

# **Estudio de la formación de mapas visuales mediante el uso de modelos neuronales bidimensionales**

por Lic. Carolina B.Tauro

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctora en Física de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

Septiembre, 2012

©FaMAF - UNC 2012

Director: Dr. Francisco A.Tamarit

Co-Director: Dr. Pablo Gleiser



## Pacs

05, 05.45.Xt, 05.65.+b, 05.70.-a, 84.35.+i, 87.18.-h, 89.75.-k, 89.75.Kd, 64.60.-i, 64.60.De, 60.60.My

## Palabras clave

Redes complejas, embebido en un espacio euclídeo, ley de potencias, red libre de escala, red de mundo pequeño, sincronización, sistema visual del cerebro de los mamíferos, formación de patrones de preferencia orientacional, modelo, redes neuronales, sistemas complejos, topografía.

## Resumen

Existen muchos ejemplos de sistemas reales representados por redes de interacciones que presentan comportamientos complejos, siendo redes libre de escala y de mundo pequeño. Además, se encuentran inmersos o embebidos en un espacio euclídeo de baja dimensión, característica que es generalmente ignorada en los modelos de redes complejas. En esta Tesis analizamos el rol que juega la topografía de la red de interacciones de un sistema complejo, con el objetivo de desarrollar un modelo para la formación de patrones de preferencia orientacional que se observan en la corteza visual del cerebro de los mamíferos. Para lograr esto, estudiaremos distintos modelos de la física estadística de sistemas complejos, añadiéndoles las propiedades de la complejidad y del embebido, verificando nuevos y ricos comportamientos no observados antes.



*A Ger, con todo mi amor y cariño...*



*How can the universe start with a few type of elementary particles at the big bang, and end up with life, history, economics, and literature?*

Per Bak

*Life is what happens to you while you're busy making other plans.*

Jonh Lennon





---

## Resumen

Son muchos los ejemplos de sistemas naturales y artificiales que presentan comportamientos globales complejos, a pesar de estar generalmente compuestos por unidades relativamente simples. El origen de esta complejidad global reside en las intrincadas redes de interacciones entre sus unidades. Hoy sabemos que muchas de estas redes presentan propiedades topológicas muy particulares pero a la vez universales: por un lado el histograma de la conectividad por unidad sigue una ley de potencia (son redes libre de escala); por otro lado, en tanto que el camino libre medio entre unidades es relativamente corto, el índice de aglomeración o *clustering* es inusualmente alto (son redes de mundo pequeño). Es por ello que durante la última década la comunidad de la mecánica estadística ha puesto mucho empeño en describir las propiedades topológicas de estas redes buscando cualidades universales, en generar modelos realistas que den cuenta de su evolución y crecimiento, e incluso en estudiar el comportamiento de los más variados modelos físico-estadísticos cuando las interacciones están sustentadas por redes de este tipo.

Un aspecto distintivo de la mayoría de los sistemas reales es que se encuentran inmersos en un espacio euclídeo, en donde es posible localizar espacialmente a sus constituyentes y en donde vale la noción usual de distancia entre ellos. En términos topográficos, decimos que están *embebidos* en un espacio euclídeo de baja dimensión. Sin embargo, casi todos los modelos de redes libres de escala y mundo pequeño no consideran la distancia entre unidades a la hora de modelarlas. Ésta es una simplificación que muchas veces está muy lejos de adecuarse a la realidad, pues son muchos los ejemplos de sistemas naturales y artificiales en los cuales la distancia euclídea entre unidades juega un rol importante tanto durante el desarrollo de la red como en su funcionamiento.

En esta tesis analizamos precisamente el rol que juega la topografía de la red de interacciones de un sistema complejo. Para ello hemos realizado un estudio sobre redes complejas embebidas en un espacio euclídeo de baja dimensión, investigando qué efectos producen estas características en ciertos modelos emblemáticos de la física estadística de sistemas complejos, agregándoles un grado de complejidad que no tenían originalmente. Utilizamos un método de embebido de redes complejas para generar versiones embebidas de un modelo unidimensional de rotadores (el modelo HMF), de un modelo neuronal bidimensional para la memoria asociativa (el modelo de Hopfield), y finalmente analizamos un modelo bidimensional de neuronas que son capaces de sincronizarse mutuamente (el modelo de Kuramoto) para dar lugar a estructuras espacio-temporales cualitativamente similares a los patrones de preferencia orientacional observados en la corteza visual del cerebro de los mamíferos. Hemos podido observar en todos los casos que tanto la topología compleja como el embebido en un espacio euclídeo generan nuevos y ricos comportamientos. En especial, es posible reproducir los patrones observados en la corteza visual con un modelo que resulta más plausible desde el punto de vista biológico.



---

## Abstract

There many examples of systems, both natural and artificial, which present complex global behaviors even though they are composed by relatively simple units. The origin of such a global complexity resides on the intricate interaction networks among their units. Nowadays we know that many of these networks have particular, but at the same time universal, topological properties: on the one hand the connectivity per unit histogram is a power law (scale free network); on the other hand, although the mean free path between units is relatively short, the clustering is unusually large (small world network). That is why during the last decade the statistical mechanics community has put attention on describing the topological properties of these networks in order to find out universal qualities, generating more realistic models that take into account their development and evolution, and even studying the behavior of a variety of models whose interactions are ruled by these kind of networks.

One distinctive feature of real systems is that they are embedded in an euclidean space, where it is possible to spatially localize their constituents, and where the usual notion of distance between units is valid. In topographic terms, these systems are embedded in a low dimensional euclidean space. However, most of the scale free and small world models do not take into account the distance between units. In many cases this simplification is not realistic, and there are a lot of examples of natural and artificial systems in which the euclidean distance play a fundamental role in both the development and the performance of the network.

In this Thesis we analyze precisely the role of the topography of the interaction network in a complex system. For this purpose we have made an analysis of complex networks embedded in a low dimensional euclidean space, investigating the effects produced in certain emblematic complex systems models in the area of statistical physics, adding them a degree of complexity they originally did not take into account. We use a complex network embedding method in order to generate new embedded version of a unidimensional Hamiltonian Mean Field Model (the HMF), a bidimensional neural model for associative memory (the Hopfield model), and finally we analyze a bidimensional model of neurons which are able to synchronize (the Kuramoto model) and give spatio-temporal structures qualitatively similar to the patterns of orientational preference observed in the visual cortex of mammals. We observed in all these cases that both, complex topology and the embedding in an euclidean space, generate new and rich behaviors.



---

## Índice general

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Motivación e Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. Motivación . . . . .   | 1         |
| 1.2. Introducción . . . . .   | 3         |
| 1.3. Conceptos y definiciones . . . . .                                     | 7         |
| 1.3.1. Clasificación de las redes según la arquitectura de sus conexiones . | 8         |
| 1.4. El método de embebido de redes complejas . . . . .                     | 9         |
| 1.5. Resultados numéricos . . . . .   | 13        |
| 1.5.1. Distribución de grados . . . . .                                     | 14        |
| 1.5.2. Estructura espacial . . . . .  | 15        |
| 1.6. Conclusiones del capítulo . . . . .                                    | 17        |
| <br>  |           |
| <b>2. El modelo Hamiltoniano de Campo Medio (HMF)</b>                       | <b>19</b> |
| 2.1. Introducción . . . . .   | 19        |
| 2.2. Descripción del modelo HMF . . . . .                                   | 20        |
| 2.3. Solución exacta en el ensamble canónico . . . . .                      | 22        |
| 2.4. Propiedades Dinámicas . . . . .  | 26        |
| 2.5. La hipótesis topológica . . . . .                                      | 29        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 2.5.1.    | Estructura topológica del modelo HMF . . . . .  | 31        |
| 2.5.2.    | Una explicación topológica para los estados casi-estacionarios del modelo HMF . . . . . | 34        |
| 2.5.3.    | Resultados numéricos . . . . .  | 36        |
| 2.6.      | Conclusiones del capítulo . . . . .   | 40        |
| <b>3.</b> | <b>El modelo HMF definido en una red compleja</b>                                       | <b>43</b> |
| 3.1.      | Introducción . . . . .  | 43        |
| 3.2.      | El modelo HMF Embebido . . . . .  | 44        |
| 3.3.      | Resultados numéricos . . . . .  | 45        |
| 3.3.1.    | El equilibrio termodinámico . . . . .   | 46        |
| 3.3.2.    | Comportamiento fuera del equilibrio . . . . .   | 50        |
| 3.4.      | Conclusiones del capítulo . . . . .   | 53        |
| <b>4.</b> | <b>El modelo de Hopfield</b>  | <b>55</b> |
| 4.1.      | Introducción . . . . .  | 55        |
| 4.2.      | Desde las neuronas hasta las redes neuronales . . . . .                                 | 56        |
| 4.2.1.    | Las neuronas de McCulloch y Pitts . . . . .   | 58        |
| 4.2.2.    | La memoria asociativa . . . . .   | 60        |
| 4.3.      | Descripción del modelo de Hopfield . . . . .  | 61        |
| 4.3.1.    | La capacidad de almacenamiento del modelo de Hopfield . . . . .                         | 62        |
| 4.3.2.    | Variaciones del modelo de Hopfield con dilución asimétrica . . . . .                    | 65        |
| 4.4.      | El modelo Hopfield embebido en una red compleja . . . . .                               | 68        |
| 4.5.      | Resultados numéricos . . . . .  | 70        |
| 4.5.1.    | La conectividad media . . . . .   | 71        |
| 4.5.2.    | La capacidad de almacenamiento . . . . .  | 72        |
| 4.5.3.    | Comparación con otros modelos . . . . .   | 74        |
| 4.6.      | Conclusiones del capítulo . . . . .   | 77        |
| <b>5.</b> | <b>Introducción al fenómeno de la sincronización</b>                                    | <b>79</b> |

|   |            |
|---|------------|
| 5.1. Introducción . . . . .   | 79         |
| 5.2. Definiendo la sincronización . . . . .   | 80         |
| 5.3. Un poco de historia: de Wiener a Kuramoto . . . . .  | 82         |
| 5.4. El modelo de Kuramoto . . . . .  | 83         |
| 5.4.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .   | 83         |
| 5.4.2. El parámetro de orden . . . . .  | 84         |
| 5.5. Resultados analíticos y numéricos . . . . .  | 85         |
| 5.6. Estados casi-estacionarios . . . . .   | 90         |
| 5.7. El modelo de Kuramoto definido en la red cuadrada . . . . .  | 92         |
| 5.8. Sincronización en redes complejas . . . . .  | 94         |
| 5.9. Conclusiones del capítulo . . . . .  | 97         |
| <b>6. Sincronización en una red bidimensional compleja con interacciones uniformes</b>                    | <b>99</b>  |
| 6.1. Introducción . . . . .   | 99         |
| 6.2. El modelo . . . . .  | 100        |
| 6.3. Resultados numéricos . . . . .   | 101        |
| 6.3.1. El parámetro de orden . . . . .  | 102        |
| 6.3.2. El efecto de la conectividad media . . . . .   | 104        |
| 6.3.3. La frecuencia media . . . . .  | 106        |
| 6.3.4. El rol de los hubs . . . . .   | 109        |
| 6.4. Conclusiones del capítulo . . . . .  | 111        |
| <b>7. Sincronización en una red embebida bidimensional con interacciones dependientes de la distancia</b> | <b>113</b> |
| 7.1. Introducción . . . . .   | 113        |
| 7.2. Propiedades de la corteza visual . . . . .   | 114        |
| 7.3. El modelo de Cho y Kim . . . . .   | 119        |
| 7.4. El modelo embebido . . . . .   | 123        |
| 7.5. El modelo embebido con alcance de las interacciones dependientes del sitio                           | 127        |

|   |            |
|---|------------|
| 7.6. Conclusiones del capítulo . . . . .    | 138        |
| <b>8. Conclusiones</b>                      | <b>141</b> |
| Bibliografía                                | 146        |
| Publicaciones y presentaciones en congresos | 152        |
| Agradecimientos                             | 155        |



---

## Índice de figuras

---

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Representación esquemática de diferentes tipos de redes según la topología de sus conexiones. De izquierda a derecha: regular, mundo pequeño, libre de escala y aleatoria. . . . .  | 8  |
| 1.2. Definición de una red unidimensional con condiciones de contorno periódicas. . . .  | 10 |
| 1.3. Asignación de conectividades a los sitios de la red según $P(k)$ . . . . .  | 10 |
| 1.4. Se realizan las conexiones según las disponibilidades de los sitios vecinos. . . . .  | 10 |
| 1.5. Estructura espacial de la red de conexiones para redes con exponente $\alpha = 2.5$ (izquierda) y $\alpha = 5.0$ (derecha). Las figuras a) corresponden a redes de $N = 50 \times 50$ sitios, y se muestra el mapa de enlaces. La parte b) muestra las capas químicas con respecto al sitio central para redes de las mismas características a las figuras superiores pero con un tamaño mayor ( $N = 300 \times 300$ sitios). Extraída de [4]. . . . | 13 |
| 1.6. Distribución de grados de una red libre de escala embebida, (a) cuando se impone un valor de corte $k_c$ y (b) cuando se alcanza un corte natural $M$ . En (a) el tamaño de la red es $L = 400$ , el exponente de la distribución es $\alpha = 2.5$ , y $A = 2$ (negro), 3 (rojo) y 4 (verde). Para (b) $L = 100$ , $A = 10$ y $\alpha = 2.5$ (negro), 3.0 (rojo) y 5.0 (verde). Extraída de [4]. . . . .   | 13 |
| 1.7. Distribución de grados para dos redes con $N = 100 \times 100$ , $m = 4$ , $A = 10$ y diferentes valores de $\alpha$ y $M$ . Observamos que en los tres casos la distribución de grados presenta un corte natural. . . . .  | 15 |

|   |    |
|---|----|
| 1.8. Distribución de grados para dos redes con $\alpha = 5.0$ , $m = 4$ , $A = 10$ y diferentes valores de $M = 10$ (triángulos) y $M = 40$ (cículos). En el primer caso, la distribución termina en forma abrupta a un valor de corte, mientras que para $M = 40$ la distribución tiene un corte natural. . . . .  | 15 |
| 1.9. Distancia química desde el sitio central para una red no embebido (arriba) y embebida (abajo), ambas con $\alpha = 2.5$ , $m = 4$ , $M = 400$ y $A = 10$ . . . . .   | 16 |
| 2.1. Representación de una partícula del modelo HMF en el círculo unidad. La partícula tiene masa unitaria, y $\theta_i$ es la coordenada angular. . . . .  | 21 |
| 2.2. Predicciones teóricas en el ensamble canónico (línea continua) para la magnetización $M$ en función de la energía por partícula $u$ (parte (a)) y para la curva calórica $T$ en función de $u$ (parte (b)) en comparación con las simulaciones numéricas (símbolos), para sistemas de tamaños $N = 100, 1000, 5000, 20000$ . Los símbolos se obtuvieron a partir de configuraciones iniciales próximas al equilibrio termodinámico. La línea vertical indica la energía crítica por partícula $u_c = 3/4$ . También se grafican, por separado, los resultados para el estado casi-estacionario de un sistema de (b). Estos resultados fueron extraídos de [43]. . . . .  | 26 |
| 2.3. a) Curva calórica: los resultados numéricos micro-canónicos para $N = 10000$ y $N = 100000$ se comparan con la curva teórica en el ensamble canónico. La línea de trazo vertical indica la energía crítica. En las simulaciones numéricas se usaron condiciones iniciales water bag (WBIC) y la temperatura fue calculada como $T = 2\langle E_c \rangle / N$ , donde $\langle . \rangle$ indica promedio temporal luego de un tiempo transitorio corto $t_0 = 10^2$ que no se indica aquí. b) Evolución temporal de $T = 2\langle E_c \rangle / N$ (simulación microcanónica), para una energía por partícula $u = 0.69$ y diferentes tamaños. La línea de puntos y rayas representa la temperatura canónica $T_{can} = 0.476$ . Para un dado sistema finito la cantidad $T = 2\langle E_c \rangle / N$ comienza en un valor inicial menor a $T_{can}$ y no relaja inmediatamente a la temperatura canónica. El sistema vive en estados casi-estacionarios (QSS) con un "plateau" de temperatura $T_{QSS}(N)$ menor que el valor esperado $T_{can} = 0.476$ . El tiempo de vida del estado casi-estacionario crece con $N$ y el valor de la temperatura converge, a medida que $N$ aumenta, a la temperatura $T_\infty = 0.38$ , graficada en línea de trazo. El tiempo de vida de los estados casi-estacionarios c) y $T_{QSS} - T_\infty$ d) se grafican en función del tamaño del sistema $N$ , ambos en escala logarítmica. Se observa que el tiempo de vida diverge linealmente con $N$ , mientras que $T_{QSS}(N)$ converge a $T_\infty = 0.38$ como $N^{1/3}$ (la curva de ajuste se muestra en línea de trazo). Extraído de [44]. . . . . | 28 |

2.4. Logaritmo de la función Característica de Euler para el modelo HMF ( $\log(|\chi|(\mathcal{M}_v))/N$ ) en función de  $v$ . Las curvas representan sistemas de distintos tamaños; desde abajo hacia arriba se grafica para  $N = 50, 200$  y  $800$ . Para todos los casos se usó un campo externo  $h = 0.01$ . Observemos que se produce un salto abrupto de  $\log(|\chi|(\mathcal{M}_v))/N$  en  $v_c = 1/2$ . Gráfico extraído de [38]. . . . . 34

2.5. Evolución temporal de  $\lambda$  (a) y de  $V/N$  (b) para un sistema de  $N = 500$  partículas y energía por partícula  $u = 0.69$ , justo debajo de la transición de fase. El sistema fue preparado inicialmente en una configuración water bag perfecta. La línea de puntos y la línea de trazo de la parte (b) corresponden respectivamente a los valores de equilibrio y de casi equilibrio en el límite termodinámico. Gráfico extraído de [39] 36

2.6. Distribuciones de probabilidad para los momentos para los cuatro primeros ceros de la función  $\lambda(t)$ , que corresponden a los tiempos  $t = 2.29, 4.86, 9.47$  y  $13.21$ . . . . 37

2.7. Histograma del número de puntos críticos a un tiempo  $t$  para  $U/N = 0.69$  y diferentes tamaños de sistema  $N = 50, 125, 250$  y  $1000$ . Extraído de [41] . . . . . 38

2.8. Evolución temporal de  $\lambda$  para tres regímenes distintos de energía: fase desordenada (figura superior), justo debajo del valor de transición de fase (figura media) y fase ordenada (figura inferior). Extraído de [42]. . . . . 39

2.9. Período  $\Delta t$  transcurrido entre dos visitas sucesivas a la sub-variedad crítica  $v_c = 1/2$  como función de  $U/N$ , graficado en formato doble logarítmico. La línea llena corresponde a la ley de potencias que ajusta los últimos ocho puntos. Extraído de [42]. 40

3.1. Curvas calórica (figura superior) y magnética (figura inferior) para una red embebida de  $N = 500$  sitios, con  $\alpha = 2.1$ . Se grafican distintos valores de conectividades máxima  $M$  y mínima  $m$ , lo que es equivalente a distintos valores de conectividad media  $\langle k \rangle$ , tal como se indica en cada caso. Observar la superposición de las curvas y transición de fase en un valor cercano a  $u = 0.75$ . La curva en línea continua corresponde a la solución exacta del modelo HMF original. . . . . 48

3.2. Curvas calóricas para redes embebida con diferentes valores de  $\alpha$ , a saber  $\alpha = 2.1, 2.5$  y  $3.0$ . Todas corresponden a  $N = 500, m = 125$  y  $M = 250$  ( $\langle k \rangle = 175 = 0.35N$ ), con condiciones iniciales cercanas al equilibrio. . . . . 49

3.3. Curvas calóricas para redes embebidas de tamaño  $N = 500$  con  $\alpha = 2.1, M = 250$  y diferentes valores de  $m = 8, 16, 32, 64, 125$  y  $175$  (lo cual implica valores de conectividades medias diferentes y crecientes). En todos los casos la condiciones iniciales son cercanas al equilibrio. La curva en línea continua corresponde a la solución exacta del modelo HMF clásico. . . . . 49

|   |    |
|---|----|
| 3.4. Curvas calóricas redes con $\alpha = 2.1$ , $m = 125$ y $M = 250$ ( $\langle k \rangle = 175 = 0.35N$ ). Para condiciones iniciales cercanas al equilibrio la curva obtenida a $N = 500$ . En cambio, para las condiciones iniciales fuera del equilibrio (water bag) se superponen los resultados para tres tamaños: $N = 500$ , $N = 1000$ y $N = 2000$ . La curva en línea continua corresponde a la solución exacta del modelo HMF original. . . . . | 51 |
| 3.5. Evolución temporal de la temperatura del sistema de rotadores para el modelo HMF embebido. Los datos corresponden a una red de tamaño $N = 10000$ con $\alpha = 2.5$ , $M = 250$ y $m = 125$ ( $\langle k \rangle = 175 = 0.0175N$ ) con condiciones iniciales water bag. Las curvas corresponden a dos realizaciones individuales. . . . .  | 52 |
| 3.6. Distribuciones de momentos para diferentes tiempos y condiciones iniciales de equilibrio (arriba) y de no equilibrio (abajo). Los parámetros usados en la generación de la red son $N = 5000$ con $\alpha = 2.5$ , $M = 2500$ y $m = 1250$ . . . . .   | 53 |
| 4.1. Representación esquemática de la morfología de una neurona típica de un vertebrado. Extraído de [52]. . . . .  | 57 |
| 4.2. Representación esquemática de una neurona biológica (arriba) y una artificial (abajo). . . . .   | 59 |
| 4.3. Curva de reconocimiento $m_f$ vs. $p/N$ para el modelo de Hopfield. En línea continua se muestra la obtenida analíticamente para el caso determinista y en el límite termodinámico ( $N \rightarrow \infty$ ) y en círculos rojos la obtenida numéricamente para una red de $N = 1000$ neuronas. . . . .   | 65 |
| 4.4. $m_f$ vs. $p/\langle k \rangle$ (que el autor denominó con la letra $\alpha$ ) para el modelo Hopfield con dilución y complejidad definido en [62]. Las curvas corresponden a diferentes tamaños del sistema. Extraído de [62] . . . . .   | 68 |
| 4.5. Función distribución de grados $P(k)$ para una red embebida de $N = 40 \times 40 = 1600$ nodos construida con los siguientes parámetros: $m = 4$ , $M = N$ y $\alpha = 2.1, 3$ y $4$ . . . . .   | 71 |
| 4.6. Conectividad media por neurona en función del máximo número de conexiones permitido $M$ para diferentes valores del exponente $\alpha = 2.1$ y $3$ , todos con $m = 4$ fijo. . . . .   | 72 |
| 4.7. Parámetro $m_e$ vs. $p/\langle k \rangle$ para redes embebidas en un espacio euclídeo bidimensional con $L = 40, 60$ y $80$ , $\alpha = 2.1$ , $m = 4$ y $M = 1600$ ( $\langle k \rangle \approx 21$ ). . . . .  | 73 |
| 4.8. Gráfico de la figura 4.7, pero usando doble escala logarítmica. La línea de trazo representa un comportamiento del tipo ley de potencias. Observar que todos los puntos se encuentran por encima de esta línea, indicando un decaimiento de ley de potencias o más lento. . . . .  | 74 |

