menores a la del entorno en más de un orden de magnitud (ver la estructura por arriba de  $y = 20\text{Mm}$ ). La temperatura interna, mostrada en el panel b) de dicha figura, es más de un orden de magnitud mayor en los vacíos que en el medio exterior (como en los trabajos de Longcope et al. 2009; Warren et al. 1999). La densidad de campo magnético interno es menor a la del ambiente ( $< 1\text{G}$ ), de modo que la presión del campo magnético interno no puede ser responsable de evitar el colapso de la zona vacía. El parámetro  $\beta$ , mostrado en el panel d) de la figura 4.8, es mayor en el interior de la región. De la parte superior de la figura 4.8e), podemos ver que la presión total en la región es aproximadamente constante, es decir el trazo de los flujos de vacío ha desaparecido, estando el contorno de las cavidades aproximadamente en equilibrio de presiones.

Las características mostradas en la figura 4.8 son consistentes con las características dinámicas descritas por Verwichte et al. (2005), con la excepción de la apariencia oscilatoria del patrón bidimensional y la homogeneidad del medio de fondo. La dinámica producida por múltiples flujos salientes reproduce la dinámica individual. Además, de acuerdo con los resultados observacionales, el análisis de la evolución temporal da una velocidad característica de los SAROs de  $100 - 300\text{km s}^{-1}$ . El congelamiento del plasma al campo magnético induce la colimación de la mayor parte de la energía cinética hacia la dirección longitudinal, efecto que se incrementa a medida que aumenta el campo magnético. De acuerdo con el trabajo de Maglione et al. (2011) (ver tabla 1 de dicho trabajo), hemos obtenido un aumento pequeño de la velocidad inicial al aumentar la intensidad del campo magnético de fondo. Para ello hemos realizado una corrida de 200 segundos variando la intensidad de campo magnético desde  $3\text{G}$  hasta  $10\text{G}$  (modelos  $M1$  y  $M2$ ), así la distancia evacuada por la perturbación aumenta unos  $4\text{Mm}$ . Por otro lado, variando la densidad de fondo desde  $0.46 \times 10^9\text{cm}^{-3}$  hasta  $3.0 \times 10^9\text{cm}^{-3}$  (modelos  $M2$  y  $M3$ ), la distancia evacuada por la perturbación disminuye unos  $6\text{Mm}$ .

En las etapas iniciales al evento de fulguración, antes del llenado de la hoja de corriente por el plasma, la zona por arriba de la arcada puede suponerse prácticamente homogénea. La figura 4.8 pretende describir la dinámica inicial de los SAROs moviéndose hacia las arcadas sobre un fondo aparentemente uniforme. Los resultados obtenidos con diferentes valores de densidad de fondo son consistentes con el rango de variación de parámetros descritos en la literatura, e.g. Verwichte et al. (2005). Por lo tanto, en el escenario propuesto, la dinámica de varios eventos SAROs es sustentada por la interacción localizada (confinada en los canales oscuros) de ondas no-lineales y frentes de choque que actúan en tiempos comparables a los observados (ver Maglione et al. 2011).

En la región inferior de la figura 4.8, por ejemplo  $y \sim 10\text{Mm}$ , se nota el aumento de la densidad (Fig. 4.8a), el del parámetro  $\beta$  (Fig. 4.8d), y el aumento de la presión total (Fig. 4.8e) con respecto a sus correspondientes valores de fondo. También se nota una disminución de la intensidad de campo magnético (Fig. 4.8c). Estas estructuras sobredensas pueden estar asociadas con las estructuras brillantes descendentes descritas por McKenzie (2000). En nuestro escenario, estas regiones están asociadas a frentes de choque que se abren paso hacia la superficie solar. Estas modifican el medio de fondo, entre otros efectos, acumulando masa en el frente del flujo.

La dinámica de múltiples estructuras de choque, produce patrones temporales con cierta reminiscencia



**Fig. 4.9:** Presión total de los tres flujos al tiempo  $t = 196$  segundos, en las alturas: 32Mm (línea de puntos), 15Mm (línea sólida) y 12Mm (línea de trazos y puntos). Puede apreciarse un estrangulamiento localizado en 12Mm en la traza del segundo flujo.

al estrangulamiento observacional mostrado por otros autores (Innes et al. 2003a), (Innes et al. 2003b), (ver los nudos en las trazas de los *SAROs* de la figura 4.8). La figura 4.9 muestra la presión total a las alturas indicadas con los cortes de la Fig. 4.8e):  $\sim 32$ Mm,  $\sim 15$ Mm y  $\sim 12$ Mm. Notar que la presión total se mantiene aproximadamente constante en la región superior, cerca del centro de la detonación, a  $\sim 32$ Mm (línea de puntos). A unos  $\sim 15$ Mm de altura, (línea sólida), la presión total es mayor dentro de las estelas de vacío. Los estrangulamientos o nudos corresponden a regiones donde la presión total interna es menor a la exterior (ver como ejemplo la traza dejada por el flujo saliente a  $\sim 12$ Mm, línea de trazos y puntos).

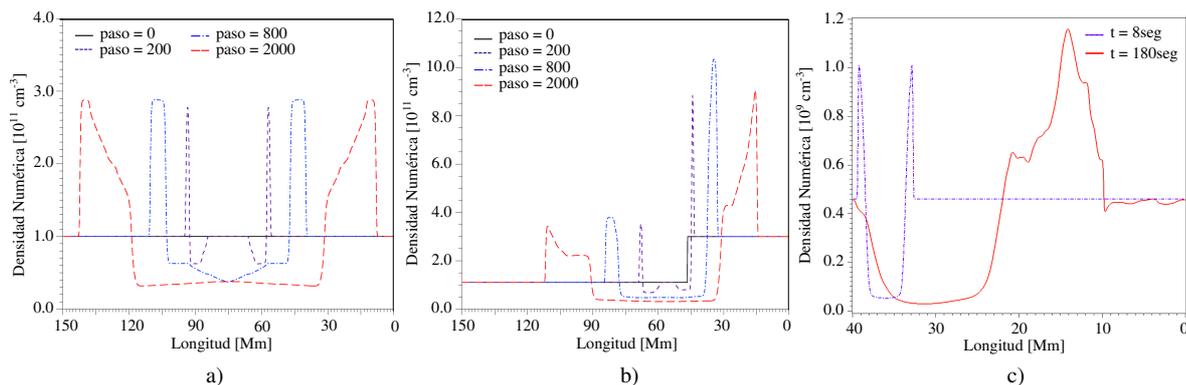
Como puede apreciarse en la figura 4.8, en acuerdo con lo esperado, parece que los canales de *SAROs* están distorsionados por el hecho de ser múltiples. No hay una apreciable evidencia de interacción entre los flujos. Savage et al. (2012), en el contexto propuesto por Linton et al. (2009), han interpretado la discretitud de los flujos como una indicación de que el fenómeno de reconexión es altamente localizado. En nuestro escenario, como en el propuesto por Linton et al. (2009), la producción de flujos de plasma está asociada con eventos localizados de reconexión magnética. En este modelo no asumimos una configuración bidimensional ni una particular topología magnética de la hoja de corriente (e.g. Priest & Démoulin 1995). El escenario propuesto por Linton et al. (2009) relaciona inherentemente el vacío de plasma con las reconexiones que ocurren dentro de la hoja de corriente. En nuestro caso la reconexión no es modelada, pero es simulada mediante un pulso de presión que detona la producción de flujos en un medio inicialmente homogéneo.

### Estructura y apariencia ondulatoria

La apariencia ondulatoria en el movimiento de los vacíos que se aprecia en algunas observaciones (Verwichte et al. 2005) parece indicar la presencia de interacción entre *SAROs*. Existen diferencias im-

portantes entre las simulaciones en una y dos dimensiones respecto a la capacidad para generar dichas ondulaciones. En los trabajos 1D, Costa et al. (2009) y Schulz et al. (2010), estas estructuras se obtienen simplemente debido a los rebotes en el contorno. Dicho contorno emula la presencia de un medio vecino más denso (ver figuras 2 y 1 de Costa et al. 2009; Schulz et al. 2010, respectivamente). En las simulaciones 1D el patrón oscilatorio se mantiene en el tiempo y las ondas no pierden energía. En el trabajo 2D de Maglione et al. (2011), la apariencia oscilatoria de un corte lateral se amortigua en unos pocos periodos (ver la figura 1a) en dicho trabajo), y si nos enfocamos en los cortes bidimensionales (ver figura 2 de estos autores), no es posible reconocer el carácter oscilatorio. La distribución espacial de energía en los laterales bidimensionales (con condiciones de contorno cerradas), debido a los rebotes, amortigua muy rápidamente las oscilaciones y no da cuenta de la apariencia ondulatoria.

Por otro lado, comparando la evolución no-lineal de las ondas producidas por los pulsos de presión en los casos de una y dos dimensiones, podemos reconocer un comportamiento dinámico similar, el cual prevalece en el tiempo y puede explicar la robustez de los patrones de vacíos observados. En la figura 4.10a) mostramos la evolución espontánea unidimensional de la densidad debido a la acción de un pulso de presión sobre un medio con condiciones iniciales estáticas (Fernández et al. 2009). En la figura 4.10b) el pulso localizado se ubica de manera descentrada respecto de la distancia radial, como en nuestras simulaciones. La figura 4.10a) muestra resultados obtenidos para ciertos tiempos, correspondientes a los pasos temporales (no dimensionales) de 0, 200, 800 y 2000. El paso temporal 0 corresponde a  $\rho(0) = 10^{-11} \text{cm}^{-3}$ . Vemos dos frentes de onda de choque para cada paso temporal, por ejemplo para el paso 800, los choques se localizan en  $(x_{1s} = 39; x_{2s} = 111)$ Mm. Además, para el mismo paso temporal se encuentran dos discontinuidades de contacto ubicadas en  $(x_{1c} = 46.5; x_{2c} = 103.5)$ Mm y dos ondas de expansión iniciadas en  $(x_{1e} = 57; x_{2e} = 93)$ Mm. Inicialmente los dos frentes de choque se mueven alejándose de la posición en que el pulso comienza (ver por ejemplo el tiempo correspondiente a 200 en las figuras 4.10a) y 4.10b)). A medida que los choques viajan a lo largo de la dirección del campo magnético, la temperatura y la densidad se incrementan haciendo que la energía se eleve, e.g.  $(x_{1s} = 39; x_{2s} = 111)$ Mm en el tiempo 800 en la figura 4.10a). La densidad disminuye abruptamente (e.g.  $(x_{1c} = 46.5; x_{2c} = 103.5)$ Mm) en el tiempo 800 debido a las discontinuidades de contacto que van detrás de los frentes de choque. Estas pueden ser reconocidas debido a que la presión y la velocidad del flujo no cambian con el pasaje de la onda. La temperatura aumenta para mantener constante la presión a lo largo de la discontinuidad de contacto. Además, las dos ondas de expansión, que se reconocen debido a que disminuyen la densidad a su paso, viajan inicialmente hacia la posición de detonación, en sentido contrario a los frentes de choque (e.g.  $(x_{1e} = 55.5; x_{2e} = 94.5)$ Mm al tiempo 200 en la figura 4.10a). Estas ondas colisionan, rebotando en la posición de detonación (parte central de las figuras 4.10a) y b), para el paso temporal 800), y luego viajan en sentido opuesto al de las discontinuidades de contacto (e.g.  $(x_{1e} = 57; x_{2e} = 93)$ Mm al tiempo 800 en la figura 4.10a). Por comparación de los pasos temporales 800 y 2000, vemos que las ondas de expansión tienen una velocidad mayor que las correspondientes discontinuidades de contacto. En el tiempo 2000, las posiciones de los frentes de choque en la figura 4.10a) son  $(x_{1s} = 7.5; x_{2s} = 142.5)$ Mm, las ondas de expansión han interactuado con las discontinuidades de contacto y han bajado los valores de densidad y presión, dejando detrás un sistema no-lineal de ondas acopladas. Esto puede verse en los rangos  $(\Delta x_1 = 31.5 - 7.5; \Delta x_2 = 142.5 - 118.5)$ Mm de la figura 4.10a) y  $(\Delta x_1 = 28.5 - 15.0; \Delta x_2 = 109.5 - 91.5)$ Mm de



**Fig. 4.10:** a) Evolución de la densidad de una simulación unidimensional luego de la detonación de pulsos de presión a diferentes tiempos. b) Igual que en el panel a), salvo que esta vez los pulsos son detonados de manera asimétrica. c) Evolución bidimensional de la densidad de *SAROs* para un corte a  $x = 19\text{Mm}$  en la figura 4.8a).

la figura 4.10b). El resultado dinámico es la formación de la cavidad central.

En la figura 4.10c) se muestra un corte en el campo de densidad para la simulación bidimensional de *SAROs* de la figura 4.8a). Dicho corte se localiza en  $x = 19\text{Mm}$ . La similitud entre las figuras 4.10a) y b) y 4.10c) expresa que la descripción unidimensional del comportamiento dinámico es correcta en una primera aproximación. Esto salta a la vista si se compara el tiempo  $t = 8\text{seg.}$  de la figura 4.10c) con el paso temporal 800 en las figuras 4.10a) y b). También puede compararse el tiempo  $t = 180\text{seg.}$  en la figura 4.10c) con el paso temporal 2000 en la figura 4.10a) y b). Sin embargo, existen pequeñas diferencias entre la forma del campo de densidad en la figura 4.10c) a  $t = 180\text{seg.}$  y las figuras 4.10a) y b) en el paso 2000. Mediante la comparación de los detalles de las curvas en ambas figuras notamos que aún cuando los patrones son similares, la forma más irregular en la figura 4.10c) puede atribuirse a las perturbaciones producidas por los *SAROs* vecinos.

Hemos encontrado casos donde es evidente la interacción entre *SAROs* y esto tiene consecuencias observacionales, como el carácter ondulatorio registrado por Verwichte et al. (2005). En la figura 4.11 se muestra la evolución de un *SARO* para el modelo *M1*, luego de que detonara un cuarto pulso de presión, en el tiempo  $t = 200$  segundos. A partir de ese momento, se desarrolla un nuevo frente de onda sobre los canales discretos abiertos por los tres *SAROs* iniciales, los cuales han viajado desacelerándose, una distancia de  $\sim 16\text{Mm}$  hasta  $t = 212\text{seg.}$  En la parte superior de la figura 4.11, al tiempo  $t = 300$  segundos, parece que los *SAROs* iniciales pierden en parte su discretitud. Vemos que, cuando el campo magnético es uniforme la energía producida por el cuarto pulso de presión se distribuye de una manera no-homogénea, debido a la colimación generada por el campo magnético. Mientras que los primeros *SAROs* se están propagando delante, el nuevo *SARO* deja una nueva traza. Asimismo, el nuevo pulso de reconexión inyecta energía que es distribuida de manera no-uniforme entre las estelas preexistentes. En otras palabras, el pulso de presión circular al tiempo  $t = 212\text{seg}$  es posteriormente colimado por la configuración de campo magnético al tiempo  $t = 300\text{seg.}$  Como en los otros casos, la elongación en la dirección solar del cuarto canal, es debido a la interacción con la frontera reflectante superior y la

frontera absorbente inferior a lo largo de la dirección del campo magnético. Un efecto notable, que tiene implicaciones observacionales, es la distribución de energía cinética. Como puede verse en la figura 4.12, parte de la energía cinética del nuevo *SARO* se distribuye a lo largo de las estelas dejadas por los *SAROs* previos. Asimismo, y de acuerdo con las observaciones, cuando la secuencia es apreciada por medio de una animación, las estelas exhiben un movimiento oscilatorio (e.g. Verwichte et al. 2005; McKenzie 2000; Khan et al. 2007). Esto puede explicarse a través de la tendencia del frente de onda a desviar la energía cinética hacia las regiones de baja densidad, es decir, hacia las estelas dejadas por los *SAROs* previos.

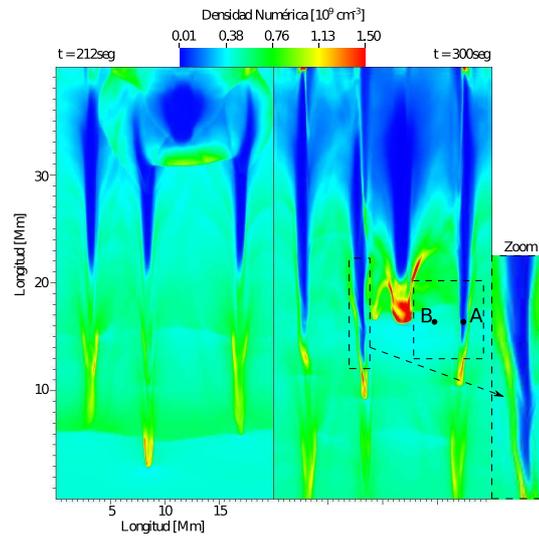
La relación de continuidad de Rankine–Hugoniot para choques hidrodinámicos, es decir, choques en la dirección longitudinal, en el sistema parado sobre la onda de choque es:

$$v_u = \frac{\rho_d}{\rho_u} v_d \quad u \quad \text{upstream, } d \quad \text{downstream.} \quad (4.1)$$

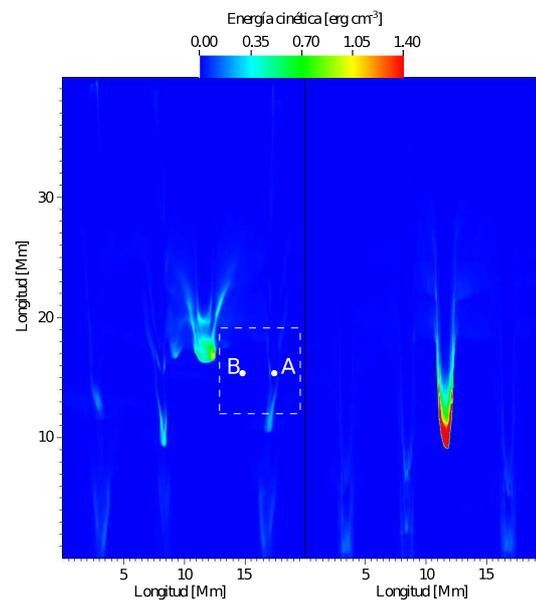
Inicialmente, la energía del pulso de presión es distribuida de manera circular, debido a que el valor de la presión del pulso del gas es apreciablemente mayor con respecto a la presión magnética ambiente (figura 4.11). Podemos considerar que  $\rho_d$  y  $v_d$  son aproximadamente constantes alrededor del borde circular del frente de choque inicial. Sin embargo, los valores correspondientes corriente arriba (*upstream*) de  $\rho_u$  van a ser diferentes dependiendo de la distribución previa de *SAROs*. Es decir,  $\rho_u$  es al menos un orden de magnitud menor en las estelas dejadas por los *SAROs* previos. De modo que inicialmente, la velocidad de flujo corriente arriba será mayor en las trazas dejadas por los *SAROs* que en el ambiente circundante. Mas aún, los *SAROs* desarrollados con anterioridad han fluido a mayores velocidades que el ambiente, y el valor de su velocidad debe adicionarse a la velocidad corriente arriba. Esto implica que dos frentes de choque en dirección corriente arriba, con valores iniciales  $\rho_A < \rho_B$  y por lo tanto  $v_A > v_B$ , continuarán su movimiento con  $v_A > v_B$ , mientras el frente de choque se propague. Obviamente la misma relación es válida para la energía cinética, i.e.  $K_A = \rho_A v_A^2 = \rho_B v_B v_A > \rho_B v_B^2 = K_B$  (donde  $K$  es la energía cinética). Esta relación se conserva corriente arriba, como puede apreciarse en la figura 4.12. Puede compararse la energía cinética  $A$  y  $B$  en esta figura con las densidades correspondientes ( $\rho_A < \rho_B$ ) en la figura 4.11. Cabe destacar la correspondencia entre los bajos valores de densidad en las posiciones  $A$  y  $B$  de la figura 4.12 con respecto a los altos y bajos de energía cinética en las mismas posiciones en la figura 4.11. La energía del cuarto evento de reconexión es parcialmente desviada de la nueva traza, hacia los canales previamente abiertos, dependiendo del parámetro  $\beta$  de plasma de fondo. Puede apreciarse la energía cinética en la figura 4.12, para el modelo  $M2$  al tiempo  $t = 300$  segundos. Cuando la intensidad del campo magnético se aumenta, o cuando la intensidad del pulso de presión se disminuye (modelo  $M4$ ), el carácter ondulatorio se pierde.

### Una posible configuración *SAD*

Realizamos una nueva simulación con un fondo inhomogéneo. Dicho fondo simula la modificación realizada en el medio por la acción de varios *SAROs* a lo largo de su evolución temporal. Los finos canales oscuros obtenidos en las simulaciones previas (cuyos tamaños rondan los 2Mm), emulan la acción de pulsos de reconexión en un medio homogéneo. A los frentes de choque brillantes que se aprecian en la parte inferior de la figura 4.8 le seguirán una acumulación de masa en el frente, cambiando la densidad del medio. Esta generación primaria de *SAROs* se parece a los “rayos” que pueden apreciarse en el abanico



**Fig. 4.11:** Densidad numérica en el modelo *M1* luego del cuarto pulso de presión, el evento es visto a la izquierda al tiempo  $t = 212$  segundos, y a la derecha la tiempo  $t = 300$  segundos. Notar la estructura ondulatoria (ampliación de la zona) debido a la interacción entre los diferentes *SAROs*.



**Fig. 4.12:** Densidad de energía cinética colimada hacia las trazas dejadas por previos *SAROs*. A la izquierda se muestra el modelo *M1* al tiempo  $t = 300$  segundos, mientras que a la derecha se muestra el modelo *M2* al mismo tiempo.

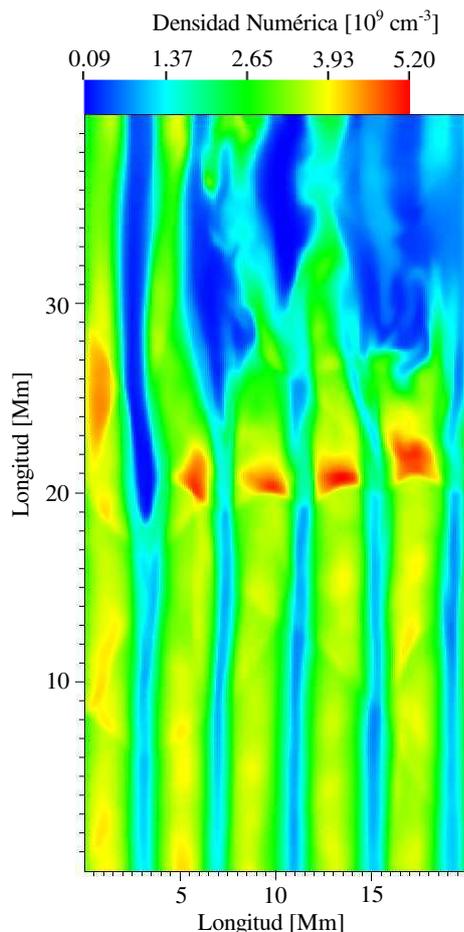
superior a las arcadas en algunas de las observaciones, e.g., figura 4.1. Para analizar el efecto de nuevas reconexiones ocurriendo en un medio ya modificado por una generación previa de *SAROs*, usamos como condición inicial una distribución sinusoidal de densidad, modificando el campo magnético de modo de garantizar condiciones de presión total uniforme.

En la figura 4.13 se muestran las variaciones en la densidad obtenidas por la evolución de cuatro pulsos localizados aleatoriamente en un medio distorsionado por *SAROs* previos. Como se muestra en la figura 4.12 la energía de los nuevos eventos de reconexión es confinada preferentemente hacia los canales dejados por la generación de eventos previos. En otras palabras, los nuevos vacíos se observan recorriendo los canales brillantes (*SAROs*) una vez que el medio se torna inhomogéneo. De la figura 4.13 notamos que los pulsos posteriores, con forma de lágrima, están asociados a diferentes tamaños (del orden de unos 2Mm a 9Mm) dependiendo del efecto producido por el nuevo frente de onda sobre el medio. Vale notar que el rango de variación y la ocurrencia de canales brillantes y oscuros recuerdan las estructuras observadas en la película 2 del trabajo de Savage et al. (2012) (ver por ejemplo el cuadro 131 de la banda 131 al tiempo 12:08:33UT). Además, el cuadro superior de tiempo universal 12:22:09 (película 2) exhibe una compleja estructura que recuerda la acción ulterior de la evolución de los *SAROs*. Pueden reconocerse asimismo algunos arcos abajo a la izquierda. Si el escenario propuesto describe una configuración posible de plasma, los *SADs* podrían ser eventos de reconexión tardíos que ocurren en un medio inhomogéneo distorsionado por la acción de *SAROs* anteriores. El vínculo entre *SAROs* y *SADs*, es decir la diferencia de tamaños de estas dos estructuras, podría reflejarse en el hecho de que la energía liberada por reconexiones posteriores es confinada dentro de canales dejados por los eventos precursores. Estas nuevas deposiciones de energía cinética, se ven confinadas en los canales previos, renovando el movimiento acelerado de los *SAROs* y deformando sus extremos hasta adquirir una forma similar a una lágrima con una cola oscilante (esta forma típica que se observa por ejemplo en la figura 4.6 ha dado lugar a que algunos autores llamen *tadpoles*, por renacuajos a estas estructuras zigzagueantes). Los *SADs* serían vistos posteriormente a los *SAROs*. Este escenario no excluye la posible presencia e interacción entre arcos y *SAROs* como consecuencia de una reorganización del campo magnético. Para estudiar esto se requiere una simulación tridimensional, la que está programada como trabajo futuro. Una importante diferencia del trabajo presentado en este capítulo con el escenario propuesto por Savage et al. (2012), es que todos los vacíos obtenidos mediante simulación (algunos parecidos a *SADs*) no son trazas, pero si flujos de reconexión formados mediante choques e interacciones no-lineales, las cuales podrían ser precedidas por arcos.

En resumen, nuestra interpretación implica que *SAROs* y *SADs* son ambos flujos de reconexión magnética del mismo tipo, con la única diferencia que los *SAROs* son anteriores a los *SADs*, y como tales modifican el medio que es aproximadamente homogéneo originariamente. Los flujos de reconexión posteriores dan la impresión de estar precedidos por canales más brillantes. Queda por entender la interacción entre *SAROs* y los probables arcos cercanos.

#### 4.4. Conclusiones

Hemos analizado la dinámica de múltiples canales oscuros moviéndose de manera zigzagueante y levemente desacelerada hacia la superficie solar por encima de arcadas magnéticas luego de fulguraciones.



**Fig. 4.13:** Ocurrencia de nuevos eventos de reconexión en un medio previamente distorsionado por una generación anterior de *SAROs*.

En el escenario que proponemos, las cavidades subdensas de plasma son flujos producidos por eventos localizados de reconexión magnética (*SAROs*). Estas cavidades se forman por la evolución de ondas de choque y expansión colimadas en la dirección del campo magnético ambiente. Las cavidades contienen altos valores de temperatura y del parámetro  $\beta$ , respecto al medio circundante. Estas estructuras sostienen su morfología en el tiempo comportándose como un patrón individual con movimiento levemente desacelerado hacia las arcadas. Dicha morfología parece independiente de las condiciones de borde y otras perturbaciones.

Cuando se analizan múltiples configuraciones de *SAROs*, puede notarse que la estructura de cada *SARO* resulta similar al patrón individual, reforzando la hipótesis de no-interacción entre ellos. Sin embargo, el carácter oscilatorio que se muestra en las observaciones, puede interpretarse como una señal de interacción entre diferentes *SAROs*. Esta interacción es significativa cuando el pulso de presión que excita el fenómeno, actúa sobre el medio modificado por *SAROs* previos. Dicho carácter ondulatorio se incrementa con la magnitud del fenómeno de reconexión y/o la disminución de la intensidad del campo magnético.

El hecho de que en un medio inhomogéneo, modificado por flujos de reconexión (*SAROs*) previos, la energía de los nuevos eventos sea colimada hacia los canales vacíos dejados por *SAROs* anteriores, implica un vínculo entre los eventos de reconexión previos y posteriores que resulta consistente con las observaciones.

## BIBLIOGRAFÍA

- Cécere, M., Schneider, M., Costa, A., Elaskar, S., & Maglione, S. 2012, *APJ*, 759, 79
- Costa, A., Elaskar, S., Fernández, C. A., & Martínez, G. 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 400, L85
- De Colle, F. & Raga, A. C. 2006, *A&A*, 449, 1061
- De Colle, F., Raga, A. C., & Esquivel, A. 2008, *APJ*, 689, 302
- Fernández, C. A., Costa, A., Elaskar, S., & Schulz, W. 2009, *MNRAS*, 400, 1821
- Innes, D. E., McKenzie, D. E., & Wang, T. 2003a, *SOL. PHYS.*, 217, 267
- Innes, D. E., McKenzie, D. E., & Wang, T. 2003b, *SOL. PHYS.*, 217, 247
- Khan, J. I., Bain, H. M., & Fletcher, L. 2007, *A&A*, 475, 333
- Linton, M. G., Devore, C. R., & Longcope, D. W. 2009, *Earth, Planets, and Space*, 61, 573
- Longcope, D. W., Guidoni, S. E., & Linton, M. G. 2009, *APJL*, 690, L18
- Maglione, L. S., Schneider, E. M., Costa, A., & Elaskar, S. 2011, *A&A*, 527, L5
- McKenzie, D. E. 2000, *SOL. PHYS.*, 195, 381
- McKenzie, D. E. & Hudson, H. S. 1999, *APJL*, 519, L93
- McKenzie, D. E. & Savage, S. L. 2009, *APJ*, 697, 1569
- Priest, E. R. & Démoulin, P. 1995, *J. GEOPHYS. RES.*, 100, 23443
- Savage, S. L. & McKenzie, D. E. 2011, *APJ*, 730, 98
- Savage, S. L., McKenzie, D. E., & Reeves, K. K. 2012, *APJL*, 747, L40
- Schulz, W., Costa, A., Elaskar, S., & Cid, G. 2010, *MNRAS*, 407, L89
- Verwichte, E., Nakariakov, V. M., & Cooper, F. C. 2005, *A&A*, 430, L65
- Warren, H. P., Bookbinder, J. A., Forbes, T. G., et al. 1999, *APJL*, 527, L121
- Warren, H. P., O'Brien, C. M., & Sheeley, Jr., N. R. 2011, *APJ*, 742, 92

## Simulaciones numéricas de oscilaciones en arcos coronales

En este capítulo, se detalla el análisis realizado sobre datos obtenidos por simulaciones de arcos magnéticos coronales. Se simularon dos casos de arcos que fueron estudiados observacionalmente por otros autores y que presentan oscilaciones tipo *sausage*. Se realizó un análisis sobre las oscilaciones que acontecen en estas estructuras tanto en simulaciones 2 y 3 dimensionales. En el caso bidimensional trabajos iniciales fueron publicados en Cécere et al. (2008a) y Cécere et al. (2010). En el caso tridimensional, además del estudio de las simulaciones de los arcos abarcados en las simulaciones 2D, se estudiaron las oscilaciones propias de la geometría tridimensional como los modos torsionales.

Para analizar la dinámica de oscilaciones *sausage* en arcos magnéticos se utilizó la aproximación de la MHD ideal. Nuestro objetivo es reproducir numéricamente resultados observacionales para explicar las frecuencias, la estructura de modos y los acoplamientos encontrados. En una primera instancia se realizó un trabajo exploratorio en 2D. Para este caso, considerando una base cromosférica densa, analizamos la evolución de la dinámica interna del plasma de los arcos magnéticos. Dadas las características físicas de la corona y la cromosfera se obtiene la condición de atadura de las líneas de campo (*line-tying*) utilizando parámetros observacionales tomados de Asai et al. (2001) y Melnikov et al. (2002). En una segunda instancia se procedió a realizar un estudio tridimensional. Los resultados encontrados a partir de las simulaciones numéricas realizadas, se comparan con los resultados de la simulación 2D y con las observaciones mencionadas. Para una etapa posterior queda incorporar una capa cromosférica a este caso tridimensional.

## 5.1. Introducción

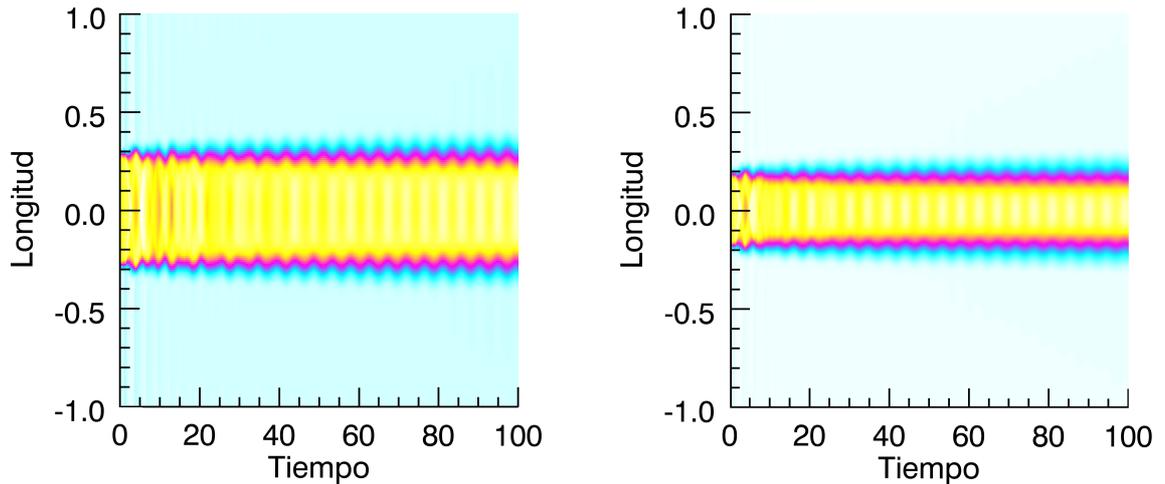
Se piensa que una de las fuentes que más contribuye al calentamiento coronal se encuentra en las regiones activas formadas por arcos magnéticos brillantes en rayos X blandos y EUV (Aschwanden et al. 2007) (figura 1.4). En la década pasada, el interés en determinar la presencia de ondas y oscilaciones que puedan contribuir como mecanismos de calentamiento, aumentó en base al desarrollo de trabajos tanto teóricos como observacionales. Los diagnósticos remotos de la sismología coronal se han revelado como un medio efectivo de identificación de un amplio espectro de oscilaciones rápidas y lentas.

Actualmente se han desarrollado nuevas herramientas de diagnóstico que permiten mejorar la precisión de parámetros de la física solar o incluso revelar la presencia de nuevos parámetros. Entre estas herramientas pueden mencionarse del lado de las observaciones, las mediciones de periodos característicos, de velocidades y tiempos de amortiguamiento y longitudes características. Del lado de la teoría, se debe destacar el desarrollo de modelos que intentan describir mecanismos de amortiguamiento no disipativo y procesos de fuga de energía en sistemas con números de Reynolds altos. De esta forma es posible mejorar el conocimiento del plasma solar y sus parámetros como la magnitud del campo magnético o los coeficientes de transporte (ver por ejemplo los trabajos de Aschwanden (2006) y de Nakariakov & Verwichte (2005)).

Es sabido que los modos puros del tipo *sausage* (figura 1.16), modelados como un cilindro magnético o como un paralelepípedo de sección rectangular (*slab*), son modos MHD compresibles rápidos que perturban radialmente el plasma causando una contracción simétrica y un ensanchamiento del tubo sin distorsión del eje (Edwin & Roberts 1983). El modo fundamental fue detectado observacionalmente en la corona por Nakariakov et al. (2003) usando el radioheliógrafo Nobeyama. Las variaciones periódicas en la intensidad de emisiones térmicas en banda EUV y rayos X blandos están asociadas con perturbaciones en la densidad y ensanchamiento Doppler de las líneas de emisión. Asimismo, Zaitsev & Stepanov (1989) han propuesto que puede ocurrir una modulación de los rayos X duros y de luz blanca emitidas desde las bases de los arcos magnéticos, y consecuentemente un cambio en la tasa del efecto espejo, provocando una precipitación periódica de electrones no térmicos de arcos magnéticos. Estas pulsaciones cuasiperiódicas, excitadas por modos *sausage*, se han asociado también con eventos de fulguración en otras estrellas (Mitra-Kraev et al. 2005).

Los modelos teóricos estándar (Edwin & Roberts 1982, 1983; Zaitsev & Stepanov 1989) predicen que el modo global rápido del tipo *sausage* tiene dos regímenes separados por un corte en números de onda grandes: el modo de drenado o *leaky*, donde la energía se pierde a través de los bordes del arco, y el régimen atrapado, donde la energía de oscilación es confinada en el interior de la estructura del arco. El modo *leaky* ocurre en arcos finos y largos donde la velocidad interna de Alfvén es mayor que la velocidad de Alfvén externa. Por otro lado, los modos atrapados se dan mayormente en arcos gruesos y cortos capaces de retener la energía.

Aschwanden et al. (2004), mostraron que el corte en los modos tipo *sausage* impone una cota de densidad demasiado alta, por lo cual sólo pueden darse este tipo de oscilaciones en arcos que se ubican en regiones activas. Analizando observaciones de modos rápidos globales encontraron oscilaciones confinadas en segmentos pequeños del arco, delimitados por nodos, lo que indicaría que la oscilación está asociada a



**Fig. 5.1:** Densidad como función del tiempo, de un corte transversal al arco, en el centro del mismo ( $y = 0$ ). Izquierda) Caso A, Derecha) Caso M. Valores dimensionales se obtienen multiplicando por  $l_0 = 10\text{Mm}$  y  $t_0 = 1.39\text{seg}$  en A y  $l_0 = 16.3\text{Mm}$  y  $t_0 = 3.25\text{seg}$  en M.

armónicos superiores en lugar de modos fundamentales como se había supuesto. Sin embargo, Aschwanden et al. (2004) rescatan las observaciones en microondas y rayos X de Asai et al. (2001) y Melnikov et al. (2002) como los únicos casos de la literatura consistentes con una oscilación atrapada de tipo *sausage* en el armónico fundamental. Pascoe et al. (2007) estudiaron el régimen *leaky* encontrando, mediante modelados numéricos, que arcos largos con contraste en densidad suficientemente pequeño pueden soportar modos *leaky* globales de tipo *sausage* con señales detectables, y por lo tanto argumentan que este modo puede ser además responsable de pulsaciones cuasiperiódicas en la emisión de la fulguración. Un problema para la identificación de modos es que el periodo del modo *leaky* global de tipo *sausage* es determinado por la velocidad de Alfvén exterior al arco. Además, Verwichte et al. (2009) notaron que la energía de la onda, en arcos con velocidad interna de Alfvén localmente menor a la velocidad externa, puede traspasar una barrera evanescente hacia la corona circundante. Esto se debe a que la inhomogeneidad del medio produce variaciones relativas de las velocidades de Alfvén. Srivastava et al. (2008), basados en la observación de múltiples oscilaciones, sugieren que los arcos fundamentalmente fríos, posteriores a fulguraciones no están en equilibrio, causando por lo tanto movimiento del plasma a lo largo del arco coronal. Por otro lado Pascoe et al. (2009) investigaron los efectos de secciones transversales no uniformes en arcos fulgurantes, encontrando que los modos *sausage* globales son excitados de manera muy eficiente.

El objetivo de este capítulo es presentar las investigaciones realizadas en el marco de la presente tesis sobre el establecimiento y amortiguamiento de oscilaciones *sausage* considerando estados iniciales no-lineales e inhomogéneos. Presentamos simulaciones realizadas en base a dos estudios observacionales de arcos magnéticos que se suponen capaces de desarrollar modos *sausage* globales atrapados. Dichos trabajos son los de Asai et al. (2001) (Caso A) y Melnikov et al. (2002) (Caso M), respectivamente.

## 5.2. Simulaciones numéricas bidimensionales

### Condiciones iniciales y de borde

Las condiciones iniciales para el caso 2D corresponden a un corte bidimensional a lo largo del eje de un arco coronal cuya densidad interna es mayor que la del exterior. Despreciamos en esta primera instancia los efectos de curvatura del arco y lo consideramos recto, con puntos de asentamiento en la región cromosférica y un campo magnético paralelo y uniforme a lo largo del eje del arco, en este caso, la dirección  $y$ . Los efectos de la gravedad son despreciados por simplicidad y dado que no estamos interesados en los efectos de curvatura. Además, la escala de altura de presión es de  $\sim 10^2$  Mm y tratamos con objetos que se encuentran a alturas del orden de los  $\sim 10$  Mm. Respecto a las condiciones de borde (condiciones de flujo saliente), realizamos una constatación del efecto del borde, realizando una simulación con el doble de largo en la dirección  $x$ . Se analizaron las frecuencias espaciales y temporales características obtenidas en este caso, y las comparamos con la simulación de dominio más pequeño. La comparación arrojó un buen acuerdo, por lo que la condición impuesta en el borde no afecta los resultados obtenidos. El código utiliza una versión en variables primitivas de las ecuaciones (2.27) adimensionalizadas:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho &= -\partial_j(\rho v_j) \\ \rho \partial_t v_i &= -\rho v_j \partial_j v_i - \partial_i p - B_k (\partial_i B_k - \partial_k B_i) \\ \partial_t B_i &= -\partial_j (v_j B_i - B_j v_i) - \partial_i \phi \\ \partial_t p &= v_i \partial_i p - \gamma p \partial_i v_i \\ \partial_t \phi &= -\partial_j B_j - \phi\end{aligned}$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $v$  la velocidad,  $B$  el campo magnético,  $p$  la presión térmica,  $\phi$  la función adicional para realizar la limpieza de la divergencia, y  $\gamma = 5/3$  es el cociente de calores específicos.

La condición de atadura de las líneas de campo magnético en las bases de la cromosfera ( $y = \pm L/2$ , siendo  $L$  la longitud del arco) se asegura mediante la elección apropiada de los parámetros que emulan las condiciones físicas, es decir, en el cambio del parámetro del plasma  $\beta$ . Como se ha notado antes, usamos un esquema de limpieza de la divergencia (Dedner et al. 2002) e iniciamos las simulaciones con datos que no satisfacen  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  pero cuya evolución lleva la solución a una violación del vínculo muy pequeña en una escala de tiempo muy pequeña.

La condición para la existencia de modos *sausage* globales (Aschwanden et al. 2004)<sup>1</sup> es:

$$\frac{L}{\omega} < 0.65 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_e}}, \quad (5.1)$$

donde  $\omega$  es el ancho del arco,  $\rho_0$  y  $\rho_e$  las densidades internas y externas del arco, respectivamente. El periodo global estacionario debe satisfacer la relación:

$$\frac{2L}{v_{Ae}} < P_{saus} = \frac{2L}{v_f} < \frac{2L}{v_{A0}}, \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>Esta condición se deriva de aproximaciones realizadas a partir de la relación de dispersión para modos en cilindros infinitos que se presentó en el capítulo introductorio.

donde  $v_{A0}$  es la velocidad interna de Alfvén,  $v_f$  la velocidad de fase y  $v_{Ae}$  la velocidad de Alfvén externa.

Para los dos casos observacionales considerados, hemos usado un reticulado numérico de  $200 \times 200$  celdas en una región de tamaño  $x \times y = 2 \times 2$ , correspondientes a las unidades  $l_0 = 10$  Mm de la simulación del caso A (Asai), y  $l_0 = 16.3$  Mm en el caso M (Melnikov). Los valores de referencia usados para obtener las ecuaciones adimensionales son:  $t_0 = 1.39$ seg,  $\rho_0 = 3.56 \times 10^{-15} \text{g cm}^{-3}$ ,  $B_0 = 152$ G,  $v_0 = 7194 \text{km s}^{-1}$ ; para el caso A, y  $t_0 = 3.25$ seg,  $\rho_0 = 2.72 \times 10^{-15} \text{g cm}^{-3}$ ,  $B_0 = 90$ G,  $v_0 = 5000 \text{km s}^{-1}$ ; para el caso M. El valor de la presión de referencia es  $p_0 = \rho_0 v_0^2$ . La longitud del arco, el ancho y la densidad interna de los arcos son tomadas de acuerdo con los resultados de las observaciones. En el estado estacionario, el arco del caso A tiene una longitud de  $L = 15$  Mm y un ancho  $\omega = 5.6$  Mm. Los valores correspondientes para el caso M son una longitud  $L = 24.5$ Mm y un ancho de  $\omega = 5.8$ Mm. Los valores iniciales dentro del arco para el caso de Asai fueron: densidad numérica  $n_A = 4.3 \times 10^{10} \text{cm}^{-3}$ , campo magnético  $B_A = 152$ G y temperatura  $T_A = 2.4$ MK. Para Melnikov:  $n_M = 9.8 \times 10^{10} \text{cm}^{-3}$ ,  $B_M = 90$ G y  $T_M = 9$ MK. Los valores externos al arco fueron calculados respetando el equilibrio de presión total entre el interior y el exterior. Los valores en la cromosfera se obtuvieron a partir de la condición  $\beta > 1$  en esta región y pidiendo equilibrio de presión total entre la cromosfera y la corona.

### Prueba numérica de *divergence cleaning*

Como hemos mencionado antes, en este capítulo utilizamos el esquema de limpieza de divergencia desarrollado en el capítulo 2. Comenzamos con condiciones iniciales que no satisfacen  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Sin embargo el apartamiento en el cálculo con respecto a dicho vínculo puede evaluarse del cociente:

$$\frac{\|\nabla \cdot \mathbf{B}\|_{L_2}}{\|\mathbf{B}\|_{H_1}}, \quad (5.3)$$

donde

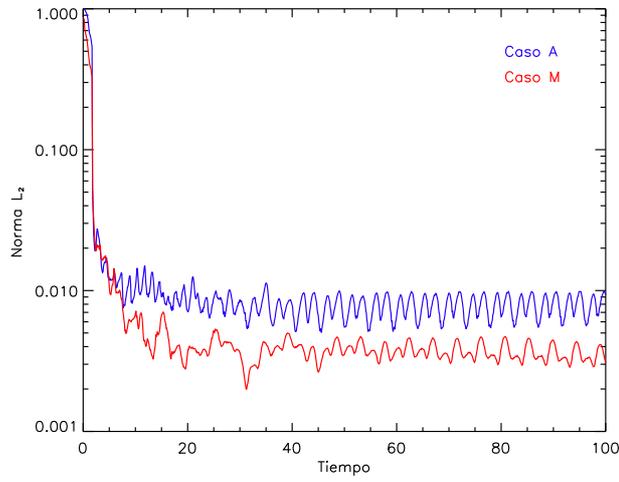
$$(\|\mathbf{B}\|_{H_1})^2 = \int_V (B_{x,x}^2 + B_{y,y}^2) dV$$

$B_{i,j}$  indica la derivada de  $B_i$  con respecto a  $j$ . Realizamos la prueba para los dos casos A y M. En la figura 5.2 puede apreciarse que en cinco unidades de tiempo la evolución deriva en una solución que viola el vínculo en cantidades muy pequeñas, menores al 1%.

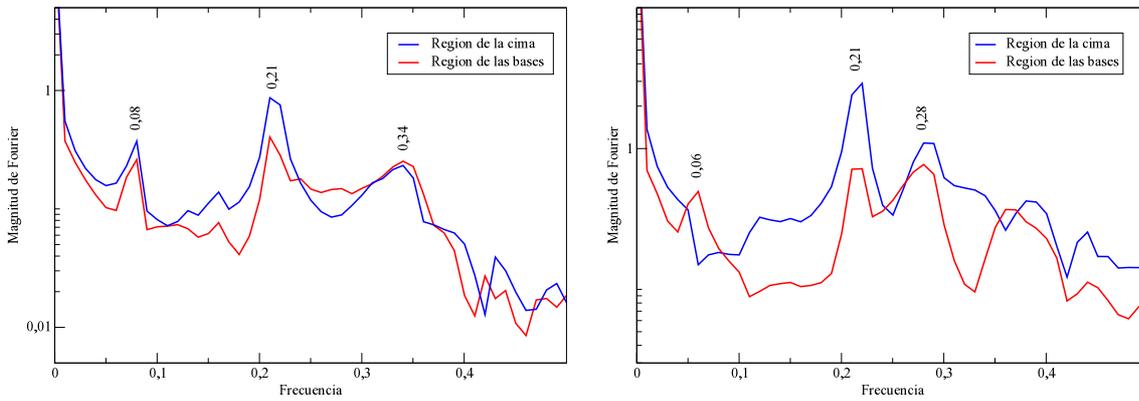
### Resultados y discusión

Hemos considerado un desbalance pequeño en la presión total entre las interfases definidas por el arco con la cromosfera, y con la región externa. En los dos casos considerados, los sistemas atados en las bases, evolucionan espontáneamente en unos pocos periodos hacia un estado estacionario hasta que se establece un régimen atrapado *sausage*.

Los paneles izquierdo y derecho de la figura 5.1 muestran un corte transversal ( $x$ ) del arco en la región central. Se observa la perturbación en densidad como función del tiempo para los casos A y M, respectivamente. En el caso M el régimen estacionario se establece en aproximadamente 9 periodos y en el caso A en aproximadamente 4. El modo *sausage* modifica el radio con una amplitud de  $\sim 15\%R_l$ , (representando con  $R_l$  el radio del arco) en el caso A, mientras que la correspondiente amplitud en el caso M es de  $\sim 17\%R_l$ .



**Fig. 5.2:** Norma  $L_2$  del cociente  $\frac{\|\nabla \cdot \mathbf{B}\|_{L_2}}{\|\mathbf{B}\|_{H_1}}$ . Tiempo dimensional obtenido multiplicando por  $t_0 = 1.39\text{seg}$  para caso A y  $t_0 = 3.25\text{seg}$  para el caso M.



**Fig. 5.3:** Transformada de Fourier para la densidad: Izquierda) Caso A, Derecha) Caso M. La línea de trazos roja representa la magnitud de la TF de la variación temporal de la densidad tomada en un punto cercano a una de las bases, mientras que la línea azul, a un punto cerca del centro, en función de la frecuencia adimensional.

### Asai

Los paneles izquierdo y derecho de la figura 5.3 muestran la transformada de Fourier (TF) de la densidad del arco para el caso A y M, respectivamente. En el caso A (panel izquierdo de la fig. 5.3), la transformada fue calculada en los puntos de la cuadrícula correspondientes a  $(x, y) = (0.1, 0.1)$  y  $(x, y) = (0.1, 0.5)$ , a la altura de 1Mm desde la parte superior del arco y 2.5Mm desde la parte inferior del arco, respectivamente. El tiempo se define como  $t = \tau t_0$  y la frecuencia adimensional es  $\nu = 1/\tau$ . La intensidad del pico de frecuencia  $\nu = 0.21$  da un periodo de  $\sim 6.6$ seg. Para una búsqueda aproximada del modo de oscilación, al cual pertenece este periodo, utilizamos la descomposición en ondas planas descrita en el Apéndice B2.1, para encontrar las frecuencias a partir de la relación de dispersión en un medio uniforme (1.29), en vez de la relación de dispersión del cilindro infinito (1.38). Por un lado, consideramos que los modos son ondas estacionarias, compuestas de ondas planas en direcciones contrarias. Estas ondas se ven confinadas al arco, debido a que existen nodos en la oscilación tanto en la dirección  $z$  como en  $x$  e  $y$ , dados por las longitudes características respectivas  $\lambda_z$ ,  $\lambda_x$  y  $\lambda_y$  ( $k_i = 2\pi/\lambda_i$ ).

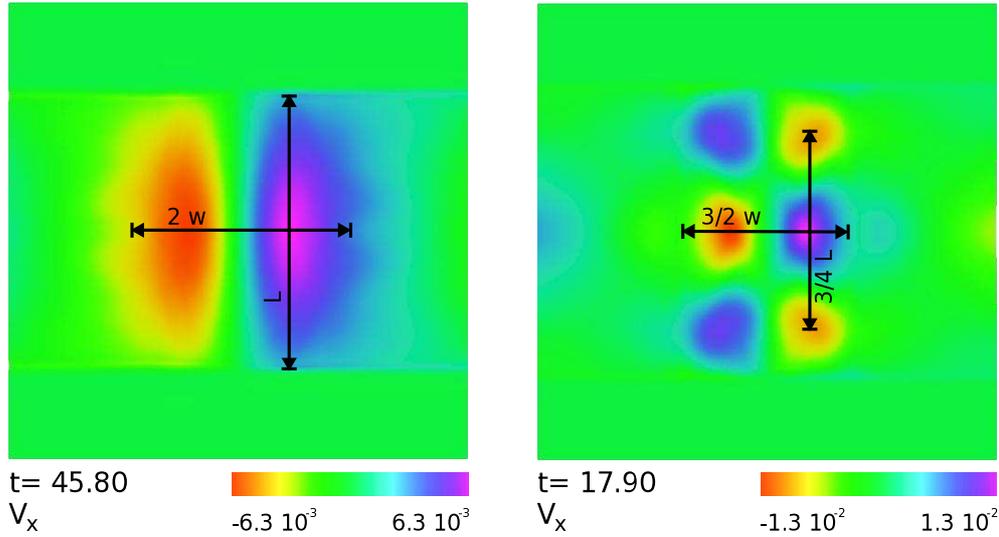
Este modo corresponde a  $\lambda_x = 2w$  y  $\lambda_y = 2L$  según la relación de dispersión (1.29) (Panel izquierdo de la figura 5.4). La frecuencia  $\nu = 0.34$  de periodo 4.1seg, está descrita por  $\lambda_x = 3/2w$  y  $\lambda_y = 3/4L$  según la relación de dispersión (1.29) (Panel derecho de la figura 5.4).

En la literatura, (por ejemplo Aschwanden 2006) los modos estacionarios de tipo *sausage* en medios uniformes tienen longitudes de onda dadas por la expresión  $\lambda = 2L/N$ , donde  $N = 1$  corresponde al caso fundamental,  $N = 2$  al segundo armónico y así sucesivamente. Nuestro análisis, abarca, no solamente la oscilación a lo largo del arco, sino también a lo ancho usando la relación de dispersión (1.29). En los modos de cilindro, ecuación (1.39), sólo se tiene en cuenta la dirección paralela al arco, por lo que el modo de frecuencia característica  $\nu = 0.21$  corresponde a un modo fundamental. En nuestra clasificación, la frecuencia  $\nu = 0.21$  está descrita por un modo fundamental tanto en  $x$  como en  $y$ , mientras que la frecuencia  $\nu = 0.34$  por algún armónico tanto en la dirección  $y$  como en la  $x$ . Estas configuraciones son explícitamente excluidas en los cálculos analíticos lineales de los modos de cilindro, ya que estos modos no consideran oscilaciones transversales independientes.

En el trabajo de Asai et al. (2001) se midió un periodo de 6.6seg y se sugirió a partir de estimaciones de campo magnético y de densidad, que dicho modo corresponde a un  $\lambda_{long} = L$ . El valor que calcularon a partir de estas estimaciones para la velocidad de Alfvén es de  $v_A \approx 3100\text{km s}^{-1}$  dando un periodo de  $\tau = L/v_A \approx 5.1$ seg. Según los datos obtenidos mediante nuestra simulación, el modo observado por estos autores, es un modo fundamental ( $\lambda_x = 2w$  y  $\lambda_y = 2L$ ) con una velocidad magnetoacústica rápida de  $1300\text{km s}^{-1}$  (obtenida de la relación de dispersión (1.29)).

Hemos encontrado que hay un acoplamiento entre el modo *sausage* y las componentes lentas, las que son amortiguadas en aproximadamente cinco periodos. Esto se muestra en el panel izquierdo de la figura 5.6, donde puede verse la velocidad longitudinal a lo largo del eje del arco. Los rasgos de esta curva se deben a la composición de diferentes modos, todos ellos con un nodo en el centro del arco, el patrón completo recuerda al del segundo armónico. Estos modos se excitan de manera muy efectiva en los arcos coronales, como fue sugerido en Nakariakov et al. (2004).

El correspondiente comportamiento para el caso M se muestra en el panel derecho de la figura 5.6. Las diferentes formas en la curva del panel izquierdo de la figura 5.6 son similares entre sí, considerando

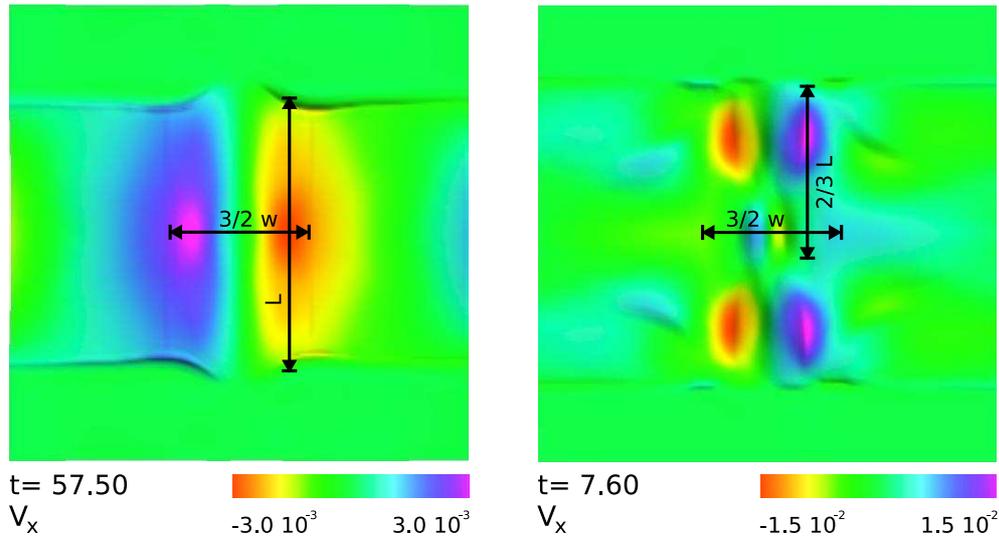


**Fig. 5.4:** Esquemas de los modos de oscilación para el caso A, a través de imágenes de la  $v_x$ . Izquierda:  $\lambda_x = 2w$  y  $\lambda_y = 2L$ . Derecha:  $\lambda_x = 3/2w$  y  $\lambda_y = 3/4L$ .

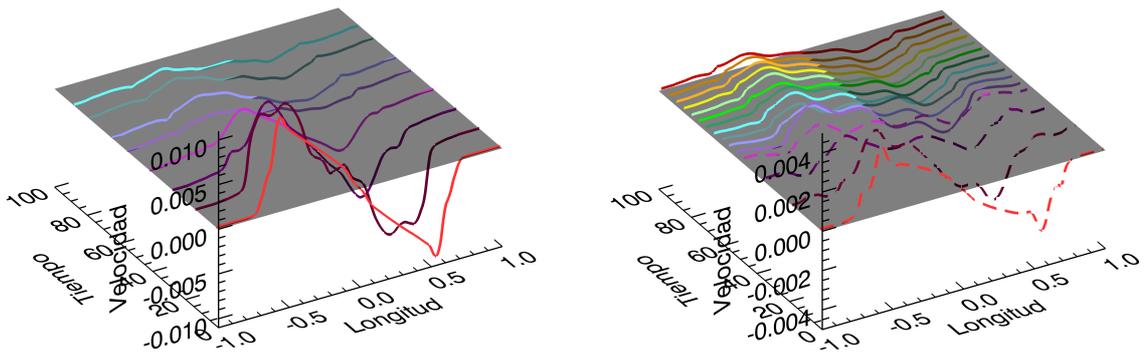
que el periodo viene dado por la distancia temporal entre dos de estas curvas, se obtiene un valor de  $\sim 17$  segundos. La frecuencia adimensional que le corresponde es el pico en 0.08, indicado en el panel izquierdo de la figura 5.3 que acuerda con el dato observacional.