|   |    |
|---|----|
| 4.9. Parámetro $m_e$ vs. $p/\langle k \rangle$ para redes embebidas en un espacio euclídeo bidimensional con parámetros de red $L = 40$ , $m = 15$ y $M = 1600$ y tres valores de $\alpha$ , a saber, 2.1, 3.0 y 4.0. La línea de trazo representa un comportamiento del tipo ley de potencias. Observar que todos los puntos se encuentran por encima de esta línea, indicando un decaimiento de ley de potencias o más lento. . . . .   | 74 |
| 4.10. Parámetro $m_e$ vs. $p/\langle k \rangle$ para el modelo de Hopfield embebido (triángulos azules) con $\alpha = 3.0$ , $L = 80$ , $m = 4$ y $M = 1600$ y para el modelo de Hopfield en su versión original (círculos rojos) con $N = 1000$ . . . . .  | 75 |
| 4.11. Parámetro $m_e$ vs. $p/\langle k \rangle$ para el modelo de Hopfield embebido (triángulos azules) con $\alpha = 2.1$ , $L = 80$ , $m = 4$ y $M = 1600$ y para el modelo de Hopfield en la red ultra-diluida aleatoria (rombos morados) con $N = 20000$ . . . . .  | 76 |
| 4.12. Parámetro $m_e$ vs. $p/\langle k \rangle$ para el modelo de Hopfield embebido (triángulos azules) con $\alpha = 2.1$ , $L = 80$ , $m = 4$ y $M = 1600$ y para el modelo de Hopfield ultra-diluido en una red compleja campo medio (cuadrados celestes) con $N = 10000$ . . . . .  | 76 |
| 4.13. Parámetro $m_e$ vs. $p/\langle k \rangle$ para cuatro versiones diferentes del modelo de Hopfield: el modelo de Hopfield embebido (triángulos azules) con $\alpha = 2.1$ , $L = 80$ , $m = 4$ y $M = 1600$ ; el modelo de Hopfield ultra-diluido en una red compleja campo medio (cuadrados celestes) con $N = 10000$ ; el modelo de Hopfield en la red ultra-diluida aleatoria (rombos morados) con $N = 20000$ ; el modelo de Hopfield en su versión original (círculos rojos) con $N = 1000$ . . . . . | 77 |
| 5.1. Representación gráfica de la noción del parámetro de orden complejo del modelo de Kuramoto. De izquierda a derecha, el valor absoluto de $r$ es $ r  = 0.18, 0.44, 0.91$ y $0.99$ . . . . .  | 84 |
| 5.2. Evolución temporal del parámetro de orden $r$ para el modelo de Kuramoto con una distribución de frecuencias naturales normal. Las curvas corresponden a un promedio sobre 10 muestras y distintos valores de acoplamiento. . . . .  | 88 |
| 5.3. Parámetro de orden $r$ en función de la constante de acoplamiento $W$ para el modelo de Kuramoto de campo medio. En este caso comparamos ensambles de distintos tamaños para una distribución de frecuencias naturales gaussiana $g(\omega) = \frac{e^{-\omega^2/2}}{\sqrt{\pi}}$ . . . . .  | 89 |
| 5.4. Frecuencia media temporal $\Omega_i$ en función de la frecuencia natural $\omega_i$ para cada oscilador $i$ , correspondiente a un sistema de $N = 100$ osciladores con una distribución normal de frecuencias naturales. . . . .  | 90 |
| 5.5. Evolución temporal de $r$ para valores de $W$ cercanos a $W_c$ . El sistema consta de $N = 1000$ osciladores de Kuramoto y las curvas son un promedio de 10 muestras. . . . .  | 91 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.6. Parámetro de orden $r$ en función de la constante de interacción para el modelo de Kuramoto definido en una red cuadrada con interacciones a primeros vecinos. Se muestran distintos tamaños lineales $L$ de las redes. Se usó una distribución de frecuencias naturales normal. . . . .   | 93  |
| 5.7. Frecuencia media temporal $\Omega_i$ en función de la frecuencia natural $\omega_i$ para cada oscilador $i$ para distintos valores de $W$ . Los gráficos corresponden a una red cuadrada de $N = 10 \times 10$ osciladores con una distribución normal de frecuencias naturales e interacciones a primeros vecinos. . . . .  | 94  |
| 5.8. Configuración espacial de una red cuadrada de $100 \times 100$ sitios con interacciones a primeros vecinos para tres valores de la constante de acoplamiento $W = 2, 5$ y $10$ . Se usó una distribución de frecuencias naturales normal. . . . .  | 94  |
| 6.1. Evolución temporal del parámetro de orden $r$ para redes de distintos tamaños en sus versiones embebida (línea continua) y no embebida (línea de trazo). En todos los casos $\alpha = 2.5$ con $m = 4$ y $M = 400$ con $W = 3.0$ y la curva corresponde a un promedio de 100 muestras. Observar que las tres curvas correspondientes al caso no embebida se superponen. . . . .  | 103 |
| 6.2. Valor estacionario del parámetro de orden $r$ vs. la constante de acoplamiento $W$ para redes libres de escala no embebidas (diamantes) y embebidas (círculos). Para $\alpha = 5.0$ también se ha graficado el caso de una red cuadrada regular con interacciones a primeros vecinos (triángulos), que es casi coincidente con la red embebida. Observar la fuerte dependencia del parámetro de orden con el exponente de $\alpha$ para todas las redes embebidas [101]. . . . . | 104 |
| 6.3. Valor estacionario del parámetro de orden $r$ vs. la constante de acoplamiento $W$ para redes con $\langle K \rangle = 6.8$ , todas ellas de $N = 100 \times 100$ sitios. Los parámetros de las redes son: $\alpha = 3.0$ con $m = 4$ , $M = 100$ (línea continua); y $\alpha = 4.0$ con $m = 5$ y $M = 200$ (línea de trazo). Se muestran los casos de red embebida (círculos) y no embebida (diamantes). . . . .   | 105 |
| 6.4. Frecuencia media $\Omega$ para una red no embebida (arriba) y una embebida (abajo), ambas con $\alpha = 2.5$ , $W = 3.0$ , $m = 4$ , $M = 400$ y $A = 10$ [101]. . . . .   | 106 |
| 6.5. Frecuencia media $\Omega$ en función de la frecuencia natural $\omega$ para redes no embebidas (cuatro gráficos superiores) y redes libres de escala embebidas (cuatro gráficos inferiores) con exponentes $\alpha = 2.5$ , $m = 4$ , $M = 400$ , $A = 10$ y cuatro constantes de acoplamiento $W$ diferentes [101]. . . . .   | 108 |

6.6. Frecuencia media  $\Omega$  en función de la frecuencia natural  $\omega$  para una red no embebida (arriba) y para una red embebida (figura media) con constantes de acoplamiento  $W = 3.0$ ,  $\alpha = 3.0$ ,  $m = 4$ ,  $M = 100$  y  $A = 10$ . En la figura inferior se muestra un detalle ampliado del caso embebido donde se observa la presencia de clusters sincronizados a diferentes frecuencias medias [101]. . . . . 109

6.7. Frecuencia media  $\Omega$  en función de la conectividad  $k$  para una red no embebida (cuatro gráficos superiores) y embebida libre de escala (cuatro gráficos inferiores) con un exponente  $\alpha = 2.5$ ,  $m = 4$ ,  $M = 400$ ,  $A = 10$  y cuatro constantes de acoplamiento diferentes [101]. . . . . 110

7.1. Capas anatómicas de la corteza visual primaria, cada una de ella con sus conexiones características. A) Se muestra cómo la mayor parte de las fibras aferentes procedentes del núcleo geniculado lateral terminan en la capa 4 (que, a su vez, está dividida en varias subcapas). B) Se muestran los distintos tipos de neuronas que existen en la corteza visual. Las células estrelladas espinosas y las piramidales, ambas con dendritas espinosas, son excitatorias. Las células estrelladas lisas son inhibitorias. Las células piramidales se proyectan hacia el exterior de la corteza, mientras que los dos tipos de células estrelladas son neuronas locales. C) Se muestra el flujo de información basado en las conexiones anatómicas. Extraído de [52] . . . . . 115

7.2. En la figura de la izquierda se muestra el campo visual con sus zonas monoculares y binoculares. La figura de la derecha muestra un diagrama simplificado del recorrido de las proyecciones desde la retina hasta las áreas visuales del tálamo, el núcleo geniculado lateral, donde van a parar el 90% de los axones retinianos y es la principal estructura subcortical encargada de transportar la información visual a la corteza cerebral. Extraído de [52] . . . . . 116

7.3. Patrón de las columnas de diferentes orientaciones en la corteza cerebral de un mono. En este experimento, Gary Blasdel aplicó un colorante sensible al voltaje a la corteza estriada de un mono y estimuló el campo visual con barras de distintas orientaciones, una tras otra, mientras tomaba las imágenes con técnicas de televisión. Luego, usando técnicas computacionales, se visualizaron los resultados mediante la asignación de un mismo color a las regiones que se habían iluminado con cada orientación. Para una región pequeña cualquiera los bloques de orientación son franjas paralelas. Extraído de [112]. . . . . 118

7.4. A) Imagen de un rectángulo de 9x12 mm de la superficie cortical de un mono mientras veía contornos de distintas orientaciones. Las áreas más activas durante la presentación de una orientación concreta se indican con el color elegido para representar la orientación (barras de la derecha). B) Muestra un aumento del área de un *molinillo*. C) Organización tridimensional de las columnas de orientación de la corteza visual primaria. Extraído de [52]. . . . . 119

7.5. Organización de las columnas de orientación y de predominio ocular, así como de las manchas de un módulo funcional de la corteza visual primaria. Extraído de [6]. 119

7.6. Función de interacción dependiente de la distancia del tipo sombrero mexicano. Los parámetros usados aquí son  $c = 1$  y  $\sigma = 1$ . . . . . 121

7.7. Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim de campo medio para distintos tiempos, de izquierda a derecha:  $t = 0, t = 15, t = 50, t = 100$ . El tamaño de la red es  $N = 60 \times 60$ , mientras que los parámetros de la función de acoplamiento (7.4) son  $w = 0.02$  y  $\sigma^2 = 6$  con  $c$  variable. Las figuras de la primera fila corresponden a  $c = 0.1$ , la de la segunda a  $c = 0.3$  y las de la tercera a  $c = 1.0$ . . . . . 122

7.8. Escala de colores. De izquierda a derecha la escala va de 0 a  $2\pi$ . . . . . 122

7.9. Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido para distintos tiempos, de izquierda a derecha:  $t = 0, t = 15, t = 50, t = 100$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1, A = 10, m = 100$  y  $M = 500$ . La función de interacción está caracterizada por  $w = 0.02, \sigma^2 = 6$  y  $c = 1.0$ . Las fases iniciales fueron elegidas aleatoriamente entre 0 y  $2\pi$ . . . . . 125

7.10. Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido para distintos tiempos, de izquierda a derecha:  $t = 0, t = 15, t = 50, t = 100$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1, A = 10, m = 100$  y  $M = 500$ . La función de interacción está caracterizada por  $w = 5.0, \sigma^2 = 6$  y  $c = 1.0$ . . . . . 126

7.11. Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido para tiempo  $t = 100$ . De izquierda a derecha las figuras corresponden a  $m = 4$  y  $M = 6, m = 4$  y  $M = 3600, m = 100$  y  $M = 500$ , y  $m = 3590$  y  $M = 3600$ . En todos los casos, los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60, \alpha = 2.1, A = 10, m = 100$  y  $M = 500$ . La función de interacción está caracterizada por  $w = 5.0, \sigma^2 = 6$  y  $c = 1.0$ . . . . . 126

7.12. Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido para tiempo  $t = 100$ . De izquierda a derecha las figuras corresponden a  $\alpha = 2.5$  con  $m = 4$  y  $M = 400, \alpha = 3.0$  con  $m = 4$  y  $M = 100$ , y  $\alpha = 5.0$  con  $m = 4$  y  $M = 40$ . En todos los casos, el tamaño de la red es  $N = 60 \times 60$  La función de interacción está caracterizada por  $w = 5.0, \sigma^2 = 6$  y  $c = 1.0$ . . . . . 127



7.13. Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a tiempo  $t = 50$ . De izquierda a derecha:  $m = 4$  y  $M = 6$ ,  $m = 4$  y  $M = 3600$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ , todas con  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$  y  $A = 10$ . Los parámetros de la función de interacción tipo sombrero mexicano son  $w = 5.0$  y  $c = 2.0$ , con  $\sigma$  dependiente del sitio. Las fases iniciales se eligen aleatoriamente entre  $0$  y  $2\pi$ . . . . . 129

7.14. Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a tiempo  $t = 50$ . De izquierda a derecha:  $w = 0.02$ ,  $w = 0.1$ ,  $w = 0.5$  y  $w = 1.0$ , todas con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Las fases iniciales se eligen aleatoriamente entre  $0$  y  $2\pi$ . . . . . 130

7.15. Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a tiempo  $t = 100$ . De izquierda a derecha:  $\alpha = 2.5$  ( $m = 4$  y  $M = 400$ ),  $\alpha = 3.0$  ( $m = 4$  y  $M = 100$ ) y  $\alpha = 5.0$  ( $m = 4$  y  $M = 40$ ). Los parámetros usados son  $N = 60 \times 60$ ,  $w = 5.0$ ,  $c = 2.0$  y  $\sigma$  dependiente del sitio. Las fases iniciales se eligen aleatoriamente entre  $0$  y  $2\pi$ . . . . . 130

7.16. Evolución temporal del parámetro de orden para  $\alpha = 2.1$  con  $m = 100$  y  $M = 500$ . Se muestran las condiciones iniciales *CII* a la *CI5* con acoplamiento  $w = 1.0$ . . . . . 132

7.17. Evolución temporal del parámetro de orden para  $\alpha = 2.1$  con  $m = 100$  y  $M = 500$ . Se muestran las condiciones iniciales *CII* a la *CI5* con acoplamiento  $w = 5.0$ . . . . . 133

7.18. Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0, 3, 7, 10, 15, 20, 40$  y  $100$ . Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Las condiciones iniciales son dadas por *CII*. . . . . 134

7.19. Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0$  (superior) y  $100$  (inferior) Se usaron cuatro elecciones distintas de la configuración aleatoria inicial, siempre usando la condición inicial *CII*. Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . . . . . 135

7.20. Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0$  (arriba) y  $100$  (abajo). Se usaron cuatro elecciones distintas de la configuración aleatoria inicial, siempre usando la condición inicial *CI2*. Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . . . . . 135

7.21. Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0$  (arriba), y  $100$  (abajo). Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Las condiciones iniciales son dadas por *CI3*. . . . . 136

7.22. Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0$  (arriba) y 100 (abajo). Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Las condiciones iniciales son dadas por *CI4*. . . . . 136

7.23. Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0$  (arriba) y 100 (abajo). Se usaron cuatro elecciones distintas de la configuración aleatoria inicial, siempre usando la condición inicial *CI5*. Todas las fotos corresponden a  $W = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . . . . . 137

7.24. Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0, 5, 10, 15$ . Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Las condiciones iniciales son: la mitad izquierda de la red con  $\theta = 0$  y la mitad derecha con  $\theta = \pi$ . . . . . 138

### 1.1. Motivación

Como lo explicita el título de esta tesis, nos planteamos inicialmente el problema de modelar la formación de patrones que se observan en la corteza visual de los mamíferos mediante un enfoque Físico Estadístico que privilegiara la universalidad de los procesos observados y permitiese identificar cómo diferentes elementos celulares influyen en el comportamiento global del sistema. Estos patrones están compuestos por grupos de neuronas espacialmente localizadas que reaccionan de igual manera ante estímulos visuales determinados, en particular, por grupos de neuronas que se activan bajo el estímulo de una orientación dada. Un modelo de tal magnitud incluye varios ingredientes que será necesario investigar y desglosar de antemano para tener una mejor comprensión de los fenómenos que intervienen.

A lo largo de este trabajo fuimos incrementando paulatinamente el grado de complejidad de los modelos, hasta llegar finalmente al modelado de la formación de tales patrones. En este sentido, esta Tesis está estructurada en forma constructiva, hasta llegar al modelo final de la corteza visual.

Para que un sistema neuronal, natural o artificial, tenga la capacidad de reconocer, sean patrones, orientaciones o cualquier otro tipo de estímulo, es necesario que se cumplan varios requisitos. En primer lugar el sistema tiene que ser capaz de generar estados metaestables de casi-equilibrio. Estos estados son susceptibles de ser modificados con bajo costo energético, a diferencia de los estados de equilibrio, cuya robustez dinámica los hace prácticamente incompatibles con los estados propios de los sistemas vivos. Los estados metaestables de casi-equilibrio tienen la propiedad de tener largos tiempos de vida, y sin embargo ser fácilmente alterables, permitiendo pasar de unos a otros. En segundo lugar, los fenómenos observados en la corteza cerebral hablan a las claras de mecanismos de sincronización, no globales (que son fáciles de modelar) sino locales, con la generación de parches o estructuras locales de unidades que funcionan al unísono ante un dado estado. Finalmente, estos estados metaestables sincronizados con estructura espacial deben ser múltiples, dependiendo fuertemente de las condiciones iniciales. De otra forma, no serían capaces de funcionar como dispositivos

con la habilidad de categorizar, reconocer o clasificar estímulos externos. Finalmente, todos estos comportamientos, que esperamos que muestre el modelo, deben surgir de un sistema que tenga en cuenta lo que sabemos de la estructura neuronal a partir de los estudios biológicos: la corteza cerebral es un sistema casi bidimensional, de unidades que interactúan entre sí de forma muy intrincada, con distribuciones de grados de conectividad que responden a leyes de potencias, con caminos libres medios muy pequeños y a la vez altos índices de clustering (estas definiciones se darán al inicio de la Tesis) y con interacciones competitivas que privilegian las interacciones excitatorias entre neuronas cercanas y las interacciones inhibitorias entre neuronas distantes. Fue así que nos propusimos estudiar detalladamente el rol de cada ingrediente y las consecuencias en cada uno de los aspectos relevantes de nuestro modelo.

La organización de este trabajo se realizó tratando de reflejar la evolución de la Tesis, tanto en forma cronológica como en el incremento del grado de complejidad de los modelos. En el transcurso de la presente investigación surgieron resultados propios de cada uno de los modelos estudiados y que a primera vista no tienen una relación directa con el título de la Tesis. En este sentido, otro objetivo satisfecho en esta Tesis es haber podido estudiar cómo influye el embebido de redes complejas en espacios de baja dimensionalidad en diferentes modelos. Este no es un logro menor, ya que tanto en el modelo HMF como los modelos de Hopfield y Kuramoto, estos estudios nunca se habían realizado previamente. Es nuestra intención presentar en detalle todos los pasos que se siguieron para llegar a la construcción del modelo deseado, de tal forma que en cada capítulo se incrementó el grado de complejidad.

Finalmente, hemos llegado a encontrar un modelo de sistema neuronal, con neuronas modeladas por osciladores de fase y a la vez organizadas en una red bidimensional, compleja y mundo pequeño, con interacciones dependientes de la distancia, excitatorias en el corto alcance e inhibitorias entre neuronas distantes. Hemos visto que este modelo presenta múltiples estados finales, al cual evoluciona dependiendo de la preparación inicial, y formando estructuras locales (parches) muy similares, al menos cualitativamente, a los observados en la corteza visual de mamíferos.

Restan muchas propiedades de dicho modelo por estudiar. Este ha sido un largo viaje que nos deja como punto de partida para próximos análisis, un sistema potencialmente apto para entender la forma en que los mamíferos analizamos, en la corteza cerebral, diferentes estímulos externos.

### 1.2. Introducción

Aun cuando no siempre somos plenamente conscientes de ello, vivimos inmersos y rodeados de *redes*. Más aún, estamos constituidos por múltiples redes. Redes moleculares que existen dentro de cada célula, o dentro incluso de los compartimientos intra celulares. Redes de señalización que conectan diferentes células, como sucede en el sistema nervioso, o incluso redes que conectan diferentes órganos, sincronizando los ritmos circadianos.

Las redes que nos forman y nos rodean cubren todas las escalas espaciales imaginables. Desde el mundo microscópico hasta las escalas astronómicas. Y tanto las unidades como las relaciones entre ellas y, sobre todo, las funciones que las redes desempeñan, son de las más variadas que podamos imaginar. Redes metabólicas, redes de proteínas, redes neuronales, redes familiares, redes laborales, redes de tráfico y de provisión de servicios, y la misma internet, son apenas algunos de los muchos ejemplos de sistemas con los cuales convivimos diariamente, muchos naturales, y otros no menos importantes, artificiales.

Todas estas redes de las que hablamos están constituidas por muchas unidades, generalmente similares, que se conectan e interactúan entre sí. Podemos pensar a estas unidades como los nodos de un entramado geográfico y a las interacciones entre ellas como *enlaces* que las unen, representando algún tipo de vínculo o interacción que, por supuesto, tiene el poder de influir sobre el comportamiento dinámico de las unidades. El comportamiento global del sistema entonces se torna difícil de predecir a partir del mero estudio de las unidades. Por el contrario, la naturaleza de las interacciones y la topografía de las mismas suelen ser determinantes a la hora de entender el funcionamiento de la red como un todo. Y para nuestra sorpresa, usualmente el comportamiento del conjunto guarda poca relación con el comportamiento aislado de los componentes. Quizá por ello nuestra intuición suele fallar cuando se trata de predecir el comportamiento de un conjunto grande de unidades, por más simple que sean, si entre estas unidades existe un rico entramado de relaciones. Que lo digan sino quienes estudian el cerebro aún de los animales más simples, el comportamiento del agua, la dinámica de los vidrios de nuestras ventanas o el frenesí de las bolsas de valores del mundo todo.

A partir del estudio de tantos sistemas con los cuales convivimos en nuestra vida cotidiana, físicos y matemáticos han sido capaces de mostrar que muchas redes que han surgido a partir de la evolución biológica o han sido construidas artificialmente por los humanos, tienen propiedades topográficas muy particulares y, a la vez, universales (comunes a todas). Propiedades topográficas que se refieren a la forma en que se conectan las unidades entre sí y que escapan a las creencias simplificadoras usuales que abundan dentro de la comunidad científica. A este conjunto de propiedades topográficas, que se refieren a quién se conecta con quién y a cómo influye en el entramado el espacio que sirve de sustrato al conexionado, las denominamos usualmente con el atributo *complejo*, dando lugar así al concepto de *redes complejas*.

Lo que hace que un sistema sea complejo no es tan sólo su gran tamaño, sino más bien la arquitectura de las conexiones entre diferentes elementos del mismo y su dinámica no lineal. Esta última da lugar a estados globales y comportamientos emergentes que no son deducibles a partir del estudio de las interacciones entre dos componentes aislados. Resulta extremadamente interesante el hecho de que las redes complejas sirvan para explicar fenómenos que ocurren en sistemas de la más variada naturaleza, lo que lleva a pensar que quizá existan mecanismos genéricos que dan lugar a estas estructuras.

La estructura de conexiones de los sistemas complejos dista bastante del esquema en el cual

todos los elementos son capaces de interactuar con todos y cada uno de los restantes, que constituye la aproximación de campo medio usual tan usada en la descripción de los modelos de la física. De hecho, tales sistemas suelen ser dispersos, en el sentido de que tienen muchas menos conexiones de las que podrían tener. En muchas redes se ha encontrado, además, que la distancia media entre dos nodos cualesquiera es pequeña, tal como ocurre con las redes aleatorias, y al mismo tiempo poseen un índice de aglomeración o “clustering” alto, como ocurre en redes muy regulares y simétricas. Por ello, las redes reales parecen estar preferentemente en un estado intermedio entre la total regularidad y la completa aleatoriedad. Un modelo para tales redes fue introducido por Watts y Strogatz en el año 1998 [1], y son hoy conocidas como *redes de mundo pequeño*. Tal vez el ejemplo más ilustrativo de este tipo de redes lo constituye el famoso experimento sociológico de los seis grados de separación de Milgram [2, 3]. Según Milgram, el problema del mundo pequeño se puede formular sencillamente de la siguiente forma: *¿cuál es la probabilidad de que dos personas cualquiera seleccionadas al azar de una población grande se conozcan mutuamente?* El estudio experimental realizado por Travers y Milgram en 1969 [3] proponía generar una cadena de conocidos que conecte un individuo elegido arbitrariamente en Nebraska con otra persona que vive en Massachusetts usando sólo información local. Ellos encontraron, con sorpresa, que el número medio de intermediarios entre ambas personas era 5.2. El resultado sorprendió al propio Milgram, puesto que asombrosamente era un número muy bajo, mucho más pequeño que el que él mismo había imaginado: tan sólo hacían falta 6 pasos (5 intermediarios) para conectar dos personas elegidas aleatoriamente. Este experimento ejemplifica la baja distancia media, según la cual vivimos en un mundo pequeño. Posteriormente, esta idea se popularizó y fue explotada en otros ámbitos fuera del campo de la ciencia, desde argumentos de películas hasta en juegos virtuales.

Por otro lado, los estudios realizados en redes reales mostraron que las distribuciones de conexiones en ciertas redes complejas pueden ser muy heterogéneas, con muchos nodos que tienen pocas conexiones y algunos pocos nodos que tienen muchas conexiones. En algunos casos este tipo de arquitectura carece de una escala característica por lo que se las conoce como *redes libres de escala*.

Otro aspecto distintivo de la mayoría de los sistemas reales es que se encuentran inmersos en un espacio euclídeo. Es decir, viven en un mundo donde es posible localizar espacialmente a sus constituyentes y en donde vale la noción usual de distancia entre ellos. Cabe destacar que la noción usual de distancia que se usa en el ámbito de las redes es la de *distancia química*, que simplemente cuenta la cantidad de nodos entre un sitio y otro. Aquí, en cambio, nosotros nos referimos al concepto topológico de distancia. En términos topográficos, la mayoría de las redes reales están *embebidos* en un espacio euclídeo de baja dimensión. En el ejemplo de las redes sociales la distancia euclídea entre personas puede influir en los lazos entre ellas en algunos casos, puesto que facilita o perjudica la comunicación entre las mismas. En el caso de las redes de vuelos, las distancias entre aeropuertos influyen directamente en los costos de los viajes, y seguramente también influyen en la elección de un pasajero a la hora de decidir cómo moverse desde un lugar a otro. Algo similar ocurre con las conexiones neuronales del cerebro, donde una neurona está más conectada con sus pares más cercanas.

Un caso paradigmático de red compleja en la naturaleza que contiene todas la características particulares que hemos mencionado hasta ahora lo constituye el sistema visual del cerebro de los mamíferos. Debido a su morfología de capas, las funciones de esta área del cerebro se pueden representar muy bien como una superficie bidimensional. Además, como ocurre en todo el sistema nervioso, cada neurona se encuentra preferentemente conectada con neuronas próximas, aunque eventualmente las conexiones sinápticas involucran también dos neuronas muy distantes. Es evi-

dente en este caso la naturaleza compleja del conjunto de neuronas y sus interacciones, tal como lo demuestran los numerosos estudios realizados en el ámbito de las neurociencias. Es por ello que este sistema es factible de ser modelado como una red de neuronas artificiales con una arquitectura de conexiones complejas, a saber, libre de escala y mundo pequeño. Pero también resulta ineludible el hecho de que este sistema *vive* en un espacio euclídeo donde la noción de distancia entre sus elementos juega un rol fundamental en el desarrollo del sistema y en el desempeño de sus funciones. Si además se le añade la noción de distancias geográficas embebiéndola en un espacio euclídeo bidimensional, la representación del sistema será mucho más realista desde el punto de vista biológico que la simple y usual aproximación de campo medio.

Por lo expuesto hasta acá, resulta claro que para las redes reales el hecho de estar inmersas en un espacio euclídeo es de gran importancia. Sin embargo, la mayoría de los estudios hasta ahora realizados se concentraron sólomente en la forma en la que los miembros de un dado sistema se conectan entre sí, o sea, en la *topología* de conexiones, sin poner atención a la disposición espacial de los elementos. Es por ello que el estudio del rol que juega la topología de la red de interacciones de un dado sistema ha invadido en las últimas décadas diferentes campos de la ciencia. Resulta evidente, entonces, que el embebido de redes en un espacio euclídeo es un punto importante en la descripción de los sistemas reales, pues tiene en cuenta tanto propiedades geográficas (la localización espacial) como topológicas (la forma en que sus constituyentes se conectan entre sí). Usualmente se habla de la *topografía* de la red para hacer referencia a ambas características en forma silmultánea.

Nos preguntamos entonces, ¿Cómo se ven afectadas las características y el comportamiento de los sistemas por el hecho de que sus constituyentes estén inmersos en un espacio euclídeo de baja dimensión? ¿Cuál es la información que estamos perdiendo al omitir esta característica en el modelado de tales sistemas? ¿Podemos lograr un cambio cuantitativo en los resultados de los modelos que pretenden emular las funciones propias de cerebro, tales como la memoria asociativa, añadiendo el concepto de distribución espacial de las neuronas o un modelo de campo medio es suficientemente adecuado para reproducirlas? Al modelar el sistema visual de los mamíferos, por ejemplo, como una red neuronal compleja, ¿qué rol cumple en sus funciones la topología de conexiones entre neuronas, la dinámica con la cual evolucionan las interacciones y la disposición espacial de las mismas? ¿Es esta última característica tan poco importante en el desempeño de la red como para ser despreciada o es necesario tenerla en cuenta a fin de lograr modelos más realistas?

Para intentar responder estas preguntas en esta tesis de doctorado nos abocaremos principalmente al estudio de redes complejas embebidas en un espacio euclídeo de baja dimensión, investigando qué efectos producen estas características en ciertos modelos emblemáticos de la física estadística de sistemas complejos. Estudiaremos en un principio tales modelos dándoles una nueva visión al usar siempre redes embebidas en un espacio euclídeo, incrementando así el grado de complejidad de los mismos. Como punto de partida queremos determinar si es posible reproducir los resultados ya conocidos y estudiados en la literatura, pero ahora incorporando este nuevo ingrediente. Finalmente, nuestro objetivo será modelar un sistema biológico usando estos ingredientes que lo hacen más parecido a aquel tal cual lo encontramos en la naturaleza. Esto ocurrirá en la última parte del presente trabajo, que es precisamente la que da nombre a esta tesis. Allí presentamos un modelo para la formación de patrones de preferencia orientacional observados en la corteza visual del cerebro de mamíferos. Estos patrones están compuestos por grupos de neuronas que tienen el mismo ángulo de orientación preferencial, esto es, por grupos de neuronas que se activan bajo el estímulo de una orientación dada. Así, por ejemplo, en la corteza visual un grupo de neuronas se activará al presentarse como estímulo una barra orientada en sentido horizontal, mientras que un grupo diferente lo hará si la barra presenta un sentido vertical. Utilizando diferentes técnicas experimentales,

tales como colorantes sensibles al voltaje, o midiendo diferencias inherentes a la dispersión de la luz en las células activas e inactivas, es posible visualizar directamente estos patrones en la corteza cerebral viva. Estos experimentos han revelado la tendencia a la formación de patrones con fajas. Para este caso, el comportamiento de las neuronas queda muy bien representado por las fases que indican a qué ángulo responden. Luego, podemos modelar la corteza visual como una red de tales fases o neuronas con un dado esquema de conexiones entre ellas, de acuerdo con qué vecinas interaccionen. Por las características bidimensionales y complejas intrínsecas a esta área del cerebro, el conjunto de neuronas puede representarse de una forma más realista por medio de una red compleja embebida en un espacio euclídeo de dos dimensiones.

El presente capítulo constituye el pilar del resto de la tesis. A continuación introduciremos un método para incluir el embebido de una red al tratamiento de los modelos que serán analizados posteriormente. El método que usaremos es el desarrollado por Rozenfeld y colaboradores [4, 5] que permite realizar el embebido de una red compleja en un espacio euclídeo de baja dimensionalidad, dando como resultado una red mundo pequeño y con distribución de grado del tipo ley de potencias. El resto de la tesis se encuentra dividida en tres grandes partes.

En la primera parte (Capítulos 2 y 3) estudiamos el modelo Hamiltoniano de Campo Medio (HMF), que consta de un conjunto de  $N$  rotadores restringidos a moverse en un círculo de radio unitario. Este es un modelo emblemático de la mecánica estadística que constituye un claro ejemplo de sistema complejo, debido a que su aparente simplicidad no hace prever los comportamientos anómalos que emergen de las interacciones de sus elementos simples. En la versión original del modelo, tal como su nombre lo indica, las interacciones son de tipo campo medio. Luego de estudiar algunas propiedades relevantes del modelo, introduciremos una nueva versión del mismo sobre una red compleja embebida en un espacio euclídeo unidimensional.

La segunda parte de la tesis (Capítulo 4) estará dedicada al estudio del modelo Hopfield, un modelo de memoria asociativa para redes neuronales artificiales. El problema de la memoria asociativa es, junto con el problema del aprendizaje, uno de los paradigmas centrales del área de las redes neuronales. En pocas palabras, se puede formular así: ¿cómo se pueden almacenar un conjunto de patrones de manera tal que ante un nuevo patrón la dinámica de la red haga recuperar el que más se le parezca? En esta tesis introduciremos una nueva versión del modelo, definida sobre una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional.

Finalmente, en la última parte de la tesis (Capítulos 5, 6 y 7) investigaremos el fenómeno de sincronización en una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional. Para este caso el análisis estará diferenciado de acuerdo a si las interacciones son idénticas para todos los pares de nodos de la red o si, en cambio, dependen de la distancia que existe entre ellos. Este último caso está orientado al estudio de la formación de patrones que emergen en la corteza visual del cerebro de los mamíferos [6]. El modelo está formado por osciladores de fase [7, 8], que interaccionan en una red compleja embebida en un sustrato regular bidimensional. La intensidad de la interacción entre los osciladores está dada por una función del tipo *sombrero mexicano*, que presenta interacciones atractivas a corto alcance y repulsivas a largo alcance que decaen exponencialmente. Mediante simulaciones numéricas mostraremos que el modelo es capaz de generar patrones como los observados en la corteza visual de gatos y macacos. También analizamos el rango de valores de los parámetros del modelo donde se observan patrones estacionarios con relevancia biológica. Finalmente, realizamos un estudio sobre los efectos de las condiciones iniciales en la formación de los patrones.

En lo que resta de este capítulo introductorio sentaremos las bases del procedimiento de embebido de redes e introduciremos algunos de los conceptos que se usarán a lo largo de este trabajo.



### 1.3. Conceptos y definiciones

El estudio de las redes en general invade varios campos de la ciencia que van desde la física estadística hasta las neurobiología y esto se debe en gran parte a que convivimos con redes de diferentes tipos todos los días. Se han hecho numerosos estudios tendientes a caracterizar la topología de redes tales como cadenas alimentarias, redes metabólicas y celulares, redes de tendido eléctrico, redes de contactos sociales, la Internet, redes de coautores y de citas de las publicaciones científicas, redes de llamadas telefónicas, redes neuronales en nuestro cerebro, entre otras. La importancia de caracterizar la anatomía de las redes surge del hecho de que la estructura siempre tiene que ver con la función de la red [9, 10].

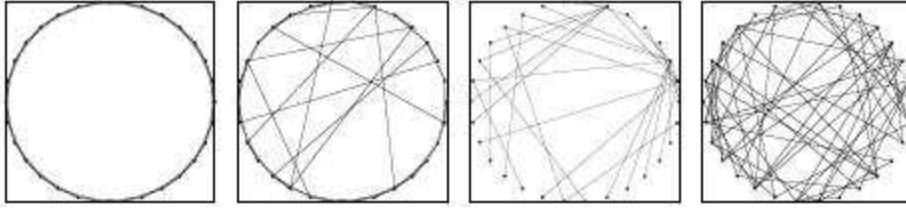
Las redes suelen tener ciertas características que las hacen difíciles de entender. Por ejemplo, muchas redes pueden tener un esquema de conexiones muy intrincado (estructura compleja) y ese esquema incluso puede cambiar en el tiempo (evolución de la red). Por otro lado, las conexiones entre sitios pueden tener pesos, direcciones y signos diferentes, como ocurre en el sistema nervioso, donde las conexiones pueden ser fuertes o débiles, excitatorias o inhibitorias. Por si esto fuera poco, los nodos o sitios de la red pueden ser de naturaleza distinta (como ocurre en algunas redes bioquímicas) o ser en si mismos sistemas dinámicos no lineales. Algunas de estas características incluso se pueden presentar en una misma red o influenciarse mutuamente [9].

En este punto nos podemos preguntar a qué nos referimos exactamente cuando hablamos de redes. Una **red** es un conjunto de **nodos** unidos mediante **enlaces** o **conexiones**, cuyas propiedades matemáticas residen en la teoría de grafos. Dependiendo del problema particular, los nodos y los enlaces de la red pueden ser de la más variada naturaleza: personas y sus relaciones en las redes sociales, neuronas y sinapsis en las redes neuronales, moléculas y sus interacciones, etc. Una red puede contener pocos o muchos nodos y enlaces. Una **red compleja**, por su parte, es aquella cuya arquitectura de conexiones (o topología de conexiones) y/o su dinámica es no trivial.

#### Definiciones

A continuación presentaremos algunas definiciones relacionadas al concepto de *red*, algunas de ellas tomadas de la teoría de grafos [11], y que serán usadas a lo largo de esta tesis.

- **Red o grafo:** es un conjunto de  $n$  nodos, vértices, puntos o unidades y  $k$  aristas, conexiones o arcos. Los grafos pueden ser no direccionados (si todas sus conexiones son simétricas) o direccionados.
- **Grado:** el grado ( $k$ ) de un nodo es la suma de todas las conexiones entrantes o salientes del nodo.
- **Camino:** es una secuencia ordenada de conexiones y nodos que unen el nodo fuente  $i$  con el nodo destino  $j$ , donde dos nodos o conexiones no pueden ser visitadas más de una vez. La longitud del camino es la suma de todas las conexiones.
- **Distancia:** la distancia entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  es la longitud del camino más corto entre ellos.
- **Matriz de adyacencia o de conexiones:** la matriz de adyacencia del grafo es una matriz  $n \times n$  cuyo elemento  $a_{ij} = 1$  si el nodo  $i$  está conectado con el nodo  $j$  y  $a_{ij} = 0$  si esa conexión no



**Figura 1.1:** Representación esquemática de diferentes tipos de redes según la topología de sus conexiones. De izquierda a derecha: regular, mundo pequeño, libre de escala y aleatoria.

existe.

- **Matriz de distancias:** Los elementos  $d_{ij}$  de esta matriz contienen la distancia entre el sitio  $i$  y el sitio  $j$ . En caso que dos sitios no estén conectados, el elemento correspondiente es  $\infty$ .
- **Longitud característica de camino:** es el promedio global de los elementos finitos de la matriz de distancia.
- **Coefficiente de clustering:** el coeficiente de clustering  $C_i$  del nodo  $i$  es el cociente entre el número de conexiones existentes entre los vecinos del nodo y el número de todas sus posibles conexiones. El coeficiente de clustering global  $C$  de toda la red es el promedio de todos los coeficientes individuales y toma valores entre 0 y 1.
- **Distribución de conectividades o de grado:**  $P(k)$  es la fracción de nodos que tienen  $k$  conexiones.

### 1.3.1. Clasificación de las redes según la arquitectura de sus conexiones

La arquitectura o topología de conexiones de una red describe estadísticamente la forma en que sus nodos están conectados. Según cómo se distribuyen las conexiones, podemos darle diferentes denominaciones a una red, tal como se describe a continuación y se esquematiza en la figura 1.1. Las **redes regulares** son las más simples y no son consideradas complejas. Las **redes aleatorias** fueron las primeras en estudiarse para describir redes naturales y tecnológicas, pero resultan una aproximación muy pobre para la topología de muchas redes reales. Por último, las redes de **mundo pequeño** y las **libres de escala**, que han sido las más recientemente introducidas, son las que mejor describen ciertas redes complejas. Por ejemplo, se ha encontrado, mediante estudios de resonancia magnética funcional en el cerebro, que las redes neuronales funcionales exhiben distribución de ley de potencias, como así también propiedades de mundo pequeño [10].

- **Redes regulares:** son aquellas redes en las cuales cada nodo está conectado de la misma forma a un número fijo de vecinos. Por ejemplo, las redes de conexiones a primeros vecinos y las redes totalmente conectadas (donde todos los sitios están conectados con todos los demás) son redes regulares.
- **Redes aleatorias:** son redes con distribución de probabilidades uniforme y distribución de conectividades binomial. En estas redes todos los nodos tienen aproximadamente la misma conectividad y sus propiedades matemáticas han sido ampliamente estudiadas [12, 13].

- **Redes de mundo pequeño:** fueron introducidas por Watts y Strogatz [1] para representar sistemas que se encuentran en un estado intermedio entre la regularidad y la completa aleatoriedad. Este tipo de topologías se pueden reproducir a partir de un grafo regular, donde los enlaces originales son reemplazados por otros elegidos en forma aleatoria con una cierta probabilidad. Estas redes están caracterizadas por caminos muy cortos entre dos nodos cualquiera y por un alto grado de clustering local. Se han encontrado ejemplos de redes de mundo pequeño en redes metabólicas, genéticas y ecológicas, entre muchas otras. El famoso experimento sociológico de los seis grados de separación de Milgram [2], que proponía encontrar la cadena más corta de conocidos que una a una persona con otra elegida al azar usando sólo información local, puede ser explicado usando redes de mundo pequeño.
- **Redes libres de escala:** son redes cuya distribución de conectividades sigue una ley de potencias ( $P(k) \sim k^{-\alpha}$ ), lo cual implica que hay muchos nodos con pocas conexiones y unos pocos nodos con muchas conexiones (tal como se puede observar en forma esquemática en la figura 1.1, donde se ve la presencia de algunos nodos altamente conectados, conocidos como *hubs*). Este tipo de arquitectura carece de una escala característica por lo que se las denomina libres de escala. Estamos rodeados de muchas redes de este tipo, como por ejemplo la Internet, las redes de reacciones metabólicas, las redes de llamadas telefónicas, la World-Wide Web, etc. Barabási, Albert y Jeong [14, 15] han introducido un algoritmo que permite la construcción de este tipo de redes, el cual fue luego modificado por numerosos autores.

### 1.4. El método de embebido de redes complejas

Como ya hemos mencionado al inicio de este capítulo, a menudo las redes de la vida cotidiana son complejas ya que son de tipo mundo pequeño [1] y presentan distribución de conectividades libre de escala [14, 15]. Además, estas redes generalmente se encuentran embebidas en un espacio físico de baja dimensión. Si bien esta última propiedad generalmente no se tiene en cuenta en el estudio de redes complejas, resulta ser un aspecto distintivo de la mayoría de los sistemas reales. Por ejemplo, una red de vuelos contiene la información de las conexiones entre lugares que cuentan con aeropuertos (sin tener en cuenta la ubicación geográfica de los mismos), pero muchas veces las distancias reales entre estos sitios juega un papel fundamental en la toma de decisión de los pasajeros y de las empresas de aviación. Algo similar ocurre con las conexiones entre neuronas en el cerebro. Cada neurona está más conectada con neuronas que están espacialmente próximas, pues las conexiones lejanas requieren un gasto mayor de energía.

Cuando hablamos de redes estamos pensando en un conjunto de nodos y enlaces, sin una ubicación geográfica dada. La idea de embeber tales redes es darle un sustrato físico a sus nodos, de tal forma que se encuentren insertas en una determinada estructura espacial en donde tenga sentido la definición de una distancia euclídea entre ellos.

A continuación presentaremos un método para darle un sustento físico a una red (grafo) de topología compleja. Es decir, lo que queremos hacer es colocar este grafo en un espacio euclídeo, proceso al cual llamaremos *embebido de la red*. El método de embebido que desarrollaremos es el propuesto por Rozenfeld *et al* [4, 5], y se puede describir en los siguientes pasos:

1. Definimos una red de dimensión  $d$  con condiciones de contorno periódicas. En la figura 1.2 se muestra, a modo de ejemplo, este paso para una red unidimensional de 8 sitios.

## 1.4 El método de embebido de redes complejas

- Asignamos a cada sitio de la red una conectividad tomada al azar de una distribución tipo ley de potencia (libre de escala), dada por:

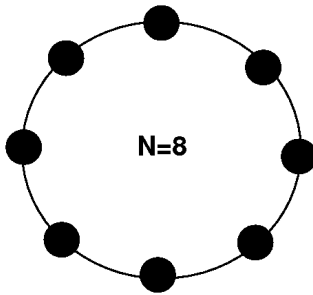
$$P(k) = Ck^{-\alpha}, \quad (1.1)$$

donde  $k$  es la conectividad y puede tomar valores limitados  $m < k < M$ , mientras que  $C$  es una constante de normalización. En la figura 1.3 se muestran los valores de  $k$  asignados a cada sitio de la red.

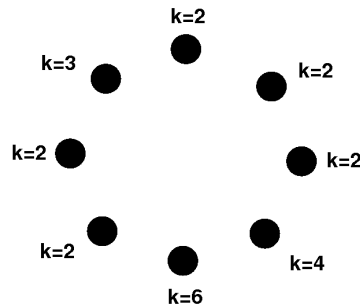
- Seleccionamos al azar un sitio de la red y se lo comienza a conectar. La conexión se realiza con sus vecinos más cercanos hasta que se alcance la conectividad  $k$  previamente asignada o hasta que resulte imposible seguir conectando sitios (esto puede ocurrir en el caso de que todos los vecinos hayan saturado su cuota de conexiones). Las conexiones entre sitios son posibles hasta una cierta distancia euclídea dada por:

$$r(k) = Ak^{1/d}, \quad (1.2)$$

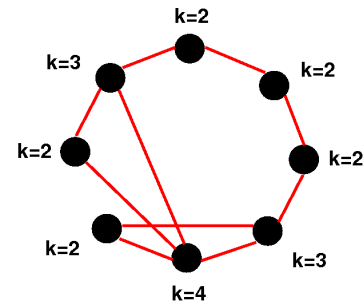
donde  $A$  es un parámetro externo. En la figura 1.4 se puede ver como algunos sitios no pueden ser conectados de acuerdo al valor  $k$  pre-especificado debido a la saturación del resto de los sitios. Por ejemplo, el sitio con  $k = 6$  solo se pudo conectar con 5 sitios y el que tiene  $k = 4$  se logró conectar con 3 sitios, debido a que todos sus posibles vecinos han agotado ya sus cuotas de conexiones.