### Melnikov

El panel derecho de la figura 5.3 muestra el espectro de Fourier para el caso M en los puntos de la cuadrícula correspondientes a  $(x, y) = (0.0, 0.0)$  y  $(x, y) = (0.0, 0.5)$ , a las distancias de 1.63Mm desde el final del arco y de 4.1Mm desde el comienzo del arco, respectivamente. Melnikov et al. (2002) y Nakariakov et al. (2003) realizaron la TF de  $(F(t) - F_0)/F_0$  para el caso observacional, donde  $F$  es el flujo integrado observado. Este cociente mide la variación de flujo en el tiempo normalizado a una cantidad  $F_0$  que se obtiene del suavizado de  $F(t)$  sobre 10seg. Realizaron la TF de esta señal en una región cercana a la cima del arco, y las dos bases del mismo. De estas transformadas de Fourier, encontraron que hay dos componentes espectrales principales en las pulsaciones observadas, con periodos de  $P_1 = 14 - 17$ seg y  $P_2 = 8 - 11$ seg. Notar que, como en el caso A, la simulación del caso M muestra que hay dos frecuencias características de periodos  $\sim 15.5$ seg ( $\nu = 0.21$ ) y  $\sim 11.6$ seg ( $\nu = 0.28$ ), respectivamente. La frecuencia  $\nu = 0.21$  corresponde a  $\lambda_x = 3/2w$  y  $\lambda_y = 2L$  según la relación de dispersión (1.29) (Panel izquierdo de la figura 5.5). La frecuencia  $\nu = 0.28$  está descrita por  $\lambda_x = 3/2w$  y  $\lambda_y = 2/3L$  según la misma relación de dispersión (Panel derecho de la figura 5.5). Ambas frecuencias han sido registradas en todas las posiciones dentro de la estructura del arco. Sin embargo, vemos que hay una diferencia entre la contribución de los picos dependiendo de la ubicación. La contribución de la frecuencia  $\nu = 0.28$  es tan importante en las bases del arco como en la cima. Por otro lado, en la cima, la frecuencia  $\nu = 0.21$  es más grande en magnitud de Fourier que en la  $\nu = 0.28$ . Nakariakov et al. (2003) sugirieron que la frecuencia más alta corresponde a un armónico superior. Para discutir este punto, hemos realizado la TF de la velocidad transversal con el objeto de analizar la compresión. Estos resultados se muestran en el panel izquierdo de



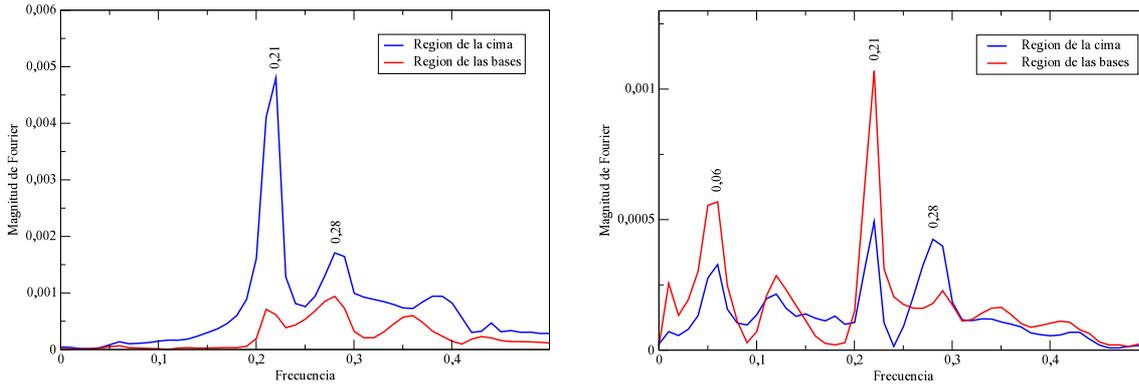
**Fig. 5.5:** Esquemas de los modos de oscilación para el caso M, a través de imágenes de la  $v_x$ . Izquierda:  $\lambda_x = 3/2w$  y  $\lambda_y = 2L$ . Derecha:  $\lambda_x = 3/2w$  y  $\lambda_y = 2/3L$ .



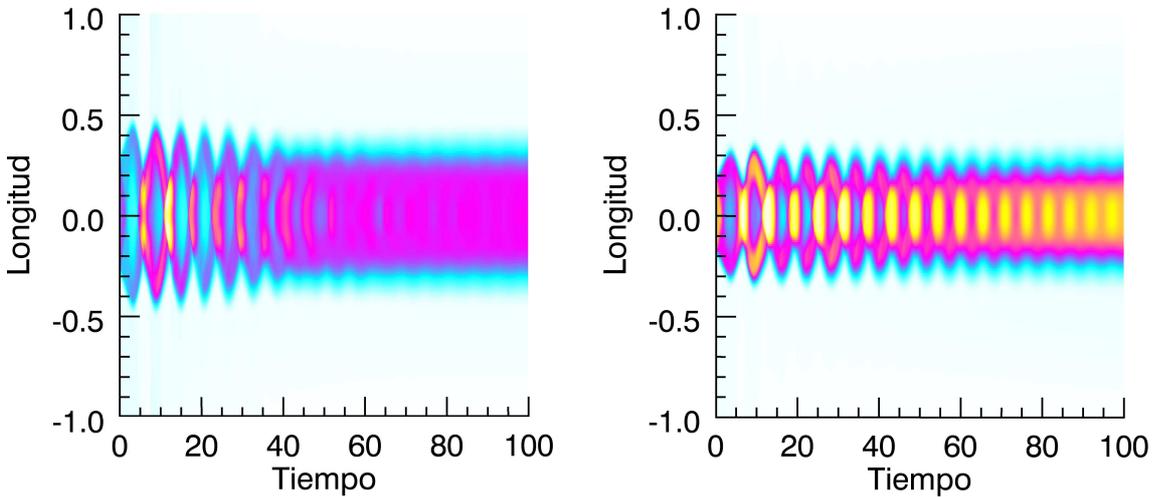
**Fig. 5.6:** Trazado de la función  $v_y$  a lo largo del eje del arco coronal como función del tiempo. A la izquierda se muestran los resultados para el caso A, donde las cantidades dimensionales se obtienen multiplicando por  $l_0 = 10\text{Mm}$ ,  $t_0 = 1.39\text{seg}$  y  $v_0 = 7149\text{km s}^{-1}$ . En el panel de la derecha mostramos el caso M, cuyas cantidades dimensionales se obtienen multiplicando por los factores  $l_0 = 16.3\text{Mm}$ ,  $t_0 = 3.25\text{seg}$  y  $v_0 = 5000\text{km s}^{-1}$ .

la figura 5.7. Notar que en las bases, el segundo pico es mayor, y ocurre lo contrario en la cima. Como sugirieron Nakariakov et al. (2003), hemos encontrado que la frecuencia  $\nu = 0.28$  es un armónico superior.

Cuando se analiza la contribución de la perturbación longitudinal, se encuentra un rango de frecuencias más ancho que en el caso A. En el panel derecho de la figura 5.6 se muestran las contribuciones más importantes al modo lento, todas ellas con un nodo en el centro y un patrón general que recueda el segundo armónico del modo lento. Asimismo, hay un comportamiento diferenciado a lo largo del tiempo. Las primeras curvas (denotadas con línea de trazo) del panel derecho de la figura 5.6 son posteriormente reemplazadas por otras (curvas de trazo continuo) con amplitudes y periodos menores que permanecen sin



**Fig. 5.7:** Transformada de Fourier en distintas regiones del arco para el caso M. En el panel izquierdo puede verse la TF de componente transversal de la velocidad ( $v_x$ ). En el panel derecho se muestra la componente longitudinal de la velocidad ( $v_y$ ).



**Fig. 5.8:** La densidad en el arco como función del tiempo a través de una sección transversal ubicada a la mitad de la longitud ( $y = 0$ ) de este. A la izquierda pueden verse los resultados correspondientes para el caso A con  $\Delta p = 0.28$ . Las cantidades físicas son obtenidas mediante la multiplicación por los factores  $l_0 = 10\text{Mm}$  y  $t_0 = 1.39\text{seg}$ . En el panel de la derecha se muestra lo correspondiente para el caso M con  $\Delta p = 0.35$ , en este caso las dimensiones se obtienen con los múltiplos  $l_0 = 16.3\text{Mm}$  y  $t_0 = 3.25\text{seg}$ .

amortiguamiento por al menos 10 periodos. Estos dos periodos principales pueden además ser identificados en el panel derecho de la figura 5.3 como las frecuencias  $\nu = 0.06$  (54seg) y  $\nu = 0.21$  (15.5seg). Como en el caso A, hay un pico a frecuencias bajas. También encontramos que hay un segundo pico con una frecuencia coincidente con el modo fundamental *sausage*.

En el panel derecho de la figura 5.7 se muestra la transformada de Fourier para la componente longitudinal de la velocidad ( $v_y$ ) del caso M. Como diferencia con el panel izquierdo de la figura 5.7, el pico de la frecuencia que corresponde con el modo *sausage* fundamental, es mayor en las bases que en la cima. Aparentemente esto es debido a la contribución del modo resonante lento.

En la cima del arco											
Asai						Melnikov					
$\nu$	$\hat{p}/\hat{\rho}$	$\hat{v}_x/\hat{\rho}$	$\hat{v}_y/\hat{\rho}$	$\hat{B}_x/\hat{\rho}$	$\hat{B}_y/\hat{\rho}$	$\nu$	$\hat{p}/\hat{\rho}$	$\hat{v}_x/\hat{\rho}$	$\hat{v}_y/\hat{\rho}$	$\hat{B}_x/\hat{\rho}$	$\hat{B}_y/\hat{\rho}$
0.08 L	0.0147	0.0005	0.003	0.002	0.016	0.06 L	0.006	0.0002	0.0006	0.001	0.012
0.21 R	0.011	0.007	0.001	0.004	0.039	0.21 R	0.012	0.006	0.0007	0.004	0.02
0.34 R	0.016	0.012	0.026	0.024	0.035	0.28 R	0.02	0.01	0.0015	0.015	0.015

En la base del arco											
Asai						Melnikov					
$\nu$	$\hat{p}/\hat{\rho}$	$\hat{v}_x/\hat{\rho}$	$\hat{v}_y/\hat{\rho}$	$\hat{B}_x/\hat{\rho}$	$\hat{B}_y/\hat{\rho}$	$\nu$	$\hat{p}/\hat{\rho}$	$\hat{v}_x/\hat{\rho}$	$\hat{v}_y/\hat{\rho}$	$\hat{B}_x/\hat{\rho}$	$\hat{B}_y/\hat{\rho}$
0.08 L	0.009	0.0001	0.009	0.004	0.007	0.06 L	0.05	0.0001	0.01	0.02	0.051
0.21 R	0.01	0.009	0.002	0.02	0.05	0.21 R	0.009	0.004	0.0006	0.01	0.023
0.34 R	0.008	0.01	0.002	0.01	0.04	0.28 R	0.01	0.005	0.0009	0.007	0.018

**Tabla 5.1:** Cocientes de las magnitudes de las transformadas de Fourier de los campos para las frecuencias  $\nu$ :  $\hat{X}$  representa la componente de la TF de la variable  $X$ . Arriba) Cálculo correspondiente a la cima del arco. Abajo) Valores cerca de las bases del arco.

### Descomposición de modos de ondas planas

Para entender mejor la contribución de los diferentes modos en el fenómeno observado, realizamos una descomposición en ondas planas. Este procedimiento (que se describe en forma más detallada en el apéndice B2.1) nos da una información limitada debido a que la longitud de onda de la perturbación es en algunos casos del orden de las cantidades de fondo y se hace difícil establecer la magnitud real de cada modo. Para algunos cocientes entre diferentes componentes de Fourier, que pertenecen supuestamente al mismo modo, se obtienen los valores esperados según el cálculo de la descomposición estándar en modos. Sin embargo se observan diferencias en algunos casos. No obstante, esto depende de la ubicación de la señal analizada. Por lo tanto comparamos los cocientes entre diferentes componentes del campo: las obtenidas de la descomposición de los modos en autovectores con los cocientes obtenidos de la transformada de Fourier. Este sistema de autovectores es el calculado en el Apéndice B1.1 como parte del trabajo de Cécere et al. (2008b). Hemos usado los cocientes entre las componentes de autovector para expresarlas como función de las cantidades de fondo. Como en esta dinámica tan variable es difícil definir de manera correcta las cantidades de fondo, hemos promediado los valores (en espacio y tiempo) de los diferentes campos cerca de la cima y cerca de las bases del arco. Se realizó una comparación entre los diferentes componentes de modo  $\bar{p}/\bar{\rho}$ ,  $\bar{v}_x/\bar{\rho}$ ,  $\bar{v}_y/\bar{\rho}$ ,  $\bar{B}_x/\bar{\rho}$ ,  $\bar{B}_y/\bar{\rho}$  de la Tabla 5.1, y los cocientes obtenidos mediante la TF de los campos  $\hat{p}/\hat{\rho}$ ,  $\hat{v}_x/\hat{\rho}$ ,  $\hat{v}_y/\hat{\rho}$ ,  $\hat{B}_x/\hat{\rho}$ ,  $\hat{B}_y/\hat{\rho}$  de la Tabla 5.2, tomando estos valores en la frecuencia característica principal. Esta información se extrae en cada caso de la cima del arco y las bases de este.

Para cada caso, comparamos la tablas 5.1 y 5.2 para la cima y bases del arco, respectivamente, encontramos un acuerdo general razonable. Sin embargo vemos, que los cocientes que se apartan del acuerdo, son los que involucran las componentes  $v_y$  y  $B_x$ , debido a probables acoples por términos no-lineales. Estos resultados refuerzan la idea que el análisis de Fourier de la última sección arroja información útil para el análisis.

En la cima del arco										
	Asai					Melnikov				
Modos	$\bar{p}/\bar{\rho}$	$\bar{v}_x/\bar{\rho}$	$\bar{v}_y/\bar{\rho}$	$\bar{B}_x/\bar{\rho}$	$\bar{B}_y/\bar{\rho}$	$\bar{p}/\bar{\rho}$	$\bar{v}_x/\bar{\rho}$	$\bar{v}_y/\bar{\rho}$	$\bar{B}_x/\bar{\rho}$	$\bar{B}_y/\bar{\rho}$
Lento	0.01	$2 \cdot 10^{-10}$	0.005	$6 \cdot 10^{-10}$	0	0.008	$10^{-8}$	0.001	$7 \cdot 10^{-8}$	0
Rápido	0.01	0.009	$5 \cdot 10^{-11}$	0	0.04	0.008	0.002	$10^{-13}$	0	0.01

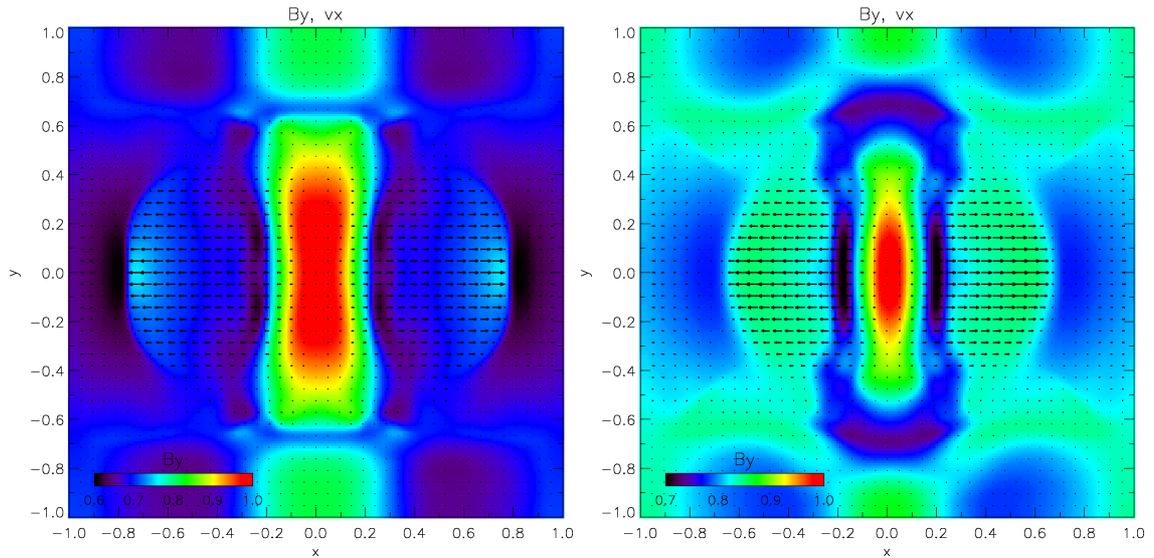
En las bases del arco										
	Asai					Melnikov				
Modos	$\bar{p}/\bar{\rho}$	$\bar{v}_x/\bar{\rho}$	$\bar{v}_y/\bar{\rho}$	$\bar{B}_x/\bar{\rho}$	$\bar{B}_y/\bar{\rho}$	$\bar{p}/\bar{\rho}$	$\bar{v}_x/\bar{\rho}$	$\bar{v}_y/\bar{\rho}$	$\bar{B}_x/\bar{\rho}$	$\bar{B}_y/\bar{\rho}$
Lento	0.01	$2 \cdot 10^{-10}$	0.005	$7 \cdot 10^{-10}$	0	0.009	$4 \cdot 10^{-10}$	0.001	$3 \cdot 10^{-9}$	0
Rápido	0.01	0.009	$2 \cdot 10^{-10}$	0	0.04	0.009	0.002	$6 \cdot 10^{-12}$	0	0.01

**Tabla 5.2:** Cocientes entre las componentes de los autovectores correspondientes a los autovalores lentos y rápidos:  $\bar{X}$  representa la componente  $X$  del autovector correspondiente al autovalor lento o rápido. Arriba) Cálculo cerca de la cima del arco. Abajo) Valores para las bases del arco.

### Desequilibrio de presión a través del arco

Los arcos post-fulguraciones son parte de un escenario donde son comunes las deposiciones impulsivas de energía que excitan oscilaciones e inestabilidades en las estructuras magnéticas. Investigamos la respuesta del sistema a una perturbación que induzca una discontinuidad, es decir una liberación de energía impulsiva modelada como una discontinuidad súbita en la presión total a lo largo del radio del arco. Hemos elegido dos pulsos adimensionales de presión, para el caso de Asai un  $\Delta p_A = 0.28$  y para Melnikov un  $\Delta p_M = 0.35$ . Estos pulsos son equivalentes a una liberación de energía de  $\sim 500 \text{erg cm}^{-3}$  para el primer pulso, y del orden de  $\sim 200 \text{erg cm}^{-3}$  para el segundo, que son menores al exceso típico de energía contenida en un arco fulgurante (Kirk et al. 1994).

Utilizando condiciones de Rankine-Hugoniot asociadas a estas perturbaciones hemos obtenido los paneles izquierdo (A) y derecho (M) de la figura 5.8. Mostramos la evolución temporal de la oscilación en densidad para los casos A y M, respectivamente. Cabe destacar que las oscilaciones tienen mayor amplitud que los correspondientes paneles de la figura 5.1 y rápidamente se amortiguan entre unos 8 a 12 periodos. Los modos fundamentales tipo *sausage* tienen amplitudes de alrededor de  $83\%R_l$  para el caso A y alrededor del  $97\%R_l$  para el caso M. El amortiguamiento acontece debido a que la discontinuidad impone una transformación de los modos atrapados hacia modos *leaky*. Los paneles izquierdo y derecho de la figura 5.9 muestran, para los casos A y M, un corte de la componente longitudinal del campo magnético, donde hemos superpuesto además flechas que representan las componentes de la velocidad transversal. Los tiempos mostrados en dichas figuras corresponden a  $t = 26 \text{seg}$  y  $t = 44 \text{seg}$ , respectivamente. Como los campos magnético y los de velocidad se encuentran congelados, las flechas trazan además de la velocidad el flujo de energía drenado del arco. Asimismo, en el centro de la región externa se excita una onda compresional de Alfvén y la perturbación de la energía magnética se amortigua. La excitación en las bases del arco es despreciable debido al cambio en el parámetro  $\beta$  que genera la ligadura del arco a la cromosfera.



**Fig. 5.9:** Componentes del campo magnético longitudinal ( $B_y$ ) y del campo de velocidades ( $v_x$ ), este último indicado mediante flechas. El panel izquierdo corresponde al caso A, mientras que el derecho al M.

### Conclusiones preliminares

En la simulación en dos dimensiones, hemos integrado las ecuaciones ideales de la MHD con el objeto de simular los modos atrapados de tipo *sausage* observados por Asai et al. (2001) y Melnikov et al. (2002). Esto se realizó mediante la incorporación de una región densa que emula la cromosfera solar. Hemos reproducido los parámetros observacionales de la literatura, es decir, periodos, tipo de oscilación e intensidad relativa de los modos, asumiendo los valores en densidad, longitudes y campos magnéticos propuestos en la literatura. Como se sugiere en Melnikov et al. (2002) hemos encontrado que, para ambos casos, existen dos picos de frecuencias rápidas con diferentes contribuciones dependiendo de la ubicación en el arco de la señal. Los modos han sido interpretados como uno fundamental (más intenso en la cima del arco) y armónico superior tipo *sausage* (más intenso en las bases del arco). Esto puede apreciarse en el panel izquierdo de la figura 5.3 para el caso A y en el panel derecho de la figura 5.3 y el panel izquierdo de la figura 5.7 para el caso M. Además la fig. 5.4 para el caso A y la fig. 5.5 para el caso M, dan cuenta de las longitudes características y las estructuras de los modos correspondientes. Hemos analizado asimismo el acoplamiento de los modos fundamentales *sausage* con las componentes longitudinales. En ambos casos, obtuvimos componentes de baja frecuencia, con un periodo  $P_A \sim 17\text{seg}$  y  $P_M \sim 54\text{seg}$ , respectivamente. Hemos encontrado que el caso M posee una contribución lenta adicional, de la misma frecuencia que la del modo fundamental *sausage*, siendo éste, en apariencia, un modo excitado por el anterior. Las amplitudes de la componente lenta del caso A y M se amortiguan en aproximadamente unos 4 periodos, quedando una oscilación remanente. En el caso A la oscilación remanente tiene la misma frecuencia que su valor inicial y en el caso M la frecuencia de la oscilación remanente se modifica respecto a su valor inicial, siendo la misma que la del modo *sausage*. En la presente tesis sugerimos que esto se

debe a transferencias internas de energía entre el modo rápido y la componente lenta, las que se llevan a cabo más eficientemente en el caso que presenta resonancia. Identificamos este mecanismo como un proceso interno de amortiguamiento.

Adicionalmente, establecimos que si utilizamos como condición inicial un desbalance en la presión magnética a través del arco, se obtiene un modo *leaky* que drena la energía del modo *sausage* atrapado, en la forma de ondas de compresión de Alfvén. Los tiempos de amortiguamiento son consistentes con los observacionales ( $\leq 10$  periodos).

### 5.3. Simulaciones numéricas tridimensionales

#### Motivación

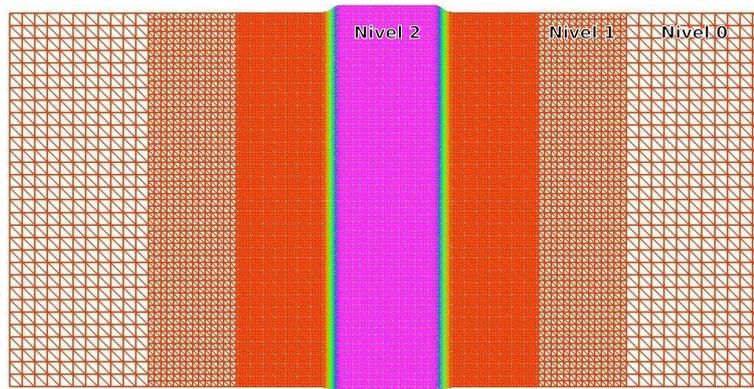
La comparación de los resultados obtenidos en dos dimensiones con las observaciones requiere su corroboración en una simulación tridimensional. Como las simulaciones 2D no son capaces de describir oscilaciones que se desarrollan en geometrías puramente tridimensionales, hay modos que pueden surgir y que no fueron contemplados anteriormente, como es el caso de los modos torsionales. Un problema importante para el estudio del calentamiento coronal es el de la disipación de oscilaciones en cilindros. En el tratamiento ideal del problema que se hace en esta tesis, interesa analizar mecanismos en los que la energía se transfiere de las escalas grandes a las pequeñas, antes de que la difusión termine de disipar dicha energía, como ocurre en el proceso de drenado de energía de las ondas *leaky*.

#### Métodos numéricos y datos implementados

Para esta simulación tridimensional utilizamos el código *HAD* que permite adaptar el tamaño de la malla numérica. El dominio de cómputo es un paralelepípedo de  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-0.5, 0.5]$  con una resolución inicial de  $61 \times 61 \times 31$ . Para el caso de Asai, una longitud de 1 en la malla numérica, equivale a 16Mm, mientras que en el caso de Melnikov equivale a 25Mm. La malla está refinada hasta un nivel 2: el nivel 0 cubre toda la malla, y los dos niveles siguientes regiones de menor tamaño como puede verse en la figura 5.10. El nivel 2 abarca la zona más cercana al arco magnético para tener más resolución y resolver mejor la propagación de ondas. Este nivel conformado por la región  $[-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4] \times [-0.5, 0.5]$  tiene una resolución de  $97 \times 97 \times 121$ . Se utilizó el método de Kurganov–Tadmor para resolver la discretización espacial y el de Runge–Kutta *TVD* para la discretización temporal de las ecuaciones MHD con *divergence cleaning* (2.27).

#### Condiciones de contorno

En las simulaciones realizadas no se simuló la cromosfera, implementamos en cambio condiciones de contorno particulares para simular la presencia de ésta. Se eligieron dos puntos fantasmas alrededor del paralelepípedo y sobre ellos se aplicaron las condiciones de contorno, es decir, se copiaron dos puntos de la región de interés en los que la variable o su derivada espacial, dependiendo del caso, son cero. Para todas las variables se implementaron condiciones de salida del flujo, y de rebote del mismo. En el caso de que la variable es cero en la interfase la copia de puntos debe ser impar respecto a dicha interfase y en el caso de que la derivada es cero la copia respecto a la interfase es par. La combinación que se



**Fig. 5.10:** Imagen que muestra los distintos niveles de la malla numérica utilizada en las simulaciones tridimensionales.

detalla a continuación, hace que las condiciones impuestas no generen inconsistencias en las ecuaciones de la MHD, y asegura que el contorno no produzca divergencia del campo magnético:  $(\rho, e, S_x, S_y, B_z, \phi)$  pares y  $(S_z, B_x, B_y)$  impares.

#### Datos iniciales para Asai y Melnikov

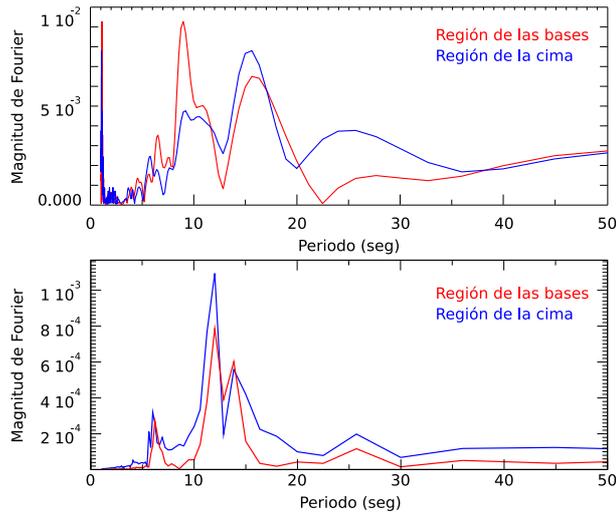
Con el objetivo de comparar resultados, escogimos valores similares a las simulaciones 2 dimensionales. Para el caso de Asai la densidad elegida fue:  $n_A = 4.5 \times 10^{10} \text{cm}^{-3}$ ,  $B_A = 150 \text{G}$  y  $T_A = 2.5 \text{MK}$ ,  $L_A = 16 \text{Mm}$  y  $w_A = 6 \text{Mm}$ . Para el de Melnikov:  $n_M = 10^{10} \text{cm}^{-3}$ ,  $B_M = 90 \text{G}$  y  $T_M = 10 \text{MK}$ ,  $L_M = 25 \text{Mm}$  y  $w_M = 6 \text{Mm}$ . Se obtienen los valores externos al arco de modo que exista equilibrio de presión total entre las dos interfases. Los valores de referencia para transformar las cantidades adimensionales en cantidades físicas son:  $t_0 = 2.32 \text{seg}$ ,  $\rho_0 = 3.76 \times 10^{-15} \text{g cm}^{-3}$ ,  $B_0 = 150 \text{G}$ ,  $v_0 = 6900 \text{km s}^{-1}$  para el caso A, y  $t_0 = 5.2 \text{seg}$ ,  $\rho_0 = 2.79 \times 10^{-15} \text{g cm}^{-3}$ ,  $B_0 = 90 \text{G}$ ,  $v_0 = 4800 \text{km s}^{-1}$ , para el caso M. En ambos casos, el plasma inicialmente se encuentra en reposo y las componentes del campo magnético perpendiculares a  $B_z$  se eligen iguales a cero. A esta configuración de equilibrio de presiones, le agregamos un salto en presión de dos formas distintas:

1. agregando un hiperboloide de presión del gas, dentro del arco magnético,
2. generando un salto magnético entre el arco y el medio exterior.