**Figura 1.2:** Definición de una red unidimensional con condiciones de contorno periódicas.



**Figura 1.3:** Asignación de conectividades a los sitios de la red según  $P(k)$ .



**Figura 1.4:** Se realizan las conexiones según las disponibilidades de los sitios vecinos.

La constante de normalización  $C$  se obtiene integrando  $P(k)$ :

$$1 = \int_m^M P(k) dk = C \int_m^M k^{-\alpha} dk.$$

De esta última se deduce que:

$$C = \frac{1 - \alpha}{M^{1-\alpha} - m^{1-\alpha}}. \quad (1.3)$$

Por otro lado, es posible calcular de forma analítica la conectividad media de la red embebida de la siguiente forma:

$$\langle k \rangle = \int_m^M kP(k) dk = C \int_m^M k^{1-\alpha} dk.$$

## 1.4 El método de embebido de redes complejas

Usando la constante de normalización (1.3), la conectividad media viene dada por:

$$\langle k \rangle = \left( \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha} \right) \left( \frac{M^{2-\alpha} - m^{2-\alpha}}{M^{1-\alpha} - m^{1-\alpha}} \right). \quad (1.4)$$

Rozenfeld *et al.* [4] han demostrado que las redes con un exponente  $\alpha > 2$  pueden ser embebidas en forma exitosa hasta una cierta distancia Euclídea  $\xi$ . Dicha distancia se puede hacer tan grande como uno desee con sólo cambiar el valor del parámetro externo  $A$ .

Si se intenta embeber una red libre de escala en una red infinita, existirá un cierto valor de corte para la máxima conectividad que puede tener un sitio dado,  $k_c(A)$ . Los sitios no podrán lograr una conectividad mayor a  $k_c$  debido a saturación de los sitios que lo rodean. Esta conectividad de corte implica una cierta distancia de corte más allá de la cual las conexiones no serán posibles, dado por la ecuación (1.2):

$$\xi = r(k_c) = Ak_c^{1/d}. \quad (1.5)$$

La red embebida será libre de escala hasta una distancia  $r < \xi$  y se auto-repetirá estadísticamente para distancias  $r > \xi$ . Es posible hacer una estimación de los valores que toman las cantidades  $\xi$  y  $k_c$  (ver [4, 5] y las referencias que allí se citan) para el caso en que el embebido se desee realizar sobre un sustento infinito.

Consideremos ahora una red finita, a cuyo caso nos abocaremos siempre en este trabajo, de dimensión lineal  $L < \infty$  y tamaño  $N = L^d$ . Para tal red, el número de sitios disponibles  $N$  es finito, lo cual impone una restricción al número máximo de conexiones [16, 17]:

$$M \sim mN^{1/(\alpha-1)} \sim L^{d/(\alpha-1)}. \quad (1.6)$$

Asimismo, según la ecuación (1.2), este máximo valor de conexiones impone también un límite en la distancia máxima a la cual dos sitios pueden ser conectados, llamada longitud de corte:

$$r(k_{max}) = r(M) \sim AL^{d/(\alpha-1)}. \quad (1.7)$$

La interacción entre las tres escalas de longitudes, a saber: la dimensión lineal  $L$ , la distancia euclídea hasta la cual la red se puede embeber en forma exitosa  $\xi$  y la máxima distancia hasta la cual dos sitios pueden ser conectados  $r_{max}$ , determinará la naturaleza de la red. En el caso en que la red sea finita la conectividad máxima será  $k_{max} = M$  sólo si  $r_{max} < \xi$ . En caso contrario, si  $r_{max} > \xi$ , la red se repetirá a sí misma a escalas de longitud mayores que  $\xi$ . Mientras que si  $\min(r_{max}, \xi) \ll L$ , el tamaño finito de la red no impone restricciones serias. En tanto que, para redes en la cuales  $\min(r_{max}, \xi) \gg L$ , los efectos de tamaño finito serán notables. A continuación mostraremos algunos ejemplos de las características de estos dos tipos de redes.

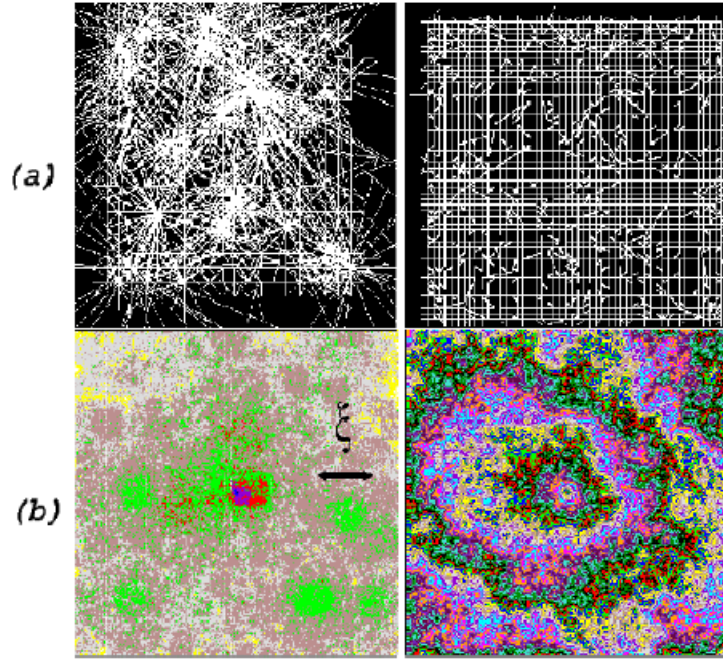
En las figuras 1.5, extraídas de [4], se muestran ejemplos de redes típicas obtenidas con el método de embebido que acabamos de introducir, usando  $\alpha = 2.5$  y  $5$  en espacios euclídeos bidimensionales ( $d = 2$ ). En la parte a) de la figura (figuras superiores) se muestra la estructura espacial de los enlaces de la red de  $N = 50 \times 50$  sitios. Se puede observar que la red que tiene el exponente más grande recuerda a una red de primeros vecinos, con algunos eventuales enlaces lejanos. En la parte inferior de la figura se muestran la estructura de capas químicas de las mismas redes de la figura superior, pero ahora con  $N = 300 \times 300$  sitios. Recordemos que una capa química  $l$  está formada por todos los sitios que se encuentran a una distancia mínima  $l$  de un dado sitio de referencia, donde por mínima distancia entendemos como el mínimo número de enlaces conectados. Este tipo

de gráficos nos permite visualizar la estructura geográfica de la red embebida. Para la combinación de parámetros que fueron elegidos, la red con  $\alpha = 5.0$  entra en la región  $\xi > r_{max}$ . Para este caso, gráficamente se puede observar que las capas químicas sucesivas son concéntricas y constituyen un continuo. En cambio,  $\alpha = 2.5$  se corresponde con el caso  $\xi < r_{max}$ , donde claramente se observa que las capas químicas sucesivas no son continuas, produciéndose una repetición estadística de la red para distancias mayores a  $\xi$ , cuya magnitud se muestra en la figura.

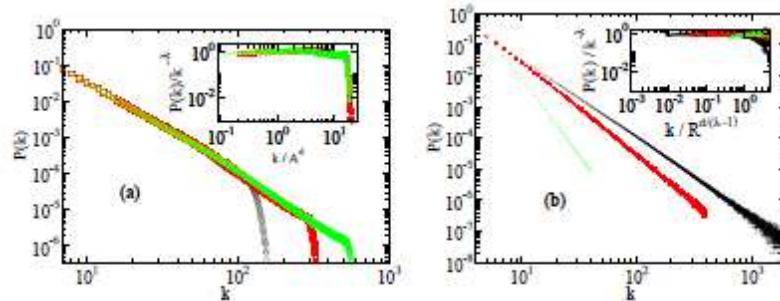
Es importante destacar que en todos los casos que hemos mencionado, la ley de distribución de grados es tipo ley de potencias hasta su corte. Es decir, el proceso de embebido no altera el exponente de la ley de potencia especificado de antemano, tal como uno desea. Para ilustrar este hecho, en la figura 1.6 (extraída de [4]) se muestran dos ejemplos de distribuciones de grado para redes embebidas con dos características diferentes. En la figura a),  $\xi < r_{max}$  y la distribución de grados termina abruptamente en un cierto valor de corte  $k_c$ , que escala como  $k_c \sim A^d$ . La distribución se ve alterada levemente debido a efectos de saturación, pero la tendencia global es altamente consistente con la ley de potencias original. Esta distribución se corresponde con la red de la izquierda mostrada en la figura 1.5. En la figura b),  $\xi > r_{max}$  y el corte en la distribución es la cantidad máxima de conexiones  $M$  que resulta del número finito de sitios en el sistema, y escala como  $M \sim mL^{d/(\alpha-1)}$ . Este caso se corresponde con la red de la derecha en la figura 1.5.

Resuminedo, como resultado de los pasos anteriores, obtenemos una red con las siguientes propiedades:

- Cada nodo tiene una ubicación geográfica determinada, es decir, es posible determinar la localización de los nodos y definir distancias euclídeas entre ellos.
- Los nodos están conectados según una topología compleja. Se ha demostrado [4, 5] que estas redes siguen conservando la propiedad de ser libres de escala y que además son de tipo mundo pequeño.



**Figura 1.5:** Estructura espacial de la red de conexiones para redes con exponente  $\alpha = 2.5$  (izquierda) y  $\alpha = 5.0$  (derecha). Las figuras a) corresponden a redes de  $N = 50 \times 50$  sitios, y se muestra el mapa de enlaces. La parte b) muestra las capas químicas con respecto al sitio central para redes de las mismas características a las figuras superiores pero con un tamaño mayor ( $N = 300 \times 300$  sitios). Extraída de [4].



**Figura 1.6:** Distribución de grados de una red libre de escala embebida, (a) cuando se impone un valor de corte  $k_c$  y (b) cuando se alcanza un corte natural  $M$ . En (a) el tamaño de la red es  $L = 400$ , el exponente de la distribución es  $\alpha = 2.5$ , y  $A = 2$  (negro), 3 (rojo) y 4 (verde). Para (b)  $L = 100$ ,  $A = 10$  y  $\alpha = 2.5$  (negro), 3.0 (rojo) y 5.0 (verde). Extraída de [4].

## 1.5. Resultados numéricos

En esta sección mostraremos los resultados originales que se obtuvieron de la implementación del método de embebido que acabamos de describir, por medio de simulación numérica, siguiendo el protocolo usado por Rozenfeld [4]. A continuación veremos algunos ejemplos de redes embebidas en un espacio Euclídeo bidimensional y analizaremos sus propiedades. En todos los casos

trabajamos con redes de tamaño  $100 \times 100$  sitios. Estas redes serán estudiadas nuevamente en capítulos posteriores.

### 1.5.1. Distribución de grados

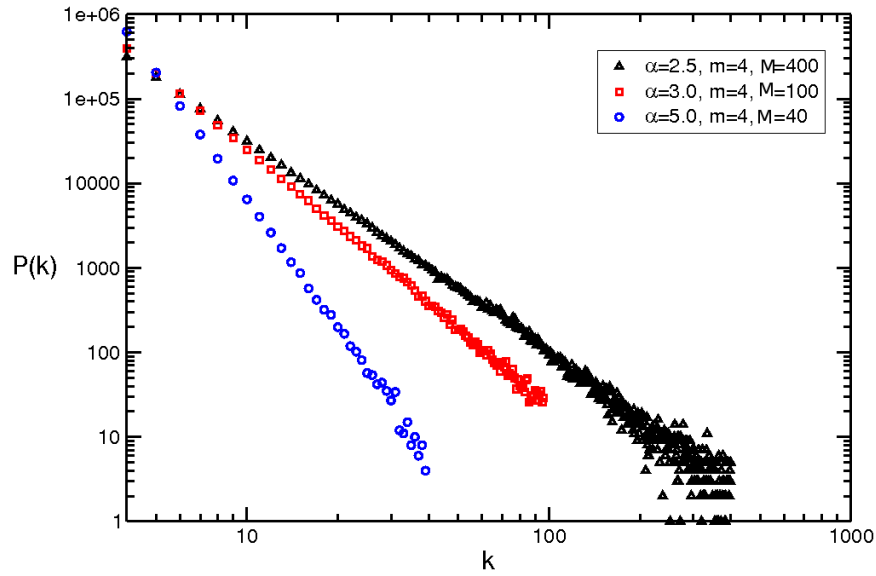
En las figuras 1.7 y 1.8 se pueden ver gráficos de la distribución de grados para distintas redes. Estos gráficos representan la probabilidad de encontrar un nodo de grado  $k$  en función de  $k$ . Por otro lado, el gráfico está realizado en escala logarítmica que resulta muy conveniente a la hora de representar distribuciones de probabilidad del tipo ley de potencias. Observemos que, de la ecuación (1.1) es fácil verificar que una ley de potencias está representada por una recta en un gráfico doble logarítmico ( $\ln(P(k))$  vs.  $\ln(k)$ ), donde el exponente  $\alpha$  es la pendiente de la recta.

La figura 1.7 muestra la distribución de grados para tres redes de tamaño  $100 \times 100$ , con  $A = 10$  y  $m = 4$  en escala doble logarítmica. La diferencia entre ellas reside en el exponente de la ley de potencias, lo cual hace que varíe también el máximo número de conexiones según la ecuación (1.6). Para  $\alpha = 2.5$  usamos  $M = 400$ ; para  $\alpha = 3.0$ ,  $M = 100$  y para  $\alpha = 5.0$ ,  $M = 40$ . Es importante verificar que el proceso de embebido no haya cambiado el exponente  $\alpha$  prefijado para la red. Esta verificación se realiza simplemente haciendo un ajuste de los puntos y encontrando la pendiente de la recta. En los tres casos que se muestran (como así también en los otros tantos analizados) hemos comprobado que la pendiente de la recta coincide con el valor especificado originalmente del exponente  $\alpha$ . Por ello podemos asegurar que el método de embebido implementado respeta la propiedad de distribución de ley de potencias que le asignamos a la red.

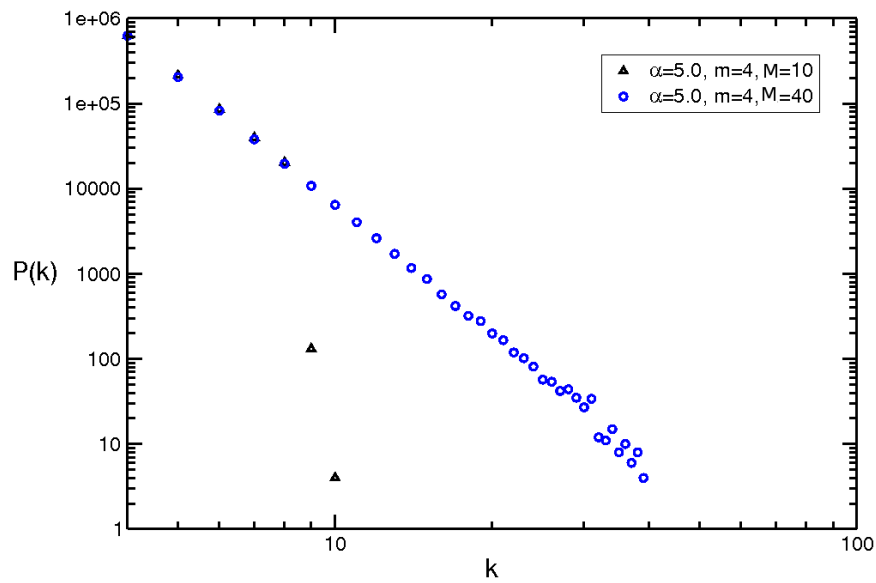
El gráfico de la figura 1.8 muestra la distribución de conectividades de dos redes con  $N = 100 \times 100$ ,  $\alpha = 5.0$ ,  $m = 4$  y dos valores distintos de  $M$ , a saber, 10 y 40. Para el caso  $M = 10$  se puede observar que la distribución termina en un cierto valor de corte  $k_c$  que es menor al máximo valor de conectividad permitido para la red, por lo cual corresponde a un caso en el que  $\xi < r_{max}$ . Este es el caso mencionado en la sección 1.4 en el que la red embebida será libre de escala hasta una distancia  $r < \xi$  y se auto-repetirá estadísticamente para distancias  $r > \xi$ . Por otro lado, el gráfico para  $M = 40$  corresponde al caso en el que  $\xi > r_{max}$ , ya que la distribución llega hasta el máximo valor de conectividad permitido para la red (corte natural de la distribución). En el transcurso de este trabajo, elegiremos siempre trabajar con este último tipo de redes embebidas que son libres de escala en todo el rango de valores  $k$  considerados.



## 1.5 Resultados numéricos



**Figura 1.7:** Distribución de grados para dos redes con  $N = 100 \times 100$ ,  $m = 4$ ,  $A = 10$  y diferentes valores de  $\alpha$  y  $M$ . Observamos que en los tres casos la distribución de grados presenta un corte natural.



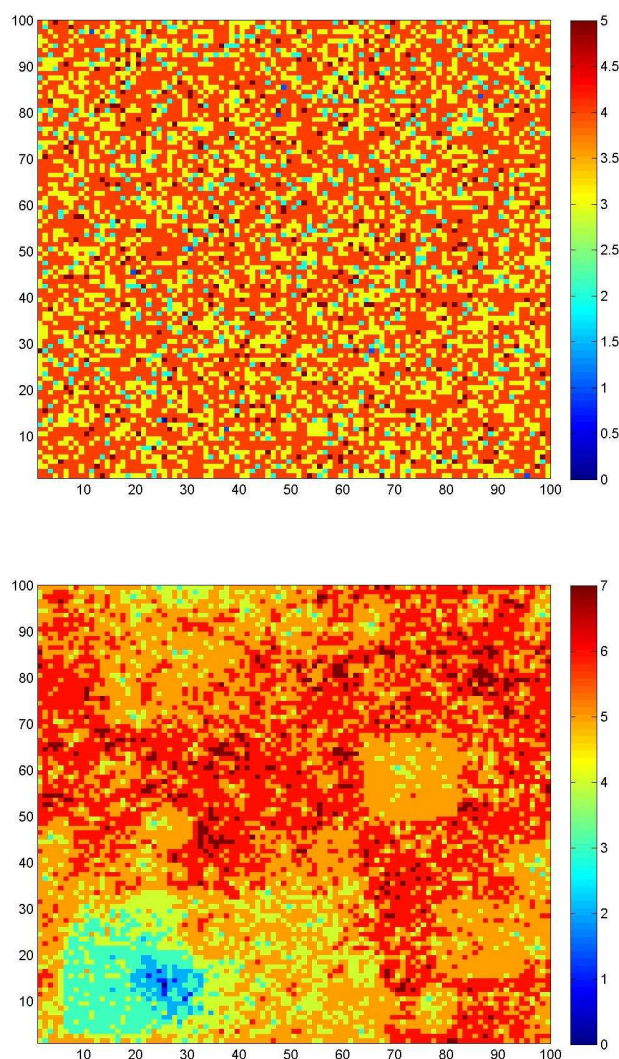
**Figura 1.8:** Distribución de grados para dos redes con  $\alpha = 5.0$ ,  $m = 4$ ,  $A = 10$  y diferentes valores de  $M = 10$  (triángulos) y  $M = 40$  (círculos). En el primer caso, la distribución termina en forma abrupta a un valor de corte, mientras que para  $M = 40$  la distribución tiene un corte natural.

### 1.5.2. Estructura espacial

Para observar las propiedades geográficas que introduce el proceso de embebido que acabamos de describir, en esta sección analizaremos la estructura espacial de dos redes análogas, una embebida y otra no. A modo comparativo, analizaremos dos redes del mismo tamaño y el mismo exponente

## 1.5 Resultados numéricos

de la distribución de grados, una embebida en un espacio euclídeo bidimensional y otra equivalente pero sin dicho proceso. Esta última no privilegia las conexiones con los vecinos cercanos. Es decir, una vez sorteada la conectividad de cada sitio según la ley de potencias, las conexiones se realizan eligiendo un sitio al azar y conectándolo con otros también elegidos aleatoriamente hasta completar su valor de conectividad o hasta que no existan más sitios libres. Este proceso se realiza hasta recorrer todos los sitios de la red. El resultado final en este caso es una red aleatoria con distribución de grado tipo ley de potencias. En ambos casos, red embebida y no embebida, hemos elegido simetrizar los enlaces, haciéndolas redes simétricas.



**Figura 1.9:** Distancia química desde el sitio central para una red no embebida (arriba) y embebida (abajo), ambas con  $\alpha = 2.5$ ,  $m = 4$ ,  $M = 400$  y  $A = 10$ .

Podemos observar las propiedades geográficas que introduce el embebido en las redes mirando las diferentes *capas químicas*. Recordemos que la capa química  $l$  está formada por todos los sitios cuya mínima distancia a otro dado sitio es  $l$ , donde entendemos por distancia al número de nodos

que separan ambos sitios, tal como lo hemos definido en la sección anterior. En las figuras 1.9 se muestran, en diferentes colores, las capas químicas sucesivas desde los sitios de la red hasta el sitio central para una red no embebida (arriba) y embebida (abajo). En ambos casos el tamaño es  $N = 100 \times 100$  sitios,  $\alpha = 2.5$ ,  $m = 4$ ,  $M = 400$  y  $A = 10$ . Estas figuras muestran claramente la carencia de estructura espacial en las redes no embebidas y la presencia de correlaciones espaciales introducidas por el embebido. Este hecho se evidencia en la estructura de clusters (aglomerados) de una misma tonalidad en la red embebida (figura inferior) que no se encuentra en la figura superior (no embebida), en la que se ve una distribución homogénea de colores.

## 1.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo hemos introducido el hilo conductor general que regirá el desarrollo del presente trabajo, junto con los conceptos y definiciones básicas relacionadas al estudio de las redes en general, haciendo particular énfasis en las redes complejas. Ya que resulta de particular interés para el desarrollo de los capítulos subsecuentes, hemos introducido el concepto de redes complejas embebidas en un espacio físico euclídeo de baja dimensionalidad. Se ha aplicado un método, originalmente desarrollado por Rozenfeld *et. al.* [4, 5], para embeber redes del tipo mundo pequeño con distribución de conexiones libre de escala. Hemos mostrado las propiedades más relevantes de tales redes, dentro de las cuales es importante destacar que el proceso de embebido de redes complejas mantiene el exponente de la ley de potencias pre-especificado, por lo cual siempre que hablemos de una red caracterizada por un  $\alpha$  en particular, podemos asegurar que el proceso de embebido que realizamos no alterará esta propiedad distintiva de la red.

Por último, como resultado más importante de este capítulo introductorio, hemos podido apreciar que una red embebida introduce correlaciones espaciales entre sitios, cosa que lógicamente no ocurre en una red no embebida. Esta característica de la red compleja embebida seguramente producirá efectos en la dinámica de sus sitios sin un análogo para redes sin estructura geográfica, cuestión que será objeto de investigación en los próximos capítulos.



---

## El modelo Hamiltoniano de Campo Medio (HMF)

---

### 2.1. Introducción

El modelo Hamiltoniano de Campo Medio o HMF<sup>1</sup> [18, 19] se puede considerar como un ejemplo paradigmático de sistema complejo. A pesar de su extrema simplicidad, su comportamiento dinámico ha revelado una enorme cantidad de resultados sorprendentes, nunca antes esperados para un modelo ferromagnético de alcance infinito [20]-[34].

Este modelo fue introducido en el año 1995 por dos físicos italianos, Mickael Antoni y Stefano Ruffo [18], con el fin de explicar, al menos cualitativamente, cierta fenomenología observada en algunos experimentos de multifragmentación de núcleos y clusters de iones. Tales procesos, que pueden ser descritos como transiciones de fase del tipo gas-líquido que ocurren bajo condiciones micro-canónicas pero en un sistema finito, presentan algunos comportamientos calóricos anómalos que han atraído la atención de la comunidad de la mecánica estadística durante la década pasada. En particular, las curvas calóricas obtenidas experimentalmente muestran una región subcrítica caracterizada por un calor específico negativo [35]. Estas curvas indican que, cuando se le supe energía al sistema, la temperatura en vez de subir, como se espera a partir de las leyes de estabilidad de la termodinámica, puede eventualmente decaer. Esta anomalía observada experimentalmente, que fuera la inspiradora del modelo HMF, pronto pasó a ser una más entre las muchas que presenta el modelo.

El modelo Hamiltoniano de Campo Medio consiste de un conjunto de  $N$  partículas fuertemente interactuantes asociada cada una a los nodos de una cadena unidimensional. Cada partícula representa a un rotador que está restringido a moverse en un círculo unidad (de radio  $r = 1$ ). Además, cada rotador interactúa con todos y cada uno de los otros rotadores del sistema a través de un potencial que no depende de la distancia entre ellos. Bajo estas condiciones, el cálculo de la termodinámica en el ensamble canónico se hace particularmente simple, lo cual nos brinda un conocimiento completo y detallado del comportamiento del sistema en condiciones de equilibrio. Además, por tratarse de

---

<sup>1</sup>Cococido como modelo HMF por sus siglas en inglés: Hamiltonian Mean Field.

un sistema Hamiltoniano, el mismo está dotado de una dinámica hamiltoniana microscópica propia, al contrario de lo que sucede con la mayoría de los modelos estadísticos.

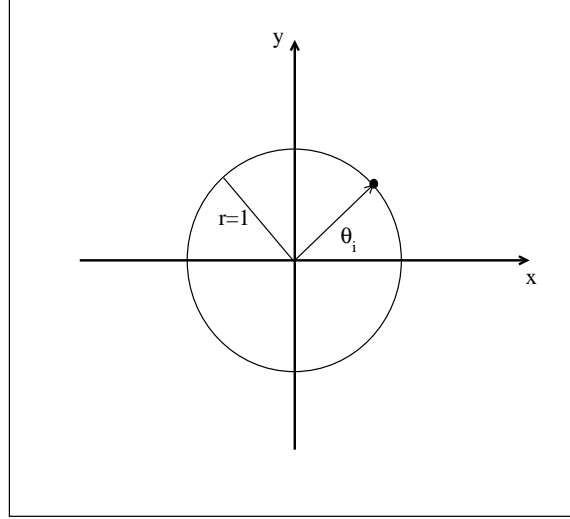
La integración numérica de las ecuaciones de movimiento del sistema es muy fácil de realizar en forma eficiente, por lo cual es posible calcular promedios temporales de las cantidades de interés usando simulaciones numéricas. Lo que ha llamado poderosamente la atención desde la introducción del modelo, es el hecho de que no siempre los promedios temporales coinciden con los promedios de ensamble. Por ejemplo, cuando el sistema está adecuadamente preparado puede quedar atrapado en soluciones llamadas *casi-estacionarias*. En estos estados las cantidades físicas que dependen de un único instante de tiempo presentan un comportamiento constante en el tiempo, aunque en realidad el sistema no posee la invariancia de traslación propia de los sistemas en equilibrio [18, 19].

Este modelo ha sido estudiado en una cantidad muy grande de trabajos con enfoques distintos. En particular, recientemente se ha sugerido que la existencia de tales anomalías calóricas está estrechamente relacionada con la topología de la función energía potencial por partícula del sistema [36]-[39], como de hecho ocurre en muchos de los sistemas vítreos. Para decirlo en pocas palabras, el sistema queda atrapado en una variedad crítica de la energía potencial por partícula, de la cual le resulta muy difícil escapar por ser una variedad extremadamente plana (desde el punto de vista topológico). Este estudio, que inicialmente se restringió apenas a una familia de trayectorias (las usualmente utilizadas en el análisis dinámico del sistema), posteriormente fue extendido para una variedad de condiciones iniciales y energías [40, 41, 42].

En este capítulo introduciremos en detalle el modelo HMF mostrando algunas de las propiedades estudiadas del mismo. Describiremos su termodinámica mediante cálculos en el ensamble canónico y analizaremos una serie de comportamientos dinámicos anómalos del sistema. Con estos conceptos, en el Capítulo 3 introduciremos la versión del modelo sobre una red embebida en un espacio unidimensional, mostrando los resultados obtenidos mediante simulación numérica.

## 2.2. Descripción del modelo HMF

En esta sección introduciremos una breve descripción del modelo HMF. El mismo consiste de un conjunto de  $N$  partículas ideales, todas ellas de masa unitaria, las cuales están limitadas a moverse sobre un círculo (que asumiremos, por simplicidad, de radio unitario). Como en todo sistema clásico, cada partícula es descrita por una coordenada generalizada  $\theta_i$ , donde  $i = 1, \dots, N$ , y por su correspondiente momento conjugado  $p_i$ . En el caso que nos interesa,  $\theta_i$  representa el ángulo formado por la posición de la partícula y el eje de coordenadas  $x$ , como se muestra en la figura 2.1. Por lo tanto, el momento conjugado corresponde al momento de inercia de la partícula.



**Figura 2.1:** Representación de una partícula del modelo HMF en el círculo unidad. La partícula tiene masa unitaria, y  $\theta_i$  es la coordenada angular.

Es posible describir este sistema mediante un Hamiltoniano de campo medio para  $N$  partículas o rotadores interactuando mediante un potencial de rango infinito (largo alcance), dado por:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{\varepsilon}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)] = E_c + E_p, \quad (2.1)$$

donde  $E_c$  y  $E_p$  son la energía cinética y potencial, respectivamente. La energía potencial ha sido re-escalada por  $N$  para hacer que la energía esté bien definida en el límite termodinámico. Además, como cada una de las  $N$  partículas interactúa con las restantes, los rotadores se mueven bajo la acción de un campo de fuerza que resulta ser la suma de los campos individuales producidos por todas las otras partículas.

Podemos asociar a cada rotador un vector de magnetización local:

$$\vec{m}_i = (\cos(\theta_i), \sin(\theta_i)). \quad (2.2)$$

La suma de las contribuciones  $\vec{m}_i$  de todas las partículas definen entonces la magnetización total del sistema  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = (M_x, M_y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{m}_i. \quad (2.3)$$

Si llamamos  $\phi$  a la fase de  $\vec{M}$ , tenemos que

$$\text{tg}(\phi) = \frac{M_y}{M_x}, \quad (2.4)$$

con  $-\pi < \phi \leq \pi$ . Notemos que tanto  $\vec{M}$  como  $\phi$  dependen del tiempo a través de las coordenadas  $\theta_i$ .

Haciendo uso de las ecuaciones clásicas de Hamilton, podemos obtener las ecuaciones de movimiento del sistema derivando el Hamiltoniano (2.1) respecto de las coordenadas y de los mo-

## 2.3 Solución exacta en el ensamble canónico

mentos generalizados. De esta forma obtenemos:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i, \quad (2.5)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = -\frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j). \quad (2.6)$$

Podemos reescribir esta última ecuación en términos de la magnetización total y de su fase, dados por (2.3) y (2.4). Por lo tanto el módulo de la fuerza que actúa sobre la  $i$ -ésima partícula será:

$$F_i = \dot{p}_i = -\frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j) = -\varepsilon M \sin(\theta_i - \phi), \quad (2.7)$$

donde  $M$  es el valor absoluto de la magnetización total del sistema ( $M = |\vec{M}|$ ). Dado que  $M$  y  $\phi$  dependen del tiempo a través de las variables angulares, el movimiento de cada partícula se determina auto-consistentemente mediante la evolución temporal del vector  $\vec{M}$ , el cual a su vez, depende del movimiento de todas las partículas.

Habiendo definido el vector de magnetización en la forma en que se muestra en la ecuación (2.2), podemos observar que el término de interacción en el Hamiltoniano (2.1) es formalmente equivalente a la energía potencial del modelo magnético de Heisenberg XY clásico en su versión Curie-Weiss. De aquí viene el nombre de *Hamiltoniano del modelo XY de campo medio* con el cual se lo conoce. Cuando  $\varepsilon > 0$  el potencial es atractivo y el estado fundamental se alcanza cuando todas las partículas están ubicadas en la misma posición del círculo unidad. En este caso la dinámica corresponde a la del modelo ferromagnético [18]. Cuando  $\varepsilon < 0$  el potencial es repulsivo, y el estado fundamental corresponde a una distribución uniforme de las partículas en el círculo unidad,  $p_i = 0$  y  $\theta_i = \frac{2\pi i}{N}$ , estado que es dinámicamente estable. En todo nuestro trabajo nos limitaremos a considerar el caso ferromagnético y asumiremos, sin pérdida de generalidad, que  $\varepsilon = 1$ .

La termodinámica del modelo se puede calcular exactamente usando el formalismo del ensamble canónico [18], de donde se obtiene que el sistema presenta una transición de fase de segundo orden. Los valores para los cuales ocurre tal transición son  $U_c/N = u_c = 3/4$  y  $T_c = 1/2$  (donde por  $U$  denotamos a la energía interna del sistema, y  $T$  la temperatura del mismo). A continuación daremos la solución exacta para el caso ferromagnético y en la siguiente sección analizaremos el comportamiento dinámico del sistema mediante el análisis de la integración numérica de las ecuaciones de movimiento (2.5) y (2.6).

### 2.3. Solución exacta en el ensamble canónico

A continuación daremos la solución exacta del modelo HMF ferromagnético realizando un cálculo analítico en el marco del formalismo canónico [18]. Antes de comenzar, consideremos una situación más general en la cual las partículas se encuentran bajo la acción de un campo magnético externo  $\vec{h}$ . Agregando el término de interacción correspondiente escribimos el Hamiltoniano (2.1) de la siguiente forma:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)] + \vec{h} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{m}_i. \quad (2.8)$$



### 2.3 Solución exacta en el ensamble canónico

La función partición del sistema está dada por:

$$\mathcal{Z} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^N dp_i d\theta_i \exp(-\beta H), \quad (2.9)$$

donde la integración se realiza sobre todo el espacio de las fases, es decir sobre los  $N$  momentos y las  $N$  variables angulares, y además  $\beta = 1/(K_B T)$ . Dado que el Hamiltoniano (2.8) se puede descomponer en una contribución debida a la energía cinética y otra debida a la energía potencial, la función partición (2.9) se puede factorizar de la siguiente forma:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_k \mathcal{Z}_v, \quad (2.10)$$

donde la parte cinética está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^N dp_i d\theta_i \exp\left(-\beta \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2\right) \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} dp_i d\theta_i \exp\left(-\beta \frac{1}{2} p_i^2\right) \right)^N \\ &= \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N}{2}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

y la contribución de la energía potencial se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_v &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^N dp_i d\theta_i \exp\left\{-\beta \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)] - \beta \vec{h} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{m}_i\right\} \\ &= \exp\left(\frac{-\beta N}{2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^N d\theta_i \exp\left\{\beta \frac{1}{2N} \left(\sum_i \vec{m}_i\right)^2 - \beta \vec{h} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{m}_i\right\} \\ &= \exp\left(\frac{-\beta N}{2}\right) \mathcal{J}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Aquí hemos usado la siguiente relación:

$$\sum_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j) = \left(\sum_i \vec{m}_i\right)^2, \quad (2.13)$$

y  $\mathcal{J}$  de la ecuación (2.12) está dada por:

$$\mathcal{J} = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^N d\theta_i \exp\left(\frac{\beta}{2N} \left(\sum_{i=1}^N \vec{m}_i\right)^2 - \beta \vec{h} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{m}_i\right). \quad (2.14)$$

Introducimos ahora la transformación de Hubbard–Stratanovich:

$$\exp\left(\frac{\mu}{2} \vec{x} \cdot \vec{x}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \exp(-\vec{y}^2 + \sqrt{2\mu} \vec{x} \cdot \vec{y}), \quad (2.15)$$

con  $\vec{y} \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mu > 0$ . Tomando

$$\frac{\beta}{N} = \mu \quad \text{y} \quad \sum_i \vec{m}_i = \vec{y}, \quad (2.16)$$

### 2.3 Solución exacta en el ensamble canónico

la ecuación (2.14) se puede escribir como:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \exp(-\vec{y}^2) \prod_{i=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_i \exp((\sqrt{2\mu}\vec{y} - \beta\vec{h}) \cdot \vec{m}_i). \quad (2.17)$$

Examinando las dos integrales observamos que podemos factorizar la integración sobre las coordenadas angulares de las  $N$  partículas. Usando que

$$(\sqrt{2\mu}\vec{y} - \beta\vec{h}) \cdot \vec{m}_i = |\sqrt{2\mu}\vec{y} - \beta\vec{h}| \cos(\alpha_i - \theta_i) \quad (2.18)$$

donde  $\alpha_i$  es una fase local, podemos calcular la integral angular como:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta_i \exp((|\sqrt{2\mu}\vec{y} - \beta\vec{h}| \cos(\alpha_i - \theta_i))) = 2\pi I_0(|\sqrt{2\mu}\vec{y} - \beta\vec{h}|), \quad (2.19)$$

donde  $I_0(x)$  es la función de Bessel modificada de orden cero. Introduciendo el resultado anterior en (2.17) y reescalando  $y \rightarrow \sqrt{2\mu}y$  obtenemos

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\pi} \frac{N}{2\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \exp \left[ -N \left( \frac{y^2}{2\beta} - \ln(2\pi I_0(|\vec{y} - \beta\vec{h}|)) \right) \right]. \quad (2.20)$$

Llevando todo a la ecuación (2.10) podemos reconstruir la función partición total para el sistema:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_k \mathcal{Z}_v = \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N}{2}} \exp \left( \frac{-\beta N}{2} \right) \mathcal{J}, \quad (2.21)$$

donde  $\mathcal{J}$  esta definida por la ecuación (2.20).

Una vez obtenida la función partición, es posible calcular la energía libre, recordando que ésta viene dada por:

$$\mathcal{F} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} \ln(\mathcal{Z}). \quad (2.22)$$

Para este último cálculo se utiliza el método de punto de ensilladura o *saddle point* [18], a través del cual obtenemos:

$$-\beta F = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2\pi}{\beta} \right) - \frac{1}{2} \beta - \frac{y^{*2}}{2\beta} + \ln(2\pi I_0(|\vec{y}^* - \beta\vec{h}|)), \quad (2.23)$$

donde  $y^*$  es el valor que maximiza el argumento de la exponencial en la ecuación (2.20), y por lo tanto satisface que

$$\frac{y^*}{\beta} + \frac{I_1(y^* - \beta h)}{I_0(y^* - \beta h)} = 0. \quad (2.24)$$

Aquí  $I_1$  es la función de Bessel modificada de 1° orden. Notemos que (2.24) es una ecuación auto-consistente. Podemos escribir la energía libre en función de la magnetización notando que existe un relación entre  $M$  e  $\vec{y}^*$  dada por

$$\vec{M} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{h}} = \frac{\vec{y}^*}{\beta}. \quad (2.25)$$

De esta forma llegamos a la siguiente expresión para la energía libre del sistema:

$$-\beta F = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2\pi}{\beta} \right) - \frac{1}{2} \beta - \frac{\beta}{2} M^2 + \ln(2\pi I_0(\beta M - \beta h)). \quad (2.26)$$

### 2.3 Solución exacta en el ensamble canónico

La ecuación (2.24) se puede resolver sólo numéricamente. Consideremos ahora el caso de campo externo nulo [18]. A partir de ahora consideraremos, sin pérdida de generalidad, que  $k_B = 1$ . Entonces para  $T > 1/2$  ( $\beta < 2$ ) la solución de energía libre mínima se obtiene para  $y = 0$ , lo cual corresponde a magnetización nula (recordemos (2.16)). Por otro lado, para  $T < 1/2$  ( $\beta > 2$ ) la solución es un valor de  $y$  no nulo y dependiente de la temperatura, que puede ser determinado sólo numéricamente. La magnetización está dada por el cociente de las funciones de Bessel  $I_1/I_0$  evaluada en la solución de la misma ecuación. Como resultado se obtiene que el sistema ferromagnético a campo nulo sufre una transición de fase continua, o de segundo orden, a la temperatura crítica  $T_c = 1/2$ . El parámetro de orden  $M$  se anula en la fase de alta temperaturas ( $T > T_c$ ) y es mayor que cero en la fase de bajas temperaturas ( $T < T_c$ ). La transición de fase se realiza desde una fase ferromagnética de baja energía con magnetización  $M \neq 0$  a una paramagnética de alta energía en la cual todas las partículas están distribuidas homogéneamente. En otras palabras, a medida que bajamos la temperatura por debajo de  $T_c$ , los diferentes rotadores comienzan a sincronizar sus movimientos en forma continua, hasta alcanzar la sincronización total a  $T = 0$ .

También es posible obtener la relación entre la temperatura y la energía interna del sistema, llamada *curva calórica*:

$$u = \frac{U}{N} = \frac{\partial(\beta \mathcal{F})}{\partial \beta} = \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2}(1 - M). \quad (2.27)$$

De ésta obtenemos que la transición ocurre con una energía  $u_c = 3/4$ .

En las figuras 2.2 presentamos  $M$  y  $T$  en función de  $u$ , ambas obtenidas a partir de la solución analítica, indicadas como líneas continuas (obtenidas de [43]). En éstas vemos claramente la transición de segundo orden que sufre el sistema en  $u_c = 3/4$ . Los símbolos corresponden a los resultados de simulaciones numéricas que analizaremos a continuación.

Como mencionamos antes, el Hamiltoniano del modelo se puede separar en una parte cinética y una de interacción. Una consecuencia directa de ello es la factorización de la función partición tal como se mostró en (2.10). En (2.11) observamos que podemos escribir la parte cinética de la forma

$$\mathcal{Z}_c = (z_c)^N = \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N}{2}}, \quad (2.28)$$

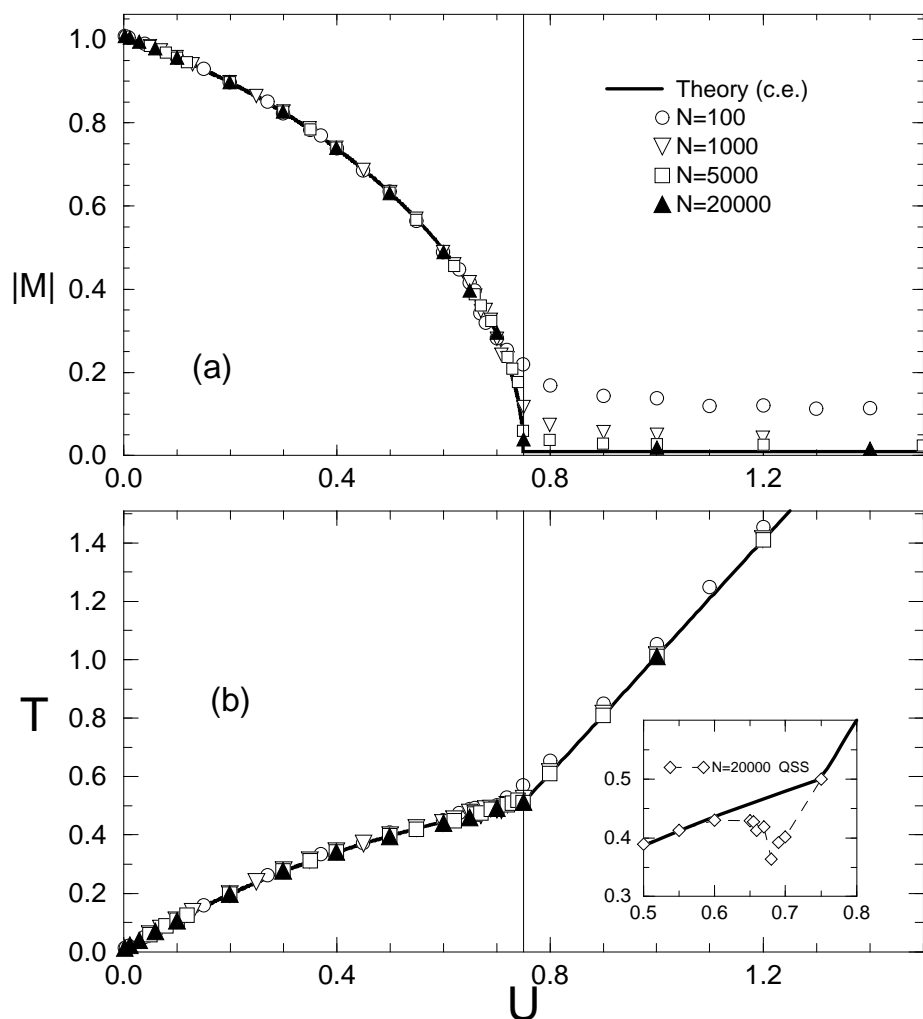
donde la contribución debida a una sola partícula está dada por

$$z_c = \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

Luego podemos obtener la energía cinética promedio por partícula como:

$$\langle e_c \rangle = \frac{\partial z_c}{\partial \beta} = \frac{T}{2}, \quad (2.30)$$

que establece una relación entre la energía cinética y la temperatura del sistema en el equilibrio.



**Figura 2.2:** Predicciones teóricas en el ensamble canónico (línea continua) para la magnetización  $M$  en función de la energía por partícula  $u$  (parte (a)) y para la curva calórica  $T$  en función de  $u$  (parte (b)) en comparación con las simulaciones numéricas (símbolos), para sistemas de tamaños  $N = 100, 1000, 5000, 20000$ . Los símbolos se obtuvieron a partir de configuraciones iniciales próximas al equilibrio termodinámico. La línea vertical indica la energía crítica por partícula  $u_c = 3/4$ . También se grafican, por separado, los resultados para el estado casi-estacionario de un sistema de (b). Estos resultados fueron extraídos de [43].

En esta sección pudimos obtener analíticamente la solución exacta del modelo HMF. Nuestro objetivo en la siguiente sección es comparar estos resultados analíticos con la solución numérica de las ecuaciones de movimiento. Como veremos, a partir de aquí surgen algunas particularidades muy interesantes en la dinámica del modelo.

## 2.4. Propiedades Dinámicas

Por otro lado, es posible estudiar el comportamiento dinámico del sistema integrando directamente sus ecuaciones de movimiento (2.5) y (2.6). Por tratarse de un sistema Hamiltoniano, la energía total es una cantidad conservada, por lo cual se conoce como *dinámica micro-canónica* a

este procedimiento.