Los saltos de presión elegidos fueron los mismos que en el caso bidimensional:  $\Delta p_A = 0.28$  para Asai y  $\Delta p_M = 0.35$  para Melnikov.

Tratamos de detectar ondas magnetoacústicas o de Alfvén, para ver si hay correspondencia entre los modos de oscilación sugeridos por las observaciones y los encontrados numéricamente, como lo hicimos en el caso bidimensional. En este caso tridimensional, hemos sacado del equilibrio al sistema con saltos de presión finito.

También consideramos que el corrimiento entre frecuencias obtenidas a partir de una geometría cartesiana, es decir, de un *slab* o paralelepípedo, y las obtenidas a partir de un cilindro no es mayor al 17% según Díaz et al. (2002) y Díaz et al. (2004). Por ello, como una primera aproximación para encontrar los modos, optamos pensar a estos como composición de ondas que se propagan adentro de un *slab*.



**Fig. 5.11:** Comparación de los periodos obtenidos a partir de los flujos de radiación observados (panel superior, Melnikov et al. 2002) con los periodos obtenidos a partir de la densidad de la simulación 3D (panel inferior).

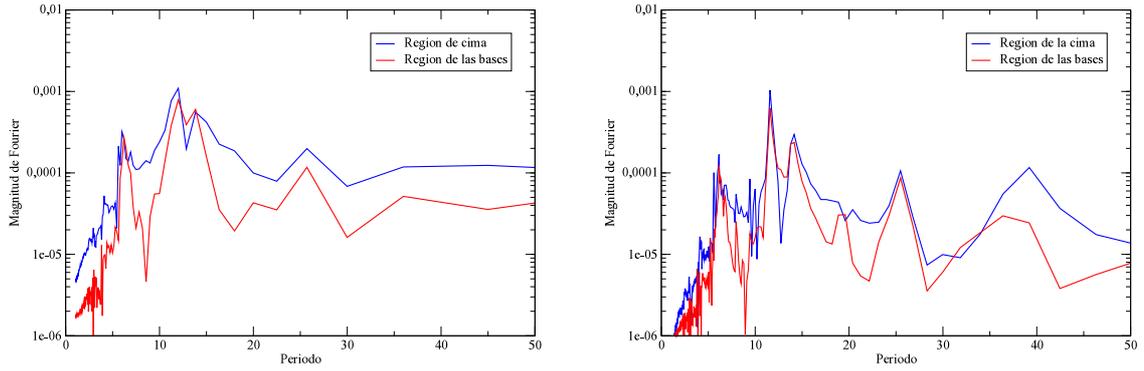
## Resultados

### Comparación con datos observacionales: Asai y Melnikov

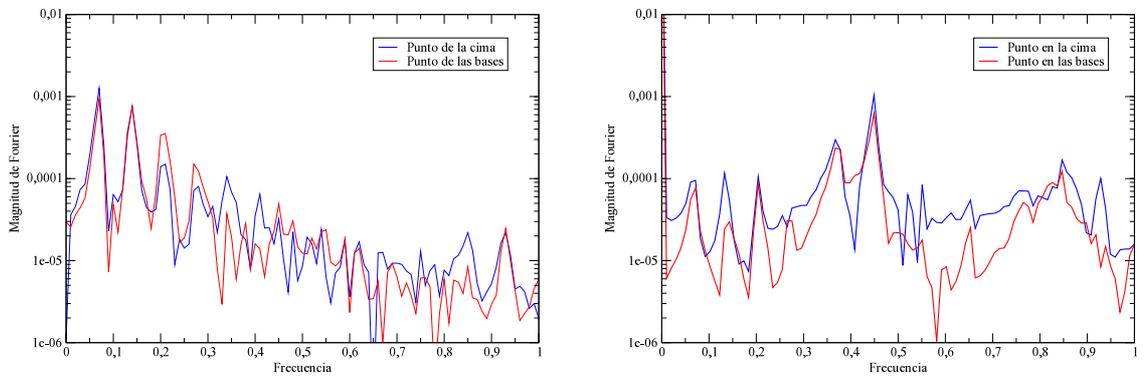
#### Melnikov

En la figura 5.11 se muestra en el panel superior, la magnitud de la transformada de Fourier (TF) de  $(F(t) - F_0)/F_0$  para el caso observacional, donde  $F$  es el flujo integrado observado durante 3 minutos de observación. En el panel inferior se muestra el cociente  $(\rho(t) - \rho_0)/\rho_0$  para el caso simulado. Estos cocientes miden la variación de flujo (densidad) en el tiempo normalizado a una cantidad  $F_0$  ( $\rho_0$ ) que se obtiene del suavizado de  $F(t)$  ( $\rho(t)$ ) sobre 10seg. Esta elección es la que se toma en el trabajo observacional de Melnikov. Nosotros realizamos el mismo análisis, pero para la densidad en un punto del arco. Vemos notablemente como los periodos obtenidos a partir de la simulación están en buen acuerdo con las observaciones. Se obtienen 11.56seg y 14.05seg en comparación con los rangos observados 8 – 11seg y 14 – 17seg correspondientemente. También hay un buen acuerdo con los periodos 6seg y 25seg que puede verse en ambas figuras. No encontramos el cambio en la intensidad de los picos, según si los datos han sido tomados en las bases o en la cima del arco magnético. Conjeturamos que esto se debe a que la cromosfera no está incluida en el dominio de cómputo, lo que ataría las líneas de campo a las bases, como se obtuvo en la simulación 2 dimensional.

Realizamos un análisis de frecuencias a partir de los datos obtenidos (8 minutos). En la figura 5.12 se grafica la magnitud de Fourier en escala logarítmica para apreciar mejor las contribuciones de los picos. Vemos como a lo largo de toda la simulación (panel derecho) los picos de los periodos más largos se acentúan en comparación con los primeros 3 minutos (panel izquierdo). Esto se debe a una mejor detección del modo, debido a la mejor resolución temporal. La contribución de los periodos más cortos, se mantiene similar a lo largo de toda la simulación. Se tomaron dos puntos de referencia, uno cercano

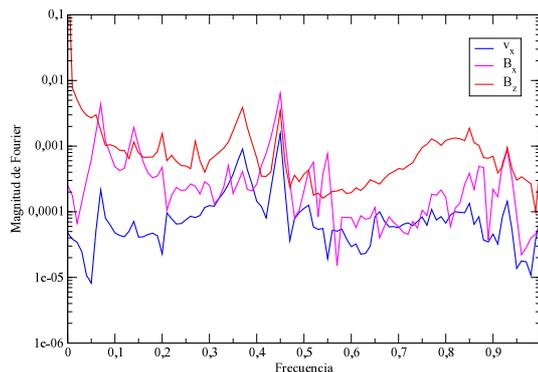


**Fig. 5.12:** Comparación de periodos obtenidos haciendo la TF de la densidad a lo largo de los primeros 3 minutos de la simulación (panel izquierdo) con los periodos obtenidos de la simulación completa (8 minutos, panel derecho) del caso M.



**Fig. 5.13:** Correspondencia de picos en frecuencia (adimensional) entre la velocidad longitudinal al arco magnético  $v_z$  (panel izquierdo) y la densidad (panel derecho) del caso M.

a la cima (0.1,0.125), y otro a una de las bases (0.1,0.35), para ver como afectan las oscilaciones del arco en estos lugares. En estos puntos, se tomó la variación temporal en todas las variables simuladas y se realizó la TF. Además se hizo un promedio de esta variación temporal, en una región cercana a estos puntos de referencia para poder realizar el análisis de ondas planas descrito anteriormente. Los valores del promedio tomados en una región cercana al punto (0.1,0.125) para la velocidad del sonido es  $c_s = 0.067$ , la velocidad de Alfvén  $v_A = 0.105$  y la velocidad magnetoacústica rápida  $v_R = 0.125$ . El panel izquierdo de la figura 5.13 muestra la TF de la  $v_z$  en ambos puntos de referencia. No notamos una diferencia apreciable entre ellos, posiblemente a que el modo afecta tanto a la base como a la cima. Por otro lado, vemos que los picos de mayor intensidad de la TF de  $v_z$  son los de las frecuencias:  $\nu = 0.07$ ,  $\nu = 0.13$  y  $\nu = 0.20$ . Del panel superior de la tabla 5.3, se observa un buen acuerdo con un modo magnetoacústico lento, salvo en los cocientes relacionados con  $v_x/\rho$ ,  $B_x/\rho$  y  $B_z/\rho$  lo que se debe probablemente al acoplamiento de modos, dado por la no-linealidad de las ecuaciones (se puede ver la contribución de  $v_x$ ,  $B_x$  y  $B_z$  en la figura 5.14). Igualmente, una inspección de las frecuencias tomando la relación de dispersión (1.29) en la dirección  $z$  ( $\nu = c_s/\lambda_z$ ) nos ayuda a sostener que estas frecuencias

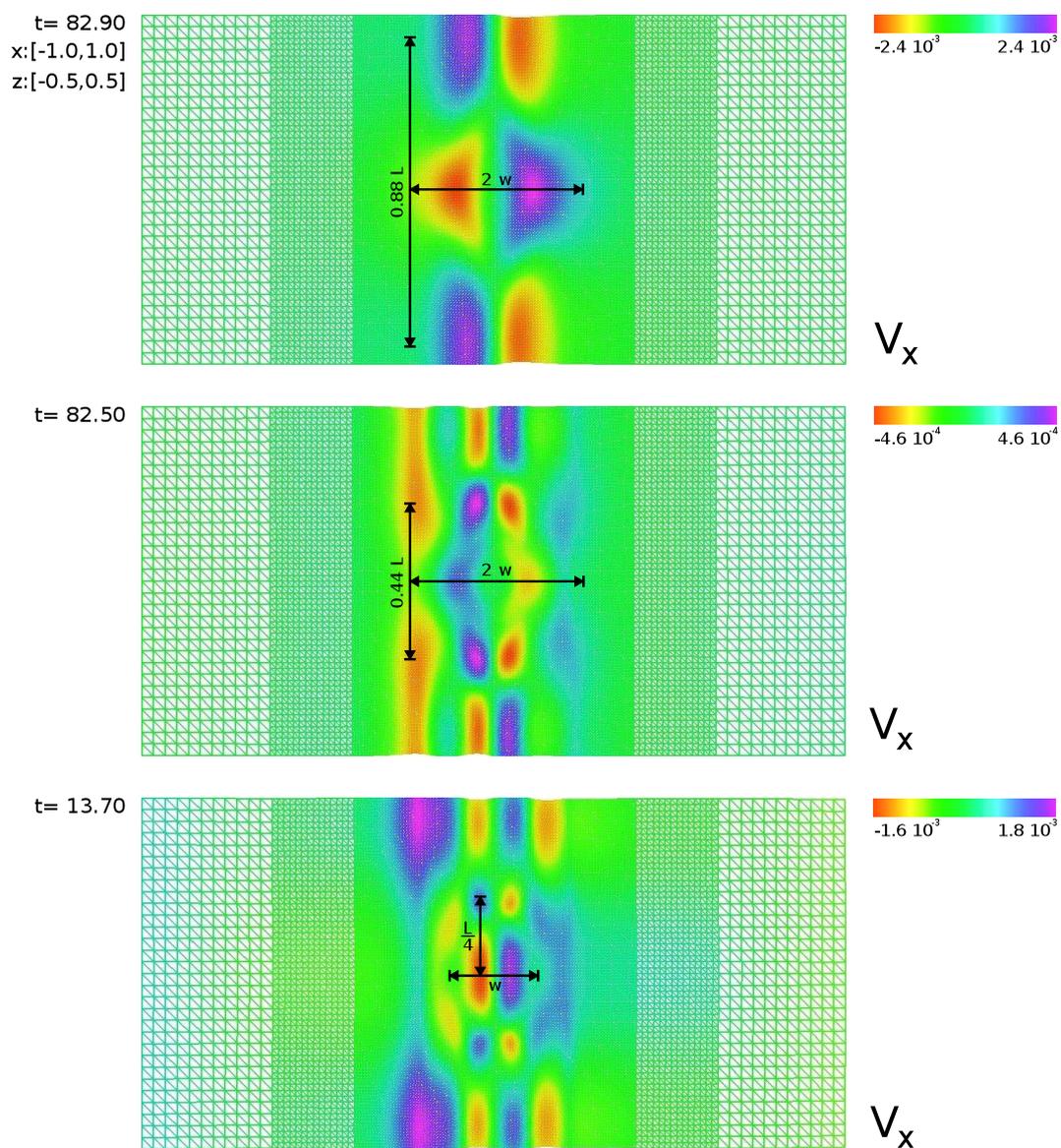


**Fig. 5.14:** Comparación de la magnitud de Fourier entre la velocidad transversal al arco magnético  $v_x$ , y los campos magnéticos longitudinal  $B_z$  y transversal  $B_x$ , en función de la frecuencia (adimensional) del caso M.

corresponden a distintos armónicos de modos magnetoacústicos lentos, a saber:  $\nu = 0.07 \leftrightarrow \lambda = L$ ,  $\nu = 0.13 \leftrightarrow \lambda = L/2$  y  $\nu = 0.20 \leftrightarrow \lambda = L/3$ . Estas frecuencias son las de los periodos:  $T = 74\text{seg}$ ,  $40\text{seg}$  y  $26\text{seg}$ , respectivamente. Este último periodo es el reportado por Melnikov, correspondiendo a un modo de oscilación lento, como puede verse en la figura 5.11. En el panel derecho de la figura 5.13 vemos cómo estas tres frecuencias están también presentes en la oscilación de la densidad. Esto también refuerza el concepto de que se está propagando una onda de compresión longitudinal. Esta última figura, también muestra picos en las frecuencias  $\nu = 0.37$ ,  $\nu = 0.45$  y  $\nu = 0.85$ , vinculados a los periodos  $14.05\text{seg}$ ,  $11.56\text{seg}$  y  $6.12\text{seg}$  respectivamente. Las correspondientes magnitudes de Fourier en  $v_z$  no son tan significativas como en las frecuencias más bajas, por lo que parecen no ser las causantes principales de la oscilación en la densidad para frecuencias altas. Para estudiar estas frecuencias, se analizó la figura 5.14. De esta figura se puede observar que a la frecuencia  $\nu = 0.37$ , tenemos un pico tanto en la  $v_x$  como en  $B_z$ . Esto, más la comparación que se obtiene del panel inferior de la tabla 5.3, nos da indicio de que se está propagando una onda magnetoacústica rápida en la dirección transversal al arco. Aquí notamos que el acuerdo entre cocientes relacionados con las componentes  $v_z$  y  $B_x$  no están en buen acuerdo, nuevamente por el posible acoplamiento dado por la no-linealidad. De la relación de dispersión (1.29), obtenemos  $\nu = 0.362$  con  $\lambda_x = \lambda_y = 2w$  y  $\lambda_z = 0.88L$  (ver el panel superior de la figura 5.15) estando en buen acuerdo con la frecuencia  $\nu = 0.37$ . Obtenemos que este modo es el segundo armónico del modo *sausage*, a diferencia del modo fundamental propuesto por Melnikov. Por último, las frecuencias  $\nu = 0.45$  y  $\nu = 0.85$  parecen estar excitadas por la propagación de modos compresivos magnetoacústicos rápidos en las direcciones  $\vec{k} = (1/\lambda_x, 1/\lambda_y, 1/\lambda_z)$  con  $\lambda_x = \lambda_y = 2w$ ,  $\lambda_z = 0.44L$  para la primer frecuencia (panel superior de la figura 5.15) y  $\lambda_x = \lambda_y = w$ ,  $\lambda_z = L/4$  para la segunda (ver paneles medio e inferior de la figura 5.15, respectivamente). Esto está de acuerdo al supuesto de Melnikov, que el segundo pico en la figura 5.11 se debe a un armónico más alto del modo *sausage*.

### Asai

En este caso, hicimos el mismo análisis realizado que el caso anterior. En el panel izquierdo de la figura 5.16 se muestra la magnitud de la transformada de Fourier de  $(\rho(t) - \rho_0)/\rho_0$ . Este cociente fue calculado de



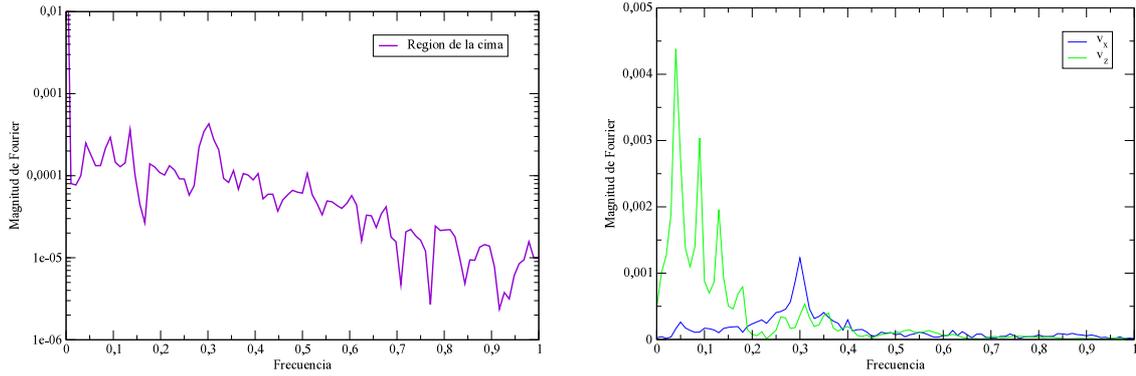
**Fig. 5.15:** Caso M. Imágenes de la componente de la velocidad  $v_x$ . Se muestra las longitudes características de oscilación, para tres tiempos adimensionales distintos.

Melnikov					
	$\nu = 0.07$	$\nu = 0.13$	$\nu = 0.20$		$L$
$\hat{p}/\hat{\rho}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$3.58 \cdot 10^{-3}$	$\bar{p}/\bar{\rho}$	$4.48 \cdot 10^{-3}$
$\hat{v}_x/\hat{\rho}$	$2.17 \cdot 10^{-4}$	$1.75 \cdot 10^{-4}$	$9.58 \cdot 10^{-5}$	$\bar{v}_x/\bar{\rho}$	$2.72 \cdot 10^{-9}$
$\hat{v}_z/\hat{\rho}$	$9.64 \cdot 10^{-4}$	$1.83 \cdot 10^{-3}$	$5.93 \cdot 10^{-4}$	$\bar{v}_z/\bar{\rho}$	$8.11 \cdot 10^{-4}$
$\hat{B}_x/\hat{\rho}$	$4.63 \cdot 10^{-3}$	$4.77 \cdot 10^{-3}$	$1.89 \cdot 10^{-3}$	$\bar{B}_x/\bar{\rho}$	$1.58 \cdot 10^{-8}$
$\hat{B}_z/\hat{\rho}$	$2.00 \cdot 10^{-3}$	$2.77 \cdot 10^{-3}$	$6.33 \cdot 10^{-3}$	$\bar{B}_z/\bar{\rho}$	0

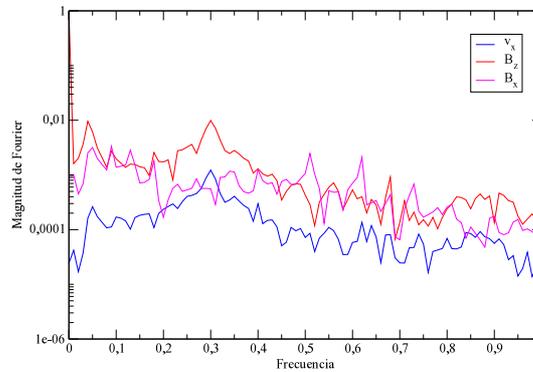
Melnikov					
	$\nu = 0.37$	$\nu = 0.45$	$\nu = 0.85$		$R$
$\hat{p}/\hat{\rho}$	$4.45 \cdot 10^{-3}$	$7.47 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$\bar{p}/\bar{\rho}$	$4.48 \cdot 10^{-3}$
$\hat{v}_x/\hat{\rho}$	$9.6 \cdot 10^{-3}$	$9.7 \cdot 10^{-3}$	$2.56 \cdot 10^{-3}$	$\bar{v}_x/\bar{\rho}$	$1.51 \cdot 10^{-3}$
$\hat{v}_z/\hat{\rho}$	$2.15 \cdot 10^{-4}$	$2.02 \cdot 10^{-4}$	$4.26 \cdot 10^{-4}$	$\bar{v}_z/\bar{\rho}$	$1.75 \cdot 10^{-9}$
$\hat{B}_x/\hat{\rho}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$7.4 \cdot 10^{-3}$	$\bar{B}_x/\bar{\rho}$	0
$\hat{B}_z/\hat{\rho}$	$4.01 \cdot 10^{-2}$	$2.37 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-2}$	$\bar{B}_z/\bar{\rho}$	$1.16 \cdot 10^{-2}$
$\hat{B}_z/\hat{v}_x$	4.18	2.43	13.7	$\bar{B}_z/\bar{v}_x$	7.66

**Tabla 5.3:** Cocientes de las magnitudes de las transformadas de Fourier de los campos para las frecuencias  $\nu$ :  $\hat{X}$  representa la componente de la TF de la variable  $X$ .  $\bar{X}$  representa la componente  $X$  del autovector del modo magnetoacústico lento  $L$  (panel superior) o rápido  $R$  (panel inferior), calculado con valores promedio.

igual modo que el caso anterior. Se observan cuatro frecuencias cuya magnitud de Fourier es significativa:  $\nu = 0.04$ ,  $\nu = 0.09$ ,  $\nu = 0.13$  y  $\nu = 0.30$ . Estos picos representan los lapsos temporales  $T = 58\text{seg}$ ,  $25.7\text{seg}$ ,  $17.8\text{seg}$  y  $7.33\text{seg}$ , respectivamente. Comparando con el panel derecho de la misma figura, observamos que la intensidad de los picos en la frecuencia  $\nu = 0.30$  está presente en la velocidad trasversal, mientras que las frecuencias más bajas encuentran mayor intensidad en la velocidad longitudinal. Notemos que la velocidad en  $z$ , tiene tres frecuencias características:  $\nu = 0.04$ ,  $\nu = 0.09$  y  $\nu = 0.13$ . Haciendo una inspección a través de la relación de dispersión (1.29) y usando los valores del promedio para la velocidad del sonido es  $c_s = 0.04$ , la velocidad de Alfvén  $v_A = 0.106$  y la velocidad magnetoacústica rápida  $v_R = 0.115$ , encontramos que estas tres frecuencias son armónicos de oscilaciones tipo magnetoacústicas lentas, puesto que  $\nu = c_s/\lambda_z$  con  $\lambda_z = L/3$ ,  $L/2$  y  $L$ , respectivamente. Haciendo una comparación entre los cocientes del panel superior de la tabla 5.4, notamos un buen acuerdo en los coeficientes que están asociados a la presión del gas y la velocidad en  $z$ . Los demás coeficientes no están en buen acuerdo, debido probablemente a interacciones no-lineales que se están propagando en el medio y que excitan la oscilación de  $v_x$ ,  $B_x$  y  $B_z$  (ver las contribuciones de estas variables en la figura 5.17). De la figura 5.17, vemos una correspondencia de picos en la frecuencia  $\nu = 0.30$  para el caso del campo magnético longitudinal y el campo de velocidades en  $x$ . Esta correspondencia es una manifestación de la propagación de oscilaciones magnetoacústicas rápidas en la dirección transversal. La comparación entre cocientes del panel inferior de la tabla 5.4 está en buen acuerdo para las variables  $v_x$  y  $B_z$ . Se puede ver la contribución de  $B_x$  a esta frecuencia en la figura 5.17 y de  $v_z$  en la figura 5.16 panel derecho. Estas contribuciones afectan los cocientes del panel inferior de la tabla 5.4 por lo que en estas variables el acuerdo con los respectivos cocientes del autovector asociado al modo rápido, no es bueno. La frecuencia  $\nu = 0.30$  representa un modo



**Fig. 5.16:** Caso A. Panel izquierdo: Frecuencias características en la TF de  $(\rho(t) - \rho_0)/\rho_0$  de la simulación tridimensional, para el caso de Asai et al. (2001). Panel derecho: Frecuencias características para las velocidades transversal y longitudinal al arco magnético.



**Fig. 5.17:** Caso A. Correspondencia de picos en frecuencia (adimensional) entre la velocidad transversal al arco magnético  $v_x$  y el campo magnético  $B_z$  para las frecuencias  $\nu = 0.30$  y  $\nu = 0.42$ . Además se muestra el campo transversal  $B_x$ .

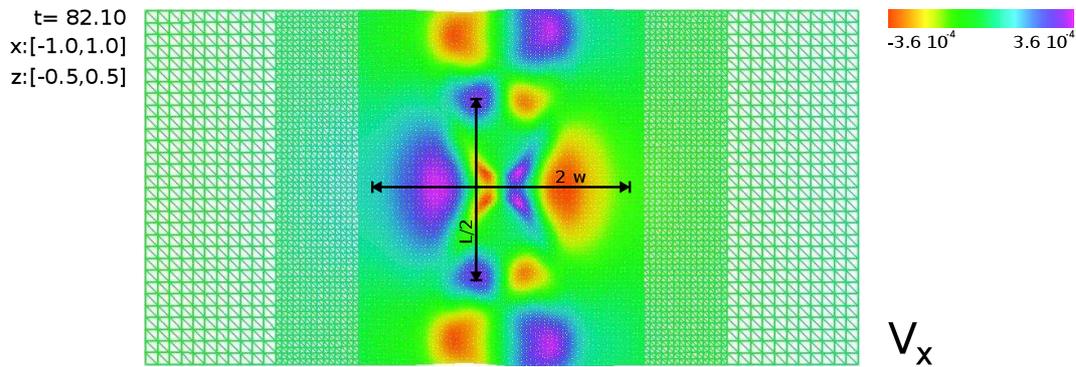
de oscilación con  $\lambda_x = \lambda_y = 2w$  y  $\lambda_z = L/2$  (ver figura 5.18) el cual representa un modo *sausage* con un periodo de 7.3seg. Encontramos buen acuerdo con el periodo observado:  $T = 7.3\text{seg} \leftrightarrow T_{obs} = 6.6\text{seg}$ .

### No linealidad

En el panel superior de la figura 5.19 para Melnikov y su panel inferior para Asai, se muestra la no-linealidad a la que se referencia en las secciones anteriores. Notar la amplitud finita de las ondas que están propagándose en la dirección longitudinal al arco.

### Modos *leaky*

Para obtener modos *leaky* se perturbó el equilibrio de las configuraciones de Asai y Melnikov con un salto de presión magnética. Se utilizaron los mismos saltos en presión magnética empleados en el caso bidimensional ( $\Delta p_A = 0.28$  y  $\Delta p_A = 0.35$ ). En los distintos paneles de la figura 5.20 se muestran los perfiles de densidad de un corte transversal al arco en la región de la cima. En las figuras superiores, se muestran los resultados obtenidos para la perturbación con presión del gas, (que analizamos previamente)

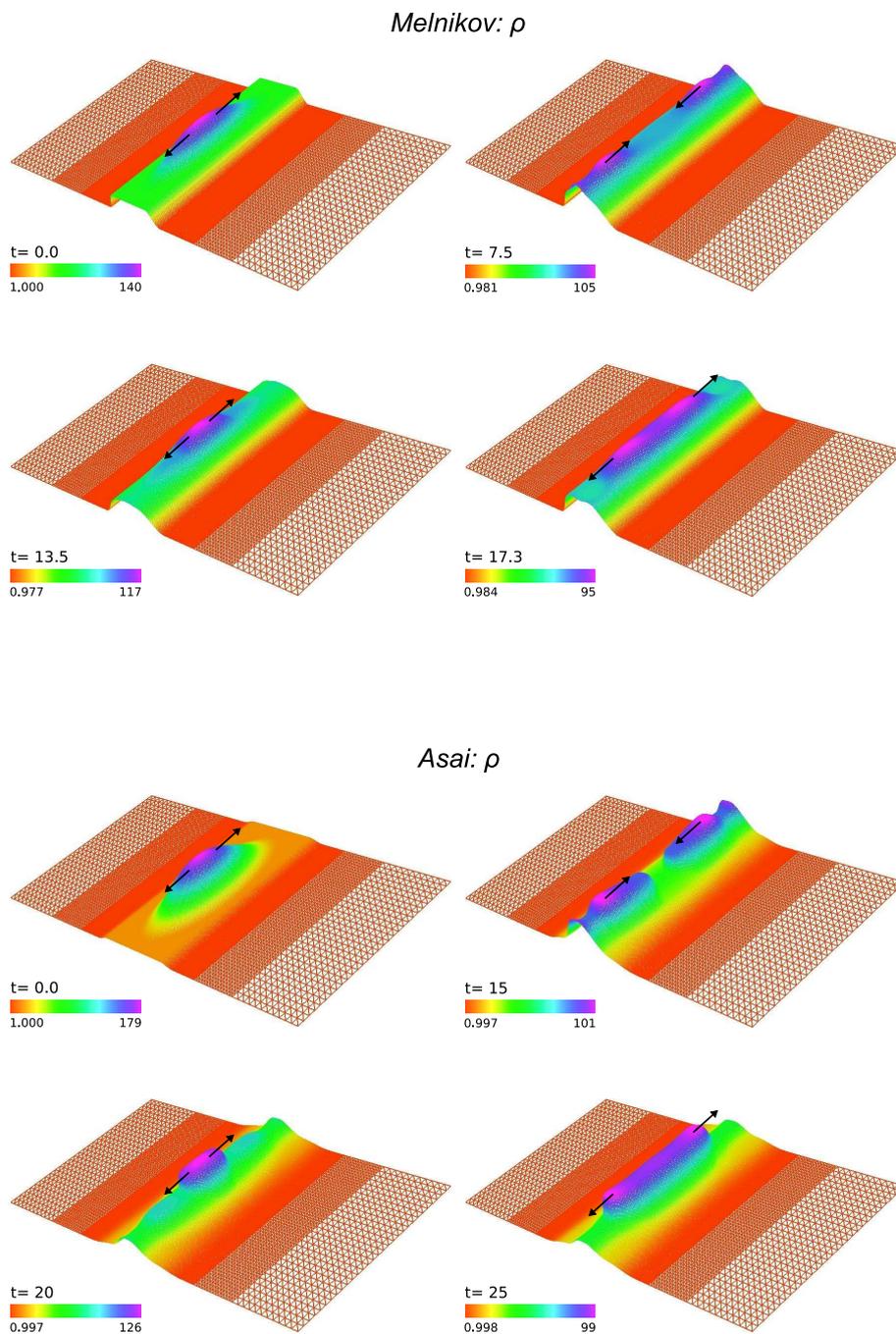


**Fig. 5.18:** Caso A. Imagen de la componente de la velocidad  $v_x$ . Se muestra las longitudes características de la oscilación.