En los casos en que se cumple la equivalencia entre el ensamble canónico y la dinámica microscópica, uno puede derivar una relación entre la energía cinética y la temperatura. Esto es posible siempre que el Hamiltoniano se pueda separar en una parte cinética y una potencial. Recordemos la relación (2.30), mediante la cual es posible calcular la temperatura del sistema vía la medición del valor medio de la energía cinética de equilibrio. Luego, podemos comparar las predicciones del ensamble canónico y las simulaciones micro-canónicas,

Volviendo a la figura 2.2, en la parte (a) se muestran con símbolos los resultados del cálculo de la magnetización en función de la energía interna por partícula  $u$  integrando las ecuaciones de movimiento. Las simulaciones se realizaron en [19] y corresponden a cuatro tamaños de ensamble diferentes ( $N = 100, 1000, 5000$  y  $10000$ ). Todos fueron obtenidos a partir de configuraciones iniciales próximas al equilibrio termodinámico. Recordemos que las curvas continuas representan los resultados analíticos obtenidos en el ensamble canónico. Se observa que ambas predicciones coinciden muy bien, salvo en la fase de alta energía. Sin embargo, queda claro de los resultados que estas discrepancias se deben al tamaño finito de los sistemas simulados. En la parte (b) de la figura 2.2 mostramos la curva calórica, es decir, la temperatura en función de la energía interna (línea llena), dada por (2.27), junto con los datos obtenidos mediante simulaciones numéricas. En resumen, hasta aquí nada parece ser sorprendente, pues los resultados canónicos y las simulaciones micro-canónicas coinciden bastante bien, salvo por efectos de tamaño finito.

Sin embargo, en la parte inferior de la figura (b), podemos ver una situación completamente diferente a la esperada cuando se parte de condiciones iniciales lejos del equilibrio. Un gráfico más detallado de la zona cercana a la energía crítica  $u_c = 3/4$ , muestra que en este caso las simulaciones numéricas no concuerdan con la predicción canónica en todo el rango de energías. Esta simulación se realizó inicializando el sistema en una clase de configuraciones conocidas como *condiciones iniciales water bag*. En esta familia de condiciones iniciales las variables angulares son inicialmente todas cero y los momentos son elegidos al azar de una distribución uniforme. Esta clase de configuraciones permiten inicializar el sistema en un estado bien lejos de su configuración de equilibrio. Volviendo a la figura 2.2, en particular al recuadro inferior de la parte (b), notamos que la fase de bajas energías de la curva calórica parece estar ubicada en la extrapolación de la fase de alta energía hasta energías levemente inferiores a 0.7. Estos estados especiales para los cuales las predicciones teóricas canónicas y las simulaciones micro-canónicas no coinciden se conocen como estados *metaestables* o *casi-estacionarios*<sup>2</sup> pues los promedios de observables que dependen de un tiempo muestran un comportamiento casi constante en el tiempo, a pesar de que los valores no coinciden con los valores de equilibrio. Un estudio cuidadoso del tiempo de vida medio de estos estados casi-estacionarios revela que en el límite termodinámico el sistema quedará eternamente preso en estas soluciones, descartándose así que este fenómeno pudiese deberse a efectos de tamaño finito.

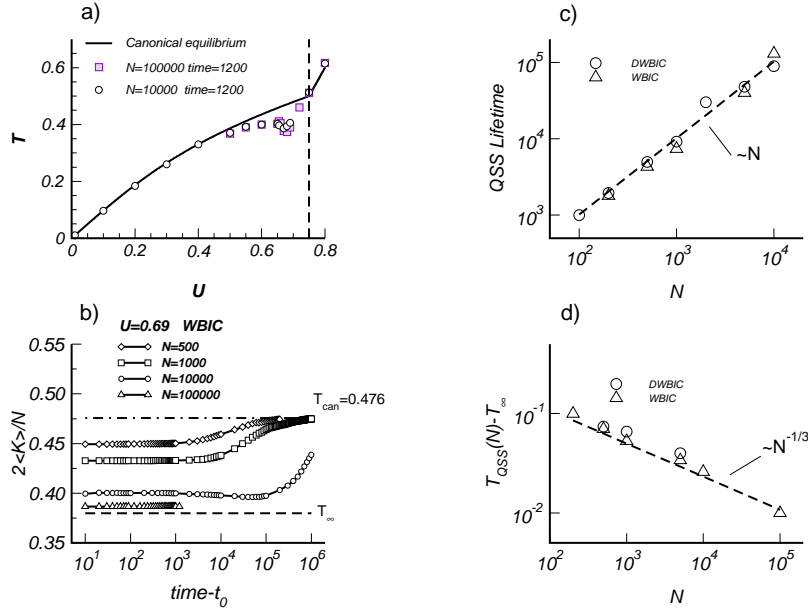
Notemos que la curva numérica mostrada en el recuadro interior de la figura 2.2 presenta una región de energías intermedias, justo debajo de la energía crítica  $u_c = 3/4$ , con calor específico negativo, tal como vimos se observa experimentalmente en algunos procesos de multi-fragmentación [35].

En la figura 2.3 b) mostramos un gráfico del doble de la energía cinética por partícula  $2\langle e_c \rangle$  (que en equilibrio, debe coincidir con la temperatura del sistema) obtenida mediante simulaciones numéricas y en función del tiempo. Todas las simulaciones corresponden a  $u = 0.69$  (justo debajo

<sup>2</sup>En la bibliografía se los suele denominar QSS por sus siglas del inglés: Quasi-Stationary States.

## 2.4 Propiedades Dinámicas

de la energía de transición) y se analizan sistemas de distintos tamaños. Cada curva corresponde a un promedio sobre diferentes configuraciones iniciales y el sistema se inicializa siempre en una configuración water bag. Vemos que en todos los casos el sistema llega rápidamente al estado casi-estacionario, el cual no coincide con la predicción canónica. En efecto, luego de un tiempo transitorio muy corto,  $2\langle e_c \rangle$  muestra un *plateau* o meseta correspondiente a una temperatura  $T_{QSS}(N)$  (y  $M_{QSS} \sim 0$ ) más baja que la canónica. Este estado casi-estacionario necesita un tiempo de relajación muy grande para llegar al estado de equilibrio canónico, que para este valor particular de energía  $u = 0.69$ , tiene temperatura  $T_{can} = 0.476$  y magnetización  $M_{can} = 0.307$ . Notemos que a medida que el tamaño del sistema aumenta, la temperatura del estado casi-estacionario es cada vez más baja y necesita un tiempo cada vez más grande para relajarse al estado de equilibrio canónico.



**Figura 2.3:** a) Curva calórica: los resultados numéricos micro-canónicos para  $N = 10000$  y  $N = 100000$  se comparan con la curva teórica en el ensamble canónico. La línea de trazo vertical indica la energía crítica. En las simulaciones numéricas se usaron condiciones iniciales water bag (WBIC) y la temperatura fue calculada como  $T = 2\langle E_c \rangle / N$ , donde  $\langle \cdot \rangle$  indica promedio temporal luego de un tiempo transitorio corto  $t_0 = 10^2$  que no se indica aquí. b) Evolución temporal de  $T = 2\langle E_c \rangle / N$  (simulación microcanónica), para una energía por partícula  $u = 0.69$  y diferentes tamaños. La línea de puntos y rayas representa la temperatura canónica  $T_{can} = 0.476$ . Para un dado sistema finito la cantidad  $T = 2\langle E_c \rangle / N$  comienza en un valor inicial menor a  $T_{can}$  y no relaja inmediatamente a la temperatura canónica. El sistema vive en estados casi-estacionarios (QSS) con un "plateau" de temperatura  $T_{QSS}(N)$  menor que el valor esperado  $T_{can} = 0.476$ . El tiempo de vida del estado casi-estacionario crece con  $N$  y el valor de la temperatura converge, a medida que  $N$  aumenta, a la temperatura  $T_{\infty} = 0.38$ , graficada en línea de trazo. El tiempo de vida de los estados casi-estacionarios c) y  $T_{QSS} - T_{\infty}$  d) se grafican en función del tamaño del sistema  $N$ , ambos en escala logarítmica. Se observa que el tiempo de vida diverge linealmente con  $N$ , mientras que  $T_{QSS}(N)$  converge a  $T_{\infty} = 0.38$  como  $N^{1/3}$  (la curva de ajuste se muestra en línea de trazo). Extraído de [44].

En la figura 2.3 c) vemos que el tiempo de vida del estado casi-estacionario crece linealmente con el tamaño  $N$  del sistema [44]. Por consiguiente, los dos límites  $N \rightarrow \infty$  y  $t \rightarrow \infty$  no conmutan, y si el límite termodinámico se toma antes que el límite de tiempo infinito, el sistema no relajarse al equilibrio. Por otro lado, cuando  $N$  aumenta,  $T_{QSS}(N)$  tiende a  $T_{\infty} = 0.380$ , valor que es obtenido analíticamente como la prolongación metaestable (a energías menores que  $u_c = 3/4$ ) de la solución de alta energía ( $M = 0$ ). La figura 2.3 d) muestra un gráfico de la diferencia entre la temperatura

## 2.5 La hipótesis topológica

en el estado casi-estacionario para diferentes valores de  $N$  y la temperatura de los mismos estados correspondientes a un sistema infinito, es decir  $T_{QSS}(N) - T_\infty$  versus el tamaño del sistema,  $N$ . Se ha encontrado que  $[T_{QSS}(N) - T_\infty] \propto N^{-1/3}$ , y  $M_{QSS} \propto N^{-1/6}$  [44].

Toda esta evidencia numérica revela la existencia de estados casi-estacionarios por debajo de la energía de transición en los cuales el sistema se queda confinado cuando es preparado en una condición inicial alejada del equilibrio termodinámico. Más aún, muestran que el tiempo de vida medio diverge con el tamaño del sistema, lo que indica que si el sistema fuera infinito, se mantendría fuera del equilibrio indefinidamente.

La discrepancia entre las simulaciones numéricas y la curva calórica teórica ha dado origen a un sinnúmero de trabajos de investigación al respecto. Sólo por nombrar brevemente las propiedades y anomalías encontradas en el modelo<sup>3</sup> podemos decir que el sistema, además de presentar estados casi-estacionarios anómalos, presenta una dinámica superdifusiva [44] y envejecimiento (aging) [45].

## 2.5. La hipótesis topológica

En un conjunto de publicaciones recientes se ha trabajado sobre la idea de que las transiciones de fase, que tanto interés han despertado en la física estadística durante las últimas décadas, pueden ser identificadas mediante cambios adecuados (en general drásticos) de algunas propiedades topológicas del espacio de configuración de un dado sistema [38, 46, 47, 48].

Consideremos un sistema clásico genérico de  $N$  partículas interactuantes descrito por un Hamiltoniano de la forma:

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + V(q), \quad (2.31)$$

donde  $(p, q) \equiv (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_N)$  denota un punto del espacio de fases  $\Gamma$  del sistema. El comportamiento estadístico de un sistema como este, en condiciones de equilibrio, está gobernado por su función partición, la cual está dada por:

$$\begin{aligned} Z_N(\beta) &= \int \prod_{i=1}^N dp_i dq_i \exp(-\beta H(p, q)) \\ &= \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{N/2} \int \prod_{i=1}^N dq_i \exp(-\beta V(q)) \\ &= \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{N/2} \int_0^\infty dv \int_{\Sigma_v} \frac{d\sigma}{\|\nabla V\|}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde  $d\sigma$  es el diferencial de superficie y  $v$  denota las hipersuperficies equipotenciales  $\Sigma_v$  en el espacio de configuración  $\mathcal{M}$ , definidas por

$$\Sigma_v = \{(q_1, \dots, q_N) \in \mathfrak{R}^N | V(q_1, \dots, q_N) = v\}.$$

La ecuación (2.32) muestra que la información estadística relevante del Hamiltoniano (2.31) está

<sup>3</sup>Por estar fuera del alcance de este nuestro trabajo, no profundizaremos más al respecto. Sugerimos al lector que resulte interesado remitirse a las referencias correspondientes.

contenida en la función partición canónica configuracional:

$$Z_N^C = \int \prod_{i=1}^N dq_i \exp(-\beta V(q)),$$

en tanto que la parte cinética no depara ninguna sorpresa. De hecho, el término cinético contribuye con un factor que es el mismo que se obtiene para un gas ideal clásico. En el último término de (2.32),  $Z_N$  se ha descompuesto en un suma infinita de integrales geométricas, definidas sobre  $\{\Sigma_v\}_{v \in \mathfrak{R}}$ . Una vez que el potencial de interacción  $V(q)$  está dado, el espacio de configuración del sistema queda automáticamente foliado en familias  $\{\Sigma_v\}_{v \in \mathfrak{R}}$  de tales hipersuperficies equipotenciales. Ahora, a partir de argumentos de la mecánica estadística estándar uno sabe que, para un dado valor de la inversa de la temperatura  $\beta$ , cuanto mayor es el número de partículas del sistema, más próximos a  $\Sigma_v \equiv \Sigma_{v\beta}$  son los microestados que contribuyen significativamente en el problema de calcular valores medios de observables físicos. Entonces, la hipersuperficie  $\Sigma_{v\beta}$  está asociada con la la energía potencial media calculada como:

$$v_\beta = (Z_N^C)^{-1} \int \prod_{i=1}^N dq_i V(q) \exp(-\beta V(q)).$$

Así, para cualquier  $\beta$ , si  $N$  es muy grande el soporte efectivo de la medida canónica se encoge, aproximándose a la hipersuperficie  $\Sigma_{v\beta}$ .

Sobre la base de estos argumentos la hipótesis topológica ha tomado la siguiente forma:

El origen crítico de una transición de fase de segundo orden reside en un cambio topológico drástico de  $\{\Sigma_v\}$  que ocurre para algún valor  $v_c$ . Este cambio topológico induce el comportamiento singular de los observables termodinámicos propios de la transición de fase.

Por un cambio topológico debe entenderse que las hipersuperficies  $\{\Sigma_v\}_{v < v_c}$  no son difeomórficas a las hipersuperficies  $\{\Sigma_v\}_{v > v_c}$ . En otras palabras, lo que sugiere la hipótesis topológica es que la medida canónica debe *sentir* un cambio drástico en la topología de las hipersuperficies de su soporte. Cuanto mayor es el número de partículas  $N$ , más delgado es el soporte efectivo de la medida canónica y por lo tanto más marcadas son las señales de transición de fase, hasta que finalmente, cuando  $N \rightarrow \infty$ , surgen las usuales singularidades matemáticas.

Este punto de vista topológico, alternativo a la visión usual basada en la teoría de la medida (como es, por ejemplo, el caso del canónico o del gran canónico), tiene la ventaja adicional de que, aun para sistemas de tamaño finito, es posible detectar variedades de diferentes cohomología y asociarlos con diferentes estados termodinámicos. Por el contrario, en todos los enfoques basados en teoría de la medida, las transiciones de fase son fenómenos restringidos al caso particular en que  $N \rightarrow \infty$ , en el cual se las asocia con la aparición de pérdidas de analiticidad.

La hipótesis topológica ha sido estudiada sobre un gran número de casos particulares, pero sin embargo no existe aún una teoría acabada que permita justificarla. No obstante, como sucede usualmente en las ciencias naturales, la falta de esta evidencia formal de ninguna forma afecta el grado de predictibilidad de la teoría. Lamentablemente, al igual que sucede con los cálculos usuales utilizando medidas micro-canónicas, canónicas o gran canónicas, obtener una noción precisa de la estructura topológica de las hipersuperficies de un potencial suele ser un problema de dimensiones formidables. En este sentido, el HMF ha sido sin duda un ejemplo paradigmático, ya que fue posible



entender en gran detalle su estructura topológica y cotejarla con las predicciones canónicas, pudiéndose constatar efectivamente que la transición de segundo orden, que aparece para  $u_c = 3/4$ , está asociada a un cambio topológico drástico de la correspondiente variedad.

### 2.5.1. Estructura topológica del modelo HMF

A continuación describiremos muy brevemente la estructura topológica del potencial del modelo HMF, y analizaremos los cambios topológicos en las hipersuperficies  $\Sigma_v$  mediante la teoría de Morse [38]. El modelo HMF está definido por un Hamiltoniano del tipo (2.31) con la función energía potencial dada por :

$$V(\theta_i) = \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)] - h \sum_{i=1}^N \cos(\theta_i), \quad (2.33)$$

donde, recordemos,  $\theta_i \in [0, 2\pi]$  es el ángulo de rotación de la  $i$ -ésima partícula y  $h$  es un campo magnético externo pequeño cuya dirección es paralela al eje  $x$ . Tal como ocurre con cualquier potencial del tipo Curie–Weiss, la energía potencial del modelo HMF se puede escribir en términos del parámetro de orden del sistema, en nuestro caso, la magnetización global ( $|\vec{M}|$ ). Así obtenemos:

$$V(\theta) = V(M_x, M_y) = \frac{N}{2}(1 - M^2) - hNM_x, \quad (2.34)$$

donde  $M_x$  y  $M_y$  son las componentes  $x$  e  $y$  de la magnetización total del sistema, tal como ya fue definido, según la relación

$$\vec{M} = (M_x, M_y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\cos(\theta_i), \sin(\theta_i)). \quad (2.35)$$

Entonces, el rango de valores de la energía potencial por partícula  $\mathcal{V} = V/N$  es:

$$-h \leq \mathcal{V} \leq \frac{1}{2} + \frac{h^2}{2}. \quad (2.36)$$

Notemos que el límite inferior corresponde a una configuración totalmente ordenada, o sea, con  $M = 1$ , mientras que el límite superior corresponde a un estado con  $M_x = -h$  y  $M_y = 0$ . Tomando  $h \rightarrow 0$ , el límite superior es el valor crítico  $V_c/N = 1/2$  correspondiente a la transición de fase, y es a su vez un estado completamente desordenado con  $M = 0$ .

El espacio de configuraciones  $\mathcal{M}$  del modelo es un toro de dimensión  $N$ , parametrizado por las  $N$  variables angulares. Definamos en  $\mathcal{M}$  la subvariedad  $\mathcal{M}_v = \{\theta \in \mathfrak{R}^N | V(\theta) \leq v\}$ , es decir,  $\Sigma_v = \partial \mathcal{M}_v$ . En forma equivalente, la teoría topológica predice que la transición de fase consiste en asumir un cambio drástico en la topología de la subvariedad  $\mathcal{M}_v$ , que ocurre para algún valor  $v_c$ , donde por cambio topológico entendemos que  $\{\mathcal{M}_v\}_{v < v_c}$  no es difeomórfica con  $\{\mathcal{M}_v\}_{v > v_c}$ . Queremos estudiar, entonces, la topología de la siguiente familia de subvariedades de  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{M}_v = \mathcal{V}^{-1}(-\infty, v] = \{\theta \in \mathcal{M} : \mathcal{V} \leq v\}. \quad (2.37)$$

Es decir, cada  $\mathcal{M}_v$  es el conjunto  $\{\theta_i\}_{i=1}^N$  tal que la energía potencial por partícula no supera un dado valor de  $v$ . Si  $v$  se incrementa desde  $-\infty$  a  $\infty$ , la familia  $\mathcal{M}_v$  cubre sucesivamente la totalidad de la variedad  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M}_v \equiv \emptyset$  cuando  $v < -h$ ). En (2.37),  $v$  ha sido reescalada por  $1/N$ , debido a que se eligió  $\mathcal{V} = V/N$  como la función de Morse.

De acuerdo con la teoría de Morse, los cambios topológicos en  $\mathcal{M}_v$  pueden ocurrir solamente en correspondencia con puntos críticos de  $\mathcal{V}$ , es decir, aquellos puntos en los cuales las derivadas de  $\mathcal{V}$  se anulan [38]. Esto implica inmediatamente que no pueden ocurrir cambios topológicos cuando  $v > 1/2 + h^2$ , o sea, todas las subvariedades  $\mathcal{M}_v$  con  $v > 1/2 + h^2/2$  deben ser difeomorfas a todo  $\mathcal{M}$ . Más aun, si  $\mathcal{V}$  es la función de Morse (i.e., tiene sólo puntos críticos no degenerados), entonces los cambios topológicos en  $\mathcal{M}_v$  tienen correspondencia uno a uno con los puntos críticos de  $\mathcal{V}$ , y éstos se pueden caracterizar completamente. En cualquier nivel de  $\mathcal{V}$  la topología de  $\mathcal{M}_v$  cambia de una forma completamente determinada por las propiedades locales de la función de Morse. De esta forma, se puede contruir secuencialmente el espacio de configuraciones completo  $\mathcal{M}$  a partir de  $\mathcal{M}_v$ , aumentando  $v$ .

Conociendo el índice  $k$  de todos los puntos críticos (es decir, el número de autovalores negativos del Hessiano de  $\mathcal{V}$  en ese punto) bajo un nivel  $v$  dado, podemos obtener exactamente la *función característica de Euler* de la subvariedad  $\mathcal{M}_v$ , definida por:

$$\chi(\mathcal{M}_v) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \mu_k(\mathcal{M}_v), \quad (2.38)$$

donde el *número de Morse*  $\mu_k$  es el número de puntos críticos de  $\mathcal{V}$  que tiene índice  $k$ . La función característica de Euler  $\chi$  es un *invariante topológico* (es decir, no es afectado por una deformación difeomórfica): cualquier cambio en  $\chi(\mathcal{M}_v)$  implica un cambio topológico en  $\mathcal{M}_v$ . Mientras sea  $h > 0$ ,  $\mathcal{V}$  es realmente una función de Morse al menos en el intervalo  $-h \leq v < 1/2 + h^2/2$ , mientras que el valor máximo  $v = 1/2 + h^2/2$  puede ser un caso patológico que corresponde a un nivel crítico con puntos críticos degenerados. Sin embargo el análisis se puede extender a éstos también.

Para caracterizar los cambios topológicos de  $\mathcal{M}_v$  tenemos que encontrar los puntos críticos y los valores críticos de  $\mathcal{V}$ , para lo cual resolvemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{V}(\theta)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.39)$$

Luego debemos calcular los índices de todos los puntos críticos de  $\mathcal{V}$ , es decir, el número de autovalores negativos del Hessiano:

$$H_{i,j} = \frac{\partial^2 \mathcal{V}(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.40)$$

Usando (2.34) podemos reescribir la ecuaciones (2.39) de la siguiente forma:

$$(M_x + h) \sin(\theta_i) - M_y \cos(\theta_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.41)$$

Mientras  $(M_x + h)$  y  $M_y$  no sean simultáneamente nulos (la violación de esta condición sólo es posible en el nivel  $v = 1/2 + h^2/2$ ), las soluciones de las ecuaciones (2.41) son configuraciones en las cuales los ángulos son 0 o  $\pi$ . En particular, la configuración  $\theta_i = 0$  para todo  $i$  es un mínimo absoluto de  $\mathcal{V}$ . El resto de las configuraciones corresponden a un valor de  $v$  que depende sólo del número de ángulos que son iguales a  $\pi$ .

Se puede ver que cuando  $v$  cambia desde su valor mínimo  $-h$  hasta  $1/2 + h^2/2$  la variedad  $\mathcal{M}_v$  tiene una secuencia de cambios topológicos en los  $N$  valores críticos. Esperamos que haya, además, otro cambio topológico localizado en el valor máximo de  $\mathcal{V}$ , esto es, en el valor crítico

$$v_c = \frac{1}{2} + \frac{h^2}{2}. \quad (2.42)$$

## 2.5 La hipótesis topológica

Sin embargo, el argumento anterior no prueba esto, ya que los puntos críticos de  $\mathcal{V}$  correspondientes a este nivel crítico pueden ser degenerados. No obstante, éste es justo el cambio topológico que está relacionado con la transición de fase termodinámica del modelo HMF.