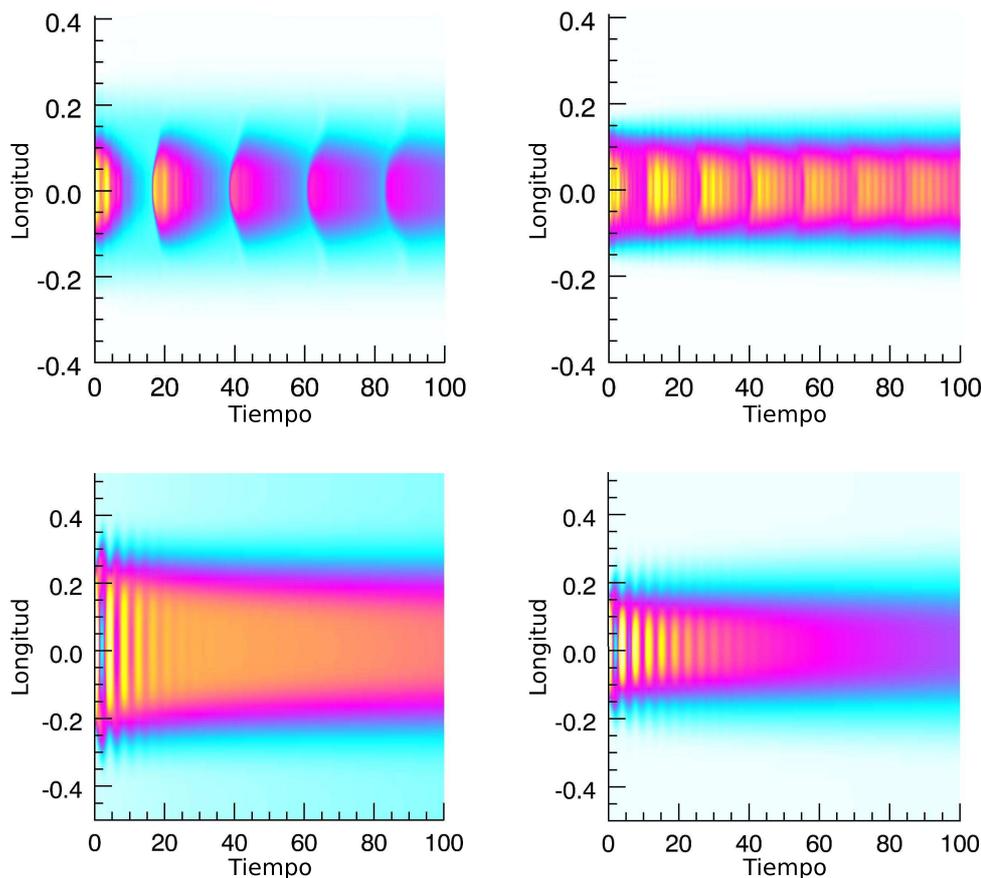
Asai					
	$\nu = 0.04$	$\nu = 0.09$	$\nu = 0.13$		$L$
$\hat{p}/\hat{\rho}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.38 \cdot 10^{-3}$	$\bar{p}/\bar{\rho}$	$1.84 \cdot 10^{-3}$
$\hat{v}_x/\hat{\rho}$	$1.72 \cdot 10^{-5}$	$5.23 \cdot 10^{-5}$	$7.44 \cdot 10^{-5}$	$\bar{v}_x/\bar{\rho}$	$1.77 \cdot 10^{-10}$
$\hat{v}_z/\hat{\rho}$	$4.71 \cdot 10^{-4}$	$1.53 \cdot 10^{-3}$	$1.47 \cdot 10^{-3}$	$\bar{v}_z/\bar{\rho}$	$5.56 \cdot 10^{-4}$
$\hat{B}_x/\hat{\rho}$	$2.64 \cdot 10^{-4}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$2.12 \cdot 10^{-3}$	$\bar{B}_x/\bar{\rho}$	$6.25 \cdot 10^{-10}$
$\hat{B}_z/\hat{\rho}$	$9.53 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$\bar{B}_z/\bar{\rho}$	0

Asai			
	$\nu = 0.3$		$R$
$\hat{p}/\hat{\rho}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$	$\bar{p}/\bar{\rho}$	$1.84 \cdot 10^{-3}$
$\hat{v}_x/\hat{\rho}$	$1.43 \cdot 10^{-3}$	$\bar{v}_x/\bar{\rho}$	$1.49 \cdot 10^{-3}$
$\hat{v}_z/\hat{\rho}$	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$\bar{v}_z/\bar{\rho}$	$1.42 \cdot 10^{-12}$
$\hat{B}_x/\hat{\rho}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$\bar{B}_x/\bar{\rho}$	0
$\hat{B}_z/\hat{\rho}$	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$\bar{B}_z/\bar{\rho}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$
$\hat{B}_z/\hat{v}_x$	7.98	$\bar{B}_z/\bar{v}_x$	8.14

**Tabla 5.4:** Cocientes de las magnitudes de las transformadas de Fourier de los campos para las frecuencias  $\nu$ :  $\hat{X}$  representa la componente de la TF de la variable  $X$ .  $\bar{X}$  representa la componente  $X$  del autovector del modo magnetoacústico lento  $L$  (panel superior) o rápido  $R$  (panel inferior), calculado con valores promedio.



**Fig. 5.19:** Ondas en densidad no-lineales que se propagan a lo largo del arco para Melnikov (panel superior) y Asai (panel inferior). El tamaño transversal es  $[-1, 1]$  y el longitudinal es  $[-0.5, 0.5]$ . Las flechas dan una idea del movimiento de los picos.



**Fig. 5.20:** Perfil de la densidad de los casos de Asai (izquierdo) y Melnikov (derecho) para los saltos en presión del gas (superiores) y en presión magnética (inferiores). La imagen se obtiene realizando un corte unidimensional transversal al arco, en la región de la cima. Longitud: Asai:  $l \times 16\text{Mm}$ , Melnikov:  $l \times 25\text{Mm}$ . Tiempo: Asai:  $t \times 2.32\text{seg}$ , Melnikov:  $t \times 5.2\text{seg}$ .

mientras que en las 2 inferiores muestran el resultado del salto de presión magnética. Los paneles izquierdos son para el caso A y los derechos para el caso M. Podemos notar que para el caso de salto en la presión del gas (paneles superiores), en ambos casos la oscilación rápida no se ve amortiguada, mientras que para los saltos de presión magnética (paneles inferiores), se producen oscilaciones más significativas radialmente y se amortiguan en pocos periodos. Para el caso A, se obtuvo un amortiguamiento de las ondas en 4 periodos, lo que equivale a 46seg, mientras que para M, el amortiguamiento se desarrolla en 7 periodos (130seg). En el caso bidimensional se había obtenido para A un tiempo de amortiguamiento del orden de 56seg y para M de 230seg. Aparentemente esto se debe a que la pérdida es más efectiva en el caso tridimensional, dada la mayor área simulada por el cilindro, y por la cual puede escapar la energía.

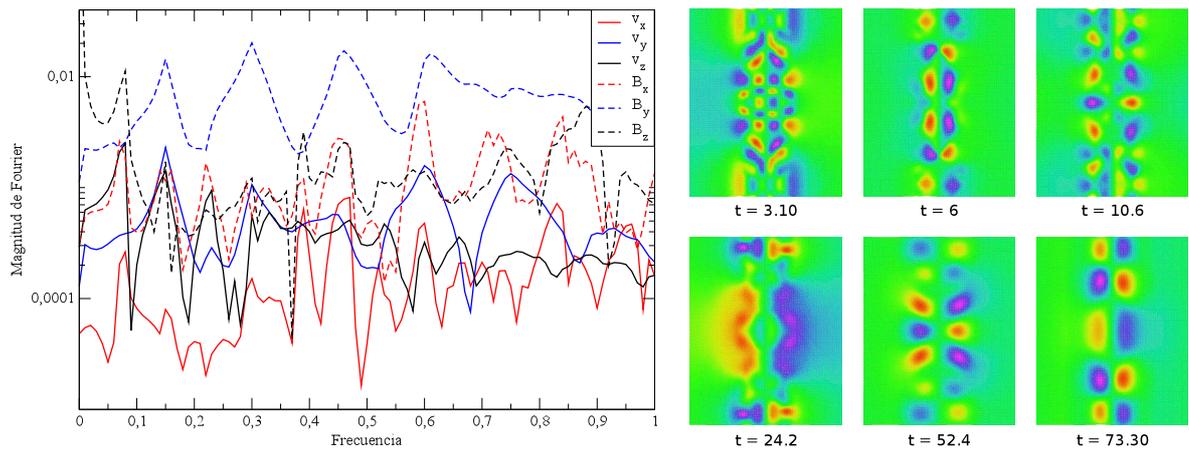
### Oscilaciones torsionales

Debido a componentes turbulentas de la cromósfera, es de esperar que se produzcan movimientos del campo magnético originando torsiones del mismo. Al simular esta torsión, se pierde la simetría cilíndrica. Tomamos el mismo dato de equilibrio que elegimos para el caso de Melnikov, y agregamos rotaciones en

el campo magnético transversal cerca de ambas bases del arco.

Un análisis preliminar, muestra un sistema complejo de oscilaciones. El panel izquierdo de la figura 5.21 muestra picos en múltiples frecuencias:  $\nu = 0.08$ ,  $\nu = 0.15$ ,  $\nu = 0.22$ ,  $\nu = 0.30$ ,  $\nu = 0.39$ ,  $\nu = 0.47$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $\nu = 0.75$  y  $\nu = 0.83$  para las tres componentes del campo magnético y el campo de velocidad. Esto se debe a que existen mayor número de configuraciones de oscilación que en los casos sin torsión, como puede verse de los paneles de la derecha de la figura 5.21. Estas configuraciones son más complejas al comienzo de la simulación, mientras que después de  $t = 20$ , poseen longitudes características más grandes.

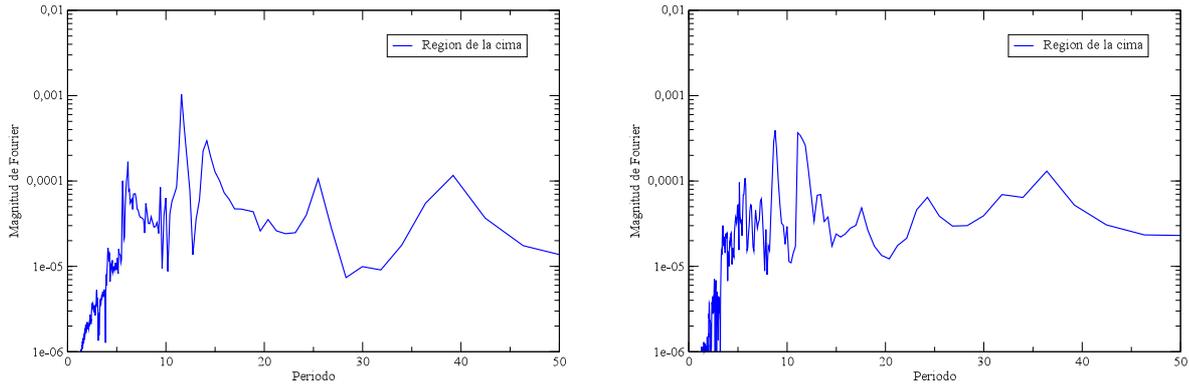
Las transformadas fueron realizadas sobre la variación temporal de las cantidades físicas en el punto  $(-0.1, 0, 0.175)$  –cerca de la cima–. En la figura 5.22, se muestra para el caso M, la TF sin torsión (panel izquierdo) y con torsión (panel derecho). Ambas curvas muestran la TF para  $(\rho(t) - \rho_0)/\rho_0$ . Vemos que el patrón general de picos de frecuencias es similar. En la figura 5.23 se muestran superpuestos los resultados de las transformadas de Fourier. Notamos que los periodos del caso torsional son más cortos, aparentemente debido al aumento de la densidad de campo magnético respecto al caso sin torsión. En particular, con torsión encontramos tres periodos característicos:  $T = 8.8\text{seg}$ ,  $T = 10.9\text{seg}$  y  $T = 13.3\text{seg}$ . Sin torsión estos periodos son:  $6.12\text{seg}$ ,  $11.56\text{seg}$  y  $14.05\text{seg}$ , habiendo un corrimiento del orden de  $1.5\text{seg}$  en promedio.



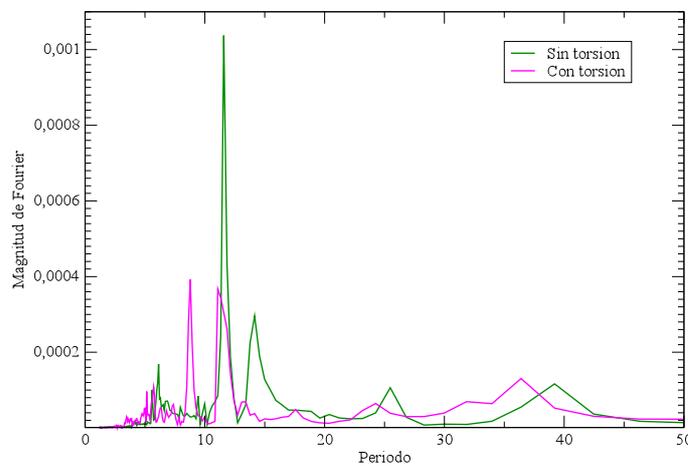
**Fig. 5.21:** Panel izquierdo: TF de las componentes del campo magnético y de velocidad. Panel derecho: modos de oscilación de  $v_x$  característicos para el caso torsional a distintos tiempos.

## 5.4. Conclusiones preliminares

Hemos comparado los datos 3D con los casos observacionales de Asai et al. (2001) y Melnikov et al. (2002). Hemos podido reproducir las frecuencias observacionales e identificar otros modos. Por ejemplo, en la figura 5.14, que muestra el buen acuerdo logrado entre las observaciones y la simulación para el caso M, hemos identificado el modo de periodo  $\simeq 24\text{seg}$  como un modo lento. En el caso de Asai, encontramos que el periodo observado  $6.6\text{seg}$  está asociado a una oscilación magnetoacústica rápida, pero el modo no es el fundamental como lo sugiere dicho autor, y las simulaciones 2D. Para el caso de Melnikov, ocurre algo



**Fig. 5.22:** TF de  $(\rho(t) - \rho_0)/\rho_0$  para el caso sin torsión (panel izquierdo) y con torsión (panel derecho).



**Fig. 5.23:** Superposición de la TF de  $(\rho(t) - \rho_0)/\rho_0$  para el caso sin torsión (verde) y con torsión (rosa). Se nota el corrimiento a periodos más cortos para el caso torsional.

similar: encontramos un periodo de 11.56seg que está en buen acuerdo con el rango observado 8 – 11seg. Sin embargo, se encuentra nuevamente que el modo es un armónico. Es posible que estas diferencias respecto a la descripción de la literatura, y con nuestros resultados dos dimensionales, se deban a que no se ha simulado la base cromosférica. Incorporar la cromosfera en el código utilizado *HAD*, requiere una construcción de la malla, para la cual el código aún no está preparado. Se necesita hacer un refinamiento especial que abarca no sólo la zona cercana al arco, puesto que allí existen gradientes grandes en algunas de las variables, sino que además, simulada la cromosfera, esta también produce regiones discontinuas, donde el refinamiento también debe llegar, ya sea de una manera fija (como la simulada en esta tesis) o adaptable.

**BIBLIOGRAFÍA**

- Asai, A., Shimojo, M., Isobe, H., et al. 2001, *The Astrophysical Journal Letters*, 562, L103
- Aschwanden, M. 2006, *Physics of the Solar Corona*, Springer Praxis Books / Geophysical Sciences (Springer)
- Aschwanden, M. J., Nakariakov, V. M., & Melnikov, V. F. 2004, *The Astrophysical Journal*, 600, 458
- Aschwanden, M. J., Winebarger, A., Tsiklauri, D., & Peter, H. 2007, *The Astrophysical Journal*, 659, 1673
- Cécere, M., Costa, A., Lehner, L., & Reula, O. 2008a, *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía*, 51, 7
- Cécere, M., Costa, A., & Reula, O. 2010, *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía*, 53, 249
- Cécere, M., Lehner, L., & Reula, O. 2008b, *Computer Physics Communications*, 179, 545
- Dedner, A., Kemm, F., Kröner, D., et al. 2002, *Journal of Computational Physics*, 175, 645
- Díaz, A. J., Oliver, R., & Ballester, J. L. 2002, in *ESA Special Publication*, Vol. 506, *Solar Variability: From Core to Outer Frontiers*, ed. A. Wilson, 593–596
- Díaz, A. J., Oliver, R., Ballester, J. L., & Roberts, B. 2004, *A&A*, 424, 1055
- Edwin, P. M. & Roberts, B. 1982, *SOL. PHYS.*, 76, 239
- Edwin, P. M. & Roberts, B. 1983, *Solar Physics*, 88, 179
- Kirk, J. G., Melrose, D. B., Priest, E. R., Benz, A. O., & Courvoisier, T. J.-L., eds. 1994, *Plasma Astrophysics*
- Melnikov, V. F., Reznikova, V. E., & Shibasaki, K. 2002, *Proc. of Intern. Conf. Active processes on the Sun and stars*, 221
- Mitra-Kraev, U., Harra, L. K., Williams, D. R., & Kraev, E. 2005, *Astronomy and Astrophysics*, 436, 1041
- Nakariakov, V. M., Melnikov, V. F., & Reznikova, V. E. 2003, *Astronomy and Astrophysics*, 412, L7
- Nakariakov, V. M., Tsiklauri, D., Kelly, A., Arber, T. D., & Aschwanden, M. J. 2004, *A&A*, 414, L25
- Nakariakov, V. M. & Verwichte, E. 2005, *Living Reviews in Solar Physics*, 2, 3
- Pascoe, D. J., Nakariakov, V. M., & Arber, T. D. 2007, *Astronomy and Astrophysics*, 461, 1149
- Pascoe, D. J., Nakariakov, V. M., Arber, T. D., & Murawski, K. 2009, *Astronomy and Astrophysics*, 494, 1119

Srivastava, A. K., Zaqarashvili, T. V., Uddin, W., Dwivedi, B. N., & Kumar, P. 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 388, 1899

Verwichte, E., Foullon, C., Van Doorselaere, T., Smith, H. M., & Nakariakov, V. M. 2009, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 51, 124019

Zaitsev, V. V. & Stepanov, A. V. 1989, *Soviet Astronomy Letters*, 15, 66

## Parte III

# Conclusiones y sugerencias de futuros trabajos



## Conclusiones Generales

En este apartado se resumen los principales resultados encontrados a lo largo del trabajo realizado en esta tesis.

Con el objetivo de analizar la dinámica de estructuras magnéticas en la corona solar, se hicieron estudios numéricos que fueron comparados con observaciones. Para ello se desarrollaron herramientas numéricas que luego fueron utilizadas para estudiar la física del problema.

Se investigaron soluciones numéricas de las ecuaciones de la magnetohidrodinámicas (MHD) que son las ecuaciones en derivadas parciales que describen en una buena aproximación la dinámica del plasma de la baja corona solar. A nivel discreto las condiciones de contorno deben construirse de forma que no generen violaciones de la divergencia del campo magnético. Se estableció que la condición de contorno que preserva el vínculo es la más eficiente debido a que no sólo permite que la violación del vínculo salga del dominio computacional sino que además, no introduce violaciones significativas al contorno. En Cécere et al. (2008b) hemos plasmado este resultado en un trabajo publicado en la revista *Computer Physics Communications*.

Respecto al problema físico, se estudiaron dos configuraciones magnéticas que se producen en la baja corona. Una de ellas son los *tadpoles* o vacíos con forma de renacuajo que descienden hacia arcadas magnéticas, después de fulguraciones. En el trabajo publicado por Cécere et al. (2012), se presentó una explicación alternativa a las existentes en la literatura, que da cuenta de la formación y la dinámica de estos vacíos en términos de ondas no-lineales y choques. El escenario propuesto es tal que pulsos de energía iniciales (que simulan efectos del proceso de reconexión), inhomogenizan la hoja de corriente que se forma sobre arcadas solares. Estas arcadas por lo general emergen a la superficie solar luego de fulguraciones. La inhomogeneidad en la hoja de corriente facilita, una vez llena la hoja con plasma, que el descenso de nuevos flujos subdensos, generados por otros eventos de reconexión localizada, tengan una forma peculiar que acuerda con el fenómeno observado, tanto en su morfología como en sus parámetros característicos.

La otra configuración estudiada fue la de oscilaciones tipo *sausage* en arcos magnéticos. Se realizaron simulaciones a partir de códigos numéricos en los que se implementaron técnicas de alta resolución para poder tratar ondas no-lineales y discontinuidades con buena precisión, tanto temporal como espacialmente. Comenzando el estudio de estos objetos, hemos desarrollado un análisis en dos dimensiones explorando los modos que pueden excitarse. Se simuló un corte bidimensional, a lo largo del eje del arco. Se realizó un análisis de modos y se encontró que los períodos obtenidos numéricamente reproducen los valores observacionales en un buen acuerdo. Se reprodujeron las observaciones en cuanto a los períodos y la estructura de los modos. Se identificaron nuevos modos en los datos observacionales y se estudió el acoplamiento entre modos *sausage* rápidos y lentos lo que permite dar cuenta de la atenuación de la perturbación rápida en pocos períodos. Se excitaron modos *leaky*, mediante pulsos de presión total que cambian la condición de atrapamiento, encontrándose que la intensidad del pulso requerida para excitarlos es relativamente baja en comparación con la energía disponible, por ejemplo, debido a fulguraciones. Esto indicaría que la excitación de modos *leaky* sería un evento relativamente usual como mecanismo de amortiguamiento de modos rápidos donde la energía extraída al arco se transfiere a la corona como ondas de Alfvén de compresión. Estos resultados preliminares fueron publicados en Cécere et al. (2008a) y Cécere et al. (2010). Utilizando un código tridimensional, que tiene la habilidad de refinar la malla numérica de manera fija, se realizaron simulaciones sobre un cilindro que emula el arco magnético. El análisis arrojó resultados similares en cuanto a la reproducción de los datos observacionales, períodos característicos y obtención de modos nuevos. A diferencia de las simulaciones bidimensionales, la identificación de modos muestra armónicos superiores al modo fundamental. Esta diferencia posiblemente se deba a que aún no se ha incluido la cromosfera en la simulación, y a que dadas las condiciones de contorno utilizadas, la configuración es tal que las bases de los arcos no quedan adecuadamente atadas a la cromosfera. Se estudiaron modos torsionales con el objeto de encontrar indicadores observacionales. Se encontró que hay un patrón general similar en el sentido del número e intensidad de los picos de los períodos característicos con un corrimiento hacia períodos más cortos en el caso torsional. Las diferencias en uno y otro caso no son tan significativas como para tener un indicador claro de la torsión.

**BIBLIOGRAFÍA**

Cécere, M., Costa, A., Lehner, L., & Reula, O. 2008a, *Boletin de la Asociacion Argentina de Astronomia*, 51, 7

Cécere, M., Costa, A., & Reula, O. 2010, *Boletin de la Asociacion Argentina de Astronomia*, 53, 249

Cécere, M., Lehner, L., & Reula, O. 2008b, *Computer Physics Communications*, 179, 545

Cécere, M., Schneider, M., Costa, A., Elaskar, S., & Maglione, S. 2012, *APJ*, 759, 79



## Trabajo Futuro

En este apartado se describen las ideas que han surgido del trabajo anterior, para desarrollar en un tiempo futuro.

### 7.1. Líneas de trabajo futuras

El paso obligado que continúa al ya realizado será el de completar el análisis de los modos sausage 3D. Por un lado, resta agregar la cromosfera al dominio computacional, para comprobar las modificaciones que se introducen debido al *line-tied*. En particular se prevé que la alternancia de intensidad de los picos de la base y la cima será un resultado de dicha atadura. Por otro lado, se realizará un estudio más exhaustivo de modos de amplitud finita. Por inspección visual de la simulación se observa que los modos colectivos que se desarrollan tienen una dinámica muy compleja donde se acoplan modos de diferente orden y tipo (rápidos y lentos) lo que nos ha inducido a pensar que las cotas que impone la relación de dispersión lineal puedan modificarse. Específicamente, interesa estudiar el *cut-off* de los modos sausage atrapados. El estudio de los modos torsionales ha sido un trabajo preliminar para explorar lo que ocurre cuando los arcos son forzados desde las bases cromosféricas debido al movimiento de la cromosfera. Este trabajo será continuado próximamente.

Dada la complejidad espacial de los modos de oscilación de los arcos magnéticos estudiados, es conveniente realizar un estudio sistemático más riguroso. Para ello, se debe realizar la transformada de Fourier de todos los puntos que conforman el arco, filtrar las frecuencias altas y realizar la antitransformada para ver qué modo se obtiene, sin el ruido que producen aquellas frecuencias. A esta técnica se la llama *Filtro Pasa Bajo*.

Es de interés analizar los procesos de conversión de energía magnética en calor en las regiones de gradientes importantes de las cantidades físicas, donde los términos difusivos son significativos. Al incorporar conductividad finita las ecuaciones contienen un término llamado *stiff*. Este término es el responsable de que ciertos métodos numéricos se vuelvan inestables, dando una solución incorrecta. Una técnica que

ayuda a resolver este problema, es la de implementar un método de Runge–Kutta Implícito–Explícito (el utilizado en A1.1). La parte *stiff* se resuelve con el método implícito, ya que de la otra forma, el paso temporal necesario para que el método no se vuelva inestable debe ser muy pequeño, y esto implicaría un tiempo de cálculo muy costoso. La parte no *stiff* se calcula con el método explícito.

# Tratamiento numérico de interfases para ecuaciones de onda de segundo orden

En este capítulo se presenta el desarrollo de un esquema numérico para tratar interfases entre mallas numéricas al momento de resolver ecuaciones de onda de segundo orden. En el espíritu de los esquemas con Término de Aproximación Simultánea (*SAT*, *Simultaneous Approximation Term*, en inglés), introducidos por Carpenter et al. (1999), para propagar información entre las mallas, utilizamos los valores de los campos a integrar sólo en los puntos de contacto. De hecho en nuestro caso utilizamos sólo los valores de las derivadas temporales. La aproximación semi-discreta preserva la norma y usa operadores estándar de diferencias finitas que satisfacen suma por partes. Para la integración temporal hemos usado un método Runge–Kutta implícito-explicito. Esto resulta crucial, ya que de otro modo, los métodos se vuelven imprácticos dadas las severas restricciones que imponen los términos de forzamiento sobre integradores totalmente explícitos.

### A1.1. Introducción

Es usual en el tratamiento de modelos físicos basados en sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, recurrir al uso de varias mallas numéricas de resolución variable en diversos parches sobre la región de interés. Esto puede deberse a la necesidad de estudiar problemas donde la topología resulta no trivial y no puede ser descripta por una única malla, como en el caso de una superficie esférica (por ejemplo la superficie terrestre), o en casos donde el dominio de cómputo es demasiado grande como para ser resuelto en un único procesador, siendo necesario descomponer el dominio en varias unidades de cómputo para resolver en paralelo. Otra posibilidad es el caso donde hay regiones donde se requiere una mayor resolución, necesiéndose pasar información entre las diversas mallas de manera sincronizada. Luego resulta importante diseñar métodos que garanticen la estabilidad de la solución global, y estudiar la manera de transmitir la mínima cantidad de información en las interfases entre mallas, a fin de preservar la precisión de las soluciones obtenidas.

Desde hace algunos años existen técnicas numéricas para tratar con interfases (bordes entre diferentes mallas numéricas) al momento de resolver ecuaciones hiperbólicas de primer orden o ecuaciones parabólicas. Algunas de estas técnicas usan interpolación en una región de superposición entre los dominios numéricos. Otros métodos implementan penalidades que modifican el sistema en los puntos del borde de la malla, incluyendo información de los mismos puntos espaciales en el otro dominio numérico (Carpenter, M. H. Nordström, J. and Gottlieb, D. 1999). Este último método resulta el más adecuado en muchas situaciones, puesto que presenta propiedades muy buenas. La más interesante entre estas, es el hecho de que este método está construido de manera tal que el sistema resultante semi-discreto preserva la correspondiente estima de la energía del continuo de los correspondientes sistemas lineales a coeficientes constantes. Luego podemos asegurarnos que el esquema es estable, al menos para un sistema lineal con coeficientes constantes. Otra propiedad que vuelve atractivo a este tipo de esquemas es que la cantidad de información que pasa de una malla a la siguiente es mínima. Luego este tipo de esquemas es óptimo para cálculos masivos en paralelo, donde resulta necesario separar el cómputo sobre una gran cantidad de centrales de proceso (CPU/GPU) con conexiones con ancho de banda limitado. Asimismo, este método resulta tan preciso como lo permiten las discretizaciones espaciales y temporales adoptadas, al mismo tiempo que se mantiene constante la cantidad de datos transferidos. Este no es el caso, por ejemplo, cuando se usa interpolación. En este caso cuando se aumenta la precisión del esquema, es necesario también aumentar el número de puntos que se toman en cada lado de la interfase, utilizando interpolantes de mayor orden.

Una debilidad de estos esquemas es que para ecuaciones hiperbólicas de segundo orden, se debe primero reescribir las ecuaciones como un sistema de primer orden, a fin de poder aplicar la aproximación. De esta manera aumenta el número de variables y vínculos, los cuales deben ser verificados a lo largo de la evolución. Esto último no sólo aumenta la cantidad de memoria requerida para realizar el cálculo, sino que aumenta además el tráfico de información entre los procesadores, debido al correspondiente aumento en la cantidad de información que es necesaria comunicar entre los diferentes dominios de cómputo. Recientemente Reula (2011) encontró una manera de implementar técnicas similares para la ecuación de Schrödinger. En este trabajo utilizamos el mismo concepto, extendiendo la aplicación de este método a

ecuaciones de onda de segundo orden. Este nuevo esquema resulta sencillo y muy eficiente, debido a que sólo se necesita transferir uno de los campos a través de los bordes, la derivada temporal de la solución.

En la siguiente sección de este anexo describiremos este nuevo esquema numérico, derivaremos los términos de borde necesarios para sumárselos a las ecuaciones para que el método funcione. Existen dos tipos diferentes de términos de borde. El primero incluye sólo los valores de los campos en la misma malla: su presencia es necesaria para cancelar, en la estima de la energía, los términos de borde generados usualmente por la parte elíptica del operador. El segundo término puede ser tratado como una interacción entre los campos en ambas mallas, este término es una penalidad, en el sentido que depende de la diferencia de los campos en ambos lados de la malla y busca llevar esta diferencia exponencialmente a cero. Uno de estos términos, el que tiene información de la malla vecina, es áltamente *stiff*, luego se necesita un método implícito a fin de no pagar un alto precio en el salto temporal. Es por esta razón que utilizamos métodos tipo implícito–explícito (llamados IMEX) Runge–Kutta, los cuales resuelven este problema de manera muy general.

En la sección A1.3 se presentan algunos resultados numéricos obtenidos mediante el método desarrollado. Comparamos los resultados de evolucionar un sistema unidimensional en un círculo, primero usando condiciones de borde periódicas en una malla única (en un esquema homogéneo usando operadores de diferencias finitas centradas), y luego usando el esquema de interfase entre el primero y último punto de la malla numérica. Además comparamos nuestro esquema con el esquema usual con término de aproximación simultánea (en inglés *Simultaneous Approximation Term*, nos referiremos en adelante como *SAT*), donde el sistema es tratado en su forma equivalente de primer orden. Simultáneamente estudiamos también una implementación sobre un toro bidimensional hecho a partir de una cuadrícula numérica e identificando sus bordes de la manera usual. En una dirección usamos condiciones periódicas de la manera estándar, es decir mediante operadores de diferencias finitas centradas, mientras que en la otra usamos un esquema de interfase: ya sea el propuesto en este trabajo, o el esquema *SAT* (usando una versión de primer orden del sistema de ecuaciones) o una condición de borde periódica. Primero evolucionamos un dato inicial muy suave, para estudiar la convergencia y la estabilidad del método, para luego estudiar la evolución de una condición inicial no suave, un paquete de onda en una trayectoria muy definida. Este último estudio arroja resultados sobre la eficiencia y calidad del método en situaciones demandantes. Para estos casos estudiamos la convergencia del nuevo esquema propuesto. Encontramos que este es compatible con el método de discretización utilizado por los operadores derivada. Hemos empleado nuevos operadores de diferencias finitas para aproximar las derivadas segundas. Observamos que al usar estos operadores, obtenemos orden, este ruido se observa pero se remueve usando operadores disipación de Kreiss-Oliger de orden apropiado. Luego se discute la precisión de la aproximación, es decir su calidad dada una resolución fija razonable. En la sección A1.4 estudiamos una situación más demandante, específicamente, una ecuación con coeficientes variables en el espacio y en el tiempo, la cual es usada a menudo en Relatividad General como una prueba estándar, y mostramos que este esquema es bien comportado también en este caso.

En todos los casos, hemos encontrado que el nuevo método se compara de manera favorable con el esquema *SAT*, produciendo errores menores y cruzando menos información en las interfases. La razón de esto reside en parte al hecho de que los operadores de segundo orden generan errores de fase significa-

tivamente menores que los operadores de primer orden. Estos resultados muestran que nuestro método resulta competitivo a la vez de simple de implementar.

## A1.2. Esquema numérico

Consideramos por simplicidad un problema unidimensional, la generalización a más dimensiones resulta trivial. Por lo tanto consideremos un campo  $\Phi(x, t) : S^1 \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  que satisface la siguiente ecuación de onda:

$$\partial_t^2 \Phi = \partial_x^2 \Phi, \quad (\text{A1.1})$$

y asumamos un dato inicial suficientemente suave, dado a  $t = 0$ , por  $\Phi(x, 0) = \Phi_0(x)$ ,  $\partial_t \Phi(x, 0) = \Pi_0(x)$ .

Como se mencionó en la sección anterior, la forma tradicional de resolver esta ecuación en la presencia de interfases es mediante la reducción del sistema a uno de primer orden, mediante la introducción de las variables  $\Pi := \partial_t \Phi$  y  $\Psi := \partial_x \Phi$  (de aquí en adelante, trataremos exclusivamente con interfases del tipo “mallas que se tocan”, donde para cada punto del borde de cada malla corresponde otro punto de la malla vecina representando el mismo punto espacial). Luego, A1.1 resulta equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &= \Pi, \\ \partial_t \Psi &= \partial_x \Pi, \\ \partial_t \Pi &= \partial_x \Psi. \end{aligned} \quad (\text{A1.2})$$

Esta manera de resolver la ecuación diferencial tiene la desventaja de introducir variables auxiliares, lo cual puede ser muy costoso en memoria, especialmente cuando se consideran sistemas de ecuaciones de onda en muchas dimensiones, como es el caso por ejemplo de la Relatividad General. Mas aún, el uso de un sistema de primer orden resulta en aproximaciones numéricas menos precisas, debido a que el error en la fase es mayor al obtenido mediante el uso de esquemas basados en el sistema de segundo orden.

Por lo tanto, en este trabajo estamos interesados en resolver la ecuación (A1.1) en su forma diferencial de orden dos para los operadores espaciales, aunque mantenemos la forma de primer orden para la integración temporal. Para esta última utilizaremos un esquema Runge–Kutta explícito y también un Runge–Kutta implícito–explícito. De esta forma, en este anexo consideraremos el sistema:

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &= \Pi, \\ \partial_t \Pi &= \partial_x^2 \Phi, \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

para el cual desarrollaremos un método numérico para resolverlo en presencia de interfases.

Los teoremas estándar para estas ecuaciones diferenciales garantizan la existencia de una solución en la norma de la energía:

$$\mathcal{E} := \int \{\Pi^2 + \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi\} dV. \quad (\text{A1.4})$$

Nuestro objetivo es desarrollar un esquema que preserve la forma análoga de la norma de la energía discreta, de manera que nos asegure la estabilidad.

Para resolver numéricamente este problema tomamos una malla espaciada uniformemente ubicando una interfase en  $x = 0$ , conectando de esta manera ambos extremos de la red numérica. De esta manera obtenemos un espacio circular de longitud dos. Nos referiremos a la solución discreta mediante el vector

$\{\Phi_j\}$ , con  $j = 0 \dots N$ , el cual corresponde a los puntos  $x_j = dx * j$  con  $dx := \frac{2}{N}$ , de manera que el último punto coincida con el primero.

Introducimos la norma discreta  $L_2$  de la manera usual:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle := dx \sum_{j=0}^N \sigma_j \Psi_j \Phi_j$$

donde  $\{\sigma_j\}$  es un conjunto de pesos de valor real que dependen de los operadores en diferencias finitas considerados, y  $dx$  es el intervalo espacial entre puntos vecinos de la malla numérica.

Se busca resolver el sistema semi-discreto en todos los puntos, excepto en el borde, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_j &= \Pi_j \\ \partial_t \Pi_j &= (D^2 \Phi)_j \quad j = 0 \dots N \end{aligned} \tag{A1.5}$$

donde  $D$  es algún operador de diferencias finitas que aproxima al operador derivada de algún orden  $q \geq 1$ , el cual satisface la propiedad de suma por partes (denotaremos a esta propiedad como *SBP* del inglés *summation by parts*) (Kreiss & Scherer 1977; Strand 1994; Gustafsson et al. 1995). En otras palabras, este satisface la contraparte discreta de la propiedad de integración por partes

$$\langle \Psi, D\Phi \rangle + \langle D\Psi, \Phi \rangle := \Psi_N \Phi_N - \Psi_0 \Phi_0$$

Alternativamente, podemos usar en vez de  $D^2$ , un operador de segundo orden  $D_2$ , aproximando la derivada segunda, la cual satisface la correspondiente propiedad *SBP*, i.e. ésta puede ser escrita como (Mattsson & Nordstrom 2004):

$$D_2 = H^{-1} (-D^T H D + R S), \tag{A1.6}$$

donde  $H = \text{diag}(\sigma_0, \dots, \sigma_N)$ ,  $D$  es un operador que aproxima la primer derivada,  $R = \text{diag}(-1, 0, \dots, 0, 1)$  y  $S$  aproxima la primer derivada sobre el borde. Esto garantiza que la propiedad análoga de la integración por partes para la segunda derivada se sostiene. En otras palabras  $D_2$  satisface:

$$\langle \Psi, D_2 \Phi \rangle = \Psi_N (D\Phi)_N - \Psi_0 (D\Phi)_0 - \langle D\Psi, D\Phi \rangle. \tag{A1.7}$$

Esta elección es adecuada debido a que los operadores tienen un *stencil* más pequeño y preservan la fase de la solución de manera más precisa. En este trabajo utilizamos los operadores de segundo orden *SBP* obtenidos por (Mattsson & Parisi 2010).

Si pudiéramos probar que el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias (A1.5) tiene autovalores con parte real no positiva y un conjunto completo de autovectores, entonces existirían varios integradores temporales discretos y como resultado, una evolución numérica estable para el sistema completo (para una descripción más detallada de la teoría puede consultarse Gustafsson et al. (1995)). Una manera de verificar estas condiciones es encontrar una norma que preserve o disminuya en el tiempo. Este es el procedimiento que utilizaremos para desarrollar nuestro esquema. En particular, vamos a utilizar ya sea un operador tradicional explícito tipo Runge–Kutta de tercer orden o uno más nuevo tipo IMEX. Estos métodos IMEX consisten de una mezcla de métodos Runge–Kutta implícitos y explícitos. Esto nos permite resolver el problema sin tener que invertir todo el sistema de ecuaciones (una propiedad de los

esquemas explícitos), mientras que permite al mismo tiempo autovalores negativos grandes (propiedad de los métodos implícitos). El resultado es un esquema de penalidades muy eficiente.

Está claro que si usamos este esquema obtendremos para la versión discreta de la norma de energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} := \Pi_N D\Phi_N - \Pi_0 D\Phi_0.$$

Dado que estas contribuciones en el lado derecho de esta ecuación viene de cada lado de la interfase, para preservar esta norma a lo largo de la evolución necesitamos cancelar estos términos de borde. En la implementación tradicional de primer orden, esto es llevado a cabo mediante el método *SAT*, el cual consiste en agregar términos de penalidad a la ecuación en los puntos del contorno, los cuales hacen que la energía definida en la última ecuación se preserve. En el enfoque *SAT* (Carpenter, M. H. Nordström, J. and Gottlieb, D. 1999), el sistema de primer orden (A1.2) es semi-discretizado y modificado en el contorno según:

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_j &= \Pi_j, \\ \partial_t \Psi_j &= D\Pi_j - \frac{1}{2} \frac{\delta_{j0}}{dx \sigma_0} ((\Pi_0 - \Pi_N) + (\Psi_0 - \Psi_N)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\delta_{jN}}{dx \sigma_N} ((\Pi_N - \Pi_0) - (\Psi_N - \Psi_0)) \\ \partial_t \Pi_j &= D\Psi_j - \frac{1}{2} \frac{\delta_{j0}}{dx \sigma_0} ((\Pi_0 - \Pi_N) + (\Psi_0 - \Psi_N)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\delta_{jN}}{dx \sigma_N} ((\Pi_N - \Pi_0) - (\Psi_N - \Psi_0)). \end{aligned} \quad (A1.8)$$

Resultando de esta forma un esquema estable, con energía no creciente. Contrariamente a este caso hiperbólico de primer orden, y al caso parabólico, no parece posible para sistemas de segundo orden controlar la energía mediante la introducción (en ambos lados de la interfase), de términos proporcionales a la diferencia de los campos y sus derivadas normales, en cada borde. Luego siguiendo lo desarrollado por (Reula 2011), introducimos nuestra primer modificación mediante la adición de términos en los bordes de la siguiente manera:

$$\partial_t \Pi_j = (D^2 \Phi)_j + \frac{1}{dx \sigma_0} \delta_{j0} (D\Phi)_0 - \frac{1}{dx \sigma_N} \delta_{jN} (D\Phi)_N.$$

Con esta modificación los términos en el borde se cancelan y por lo tanto la norma total permanece constante, pero sin introducir interacción alguna a lo largo de ambos lados de la interfase, y por lo tanto la solución que obtendríamos simplemente rebotaría en el borde. En otras palabras, dado que la energía se conserva, si un punto del borde no puede influenciar el punto en el otro extremo, el pulso debe retornar. De todos modos la eliminación del término de borde implica que podemos concentrarnos ahora en agregar términos adicionales, que mientras preserven o disminuyan la norma, introduzcan una interacción en los extremos de la malla de tal manera que la onda consiga pasar a través de la interfase. Por lo tanto debemos introducir un término de acople en ambos lados, es decir un término de penalidad que fuerce la coincidencia de los valores en ambos extremos. La manera más simple de satisfacer esta propiedad es:

$$\partial_t \Pi_j = (D^2 \Phi)_j + \frac{1}{dx \sigma_0} \delta_{j0} (D\Phi)_0 - \frac{1}{dx \sigma_N} \delta_{jN} (D\Phi)_N - L(\Pi_0 - \Pi_N)(\delta_{j0} - \delta_{jN}) \quad (A1.9)$$

donde  $L$  puede ser llamado el *factor de interacción*, el cual es una constante real positiva a ser elegida tan grande como sea posible, a fin de hacer la interacción tan fuerte como sea posible. De esta manera penalizamos la diferencia en ambos lados de la interfase y las llevamos a coincidir con un valor exponencial muy grande mientras se mantiene la energía acotada. La limitación sobre cuan grande debería ser  $L$  viene

del hecho que un valor demasiado grande tornaría inestable el sistema haciendo demasiado grande la contribución de los autovalores a lo largo del eje negativo real. Esto último haría que los esquemas de integración temporales explícitos caigan fuera de la región de estabilidad, o tornaría el paso temporal necesario prohibitivamente pequeño. Para esquemas explícitos el valor de  $L$  no debería superar  $L = \frac{1}{\sigma_0 dx}$ , de manera de contribuir al factor CFL tanto como la parte principal. Esta elección resulta no ser lo suficientemente adecuada, dando errores inaceptablemente altos con forma de rebotes en la interfase para una resolución que describe apropiadamente la solución. Por lo tanto debemos usar factores mayores y recurrir en consecuencia a un método semi-implícito que permita eliminar la limitación del CFL.

Evolucionamos mediante métodos de Runge-Kutta el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (A1.5) descrito anteriormente, con la corrección propuesta (A1.9). Primero se utilizó el método usual de tercer orden, para luego utilizar un método IMEX (Ascher et al. 1997; Pareschi & Russo 2005), en particular el llamado IMEX-SSP3(4,3,3) L-estable, definido en Pareschi & Russo (2005). Para la discretización espacial usamos operadores definidos por Mattsson & Parisi (2010), los cuales son de diferencia finita y aproximan la derivada segunda. Además comparamos estos últimos con el uso de operadores en derivada primera aplicados dos veces (Lehner et al. 2005; Strand 1994; Diener P. & Tiglio 2007). Esto último debido a que en algunos sistemas donde aparecen términos fuera de la diagonal en el Laplaciano, o aparecen términos de menor orden, puede ser deseable utilizar un solo operador por cada derivada. Luego comparamos los resultados obtenidos mediante estos métodos con la evolución obtenida utilizando un método estándar de primer orden *SAT* (A1.8).

Los resultados de estos estudios se presentan en la siguiente sección.

### A1.3. Pruebas numéricas

En esta sección presentamos las pruebas realizadas a nuestro método mediante la realización de simulaciones en una y dos dimensiones. Para el caso unidimensional todas las corridas fueron realizadas en un círculo de longitud 2, es decir en un dominio definido sobre el intervalo  $[0, 2]$ , donde el último punto de la malla se identifica con el primero. Para las simulaciones bidimensionales el dominio es la superficie de un toro que consiste de un intervalo cuadrado de tamaño  $2 \times 2$ , donde los bordes en  $x = 0$  e  $y = 0$  se identifican con los bordes a  $x = 2$  e  $y = 2$ , respectivamente. Este caso por simplicidad, una de las interfases, la correspondiente a la dirección  $y$ , fue tratada usando penalidades, mientras que para la dirección  $x$  se utilizaron operadores periódicos. En todas las corridas, el número de puntos del mallado y el orden de los operadores de diferencias finitas empleados garantizan una suficiente resolución para los casos donde la solución tenga componentes de alta frecuencia. En este trabajo apuntamos a una resolución cercana a una parte en  $10^3$  para 10 periodos. Esta resolución resulta suficiente para mantener la fase sin error apreciable por alrededor de 10 tiempos de cruce de interfase.

### Conjunto de datos iniciales

Con el objetivo de analizar la convergencia numérica resulta suficiente elegir un dato inicial suave. Luego, hemos elegido el siguiente dato inicial unidimensional:

$$\Phi_0(x) := 4^{12} x^{12} (x - 1)^{12},$$

$$\Pi_0(x) := \partial_x \Phi_0(x).$$

Por otro lado, con el propósito de comparar simulaciones realistas y analizar cómo el método mantiene la fase de la solución, tomamos el siguiente dato inicial unidimensional altamente variable:

$$\Phi_0(x) := e^{-8^2(x-0.5)^2} \cos(50\pi x),$$

$$\Pi_0(x) := \partial_x \Phi_0(x),$$

el cual corresponde a un pulso que se propaga hacia la izquierda del dominio de cómputo.

En el caso bidimensional, el dato inicial altamente variable adoptado es el siguiente:

$$\Phi_0(x, y) := e^{-8^2((x-1.5)^2 + (y-1.5)^2)} \cos(50\pi(y - x)),$$

$$\Pi_0(x, y) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_x \Phi_0(x, y) - \partial_y \Phi_0(x, y)).$$

### Discretización espacial

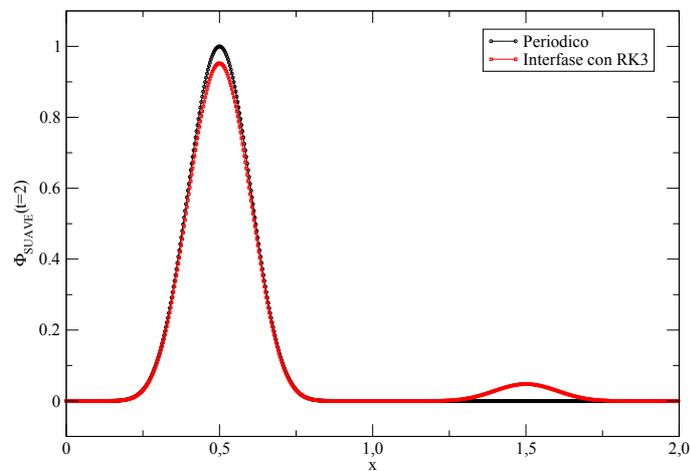
Como se ha mencionado, realizamos corridas en base a tres elecciones diferentes de discretización del espacio, como así también de integradores temporales. Para los operadores espaciales comparamos los resultados entre:

- Reducción tradicional de primer orden con bordes tratados a través de la técnica *SAT*.
- Formulación de segundo orden con un operador de derivada segunda  $D_2$ .
- Formulación de segundo orden donde el operador de la derivada segunda es aproximado mediante doble aplicación de un operador  $D$  de derivada primera (es decir  $D^2$ ).

En todas las corridas, usamos un operador muy preciso de diferencias finitas, en particular el operador en derivada primera adoptado es un operador optimizado de orden ocho en el interior y de orden cuatro en los puntos del borde (Lehner et al. 2005; Strand 1994; Diener P. & Tiglio 2007). De aquí en adelante nos referiremos a este último como el operador 8-4. El operador de derivada segunda es de orden ocho en el interior y de orden seis en el borde (Mattsson & Parisi 2010). Este operador tiene asociado otro de primer orden que es utilizado para las contribuciones en el borde. Ambos operadores, así como el operador 8-4, satisfacen suma por partes. La elección de estos operadores fue realizada con el objeto de preservar la fase correcta de la solución en las corridas extendidas en el tiempo, buscando también ser capaces de comprobar la contribución del error proveniente de los términos de interacción, con la menor interferencia posible de la contribución al error proveniente de las discretizaciones en derivada.

### Integración temporal

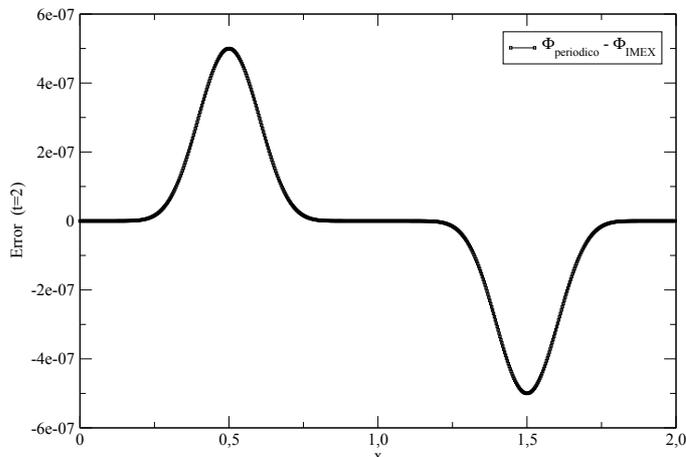
Como se mencionó anteriormente usamos dos integradores temporales, uno el tradicional Runge–Kutta de tercer orden y el otro tipo IMEX. La necesidad de un esquema tipo IMEX surge del hecho que el factor de interacción requiere tomar valores muy altos, y por lo tanto *stiff*, con el fin de alcanzar la suficiente precisión. Para mostrar esto presentamos una corrida con dato inicial suave y con un factor de interacción  $L = \frac{1}{\sigma_0 dx}$ . Las corridas en la presente sección fueron realizadas en una red numérica con una resolución dada por 640 puntos, con un paso temporal  $dt = 2.5 \times 10^{-5}$  (CFL = 0.008). En la figura A1.1, mostramos el resultado de las aproximaciones periódicas y de interfase. El pico extra a la derecha en el gráfico, es el rebote de una fracción de la solución en la interfase.



**Fig. A1.1:** Comparación de corridas realizadas con condiciones de borde periódicas y de interfase usando un integrador tradicional Runge–Kutta de 3<sup>er</sup> orden. El factor de interacción es  $L = 10 * dx^{-1}$ .

Es posible reducir el error a cantidades muy pequeñas mediante el aumento del factor de interacción, pero esto se realiza a expensas de perder eficiencia, dado que el paso temporal requerido por el esquema tradicional de Runge–Kutta se vuelve significativamente pequeño, para cumplir con la estabilidad. De hecho observamos que los errores bajan a valores muy pequeños para un factor de interacción mil veces mayor (con el problema de que el paso temporal requerido resulta miles de veces menor). Ver figura A1.2. A fin de evitar pasos temporales pequeños, a la vez que se permiten valores grandes de  $L$ , se necesita utilizar un método semi-implícito. Este método es del tipo IMEX (Ascher et al. 1997; Pareschi & Russo 2005), específicamente el esquema L-estable IMEX-SSP3(4,3,3) descrito en Pareschi & Russo (2005). Estos métodos nos permite resolver implícitamente los términos *stiff* de las ecuaciones mientras mantenemos los otros términos de la manera usual en un esquema tradicional de tipo Runge–Kutta. De aquí en adelante todas las corridas realizadas con el nuevo método de interfase, para la versión de segundo orden de la ecuación de onda, son integradas temporalmente con el método IMEX mencionado en el párrafo anterior. Por otro lado para todas las corridas realizadas con el método *SAT* (basadas necesariamente en la versión de primer orden de la ecuación de onda) y periódicas, se utilizó un integrador tradicional Runge–Kutta de tercer orden. Debe notarse que el único término que necesita ser tratado implícitamente

con el método IMEX es aquel que es proporcional a  $L$ , es decir sólo el último término de borde en (A1.9).



**Fig. A1.2:** Error de la corrida con interfase (es decir la diferencia con la corrida periódica). Se ha utilizado un integrador temporal de Runge–Kutta con un factor de interacción de  $L = 10^6 * dx^{-1}$ .

## Convergencia

En ausencia del término de interacción, esperamos que el error sea de la forma  $e = f_1 dt^p + f_2 dx^q$ , donde  $p$  depende del integrador temporal usado y  $q$  de la discretización espacial de las derivadas.

La tasa de convergencia se calcula como:

$$Q = \ln \left( \frac{\|\Phi^{(h)} - \Phi^{(h/2)}\|_{L_2}}{\|\Phi^{(h/2)} - \Phi^{(h/4)}\|_{L_2}} \right) / \ln(2), \quad (\text{A1.10})$$

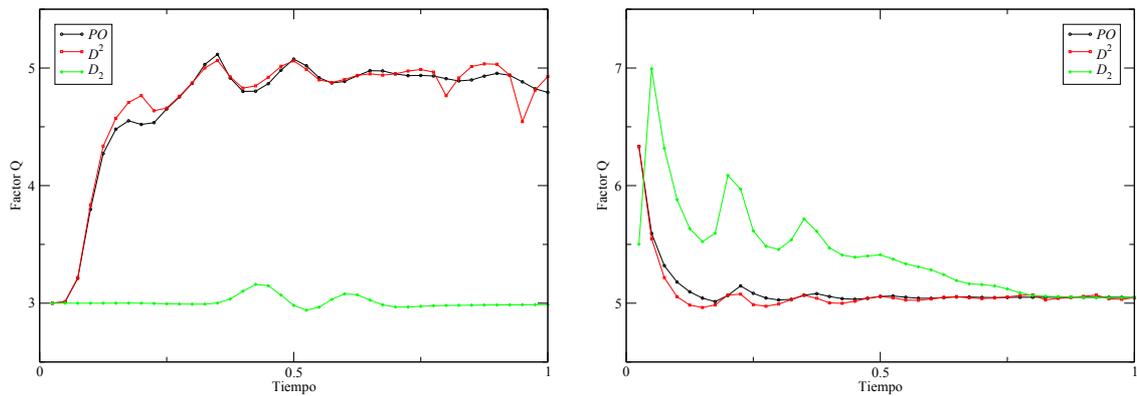
donde  $\Phi^{(h_i)}$  es la resolución numérica con un espaciado en la red  $h_i$ .

En nuestro caso esperamos  $p \geq 3$  para el algoritmo IMEX. El valor preciso depende de la naturaleza de la solución, en particular el tamaño de la solución cerca del borde (donde se usa la parte implícita del algoritmo) en comparación con el tamaño de la solución en el interior de la malla. Asimismo se espera un valor  $q \geq 5$  dado que las derivadas usadas son de cuarto orden en los bordes y de octavo en el interior. Por razones de estabilidad, la condición CFL en el integrador explícito es tal que necesitamos escalar  $dt$  como  $dx$ , de manera de esperar un índice de convergencia alrededor de tres. Alternativamente, podríamos fijar un  $dt$  suficientemente pequeño, aumentando también la resolución espacial, lo cual nos permite estudiar de manera independiente la convergencia espacial. En este caso esperaríamos un índice de convergencia alrededor de cinco. Cualquier factor de convergencia menor resultaría del tratamiento de la interfase.

Para la mayoría de las pruebas de convergencia hemos usado datos iniciales muy suaves, dado que las funciones  $f_1$  y  $f_2$  dependen de derivadas de alto orden de la solución exacta. Comenzamos por analizar la convergencia del método para el caso 1D, con corridas de 640, 1280 y 2560 puntos con dato inicial suave. Para el tratamiento de primer orden y la formulación de segundo orden  $D^2$  vemos en la figura A1.3 que el factor de convergencia comienza en un valor de 3 mientras el pulso está en el interior, manteniendo un

CFL constante de 0.08. Esto significa que la contribución principal al error proviene de la discretización temporal. Con el tiempo la solución alcanza el borde, el factor  $Q$  se incrementa hasta  $\sim 5$ , lo que implica que allí la discretización espacial es la fuente primaria de contribución al error. Para el caso de segundo orden  $D_2$ , la convergencia se mantiene constante alrededor de 3. Esto implica que durante la corrida entera la contribución al error por parte del operador de derivación es despreciable.