La temperatura  $T$ , la energía por partícula  $u$  y la energía potencial por partícula promedio  $\langle \mathcal{V} \rangle$  en el límite termodinámico obedecen la ecuación:

$$2u = T + 2 \langle \mathcal{V} \rangle (T). \quad (2.43)$$

Sustituyendo en esta ecuación la energía por partícula promedio  $u_c = 3/4$  y la temperatura crítica  $T_c = 1/2$ , se obtiene, cuando  $h \rightarrow 0$

$$v_c = \langle \mathcal{V} \rangle_c = \langle \mathcal{V} \rangle (T_c) = 1/2. \quad (2.44)$$

Así, los cambios topológicos en la familia de variedades  $\mathcal{M}_v$  que ocurren en este  $v_c$ , donde  $v_c$  es independiente de  $N$ , están conectados con la transición de fase en el límite  $N \rightarrow \infty$  y  $h \rightarrow 0$ .

No obstante, tenemos que probar que realmente existe un cambio topológico en  $v_c$ . Con este fin se utiliza la teoría de Morse para caracterizar completamente todos los otros cambios topológicos que ocurren para  $v < v_c$ . Sabiendo además que para  $v > v_c$  la variedad  $\mathcal{M}_v$  debe ser un toro de dimensión  $N$  [38], se ha podido probar no sólo que debe ocurrir un cambio topológico en  $v_c$ , sino también en que forma éste difiere de otros cambios topológicos, es decir, aquellos que ocurren para  $0 \leq v < v_c$ . La teoría de Morse permite caracterizar completamente los cambios topológicos que ocurren en  $\mathcal{M}_v$  si se conocen los índices de los puntos críticos de  $\mathcal{V}$ . Para determinar el índice de los puntos críticos, es decir, el número de autovalores negativos del Hessiano de  $\mathcal{V}$  en un punto crítico, se sigue el siguiente procedimiento.

Para el modelo HMF, el Hessiano de  $\mathcal{V}$  se puede escribir como la suma de dos matrices [38]:

$$H = D + B, \quad (2.45)$$

donde  $D$  es una matriz diagonal cuyos elementos están dados por:

$$D_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{N} (M_x \cos(\theta_i) - M_y \sin(\theta_i)), \quad (2.46)$$

y los elementos de la matriz  $B$  son:

$$B_{ij} = \frac{1}{N^2} (1 - \delta_{ij}) \cos(\theta_i - \theta_j) - \frac{1}{N^2} \delta_{ij}. \quad (2.47)$$

Bajo ciertas consideraciones, se puede probar que sólo los elementos diagonales de  $H$  sobreviven cuando  $N \gg 1$  [38]. Por lo tanto, el número de autovalores negativos de  $H$  en los puntos críticos de  $\mathcal{V}$  es igual al número de elementos negativos de la matriz diagonal  $D$ .

Con todo esto, se pueden obtener los números de Morse  $\mu_k$ , es decir, el número de puntos críticos con índice  $k$ . Excluyendo el caso en que  $v = 1/2 + h^2/2$ , se encuentra que:

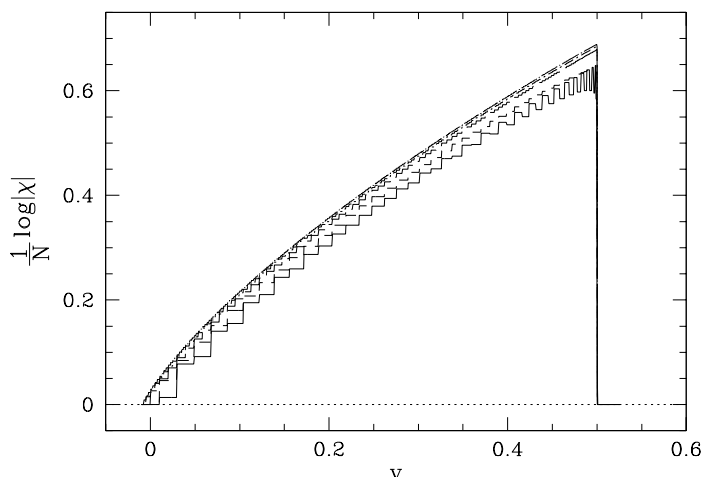
$$\mu_k(v) = 0 \quad \forall k > \frac{N}{2}. \quad (2.48)$$

Esto quiere decir que mientras sea  $v < v_c = 1/2 + h^2/2$ , no existe ningún punto crítico con índice mayor a  $N/2$ . Esta observación es crucial para probar que el cambio topológico debe ocurrir en  $v_c$ . Usando el concepto de *números de Betti*, se puede probar que para  $-h \leq v < 1/2 + h^2/2$  la variedad

es sólo la mitad de un toro de dimensión  $N$  [38]. Además sabemos que para  $v > 1/2 + h^2/2$ ,  $\mathcal{M}_v$  es un toro  $N$ -dimensional completo, por lo tanto se concluye que en  $v = v_c = 1/2 + h^2/2$  debe ocurrir un cambio topológico.

Es importante remarcar que no sólo existe un cambio, sino que además éste es un cambio topológico *drástico*, en el cual la mitad de un toro de dimensión  $N$  se transforma en un toro completo. Además, la energía potencial por partícula  $\mathcal{V}$  es una función de Morse *regular* para  $v < v_c$ , pero esto no es cierto para  $v \geq v_c$ , lo cual sucede debido a que el nivel  $v_c$  contiene puntos críticos degenerados.

Por último, vamos a analizar la forma de la función característica de Euler (2.38) calculada en el contexto del modelo HMF [38]. En la figura 2.4 mostramos un gráfico de  $\log(|\chi|)/N$  en función de  $v$  para distintos valores de  $N$ , extraído de [38]. Podemos observar que el *gran* cambio topológico ocurre en valor crítico de  $\mathcal{V}$ ,  $v = 1/2$ , que se refleja en un salto discontinuo de  $|\chi|$ . Este cambio topológico corresponde a la transición de fase encontrada en el límite termodinámico,  $V_c/N = 1/2$ . Observamos que la transición de fase se puede predecir aun en el caso de un sistema de tamaño finito. Notemos que se ha aplicado un campo externo muy pequeño (casi nulo), con el único propósito de romper la degeneración debida a que el sistema a campo nulo se encuentra en una superficie crítica, y de esta forma facilitar el cálculo de la función Característica de Euler.



**Figura 2.4:** Logaritmo de la función Característica de Euler para el modelo HMF ( $\log(|\chi|(\mathcal{M}_v))/N$ ) en función de  $v$ . Las curvas representan sistemas de distintos tamaños; desde abajo hacia arriba se grafica para  $N = 50, 200$  y  $800$ . Para todos los casos se usó un campo externo  $h = 0.01$ . Observemos que se produce un salto abrupto de  $\log(|\chi|(\mathcal{M}_v))/N$  en  $v_c = 1/2$ . Gráfico extraído de [38].

### 2.5.2. Una explicación topológica para los estados casi-estacionarios del modelo HMF

En esta sección analizaremos el régimen casi-estacionario observado justo debajo de la energía crítica (en la fase ordenada) desde el punto de vista topológico. Este análisis, realizado recientemente [39], se concentró en la topología de la superficie definida por la energía potencial en el espacio de configuración.

Para entender el comportamiento del modelo en términos de la topología de la función  $\mathcal{V} =$

## 2.5 La hipótesis topológica

$V/N$  es útil notar que en la fase de alta energía (y alta temperatura), donde el sistema se encuentra desordenado ( $\vec{M} = 0$ ), éste tiene, en equilibrio termodinámico, la máxima energía potencial a la que puede acceder, o sea,  $v = 1/2$ . En este caso la energía cinética por partícula  $k = K/N$  queda unívocamente determinada como

$$k = u - v.$$

La transición de fase de segundo orden señala, en términos topológicos, el punto a partir del cual el sistema comienza a ceder su energía potencial a favor de energía cinética, la cual se utiliza para sincronizar el movimiento de las partículas. A medida que la energía del sistema disminuye, la magnetización crece, hasta que finalmente, para  $u = 0$ , la energía potencial por partícula debe anularse y el módulo de la magnetización toma el valor  $|M| = 1$ .

Como hemos visto ya, la función energía potencial por partícula, definida en el espacio de configuraciones  $\mathcal{M}$  del sistema, tiene la propiedad de sufrir un cambio topológico drástico precisamente en el valor crítico  $v_c = 1/2$ . Para valores menores a éste, la topología de la función es difeomorfa con un medio toro  $N$  dimensional. Esto quiere decir que, en el límite  $N \rightarrow \infty$ , en cada superficie equipotencial el sistema accede a puntos críticos de diferentes índices  $k$  (número de direcciones inestables) pero todos ellos menores a  $N/2$ . En el valor crítico  $v_c = 1/2$  la función se vuelve difeomorfa con un toro  $N$  dimensional, indicando que ahora el sistema puede acceder a puntos críticos con índices entre  $N/2$  y  $N$ .

Los puntos críticos de  $\mathcal{M}$  son aquellos puntos en los cuales todas las derivadas de la energía potencial por partícula  $V/N$  se anulan. Esto significa que

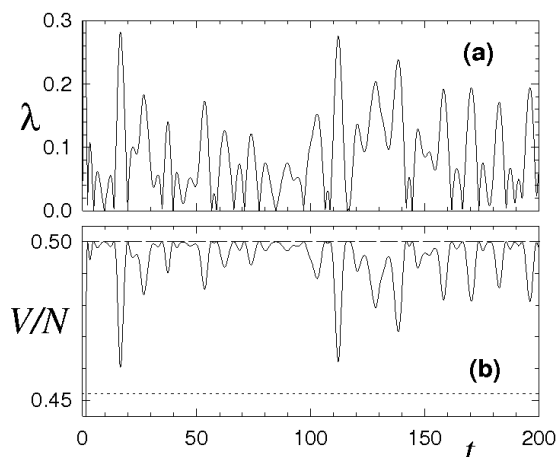
$$\frac{\partial V/N}{\partial \theta_i} = \frac{1}{N} M_x \text{sen}(\theta_i) - \frac{1}{N} M_y \text{cos}(\theta_i) = 0. \quad (2.49)$$

A fin de identificar los puntos críticos de la variedad  $\mathcal{M}$ , definimos la cantidad  $\lambda$  como el módulo de la más grande de las  $N$  derivadas de  $V/N$  respecto a  $\theta_i$ , es decir,

$$\lambda = N \max_i \left| \frac{\partial(V/N)}{\partial \theta_i} \right|. \quad (2.50)$$

Luego, como  $\lambda$  es la máxima derivada (en módulo), cada vez que ésta se anule, las  $N - 1$  restantes también serán nulas, por lo que estamos en la condición (2.49). Esto significa que cada vez que  $\lambda = 0$  el sistema llega a un punto crítico de  $\mathcal{M}$ .

El estudio del comportamiento de  $\lambda$  a medida que el sistema evoluciona en el tiempo se realizó en [39], inicializando el sistema en una configuración muy lejos del equilibrio. En estas condiciones iniciales, denominadas *water bag*, se coloca las partículas agrupadas en la posición  $\theta_i = 0$  para todo  $i$ , y los momentos se eligen aleatoriamente a partir de una distribución uniforme. Éste es el tipo de condiciones que se usaron para describir las trayectorias casi-estacionarias (sección 2.4). Un caso particular de estas condiciones iniciales se obtienen cuando los momentos son equidistribuidos. En este caso hablamos de condiciones *water bag perfectas*.



**Figura 2.5:** Evolución temporal de  $\lambda$  (a) y de  $V/N$  (b) para un sistema de  $N = 500$  partículas y energía por partícula  $u = 0.69$ , justo debajo de la transición de fase. El sistema fue preparado inicialmente en una configuración water bag perfecta. La línea de puntos y la línea de trazo de la parte (b) corresponden respectivamente a los valores de equilibrio y de casi equilibrio en el límite termodinámico. Gráfico extraído de [39]

El análisis de  $\lambda$  para un sistema con energía por partícula  $u = 0.69$ , es decir, en el estado casi-estacionario, evidencia que el sistema visita uno tras otro los puntos críticos de la energía potencial (estos puntos corresponden a  $V/N = 1/2$  y  $M = 0$ ). En la figura 2.5 (a), extraída de [39], se puede observar este comportamiento, ya que  $\lambda$  se anula en varias oportunidades a medida que el sistema evoluciona en el tiempo. El intervalo de tiempo transcurrido entre dos puntos críticos sucesivos no presenta un patrón de periodicidad. Por el contrario, el sistema visita los puntos críticos aparentemente en forma desordenada. La función distribución de probabilidad del intervalo de tiempo entre puntos críticos presenta un comportamiento que se puede ajustar a un decaimiento regido por una ley de potencia [39], lo que sugiere la conformación de una red compleja.

Otra característica del comportamiento dinámico es la siguiente: inicialmente el sistema posee la energía potencial más baja posible,  $v = 0$ , y va casi abruptamente a una región con máxima energía potencial media por partícula, pasando por la energía potencial media de equilibrio, y permanece alrededor de este nivel durante todo el tiempo que dura la simulación. Como se muestra en la figura 2.5 (b),  $v$  llega cerca de la energía potencial mas alta posible,  $v = 1/2$ , trata de escapar de allí, pero usa la energía cinética que ganó para volver nuevamente a un punto crítico. De algún modo, el sistema no es capaz de relajarse desde ese nivel al nivel de equilibrio durante períodos de tiempo muy largos. Se puede decir entonces que, en los estados casi-estacionarios, el sistema es atrapado por la variedad crítica de la energía potencial por partícula correspondiente a  $v_c = 1/2$ . En cuanto a la estabilidad de los puntos críticos visitados por el sistema, se encontró que éstos tienen dos direcciones negativas y  $N - 2$  direcciones marginales.

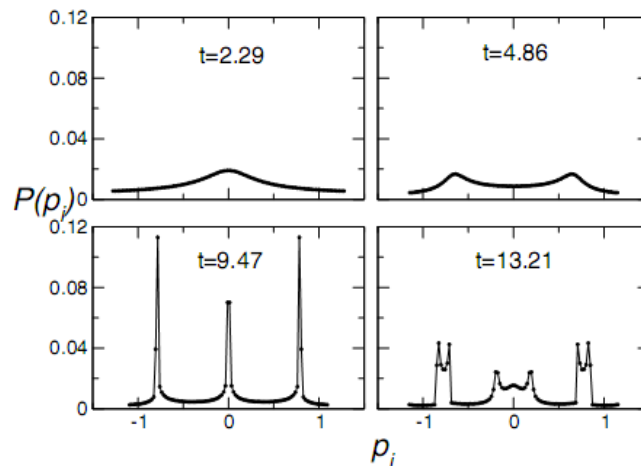
### 2.5.3. Resultados numéricos

En esta sección presentaremos resultados numéricos originales integrando el sistema de ecuaciones de movimiento del modelo HMF por medio del método simpléctico de cuarto orden [49].

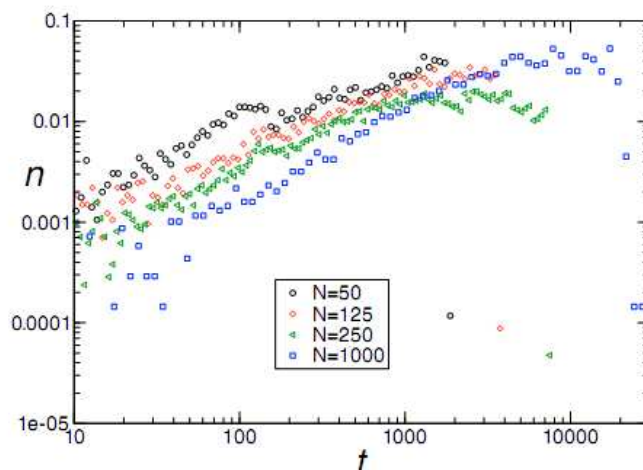
## Dinámica de relajación hacia el equilibrio

Veamos ahora qué características tienen las distribuciones de ángulos y momentos en los puntos críticos que visitan las trayectorias casi-estacionarias. Estos resultados originales se encuentran publicados en [42]. Con respecto a los ángulos, hemos verificado que a lo largo de toda la trayectoria del estado casi-estacionario, el sistema visita solo puntos críticos de  $V/N$  caracterizados por distribuciones uniformes de los rotadores alrededor del círculo unidad. En contraste con este comportamiento tan simple, hemos observado que en las distribuciones de los momentos aparecen escenarios mucho más intrincados. En la figura 2.6 se encuentran graficadas las distribuciones de probabilidad para los momentos  $P(p)$  para los cuatro primeros ceros de la función  $\lambda(t)$ , que corresponden a los tiempos  $t = 2.29, 4.86, 9.47$  y  $13.21$ . Allí podemos observar que los momentos, que inicialmente estaban completamente desordenados, se han ordenado súbitamente en el primero cero de la función  $\lambda$  formando una distribución tipo campana. Desde ese momento cada vez que el sistema visita la sub-variedad crítica  $v_c = 1/2$  (y  $\lambda = 0$ ), claramente observamos que la complejidad de la distribución se incrementa formando nuevos picos. Este resultado sugiere claramente que el sistema está tratando de superar barreras entrópicas en su camino al equilibrio.

Hasta ahora nuestra descripción topológica se ha restringido al comportamiento del sistema a tiempo cortos. Pero es ya conocido, tal como vimos en la primera parte de este capítulo, que el sistema queda atrapado en estas trayectorias casi-estacionarias durante un tiempo que diverge cuando el tamaño del sistema  $N$  aumenta. Con el objetivo de caracterizar también el comportamiento a tiempos largos, en la figura 2.7 se muestra el histograma normalizado (en escala doble logarítmica) del número de puntos críticos visitados por el sistema a medida que transcurre el tiempo. Se puede observar que el sistema toca puntos críticos a lo largo de toda la solución casi-estacionaria y no solo durante el régimen de tiempos cortos. Más aún, para un valor fijo de  $N$ , vemos que a un cierto tiempo  $\tau(N)$  que depende del tamaño del sistema (y que se encuentra en concordancia con el tiempo que necesita el sistema para abandonar la trayectoria casi-estacionaria), la trayectoria se aparta definitivamente de la sub-variedad crítica y  $n$  cae drásticamente a cero.



**Figura 2.6:** Distribuciones de probabilidad para los momentos para los cuatro primeros ceros de la función  $\lambda(t)$ , que corresponden a los tiempos  $t = 2.29, 4.86, 9.47$  y  $13.21$ .



**Figura 2.7:** Histograma del número de puntos críticos a un tiempo  $t$  para  $U/N = 0.69$  y diferentes tamaños de sistema  $N = 50, 125, 250$  y  $1000$ . Extraído de [41]

### El rol de la energía

Como ya hemos mencionado, en [39] se estudió el comportamiento de máxima derivada  $\lambda$  sólo en los casos  $U/N = 0.69$  y  $U/N = 10$ . En esta sección presentaremos los resultados originales que hemos obtenido al extender estos resultados para diferentes valores de energías que van desde  $U/N = 0.60$  (en la fase ordenada) hasta  $U/N = 2.0$  (en la fase desordenada), siguiendo el mismo protocolo descrito más arriba. Estos resultados se encuentran publicados en [42]. En todos los casos, inicialmente los momentos son elegidos aleatoriamente de una distribución uniforme y los ángulos están fijos en el eje  $x$ . A lo largo de las simulaciones hemos evaluado  $\lambda$  como función de  $t$  para una única muestra. Si bien mostraremos los resultados correspondientes a un sistema de  $N = 500$  rotadores, hemos verificado que se obtiene el mismo comportamiento en sistemas de mayor tamaño.

La figura 2.8 muestra la evolución temporal de la máxima derivada  $\lambda$  para tres regímenes distintos: energías en la fase desordenada (figura superior), energías justo debajo del valor de transición de fase (figura media) y energías en la fase ordenada (figura inferior). Se pueden apreciar claramente tres comportamientos distintos. En la fase desordenada ( $U/N = 0.78, 1.0$  y  $2.0$ ) se puede ver que el sistema toca periódicamente la sub-variedad crítica  $v_c = 1/2$  (cuando  $\lambda = 0$ ) y que este período  $\Delta t$  decrece a medida que  $U/N$  crece. En el gráfico del medio, donde la energía fue elegida justo por debajo del valor crítico de transición de fase  $U/N = 0.75$ , se muestran los valores de energía  $U/N = 0.68, 0.71$  y  $0.74$ . En este caso se observa que el sistema queda vagando en el espacio de configuraciones, tocando la sub-variedad crítica pero sin periodicidad, a diferencia del caso anterior. Se puede verificar, tal como se muestra en [39] para  $U/N = 0.69$ , que el sistema describe un patrón complejo cuando  $\lambda = 0$ . Por último, la figura inferior muestra el comportamiento de  $\lambda(t)$  también en la fase ordenada, pero ahora con energías más alejadas de la de transición  $U/N = 0.60, 0.63$  y  $0.66$ . En este caso, el sistema inicialmente es atraído a la sub-variedad crítica  $v_c = 1/2$ , pero luego de unas pocas visitas el sistema escapa y nunca más vuelve a ella. Se pudo verificar que para energías mucho más bajas el sistema se mueve siempre lejos de la sub-variedad  $v_c = 1/2$ .