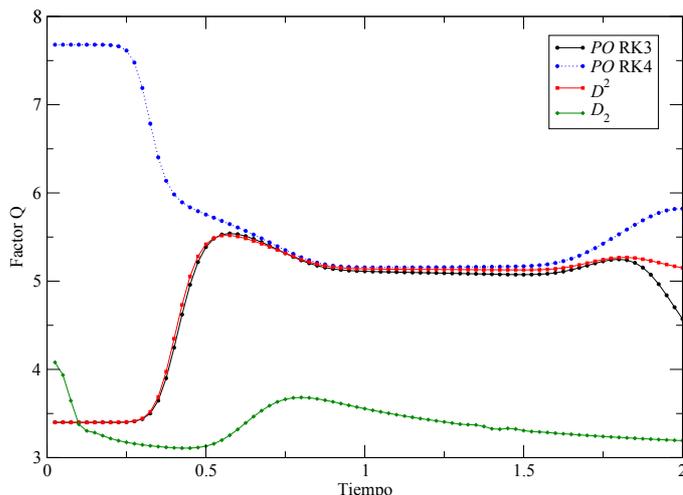
Por otro lado, para valores fijos de  $dt = 2.5 \times 10^{-5}$ , observamos que durante toda la corrida el error es dominado por los operadores espaciales. El factor de convergencia inicia en valores altos, cercanos a 8, durante el intervalo en el que el pulso no alcanza aún el borde, para decaer luego a 5 una vez que alcanza el borde.



**Fig. A1.3:** Gráfico comparativo del factor de convergencia para un sistema 1D entre una formulación de primer orden  $PO$ , una formulación de segundo orden que utiliza  $D^2$  y una formulación de segundo orden utilizando  $D_2$ . En el panel de la izquierda se mantiene fijo el CFL, mientras que en el de la derecha se fija  $dt$ .

Para el caso 2D, hemos realizado corridas de  $640 \times 640$ ,  $1280 \times 1280$  y  $2560 \times 2560$  puntos con un dato inicial no suave. En la figura A1.4 observamos un comportamiento similar al del caso unidimensional. Antes de que las ondas alcancen el borde la convergencia es dominada por la discretización temporal con un factor  $Q$  cercano a tres. Esto se da para todas las discretizaciones que utilizan integradores Runge–Kutta de tercer orden ya sea convencional o IMEX. Un vez que el pulso alcanza la interfase el valor de  $Q$  aumenta a  $\sim 5$ , en este caso la discretización espacial es el principal contribuyente al error. A fin de realizar comparaciones, se corrieron integraciones utilizando un método de Runge–Kutta de cuarto orden para el sistema de primer orden. En este caso observamos que en el interior la convergencia se mejora, comenzando cerca de 8. En este caso el integrador temporal es más preciso y por ende la discretización espacial se torna más importante. Cuando el pulso se encuentra con el borde obtenemos nuevamente factores  $Q$  alrededor de 5.

La convergencia sola no es suficiente para garantizar que nos acercamos a la solución correcta. Esto se debe a que nuestro sistema no es consistente a priori. Es decir, en principio el límite de nuestro esquema de diferencias finitas no necesita coincidir con la ecuación continua, debido a que los términos de borde



**Fig. A1.4:** Gráfico comparativo del factor de convergencia para el sistema 2D con un CFL fijo en 0.08. Se muestra formulaciones de primer orden  $PO$ , y de segundo orden utilizando los operadores  $D^2$  y  $D_2$

crecen con la resolución. Luego se hace necesario analizar la convergencia con la solución verdadera. Esto se lleva a cabo en la siguiente sección.

## Precisión

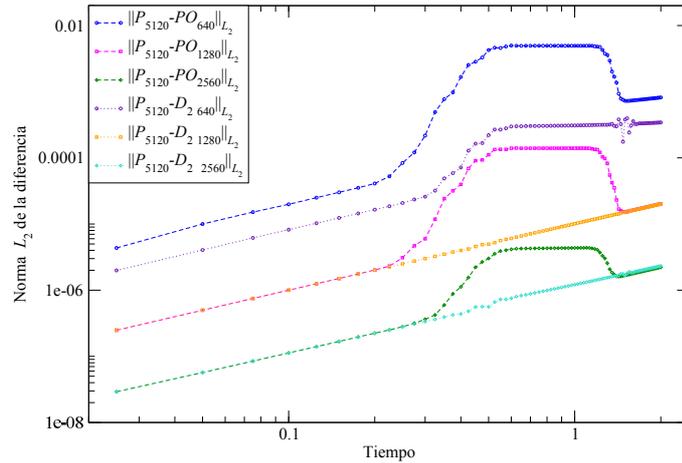
En esta sección comparamos los métodos sobre datos realistas, es decir con las condiciones iniciales no suaves dadas anteriormente. Esto se lleva a cabo tanto para el caso 1D como 2D.

Para el caso unidimensional evolucionamos la solución hasta  $t = 2.0$ . En este punto la solución se ha movido a la izquierda y el pulso a pasado completamente a través de la interfase localizada en  $x = 0$ . En el caso bidimensional un pulso es enviado en una dirección oblicua a la interfase con el objeto de verificar si el esquema preserva la fase correcta de la onda en este caso y no introduce, por ejemplo, un rebote extra.

Por comparación realizamos una corrida con condiciones de borde periódicas, con operadores en diferencias finitas centradas de octavo orden, con  $N = 5120$  o  $5120 \times 5120$  para los casos 1D y 2D, respectivamente. En ambos casos nos referiremos a estas corridas como  $P_{5120}$ . Estas corridas fueron utilizadas como soluciones de referencia para comparar con las demás. Para estas últimas simulaciones, las condiciones de interfase fueron usadas con  $N = 640, 1280$  y  $2560$  puntos ya sea para el sistema de primer orden como el de segundo (denotadas con  $PO_{640}, PO_{1280}, PO_{2560}$  and  $D_{2\ 640}, D_{2\ 1280}, D_{2\ 2560}$  respectivamente). Asimismo, para el sistema de segundo orden realizamos simulaciones usando tanto el operador  $D^2$  como el  $D_2$ , a fin de aproximar la derivada segunda en el lado derecho de la ecuación. Todas las corridas fueron realizadas con un factor de interacción de  $10^6 * dx^{-1}$  manteniendo el factor CFL constante (0.08).

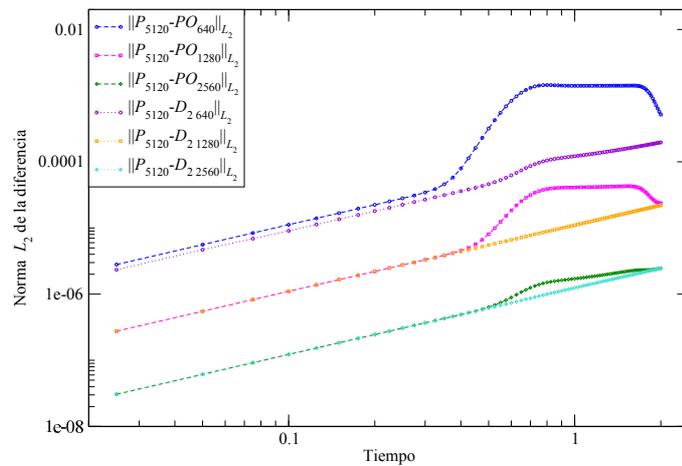
En la figura A1.5 se presenta una comparación de la norma  $L_2$  del error para los dos casos diferentes tenidos en consideración: el sistema estándar de primer orden con un integrador temporal Runge–Kutta de tercer orden y nuestro sistema de segundo orden con un operador  $D_2$  que utiliza el esquema IMEX-

SSP3(4,3,3)  $L$ -estable. Cabe destacar que antes de que el pulso halla llegado a la interfase, ambos métodos resultan comparables, pero a medida que la onda se aproxima y pasa a través del borde, la solución obtenida mediante nuestro método de segundo orden aumenta la precisión de la solución por lo menos en un orden de magnitud. Esto muestra que el tratamiento de la interfase propuesto en este anexo compite muy bien con un esquema tradicional de tipo *SAT*.



**Fig. A1.5:** Norma  $L_2$  del error para las diferentes corridas realizadas en 1D.

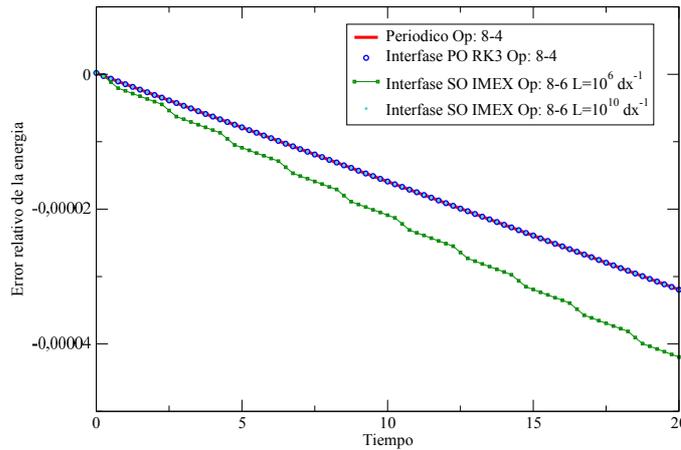
Asimismo se observa el mismo comportamiento para el caso bidimensional, esto se muestra en la figura A1.6. Aquí nuevamente nuestro método y el estándar tipo *SAT* se comportan de manera similar en el interior de la región, mientras que el primer método resulta superior al *SAT* cuando el pulso alcanza la interfase.



**Fig. A1.6:** Norma  $L_2$  del error para las diferentes corridas realizadas en 2D.

### Decaimiento de la energía

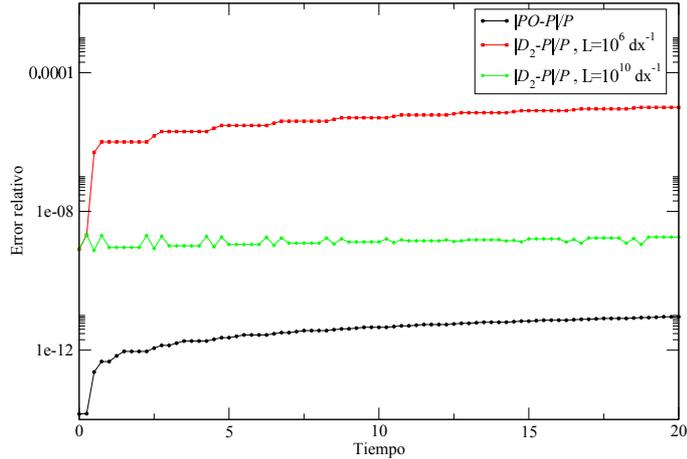
El esquema aquí presentado es decreciente en energía en el nivel de aproximación semi-discreto. Esto implica que si se utiliza un integrador temporal estable con un paso temporal suficientemente pequeño, la energía dada por (A1.4) debería decrecer sólo a la tasa dada por el término de penalidad, con el agregado quizás notable de la disipación inherente del integrador temporal. En esta sección estudiamos este decaimiento, mostrando que en realidad es muy pequeño como podría inferirse de la precisión hallada para esquema.



**Fig. A1.7:** Error relativo del decaimiento de energía para un dato inicial no suave en cuatro diferentes escenarios: condiciones de borde periódicas, *SAT* tradicional de primer orden y nuestro esquema de segundo orden con el operador  $D_2$  para dos elecciones del factor de interacción  $L$ .

La figura A1.7 muestra el comportamiento del error relativo en la energía para dos corridas largas, más precisamente con una duración diez veces mayor a las previas. Estas corridas se realizaron con un valor fijo de CFL de 0.08, y una resolución dada por 5120 puntos en la red numérica. Como se esperaba el decaimiento es muy pequeño, y mejora considerablemente para valores grandes del factor de interacción. Para un valor de  $L = 10^6 * dx^{-1}$  la energía decae a una tasa mayor que a la obtenida con un esquema de primer orden tipo *SAT*, el cual coincide con el decaimiento obtenido mediante un tratamiento periódico. Sin embargo, si aumentamos el valor de  $L$ , el decaimiento se aproxima al periódico, y si tomamos  $L = 10^{10} * dx^{-1}$  los tres decaimientos (periódico, *PO-SAT*, y *SO*) resultan indistinguibles. Luego la mayor parte del decaimiento se debe a los integradores Runge-Kutta utilizados, y ambos, tanto el estándar de tercer orden como el IMEX, parecen presentar la misma disipación inherente del método.

Finalmente, en la figura A1.8 presentamos el error relativo de la energía comparada con la solución periódica, es decir  $(E - E_{per})/E_{per}$ . El objeto de esta comparación es dar cuenta sólo del decaimiento asociado al método en cuestión. En este gráfico puede verse que el método de primer orden es uno de los que mejor aproxima a la energía periódica, mientras nuestro método de segundo orden se desvía. Esta diferencia sin embargo disminuye si tomamos valores grandes de  $L$ , mostrando una vez más que cuanto mayor sea el factor de interacción, mejor será el ajuste del método propuesto a la solución.



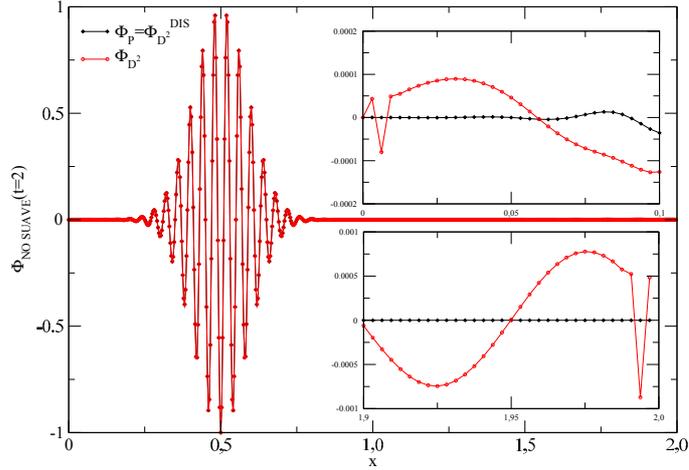
**Fig. A1.8:** Error relativo en la energía, comparando con la solución periódica. El dato inicial es no suave y se evoluciona según tres escenarios: método tradicional *SAT* de primer orden y nuestro esquema de segundo orden utilizando  $D_2$  para dos elecciones del factor de interacción  $L$ .

## Disipación

Es importante notar que, para todas las corridas realizadas hasta ahora, no resultó necesario introducir ninguna forma de disipación artificial. Esto se debe a que hemos considerado un problema lineal a coeficientes constantes y por lo tanto no existió ruido introducido por los modos de alta frecuencia.

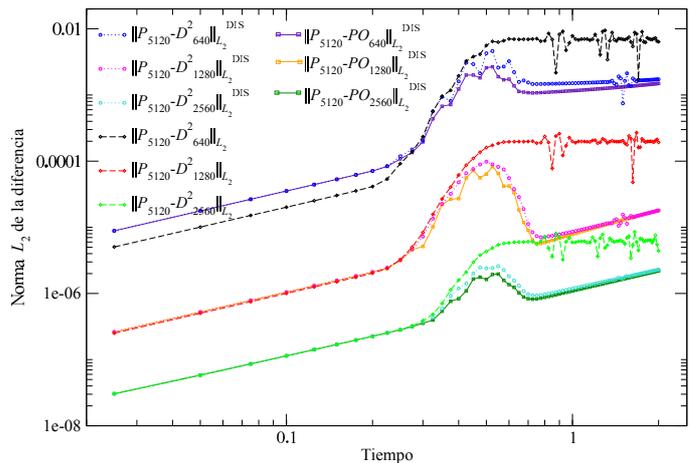
Sin embargo, para otras elecciones de los operadores espaciales, o si estamos tratando con una ecuación no-lineal, o si se tienen coeficientes no constantes, podemos encontrar oscilaciones de alta frecuencia alrededor de la solución correcta. Como un ejemplo de esto usamos el esquema  $D^2$ , en vez del  $D_2$  utilizado antes, para evolucionar el dato inicial no suave. Vemos en la figura A1.9 que la utilización de este operador introduce algo de ruido numérico en la solución, desmejorando su calidad. Notamos además que la solución sin disipación es casi indistinguible excepto cerca de la interfase, donde hemos incluido una ampliación del sector para mostrar mejor el desacuerdo. Vemos que este ruido desaparece si se utiliza disipación de Kreiss–Olinger (Gustafsson et al. 1995), es decir mediante la adición a las ecuaciones de un término proporcional a una potencia grande del operador de Laplace. Este término contiene un factor que depende de la resolución de manera tal de hacer que el error producido por la adición de este término, sea el mismo o de menor orden que el resto de los términos en la aproximación. En particular utilizamos aquel que corresponde a la precisión que estamos usando para los operadores de diferencias finitas (Kreiss & Olinger 1973; Lehner et al. 2005; Diener P. & Tiglio 2007), concretamente, una disipación de la octava derivada  $Q_d = -\sigma dx^9 \Delta^4$ , donde  $\Delta$  es un operador de diferencias finitas que aproxima al Laplaciano en el primer orden de precisión. Las corridas usadas para esta comparación se realizaron con una resolución dada por 640 puntos con un CFL fijo en 0.08, y  $\sigma = 100$ .

La figura A1.10 muestra la norma  $L_2$  del error obtenido mediante el uso del operador  $D^2$  con y sin disipación, así como también el error para el sistema *PO* con disipación. Hemos calculado el error



**Fig. A1.9:** Comparación de la solución a  $t = 2$  usando un operador espacial  $D^2$  con y sin disipación en referencia a la solución periódica.

mediante la comparación con una corrida periódica con 5120 puntos y corridas de interfase con 640, 1280 y 2560 puntos en el mallado. Esto fue llevado a cabo manteniendo el factor CFL fijo en 0.08, y mediante el uso de un factor de interacción de  $10^6 * dx^{-1}$ . Vemos que la adición del término disipativo mejora la precisión en uno o dos órdenes de magnitud. Los errores calculados con disipación ya sea para sistemas  $PO$  o  $SO$  son prácticamente iguales. Además mediante la comparación con la figura A1.6, vemos que los errores para los métodos  $D^2$  y  $PO$  con disipación resultan similares a los calculados con el operador de segundo orden  $D_2$ . Luego podemos concluir que los métodos que utilizan disipación resultan competitivos con la discretización  $D_2$ .



**Fig. A1.10:** Comportamiento del error relativo en la norma  $L_2$  para corridas con el operador  $D^2$  con y sin disipación.

### A1.4. Aplicaciones

Como una aplicación de nuestro método en una ecuación con coeficientes variables, consideramos un problema simple unidimensional de relatividad numérica. Mediante nuestro método buscamos una solución de las ecuaciones de Einstein linealizadas alrededor de un gauge ondulatorio de fondo. El elemento de línea para este problema viene dado por (Tiglio et al. 2004):

$$ds^2 = e^{A \operatorname{sen}(\pi(x-t))}(-dt^2 + dx^2) + dy^2 + dz^2. \quad (\text{A1.11})$$

Este fondo describe un espacio tiempo plano, en el cual se ha realizado una transformación de coordenadas en el plano  $(t, x)$ , con una dependencia sinusoidal en  $t-x$ . Este problema con gauge ondulatorio nos provee de una aplicación simple y a la vez no trivial como prueba numérica. La amplitud de los coeficientes de la ecuación lineal puede ser controlada mediante el ajuste del parámetro  $A$  y la solución no desarrolla ningún tipo de singularidades. Esta prueba difiere de las desarrolladas a lo largo de este anexo en el hecho de que los coeficientes dependen tanto del espacio como del tiempo.

Existen muchos trabajos en la literatura que tratan sobre este problema (Lehner et al. 2005; Tiglio et al. 2004; Calabrese et al. 2002; Alcubierre et al. 2004). La mayoría de los trabajos usan un método que involucra una formulación de primer orden con condiciones de borde periódicas, con la excepción del trabajo de Lehner et al. (2005), quienes utilizan cierto tratamiento en el borde. Por otro lado, existen estudios previos de este problema con un esquema de segundo orden (Szilágyi et al. 2005; Babiuc et al. 2006). Uno de los aspectos que estos trabajos presentan es el crecimiento exponencial y la pérdida de convergencia en la solución para amplitudes grandes.

En esta sección vamos a aplicar el método que desarrollamos para analizar el problema descrito en los párrafos anteriores. Utilizamos el mismo enfoque que Lehner et al. (2005), en el cual se introducen perturbaciones de (A1.11) en las ecuaciones de Einstein con el objeto de derivar ecuaciones de evolución linealizadas para los campos. En nuestro caso sólo estamos interesados en la estabilidad del método a medida que las ondas atraviesan la interfase.

Las variables no triviales para este problema son las componentes relevantes de la métrica y su derivada temporal  $(g_{xx}, K_{xx})$ , además del intervalo  $\alpha$ . Por lo tanto consideramos perturbaciones de la forma:

$$\begin{aligned} g_{xx} &= e^{A \operatorname{sen}(\pi(x-t))} + \delta g_{xx} \\ K_{xx} &= \frac{A}{2} \cos(\pi(x-t)) e^{\frac{A}{2} \cos(\pi(x-t))} + \delta K_{xx} \\ \alpha &= e^{\frac{A}{2} \operatorname{sen}(\pi(x-t))} + \delta \alpha. \end{aligned} \quad (\text{A1.12})$$

Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &= \Pi + A\pi \cos(\pi(x-t)), \\ \partial_t \Pi &= \frac{1}{\hat{\alpha}} \partial_x (\hat{\alpha} \partial_x \Phi) - \frac{1}{2} \left( A\pi^2 \operatorname{sen}(\pi(x-t)) + \frac{A^2 \pi^2}{2} \cos^2(\pi(x-t)) \right) \Phi \\ &\quad - \frac{1}{2} A\pi \cos(\pi(x-t)) \Pi, \end{aligned}$$

donde  $\hat{\alpha} = e^{\frac{A}{2} \operatorname{sen}(\pi(x-t))}$ ,  $\Phi = \delta \alpha / \hat{\alpha}$  y  $\Pi = \delta K_{xx}$ .

Hemos realizado varias corridas y comparamos los resultados para dos formalismos de segundo orden como los tratados en las secciones previas. Más precisamente utilizamos el operador en derivada primera aplicado dos veces ( $D^2$ ) y el operador en derivada segunda ( $D_2$ ). La semi-discretización del término en

derivada segunda de la ecuación (A1.13) toma por lo tanto la forma:

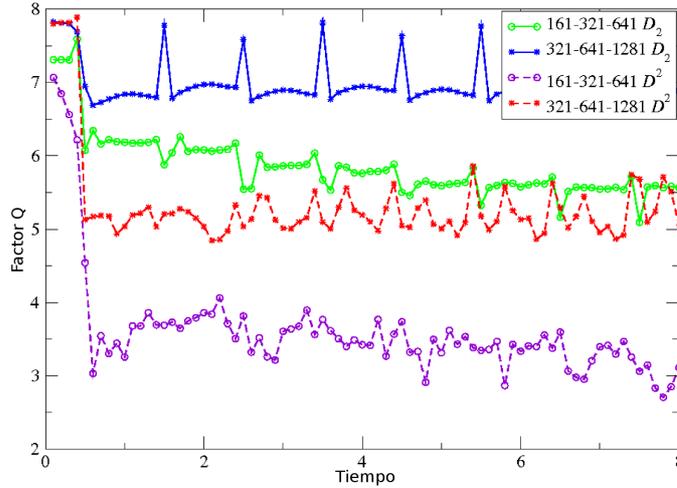
$$\partial_x(\hat{\alpha}\partial_x\Phi) \sim D(\hat{\alpha}D\Phi) \quad (\text{A1.13})$$

para el caso  $D^2$ . Para el caso del operador  $D_2$  separamos la derivada segunda como:

$$\partial_x(\hat{\alpha}\partial_x\Phi) \sim \hat{\alpha}D_2\Phi + (\partial_x\hat{\alpha})D_1\Phi \quad (\text{A1.14})$$

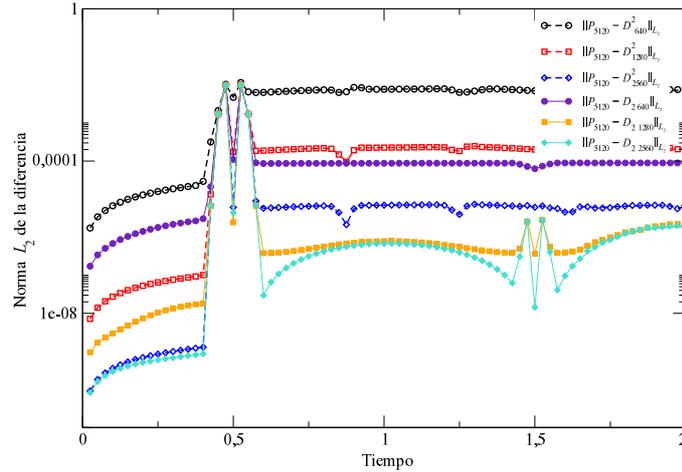
donde la derivada de  $\hat{\alpha}$  se calcula analíticamente, y  $D_1$  y  $D_2$  son operadores de diferencias finitas completamente compatibles con las aproximaciones de las derivadas primera y segunda, respectivamente (Mattsson & Parisi 2010). En las figuras A1.11 y A1.12 mostramos el factor de convergencia y la norma  $L_2$  del error para los dos casos considerados. Estas corridas se realizaron en el intervalo  $[-1, 1]$ , utilizando una amplitud de 0.5, CFL de 0.01, y condiciones iniciales suaves:

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &:= 100^{12} (x + 0.6)^{12} (x + 0.4)^{12}, \\ \Pi_0(x) &:= \partial_x\Phi_0(x). \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$



**Fig. A1.11:** Factor de convergencia para dos resoluciones diferentes de los formalismos  $D^2$  y  $D_2$ .

Para todas las corridas, excepto para el caso  $D^2$  de resolución más baja, los factores de convergencia oscilan entre los valores esperados de 8 y 5, de manera consistente con el orden de los operadores en diferencias finitas usados. La norma  $L_2$  del error muestra nuevamente que la formulación  $D_2$  tiene menor error en comparación con el caso  $D^2$  para todas las resoluciones consideradas. Esto ilustra el desempeño superior del método que presentamos incluso en el caso de coeficientes variables, lo cual abre un rango muy amplio de aplicaciones para este método.



**Fig. A1.12:** Norma  $L_2$  del error para varias resoluciones para las dos formulaciones de segundo orden.

## A1.5. Conclusiones

Hemos mostrado que es posible implementar un esquema de interfase basado en penalidades para ecuaciones de onda de segundo orden. Este método es similar a los usados para ecuaciones de primer orden hiperbólicas y parabólicas. El nuevo esquema presentado comparte propiedades similares con los esquemas previos: sólo se requiere comunicar entre redes numéricas los datos en los puntos de la interfase, la convergencia está asegurada para sistemas lineales con coeficientes constantes. Asimismo el esquema se aplica muy bien a un problema con coeficientes no constantes, más concretamente el problema de perturbaciones sobre un gauge ondulatorio de fondo. La precisión del método parece ser tan buena como la precisión dada por los operadores en diferencias finitas y el integrador temporal usado, compitiendo de manera favorable con los esquemas usuales de primer orden *SAT* para todos los casos que hemos analizado.

Debe notarse que para la ecuación de onda  $n$ -dimensional debe comunicarse en la interfase  $n + 1$  cantidades, concretamente las derivadas espaciales y temporales de los campos, mientras que en nuestro caso sólo se necesita comunicar los valores de la derivada temporal. Esto resulta de especial importancia en paralelizaciones de multi-bloque, ya que nuestro método posee una calidad equivalente al del esquema *SAT* pero la información intercambiada entre los bloques es sosteniblemente menor. Esto mejorará considerablemente las propiedades de escalabilidad de cómputos basados en el fraccionamiento del cálculo en multi-bloques con comunicaciones. Por ejemplo programas que utilicen la librería *MPI*, *Message Passing Interface*, en sistemas de computadoras conectadas en red, que distribuyan diferentes mallados a diferentes procesos de *MPI*. En este caso la manera tradicional de implementación consiste en comunicar en el borde entre mallados todo el *stencil* necesario para calcular las diferencias finitas usando operadores centrados. La precisión de nuestro método implica que puede simplemente comunicarse los valores de los campos en la vecindad del mallado en cuestión, ganando en la escalabilidad de estos programas.

Dado que la información comunicada a través de la interfase consiste de una derivada temporal, esta

se comporta como un campo escalar con respecto a cambios de coordenadas espaciales <sup>1</sup>. Luego, sus valores a ambos lados del mallado, en caso de tener dos mallados con diferentes sistemas de coordenadas, deben identificarse sin cambio alguno. En contraste, cuando se utilizan esquemas tradicionales *SAT* y se comunican derivadas espaciales de los campos, se requiere una transformación de coordenadas para el caso genérico de dos regiones con coordenadas diferentes. Luego, puede decirse que en estos casos, el nuevo esquema deriva en una implementación más simple y con menos cómputo. Más aún, en situaciones no triviales el método *SAT* requiere el cómputo de los modos entrantes en los puntos del borde para imponer penalidades correctas, en casos donde el sistema de ecuaciones de onda son cuasi-lineales, como por ejemplo el caso de la relatividad general. Esta tarea es muy costosa en tiempo de cómputo, lo cual puede evitarse en el presente esquema.

Este nuevo método no sólo se limita a sistemas de segundo orden; dadas las ideas subyacentes en su desarrollo puede ser aplicado a muchos casos de interés. En particular puede ser extendido para el caso general de un sistema en primer orden simétrico hiperbólico. En un trabajo futuro consideraremos este caso.

<sup>1</sup> Esto es por supuesto cierto en el caso de cantidades escalares. En el caso que el sistema con el que se esté tratando consista de ecuaciones de onda en cantidades tensoriales, algunas de las transformaciones de coordenadas son inviables para las interfaces.

**BIBLIOGRAFÍA**

- Alcubierre, M., Allen, G., Bona, C., et al. 2004, *Classical and Quantum Gravity*, 21, 589
- Ascher, U. M., Ruuth, S. J., & Spiteri, R. J. 1997, *Applied Numerical Mathematics*, 25, 151 , special Issue on Time Integration
- Babiuc, M. C., Szilágyi, B., & Winicour, J. 2006, *PHYS. REV. D*, 73, 064017
- Calabrese, G., Pullin, J., Sarbach, O., & Tiglio, M. 2002, *PHYS. REV. D*, 66, 064011
- Carpenter, M. H. Nordström, J. and Gottlieb, D. 1999, *Journal of Computational Physics*, 148, 341
- Diener P., Dorband, E. N. S. E. & Tiglio, M. 2007, *J. Sci. Comput.*, 32, 109
- Gustafsson, B., Kreiss, H.-O., & Olinger, J. 1995, *Time Dependent Problems and Difference Methods* (New York: Wiley)
- Kreiss, H. & Olinger, J. 1973, *GARP Publication Series*, 10
- Kreiss, H.-O. & Scherer, G. 1977, *Tech. Rep. Dept. of Scientific Computing, Uppsala University*
- Lehner, L., Reula, O., & Tiglio, M. 2005, *Class. Quant. Grav.*, 22, 5283
- Mattsson, K. & Nordstrom, J. 2004, *J. Comput. Phys.*, 199, 503
- Mattsson, K. & Parisi, F. 2010, *Commun. Comput. Phys.*, 7, 103
- Pareschi, L. & Russo, G. 2005, *Journal of Scientific Computing*, 25, 129, 10.1007/s10915-004-4636-4
- Reula, O. A. 2011, *ArXiv e-prints*
- Strand, B. 1994, *Journal of Computational Physics*, 110, 47
- Szilágyi, B., Kreiss, H.-O., & Winicour, J. 2005, *PHYS. REV. D*, 71, 104035
- Tiglio, M., Lehner, L., & Neilsen, D. 2004, *PHYS. REV. D*, 70, 104018



# Descomposición característica de modos MHD

En este apéndice se detallan la descomposición de modos MHD. Se encuentran las velocidades características de estas ondas, y los autovectores asociados correspondientes.

### B1.1. Descomposición característica

En este apéndice retomamos el análisis de las características del sistema MHD ideal acoplado al campo de la limpieza de la divergencia (una discusión relacionada a la ausencia de este campo puede encontrarse en Pennisi (1993), Balsara (2001)).

Usando la descomposición en partes normales ( $X_n$ ) y tangenciales ( $\tilde{X}_i$ ) al contorno, y definiendo  $d := \sigma + v_n$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
d\bar{\rho} &= -\rho\bar{v}_n, \\
d\bar{v}_n &= 2B_n/\rho\bar{B}_n - 1/\rho B_j\bar{B}_j - 1/\rho\bar{p}, \\
d\bar{B}_n &= v_n\bar{B}_n + \bar{\phi}, \\
d\bar{p} &= -c_s^2\rho\bar{v}_n - (\gamma - 1)Bv\bar{B}_n + (1 - \gamma)B_n\bar{\phi}, \\
dB\bar{v} &= B^2/\rho\bar{B}_n - B_n/\rho\bar{p}, \\
dB\bar{B} &= Bv\bar{B}_n - B^2\bar{v}_n + B_nB\bar{v} + B_n\bar{\phi}, \\
d\bar{\tilde{v}}_i &= \bar{B}_i/\rho\bar{B}_n + B_n/\rho\bar{\tilde{B}}_i, \\
d\bar{\tilde{B}}_i &= \bar{v}_i\bar{B}_n - \bar{B}_i\bar{v}_n + B_n\bar{\tilde{v}}_i, \\
\sigma\bar{\phi} &= c_l\bar{B}_n.
\end{aligned} \tag{B1.1}$$

Para una mayor claridad, se presenta la solución del problema de autovalores/autovectores en diferentes casos según el comportamiento de los modos.

#### Base

#### Modos normales

Estos corresponden a  $\bar{B}_n = \bar{\phi} = 0$ , donde las ecuaciones se transforman en:

$$\begin{aligned}
d\bar{\rho} &= -\rho\bar{v}_n, \\
d\bar{v}_n &= -B\bar{B}/\rho - \bar{p}/\rho, \\
d\bar{p} &= -c_s^2\rho\bar{v}_n, \\
dB\bar{v} &= -(B_n/\rho)\bar{p}, \\
dB\bar{B} &= -B^2\bar{v}_n + B_nB\bar{v}, \\
d\bar{\tilde{v}}_i &= (B_n/\rho)\bar{\tilde{B}}_i, \\
d\bar{\tilde{B}}_i &= -\bar{B}_i\bar{v}_n + B_n\bar{\tilde{v}}_i.
\end{aligned} \tag{B1.2}$$

Un autovalor posible es  $d = 0$ . En este caso el primer autovector está dado por:

$$U_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \tag{B1.3}$$

donde las entradas de  $U$  son:  $U = (\bar{\rho}, \bar{v}_n, \bar{\tilde{v}}_i, \bar{B}_n, \bar{\tilde{B}}_i, \bar{p}, \bar{\phi})$ . Usando todas las ecuaciones obtenemos las condiciones para los autovalores:

$$d^4 - (c_s^2 + B^2/\rho)d^2 + c_s^2B_n^2/\rho = 0. \tag{B1.4}$$

Desde la cual obtenemos cuatro soluciones:

$$\begin{aligned}
d_{p\pm} &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left((c_s^2 + B^2/\rho) + \sqrt{(c_s^2 + B^2/\rho)^2 - 4(B_n^2/\rho)c_s^2}\right)} \\
d_{m\pm} &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left((c_s^2 + B^2/\rho) - \sqrt{(c_s^2 + B^2/\rho)^2 - 4(B_n^2/\rho)c_s^2}\right)}.
\end{aligned} \tag{B1.5}$$

Notar que cuando  $B^2 \rightarrow 0$  la solución  $d_p$  tiende a  $\pm c_s$ , mientras que  $d_m \rightarrow 0$  como  $\|B_n\|/\sqrt{\rho}$ . Las soluciones  $d_p$  tienden a soluciones de fluido mientras que  $d_m$  tiende a soluciones puramente magnéticas. Por lo tanto en este límite, las soluciones se ven desacopladas. Debemos elegir la normalización de los autovectores de manera tal que se refleje este comportamiento. Para las soluciones  $d_p$  elegimos  $\bar{v}_n = 1$ , y usamos las dos últimas ecuaciones para calcular el campo magnético normal y la velocidad normal, obteniendo:

$$UP_{\pm} = \left( \mp \frac{\rho}{d_p}, 1, -\frac{B_n}{R_p \rho} \tilde{B}_i, 0, \mp \frac{d_p}{R_p} \tilde{B}_i, \mp \frac{c_s^2 \rho}{d_p}, 0 \right), \quad (\text{B1.6})$$

donde  $R_p := d_p^2 - B_n^2/\rho$ , tiene un límite finito cuando  $B^2 \rightarrow 0$ .

Para las soluciones  $d_m$  procedemos al revés, fijamos  $B\bar{B} = B_i \bar{\tilde{B}}_i = B_i M_i$ , donde  $M_i = \bar{\tilde{B}}_i$  y así calculamos  $\bar{v}_n$ , y  $\bar{p}$  de la segunda y tercera ecuación del sistema (B1.2), obteniendo:

$$UM_{\pm} = \left( \frac{B\bar{B}}{R_m}, \mp \frac{d_m B\bar{B}}{R_m \rho}, \pm \frac{B_n}{\rho d_m} M_i, 0, M_i, \frac{c_s^2 B\bar{B}}{R_m}, 0 \right), \quad (\text{B1.7})$$

donde  $R_m := d_m^2 - c_s^2$  tiene un límite finito cuando  $B^2 \rightarrow 0$ .

En dos dimensiones estos son todos los pares de autovalores/autovectores en el sector normal.

En tres dimensiones podemos elegir  $\bar{\tilde{B}}_i = M_i$  perpendicular a  $\tilde{B}_i$  tal que  $B\bar{B} = \tilde{B}_i \bar{\tilde{B}}^i = 0$ . En ese caso todas las otras componentes se anulan excepto la velocidad tangencial:  $\tilde{v}_i = d_a/B_n A_i$  con  $\vec{A} = (-\tilde{B}_2, \tilde{B}_1)/|\tilde{B}|$  y  $d_{a\pm} = \pm B_n/\sqrt{\rho}$ . El correspondiente autovector es:

$$UA_{\pm} = \left( 0, 0, \pm \frac{d_a}{B_n} A_i, 0, A_i, 0, 0 \right). \quad (\text{B1.8})$$

### Modos $\phi$

Ahora miremos los modos que son inducidos por la introducción del campo  $\phi$ . De la tercer y última ecuación de (B1.1) tenemos un sistema  $2 \times 2$  que implica que:  $\sigma = \pm c_l$  y así,  $d := d_l = \pm c_l - v_n$ . Si fijamos  $\bar{B}_n = b$  podemos obtener componentes escalares resolviendo el siguiente subsistema de (B1.1):

$$\begin{aligned} d_l \bar{v}_n + B\bar{B}/\rho + \bar{p}/\rho &= 2(B_n/\rho)b, \\ c_s^2 \rho \bar{v}_n + \bar{p} d_l &= (-\gamma - 1)Bv + (1 - \gamma)\sigma B_n b, \\ -B^2 \bar{v}_n - d_l B\bar{B} + B_n B\bar{v} &= -(B_n \sigma + Bv)b, \\ (B_n/\rho)\bar{p} + d_l B\bar{v} &= (B^2/\rho)b. \end{aligned} \quad (\text{B1.9})$$

Desde este subsistema obtenemos:

$$\begin{aligned} \bar{v}_n &= \frac{-(d_l^2 - B_n^2/\rho)F_2 + d_l^2 F_3 + d_l \rho (d_l^2 F_1 - (B_n/\rho)F_4)}{\delta_l}, \\ \bar{p} &= \frac{-c_s^2 \rho \bar{v}_n + F_2}{d_l}, \end{aligned} \quad (\text{B1.10})$$

donde:

$$\begin{aligned} \delta_l &= \rho(d_l^4 - d_l^2(c_s^2 + B^2/\rho) + c_s^2 B_n^2/\rho), \\ F_1 &= \frac{2B_n b}{\rho}, \\ F_2 &= (1 - \gamma)(Bv + B_n \frac{c_l^2}{\sigma})b, \\ F_3 &= -\frac{F_2}{1 - \gamma}, \\ F_4 &= \frac{B^2 b}{\rho}. \end{aligned}$$

Una vez que tenemos  $\bar{v}_n$  podemos resolver las componentes vectoriales del sistema:

$$\begin{aligned} d_l \tilde{v}_i - (B_n/\rho)\bar{\tilde{B}}_i &= \tilde{B}_i b/\rho, \\ d_l \bar{\tilde{B}}_i - B_n \tilde{v}_i &= \tilde{v}_i b - \bar{\tilde{B}}_i \bar{v}_n, \end{aligned} \quad (\text{B1.11})$$

obteniendo:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_i &= \frac{\tilde{v}_i b B_n / \rho + \tilde{B}_i (d_l b - \tilde{v}_n B_n) / \rho}{\delta_s}, \\ \tilde{B}_i &= \frac{\tilde{v}_i d_l b + \tilde{B}_i (-d_l \tilde{v}_n + b B_n^2 / \rho)}{\delta_s},\end{aligned}\tag{B1.12}$$

donde  $\delta_s := d_l^2 - B_n^2 / \rho$ . Combinando los pasos intermedios realizados obtenemos,

$$UL_{\pm} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{d_l} \tilde{v}_n \\ \left[ -\left( d_l^2 - \frac{B_n^2}{\rho} \right) F_2 + d_l^2 F_3 + d_l \rho \left( d_l^2 F_1 - \frac{B_n F_4}{\rho} \right) \right] / \delta_l \\ \left[ \frac{\tilde{v}_i b B_n}{\rho} + \tilde{B}_i \frac{d_l b - \tilde{v}_n B_n}{\rho} \right] / \delta_s \\ b \\ \left[ \tilde{v}_i d_l b + \tilde{B}_i \left( -d_l \tilde{v}_n + \frac{b B_n}{\rho} \right) \right] / \delta_s \\ \frac{F_2 - c_s^2 \rho \tilde{v}_n}{d_l} \\ \frac{c_l}{\sigma} \end{pmatrix}.\tag{B1.13}$$

### Co-base

Ahora calculamos la co-base para construir un proyector adecuado que haga cumplir las diferentes condiciones de contorno. Como en el análisis previo, dividimos por simplicidad la tarea a lo largo de los diferentes autovalores.

- $\Theta_0$

Ya que  $U_0$  tiene solamente una componente no nula (la primera), todos los elementos de la co-base (excepto el correspondiente a  $U_0$ ), tendrán su primer componente igual a cero. El primer elemento es simplemente:

$$\Theta_0 = (1, 0, 0, A, 0, -1/c_s^2, B).\tag{B1.14}$$

Para encontrar los elementos restantes  $A$  y  $B$ , notemos que si definimos:  $VP := (UL_+ + UL_-)$  y  $VM := (UL_+ - UL_-)$ , el primero tiene un cero en la última componente (correspondiente a  $\bar{\phi}$ ) mientras que el segundo tiene un cero en la cuarta componente (correspondiente a  $\bar{B}_n$ ). Así la contracción de  $\Theta_0$  con  $VP$  y  $VM$  dejará solamente a  $A$  o  $B$  como incógnitas. De la contracción obtenemos entonces:

$$\begin{aligned}A &= \frac{-\Theta_0(VP)}{2b}, \\ B &= \frac{-\Theta_0(VM)}{2bc_l},\end{aligned}\tag{B1.15}$$

donde fijamos temporalmente  $A$  y  $B$  a cero en  $\Theta_0$ .

- $\Theta P_{\pm}$

De  $\Theta P_{\pm}(UM_+ - UM_-) = 0$  y  $\Theta P_{\pm}(UM_+ + UM_-) = 0$  obtenemos la siguiente estructura:

$$\Theta P_{\pm} = \left( 0, C, C \frac{d_m^2 \tilde{B}_i}{B_n R_m}, D_{\pm}, \frac{-E_{\pm} c_s^2 \tilde{B}_i}{R_m}, E_{\pm}, F_{\pm} \right).\tag{B1.16}$$

Ahora, de  $1 = \Theta P_{\pm}(UP_+ + UP_-)$  obtenemos:

$$C = \frac{R_p R_m}{2(R_p R_m - d_m^2 \tilde{B}^2 / \rho)} \quad (\text{El mismo para ambos}).\tag{B1.17}$$

Mientras que de  $\pm 1 = \Theta P_{\pm}(UP_+ - UP_-)$  deducimos

$$E_{\pm} = \frac{\pm R_p R_m d_p}{2 c_s^2 (d_p^2 \tilde{B}^2 - \rho R_p R_m)}. \quad (\text{B1.18})$$

Las restantes dos componentes pueden calcularse usando  $VP$  y  $VM$  como se obtuvo anteriormente:

$$\begin{aligned} D_{\pm} &= \frac{-\Theta P_{\pm}(VP)}{2b}, \\ F_{\pm} &= \frac{-\Theta P_{\pm}(VM)}{2bc_l}, \end{aligned} \quad (\text{B1.19})$$

habiendo elegido  $D$  y  $F$  a cero en  $\Theta P_{\pm}$ .

- $\Theta M_{\pm}$

De  $\Theta M_{\pm}(UP_+ - UP_-) = 0$  y  $\Theta M_{\pm}(UP_+ UP_-) = 0$  obtenemos la siguiente estructura:

$$\Theta M_{\pm} = \left( 0, \frac{B_n \tilde{B}_i N_{i\pm}}{\rho R_p}, N_{i\pm}, S_{\pm}, L_i, \frac{-d_p^2 \tilde{B}_i L_i}{c_s^2 R_p \rho}, T_{\pm} \right). \quad (\text{B1.20})$$

De  $1 = \Theta M_{\pm}(UM_+ + UM_-)$  obtenemos:

$$L_i = -\frac{R_m R_p M_i}{2(\tilde{B}^2 d_p^2 / \rho - R_m R_p)}. \quad (\text{B1.21})$$

De  $\pm 1 = \Theta M_{\pm}(UM_+ - UM_-)$  obtenemos:

$$N_{\pm}^i = \mp \frac{d_m R_m R_p M_i}{2B_n / \rho (\tilde{B}^2 d_m^2 / \rho - R_m R_p)}. \quad (\text{B1.22})$$

Las dos componentes restantes  $S$  y  $T$  se calculan como el caso anterior, usando  $VP$  y  $VM$ , removiendo la componente  $\bar{B}_n$  y la última componente  $\bar{\phi}$  en  $\Theta M_{\pm}$ . Obtenemos,

$$\begin{aligned} S_{\pm} &= \frac{-\Theta M_{\pm}(VP)}{2b}, \\ T_{\pm} &= \frac{-\Theta M_{\pm}(VM)}{2bc_l}. \end{aligned} \quad (\text{B1.23})$$

- $\Theta A_{\pm}$

Obtenemos el co-vector de  $UA$  por cálculo directo:

$$\Theta A_{\pm} = \left( 0, 0, \pm \frac{B_n A_i}{2d_a}, G_{\pm}, \frac{A_i}{2}, 0, H_{\pm} \right), \quad (\text{B1.24})$$

donde las componentes,  $G$  y  $H$  están dadas por:

$$\begin{aligned} G_{\pm} &= \frac{-\Theta A_{\pm}(VP)}{2b}, \\ H_{\pm} &= \frac{-\Theta A_{\pm}(VM)}{2bc_l}, \end{aligned} \quad (\text{B1.25})$$

removiendo las componentes  $\bar{B}_n$  y  $\bar{\phi}$  en  $\Theta A_{\pm}$ .

- $\Theta L_{\pm}$

Queda ahora determinar los dos últimos elementos. Ya que los primeros siete autovectores expanden

completamente el espacio 7-dimensional dado por  $\bar{B}_n = \bar{\phi} = 0$  los co-vectores tienen sólo componentes en ese subespacio y están dados por:

$$\Theta L_{\pm} = \left( 0, 0, 0, \frac{1}{2b}, 0, 0, \frac{\pm 1}{2bc_l} \right). \quad (\text{B1.26})$$

### Puntos singulares

La estructura característica esbozada anteriormente puede cambiar si los autovalores cambian su multiplicidad para valores particulares de los campos. Estos casos especiales requieren un análisis adicional.

Recordemos que los autovalores están dados por:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= -v_n \\ \sigma_P^+ &= d_p - v_n \\ \sigma_P^- &= -d_p - v_n \\ \sigma_M^+ &= d_m - v_n \\ \sigma_M^- &= -d_m - v_n \\ \sigma_A^+ &= d_a - v_n \\ \sigma_A^- &= -d_a - v_n \\ \sigma_L^+ &= c_l \\ \sigma_L^- &= -c_l, \end{aligned}$$

y pueden cruzarse cuando  $d_p = 0$ ,  $v_n = \pm c_l$ ,  $d_m = 0$  y  $d_p = d_m$ . Los primeros dos casos se producirían en escenarios físicamente irrelevantes. Por ejemplo, el primer caso implica que la velocidad del sonido es nula, y no sería considerado si se quiere tratar con un fluido. El segundo caso se podría evitar simplemente tomando  $c_l$  suficientemente grande. Por lo tanto, nos concentraremos en los otros dos casos:

- $d_m = 0$

Para esto necesitamos que

$$\left( c_s^2 + \frac{B^2}{\rho} \right)^2 = \left( c_s^2 + \frac{B^2}{\rho} \right)^2 - 4c_s^2 \frac{B_n^2}{\rho} \quad (\text{B1.27})$$

lo cual sólo ocurre cuando  $B_n = 0$ . Cercano a estos puntos tenemos,

$$d_m^2 = \frac{c_s^2 B_n^2}{\rho c_s^2 + B^2}. \quad (\text{B1.28})$$

En este punto calculamos explícitamente el autoespacio para los autovalores coincidentes y elegimos los autovectores con un buen límite. Fueron usados en una vecindad lo suficientemente pequeña de este punto usando una declaración condicional en el código para cada punto del contorno.

En tres dimensiones, en este caso, también  $d_a$  se vuelve nulo, por lo que los autovectores  $UM_{\pm}$  y  $UA_{\pm}$  son degenerados.

- $d_m = d_p$

Para que esto pase necesitamos

$$0 = (d_p^2 - d_m^2)^2 = \left(c_s^2 + \frac{B^2}{\rho}\right)^2 - 4c_s^2 B_n^2 = \left(c_s^2 - \frac{B_n^2}{\rho}\right)^2 + 2c_s^2 \frac{\tilde{B}_i^2}{\rho} + \frac{\tilde{B}_i^4}{\rho^2}. \quad (\text{B1.29})$$

Así  $B_n^2/\rho = c_s^2$  y  $\tilde{B}_i = 0$ . Notemos que en este caso tenemos  $R_p = R_m = 0$ . Procedemos en una manera similar a la anterior. Notamos que cuando los autovalores coinciden todo lo que entra en la condición de contorno es el proyector sobre ese subespacio, por lo que uno sólo tiene que elegir los autovectores tal que numéricamente ese proyector sea robusto en una vecindad pequeña.

En el caso de tres dimensiones,  $d_a^2 = B_n^2/\rho$ . Por consiguiente,  $d_a = d_m = d_p$  y los autovectores  $UP_{\pm}$ ,  $UM_{\pm}$  y  $UA_{\pm}$  se vuelven degenerados.



## Tratamiento de Fourier de modos MHD

En este apéndice se describe el procedimiento realizado para reconocer modos MHD a partir de la descomposición de perturbaciones de las soluciones de la MHD sobre un fondo constante.

### B2.1. Tratamiento de Fourier de modos MHD

La solución de las ecuaciones de la MHD, en general se puede aproximar de la forma

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_0 + \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (\text{B2.1})$$

donde  $\vec{u} = (\rho, v_n, \tilde{v}_i, B_n, \tilde{B}_i, p, \phi)^T$  como vimos en el Apéndice B1.1,  $\vec{u}_0$  son los valores de fondo constante, y  $\vec{u}$  son pequeñas perturbaciones. Aplicando esta aproximación a las ecuaciones diferenciales, nos queda un sistema de ecuaciones hiperbólicas de la forma  $\vec{u}_t + A\vec{u}_{\vec{x}} = 0$  donde  $\vec{u} = (\bar{\rho}, \bar{v}_n, \bar{v}_i, \bar{B}_n, \bar{B}_i, \bar{p}, \bar{\phi})^T$  es el vector perturbación,  $A = A(\vec{u}_0)$  es la matriz (3.10). Dado que las ecuaciones son hiperbólicas,  $A$  es diagonalizable, por lo que existe un  $R$  tal que  $R^{-1}AR = \Lambda$  con  $\Lambda$  una matriz diagonal cuyas componentes están dadas por las velocidades  $\lambda_j$  con  $j = 1..9$ . Dada la existencia de  $R$ , podemos definir un nuevo conjunto de variables  $\vec{W}$  tal que  $\vec{W} = R^{-1}\vec{u}$ . De esta forma, queda el siguiente sistema de 9 ecuaciones desacopladas  $\vec{W}_t + A\vec{W}_{\vec{x}} = 0$ . Entonces la solución queda de la forma:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^9 \bar{w}_j(\vec{x}, t) \vec{r}^{(j)}, \quad (\text{B2.2})$$

donde  $\bar{w}_j$  son las componentes del vector  $\vec{W}$ :  $(\bar{w}_j)_t + \lambda_j(\bar{w}_j)_{\vec{x}} = 0$  siendo  $\lambda_j$  la velocidad de propagación de la onda  $j$ . Los autovectores  $\vec{r}^{(j)}$  componen la matriz  $R$ . Dado un dato inicial (que denotaremos con un supraíndice (0)),  $\bar{w}_j(\vec{x}, t) = \bar{w}_j^{(0)} \left( \frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{x} - \lambda_j t \right)$  para algún  $k$  real. En particular, elegimos  $\bar{w}_j(\vec{x}, t) = e^{i(\omega_j t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$  con  $\omega_j$  la frecuencia temporal de la onda  $j$  y  $\vec{k}$  el vector número de onda.

Dada  $\omega_j$  y  $k$ , obtenemos la velocidad  $\lambda_j$  con la que se propaga la onda  $j$ . Las velocidades  $\lambda_j$  de los modos magnetoacústicos vienden dadas por

$$\begin{aligned} d_{p\pm} &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( (c_s^2 + B^2/\rho) + \sqrt{(c_s^2 + B^2/\rho)^2 - 4(B_k^2/\rho)c_s^2} \right)} \\ d_{m\pm} &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( (c_s^2 + B^2/\rho) - \sqrt{(c_s^2 + B^2/\rho)^2 - 4(B_k^2/\rho)c_s^2} \right)} \\ d_{a\pm} &= \pm B_k / \sqrt{\rho} \end{aligned} \quad (\text{B2.3})$$

con  $d_p$  la velocidad del modo magnetoacústico rápido ( $p$  del signo más *-plus-* dentro de la raíz) y  $d_m$  ( $m$  del signo menos *-minus-* dentro de la raíz) del modo lento y  $d_a$  la velocidad del modo de Alfvén. El subíndice  $k$  denota la dirección de propagación;  $c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  es la velocidad del sonido y  $v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu \rho}}$  la velocidad de Alfvén. Los autovectores  $\vec{r}^{(j)}$ , son los descritos en la ecuaciones (B1.6), (B1.7) y (B1.8). Estos autovectores dependen funcionalmente de la solución numérica encontrada, es decir  $\vec{r}^{(j)}(\vec{u})$ . Luego la solución más general, abarcando todos los posibles  $k$  es

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^9 \left( \iiint A_j(k) e^{i(\omega_j t - \vec{k} \cdot \vec{x})} d^3 k \right) \vec{r}^{(j)}. \quad (\text{B2.4})$$

Por otro lado, podemos escribir la solución como superposición de infinitas ondas de Fourier:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \vec{u}(\nu, \vec{x}) e^{i\nu t}. \quad (\text{B2.5})$$

Dado un punto espacial, realizamos la transformada de Fourier temporal de cada una de las componentes de  $\vec{u}(\vec{x}_{pt0}, t)$ . Al realizar estas transformadas de Fourier, si la oscilación tiene frecuencias características,

estas aportarán significativamente a la suma infinita sobre frecuencias, despreciando las demás frecuencias. Dada la igualdad de (B2.4) y (B2.5), sabemos entonces que dada una onda con una frecuencia  $\nu$ , esta debe corresponderse a una de las ondas MHD caracterizada por  $\omega_j$ . Dado que no tenemos el peso de Fourier  $A_j(k)$ , para encontrar si hay correspondencia entre una onda con frecuencia  $\nu$  y un modo con frecuencia  $\omega_j$ , realizamos cocientes entre las componentes de  $\vec{u}(\nu, \vec{x})$  y los comparamos con los respectivos cocientes entre las componentes del autovector  $\vec{r}^{(j)}$ . De esta manera, si los cocientes son similares, hemos encontrado que esa frecuencia  $\nu$  se corresponde con un modo de frecuencia  $\omega_j$ . Más concretamente, se realiza el siguiente procedimiento: se hace una inspección en los resultados numéricos de las posibles direcciones de propagación y se propone un  $\vec{k}_0$ . Luego, se utilizan las relaciones de dispersión de las ondas compresibles (1.29) rápidas y lentas, y la de las incompresibles (1.28) y se encuentran las frecuencias correspondientes ( $\omega_{dp}$ ,  $\omega_{dm}$ ,  $\omega_{da}$ ). Las velocidades de Alfvén y la del sonido, se obtienen de un promedio temporal en el punto espacial ( $\vec{x}_{pto}$ ) donde se realiza la TF. Luego, se compara con las frecuencias características de la TF. Si por ejemplo, una frecuencia característica tiene el valor  $\nu_{dp}$ , y este es similar a la frecuencia perteneciente a la velocidad de un modo magnetoacústico rápido,  $\omega_{dp}$ , luego se hacen los cocientes del autovector que corresponde a esta velocidad ( $\vec{r}^{(1)} = UP$ ), y los cocientes de las magnitudes de Fourier de la frecuencia  $\nu_{dp}$  ( $\vec{u}(\nu_{dp}, \vec{x}_{pto})$ ). Se igualan los términos proporcionales a  $e^{i\omega_{dp}t}$  y a  $e^{i\nu_{dp}t}$ . Por ejemplo, al tomar la primer componente y hacer el cociente con la octava componente de (B2.4):

$$\frac{A_1(k_0)e^{-i(\vec{k}_0 \cdot \vec{x})}r_1^1}{A_1(k_0)e^{-i(\vec{k}_0 \cdot \vec{x})}r_8^1} = \frac{r_1^1}{r_8^1} = \frac{UP_1}{UP_8}$$

y de (B2.5)

$$\frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_8}$$

y así con las demás componentes. De esta manera, si  $\left(\frac{UP_1}{UP_8}, \frac{UP_2}{UP_8}, \frac{UP_3}{UP_8}, \frac{UP_4}{UP_8}, \frac{UP_5}{UP_8}, \frac{UP_6}{UP_8}, \frac{UP_7}{UP_8}, \frac{UP_8}{UP_8}, \frac{UP_9}{UP_8}\right) \approx \left(\frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_8}, \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_8}, \frac{\hat{u}_3}{\hat{u}_8}, \frac{\hat{u}_4}{\hat{u}_8}, \frac{\hat{u}_5}{\hat{u}_8}, \frac{\hat{u}_6}{\hat{u}_8}, \frac{\hat{u}_7}{\hat{u}_8}, \frac{\hat{u}_8}{\hat{u}_8}, \frac{\hat{u}_9}{\hat{u}_8}\right)$ , hemos encontrado que se está propagando una onda magnetoacústica rápida en la dirección  $\vec{k}_0$  con una velocidad  $d_p$  a una frecuencia temporal  $\nu_{dp}$ .