Como acabamos de mencionar, en la fase de energías altas el sistema presenta un patrón regular

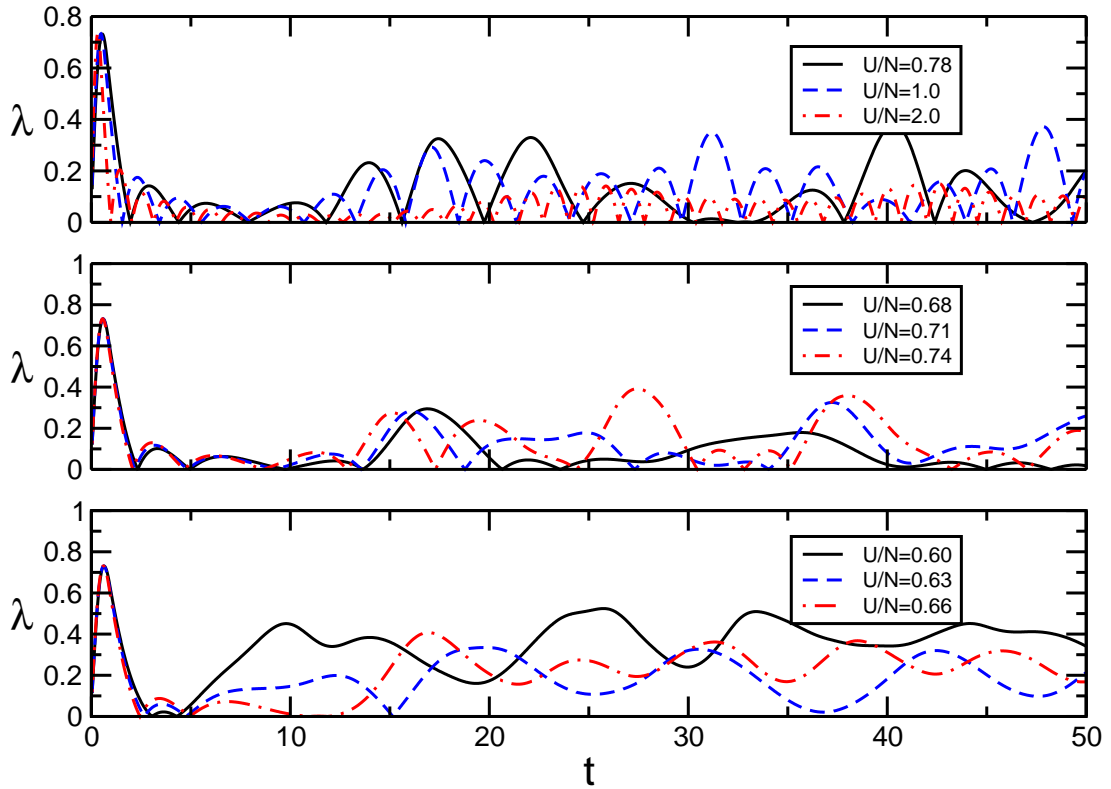


## 2.5 La hipótesis topológica

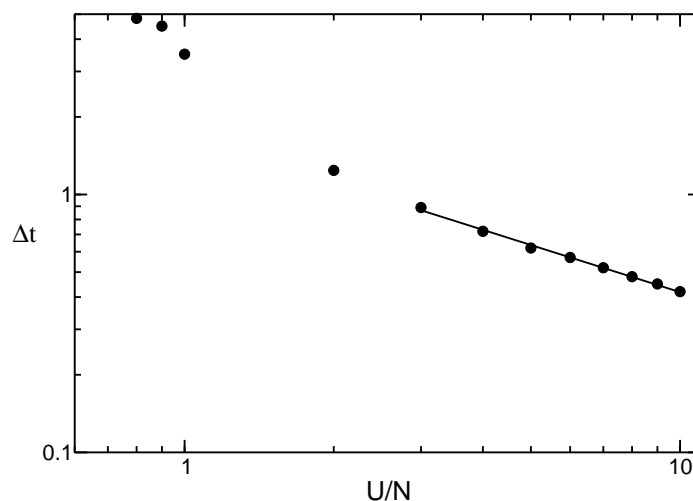
de visitas a la sub-variedad crítica, ya que  $\lambda$  se anula de manera periódica. En la figura 2.9 presentamos, en un gráfico doble logarítmico, el resultado del estudio de la dependencia del período  $\Delta t$  en función de la energía del sistema. Pudimos verificar que este período decae como ley de potencias para valores de  $U/N$  grandes. La regla que se encontró es,

$$\Delta t \propto t^{-\alpha} \quad \alpha \approx 0.60.$$

Esto indica que el comportamiento periódico existe independientemente de la energía del sistema.



**Figura 2.8:** Evolución temporal de  $\lambda$  para tres regímenes distintos de energía: fase desordenada (figura superior), justo debajo del valor de transición de fase (figura media) y fase ordenada (figura inferior). Extraído de [42].



**Figura 2.9:** Período  $\Delta t$  transcurrido entre dos visitas sucesivas a la sub-variedad crítica  $v_c = 1/2$  como función de  $U/N$ , graficado en formato doble logarítmico. La línea llena corresponde a la ley de potencias que ajusta los últimos ocho puntos. Extraído de [42].

## 2.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo hemos presentado el modelo conocido como Hamiltoniano de Campo Medio (HMF), haciendo hincapié en sus propiedades anómalas. Éste es un paradigma de sistema complejo, pues a pesar de la simplicidad del Hamiltoniano que gobierna su dinámica microscópica, presenta complejos comportamientos dinámicos, producto de las interacciones simples entre sus partículas constituyentes. En particular, no se verifica siempre que las predicciones estadísticas obtenidas en el ensamble canónico coinciden con los promedios temporales realizados mediante simulaciones numéricas. Esta pérdida de ergodicidad ha sido una fuente de fuertes controversias dentro de la comunidad de física estadística, dando lugar a diferentes interpretaciones.

En la última sección del capítulo se mostraron los resultados originales publicados en [41] y [42]. En el primero de ellos se analizó cómo la topología de la función energía potencial afecta la función distribución de probabilidad de ambos, ángulos y momentos. De hecho, luego de un repentino ordenamiento después de una configuración sumamente ordenada, los momentos comienzan a desordenarse muy suavemente, incrementando la complejidad de la distribución. Este comportamiento indica que el sistema evoluciona al equilibrio superando barreras de entropía. Por otro lado, hemos verificado también que el sistema visita puntos críticos a lo largo de toda la trayectoria casi-estacionaria y no sólo en el régimen de tiempos cortos.

Los resultados publicados en [42], constituyen una extensión de los mostrados en [39], analizando el rol de la energía en el comportamiento de  $\lambda(t)$ . Teniendo en cuenta que cada vez que el sistema toca la sub-variedad crítica el parámetro  $\lambda$  se hace cero, pudimos identificar cuatro tipos de comportamientos diferentes. El primero, en la fase de energías grandes, donde el sistema visita periódicamente la sub-variedad  $v_c = 1/2$  y el período decrece en forma de una ley de potencias cuando  $U/N$  aumenta. En la fase ordenada pudimos encontrar tres tipos de comportamientos diferentes. Para energías justo por debajo del punto crítico  $U_c/N$  el sistema visita la variedad  $v_c = 1/2$  en forma muy irregular. Para valores intermedios de  $U/N$  el sistema inicialmente se ve atraído por

## 2.6 Conclusiones del capítulo

---

la sub-variedad crítica, pero finalmente escapa de ella. Por último, en el régimen de energía baja el sistema vaga por el espacio de configuraciones sin visitar nunca la sub-variedad crítica.

A continuación, en el capítulo 3, mostraremos los resultados originales resultantes de la dinámica del modelo HMF definido sobre una red unidimensional (anillo) con topología de conexiones complejas.



---

## El modelo HMF definido en una red compleja

---

### 3.1. Introducción

El modelo HMF, introducido y descrito en el capítulo anterior, es un modelo emblemático de la física estadística cuyo estudio ha sido de gran interés durante los últimos años. Este interés reside principalmente en el hecho de que es un modelo en apariencia extremadamente sencillo, pero que presenta comportamientos anómalos, tal como hemos analizado en el capítulo anterior. Recordemos que el mismo consiste de un conjunto de  $N$  rotadores de masa unitaria que están restringidos a moverse en un círculo de radio  $r = 1$ . Cada rotador interactúa con todos los restantes a través de un potencial que no depende de la distancia entre ellos, en otras palabras, es un modelo tipo Curie–Weiss.

Si bien el análisis de este modelo ha abarcado una amplia gama de estudios estáticos y dinámicos para explorar cada uno de los detalles del mismo, casi todos los trabajos al respecto se basan en la versión totalmente conectada originalmente introducida por Antoni y Ruffo [18]. Vale aquí destacar una serie de trabajos que estudiaron el mismo modelo en una red unidimensional con interacciones que decaen con la distancia  $r$  entre rotadores como ley de potencia  $r^{-\alpha}$  [25, 26, 27]. Sin embargo, en literatura referente al tema no se encuentran trabajos que consideren arquitecturas complejas de conexiones, como las descritas en el capítulo 1. En este capítulo abordaremos precisamente el estudio del modelo HFM definido en una red unidimensional con una estructura compleja de conexiones, caracterizada por una distribución de grado tipo ley de potencia que lleva en cuenta la distancia euclídea entre rotadores, y que además tiene la propiedad de mundo pequeño.

El principal objetivo de este capítulo será estudiar las propiedades del modelo HMF definiéndolo sobre una red compleja que se encuentra embebida en un espacio euclídeo unidimensional. Para ello, generaremos una red libre de escala con un exponente  $\alpha$  para la distribución de grado la cual es embebida en una dimensión mediante el método definido en el capítulo 1. Cada uno de los sitios de la red estará ocupado por un rotador que se comporta según la dinámica del modelo HMF. La complejidad de este modelo, al compararlo con la versión original del HMF, hace imposible realizar

cálculos analíticos tanto en el ensamble canónico como en el microcanónico. Por ello, estaremos restringidos en este capítulo a analizar el comportamiento estático y dinámico del modelo mediante la integración numérica de las ecuaciones de movimiento del sistema.

Como es sabido, un sistema unidimensional con interacciones entre vecinos próximos no presenta una fase ordenada a temperatura finita. Sin embargo mostraremos que es posible, complejizando la estructura de la red de conexiones, obtener un sistema unidimensional que presenta una fase ordenada a bajas temperaturas e incluso presenta algunas de las anomalías dinámicas observadas en el modelo HMF original.

### 3.2. El modelo HMF Embebido

En esta sección introduciremos una nueva versión del modelo HMF utilizando el proceso de embebido definido en el capítulo 1. Nuestro objetivo es estudiar la dinámica del modelo HMF en una red compleja unidimensional y para ello trabajaremos con un anillo de  $N$  rotadores y con condiciones de contorno periódicas. Cada partícula es descrita como siempre por su posición (ángulo)  $\theta_i$  y su momento conjugado  $p_i$ , y cuya dinámica está gobernada por el Hamiltoniano (2.1).

Observemos que el modelo HMF original (tipo Curie-Weiss) se puede pensar como una red en la cual los rotadores se encuentran completamente conectados (cada rotador interactúa con todos los otros) y, por consiguiente, se mueve bajo la acción del campo producido por todos sus vecinos (un campo medio). Si en cambio ahora pensamos en una red compleja que se encuentra embebida en un espacio euclídeo unidimensional, cada rotador siente el campo generado por los vecinos con los cuales mantiene una conexión. En este último caso la interacción ya no es global. De esta forma, pensamos que cada partícula genera una fuerza sobre otra sólo si entre ellas existe una conexión. Teniendo en cuenta esto, la dinámica del sistema está gobernada por el siguiente Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{1}{2\langle k \rangle} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in V_i} (1 - \cos(\theta_i - \theta_j)), \quad (3.1)$$

donde  $V_i$  denota el conjunto de sitios a los cuales está conectado el rotador  $i$  (la vecindad de  $i$ ) y  $\langle k \rangle$  es la conectividad media de la red. Recordemos que el grado del  $i$ -ésimo sitio es  $k_i$ , es decir, la cantidad de conexiones que tiene el sitio. Por ello, la suma sobre la vecindad del sitio  $i$  ( $V_i$ ) tendrá  $k_i$  términos. Por otro lado, la conectividad media de la red será:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i. \quad (3.2)$$

Notemos que, a diferencia del modelo HMF original, en el término correspondiente a la energía potencial la suma no corre sobre todos los pares  $(i, j)$ , sino solamente sobre aquellos que efectivamente interactúan. Este hecho se refleja en la segunda suma, que corre sobre todos los sitios  $j$  desde 1 hasta  $k_i$ , los cuales son los conectados al sitio  $i$ . Otra diferencia con el modelo HMF presentado en el capítulo anterior es la normalización del término de energía potencial del Hamiltoniano. Como ya mencionamos en dicho capítulo, para que el modelo presente un correcto comportamiento en el límite termodinámico, la energía potencial debe estar escalada por  $N$ . En el caso embebido, la energía potencial está correctamente normalizada si la dividimos por la cantidad promedio de vecinos que tiene un sitio, esto es la conectividad media  $\langle k \rangle$  de la red. Este es el número promedio

de interacciones de un sitio cualquiera. El valor de  $\langle k \rangle$  se puede calcular analíticamente según (1.4), o bien numéricamente realizando promedios sobre distintas redes.

Como todo sistema hamiltoniano, las ecuaciones de movimiento se derivan de (3.1) y están dadas por:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i, \quad (3.3)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = -\frac{1}{2\langle k \rangle} \sum_{j \in V_i} \sin(\theta_i - \theta_j). \quad (3.4)$$

Además, la aceleración de la partícula  $i$  se define como,

$$a_i = -\frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{j \in V_i} \sin(\theta_i - \theta_j). \quad (3.5)$$

Al igual que en el modelo HMF original, el comportamiento en equilibrio y fuera de él se puede obtener integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento (3.3) y (3.4). Este análisis se hará en la siguiente sección.

### 3.3. Resultados numéricos

Con el modelo construido según lo descrito en la sección anterior, nos concentraremos en estudiar la propiedades termodinámicas del sistema en equilibrio y fuera del mismo. Para ello realizaremos simulaciones numéricas que nos permitan integrar las ecuaciones de movimiento (3.3) y (3.4). En nuestras simulaciones realizamos la siguiente rutina: una vez contruida y embebida la red en un espacio euclídeo unidimensional (según la receta dada en el capítulo 1), imponemos condiciones iniciales al sistema y lo dejamos evolucionar según el hamiltoniano (3.1). A cada paso de tiempo integramos las ecuaciones de movimiento (3.3) y (3.4).

Debido a que nuestro sistema es conservativo, el método de integración utilizado debe garantizar la conservación de la energía. Para tal fin, en todas nuestras simulaciones empleamos el método simpléctico de 4<sup>to</sup> orden con pasos de tiempo  $dt$  fijos. Los pasos de tiempo empleados son típicamente  $dt = 0.02$ , seleccionados de tal forma que el valor de la energía se mantenga constante dentro de un error relativo  $\Delta E/E \sim 10^{-6}$  [49]. En cada uno de estos  $dt$  calculamos las magnitudes necesarias para estudiar el comportamiento dinámico del sistema, tales como la magnetización y la energía cinética.

Con respecto a las condiciones iniciales, trabajaremos con los siguientes estados del sistema:

- *Condición inicial cercana al equilibrio:* escogemos los momentos al azar con una distribución gaussiana, en tanto los ángulos se fijan todos iguales a cero, es decir,  $\theta_i(0) = 0$  para todo  $i$ . En este caso, la magnetización inicial del sistema es  $|M(0)| = 0$ .
- *Condición inicial lejos del equilibrio:* escogemos las llamadas condiciones water bag, en la cual los momentos son escogidos al azar con una distribución uniforme, entanto los ángulos se fijan todos iguales a cero, es decir,  $\theta_i(0) = 0$  para todo  $i$ . En este caso, la magnetización inicial del sistema es  $|M(0)| = 0$ .

Veamos en detalle cómo preparamos al sistema en la condición *water bag*, muy lejos del equilibrio. Se fijan todos los ángulos iniciales en cero y se sorteja al azar el valor del momento  $\tilde{p}_i$  de cada partícula, usando una distribución uniforme entre  $-1$  y  $1$ . Esta condición inicial tendrá por lo tanto una energía inicial aleatoria. Luego, a fin de obtener una configuración inicial con la energía interna deseada  $u$ , se reescalan todos los momentos. Para ello, se multiplica cada  $\tilde{p}_i$  por una constante  $\gamma$  adecuadamente escogida. Esta constante resulta ser,

$$\gamma = \sqrt{\frac{2N(u-v)}{\sum \tilde{p}_i^2}}, \quad (3.6)$$

donde  $u$  y  $v$  son, respectivamente, la energía media y la energía potencial por partícula deseadas. Para el caso en que además el sistema se encuentra ordenado, es decir, con magnetización  $|M| = 1$ , elegimos  $v = 0$  en (3.6). Con todo esto, el valor del momento de la  $i$ -ésima partícula queda determinado de la siguiente forma:

$$p_i = \gamma \tilde{p}_i \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.7)$$

Podemos definir, en su defecto, otro tipo de configuración inicial en la cual los momentos son equidistribuidos de acuerdo a la regla:

$$p_i = i \sqrt{\frac{24(u-v)}{(N+1)(N+2)}} \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.8)$$

donde  $u$  es la energía media por partícula deseada y  $v$  es la energía potencial por partícula, la cual ha sido previamente determinada. Este último conjunto particular de condiciones iniciales se denominan *water bag perfectas*. Notemos que en ambos casos existe una degeneración infinita, pues el vector magnetización inicial  $\vec{M}(0)$  puede apuntar en cualquier dirección arbitraria. Además, recordemos que por tratarse de una dinámica hamiltoniana la energía por partícula  $u$  se mantendrá, dentro de cierto intervalo de confianza controlable, constante.

La integración de las ecuaciones de movimiento nos da la evolución temporal del sistema, es decir, las posiciones y momentos de todas las partículas de la red en cada instante. Con esta información construiremos la curva calórica y magnética para verificar si esta modificación en el modelo HMF conserva la transición de fase, y de ser así en qué valor de energía ocurre. En el caso en que el sistema se inicializa fuera del equilibrio queremos investigar la presencia de estados casi-estacionarios. Por otro lado, en el límite de muchas conexiones el modelo tiene que reproducir los resultados del modelo HMF original.

#### 3.3.1. El equilibrio termodinámico

En esta sección analizaremos el comportamiento de equilibrio del sistema, recreando la curva calórica, dada por la temperatura  $T$  como función de la energía interna por partícula, tal cual mostráramos en el capítulo anterior para la versión original del HMF. Como trabajamos con simulaciones microcanónicas, definiremos la temperatura del sistema como:

$$T = 2 \frac{\langle E_c \rangle}{N} = 2 \langle e_c \rangle. \quad (3.9)$$

Si bien la mayoría de los resultados que mostraremos a continuación se obtuvieron usando, en el proceso de embebido, un exponente de la distribución de ley de potencias  $\alpha = 2.1^1$ , resultados

<sup>1</sup>No usamos  $\alpha = 2$  pues se trata de un caso marginal.



similares se encuentran para otros mayores del exponente  $\alpha$ , tal como se mostrará a modo de comparación en algunos casos.

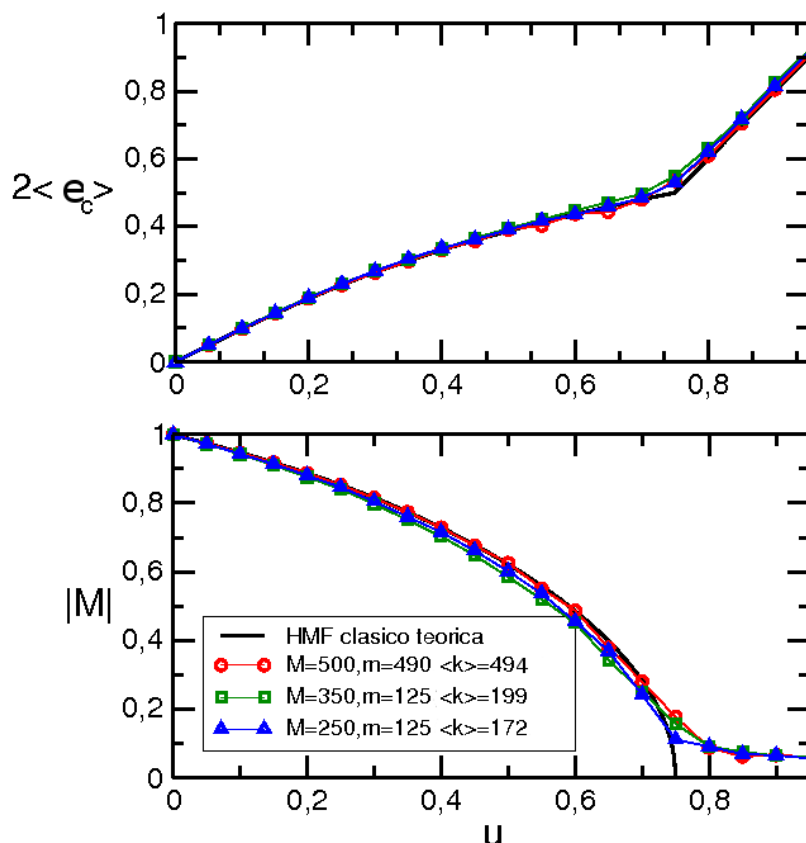
Comenzaremos analizando lo que sucede con la termodinámica del modelo cuando la conectividad media de la red es relativamente alta. Para ello hemos elegido trabajar aquí con una red de  $N = 500$  rotadores,  $\alpha = 2.1$  y tres combinaciones del mínimo número de conexiones  $m$  y el máximo número de conexiones  $M$ , que se corresponden con tres valores diferentes de conectividad media, a saber:

- $\langle k \rangle = 494$ , con  $M = 500$  y  $m = 490$ ,
- $\langle k \rangle = 199$ , con  $M = 350$  y  $m = 125$  y
- $\langle k \rangle = 172$ , con  $M = 250$  y  $m = 125$ .

En la figura 3.1 mostramos las curvas calóricas (figura superior) y magnéticas (figura inferior) obtenidas cuando el sistema fue preparado con condiciones iniciales próximas al equilibrio termodinámico. Para garantizar que el sistema alcanzó el equilibrio termodinámico, en cada simulación hemos dejado al sistema evolucionar cierto transitorio (que es mayor cuando más cerca de la transición de fase estamos) sin medir, para luego calcular un promedio temporal tanto de la temperatura microcanónica como de la magnetización. Cada punto graficado a su vez es el promedio configuracional obtenido sobre muchas simulaciones realizadas con diferentes condiciones iniciales (típicamente 100).

Podemos comparar ahora estos resultados con los mostrados en el capítulo anterior correspondientes al HMF original, por ejemplo en la figura 2.2, y observar ciertas analogías. Para poder hacer una comparación directa, en los mismos gráficos se incluyó la curva que se obtiene teóricamente (línea continua) en la versión original del modelo. Observemos que las curvas tanto magnética como calórica se superponen bastante bien con la curva teórica, indicando que el sistema tiene básicamente el mismo comportamiento que en caso en que los rotores están totalmente conectados. Veremos pronto que esto es así gracias al alto grado de conectividad (alta conectividad media). Notemos que, al igual que lo que sucede en el modelo HMF original, la transición de fase ocurre en los tres casos en un valor cercano a  $u = 0.75$ , independientemente del valor de la conectividad media de la red. Más aun, las transiciones parecen ser también continuas o de segundo orden. En la curva magnética, además, se observa claramente el efecto del tamaño finito de la red en la fase desordenada, como también se pudo observar en el modelo de campo medio.

Como paso siguiente, vamos a analizar cuál es el rol que tienen los parámetros de embebido de la red. Para ello analizaremos al efecto de cambiar el exponente de la ley de potencias  $\alpha = 2.1$  por un lado, y las cantidades de conexiones máximas y mínimas permitidas por otro (o sea, la conectividad media). El primero de los análisis se muestra en la figura 3.2. Allí se encuentran graficadas las curvas calóricas correspondientes a diferentes valores de  $\alpha$ , cuando el resto de los parámetros están fijos en  $N = 500$ ,  $m = 125$  y  $M = 250$ , y por ende  $\langle k \rangle = 172 = 0.35N$ . En todos los casos, las condiciones iniciales elegidas fueron cercanas al equilibrio. Lo que se observa claramente es que no existe ninguna diferencia apreciable entre las curvas que corresponden a distintos exponentes, a saber,  $\alpha = 2.1, 2.5$  y  $3.0$ .



**Figura 3.1:** Curvas calórica (figura superior) y magnética (figura inferior) para una red embebida de  $N = 500$  sitios, con  $\alpha = 2.1$ . Se grafican distintos valores de conectividades máxima  $M$  y mínima  $m$ , lo que es equivalente a distintos valores de conectividad media  $\langle k \rangle$ , tal como se indica en cada caso. Observar la superposición de las curvas y transición de fase en un valor cercano a  $u = 0.75$ . La curva en línea continua corresponde a la solución exacta del modelo HMF original.

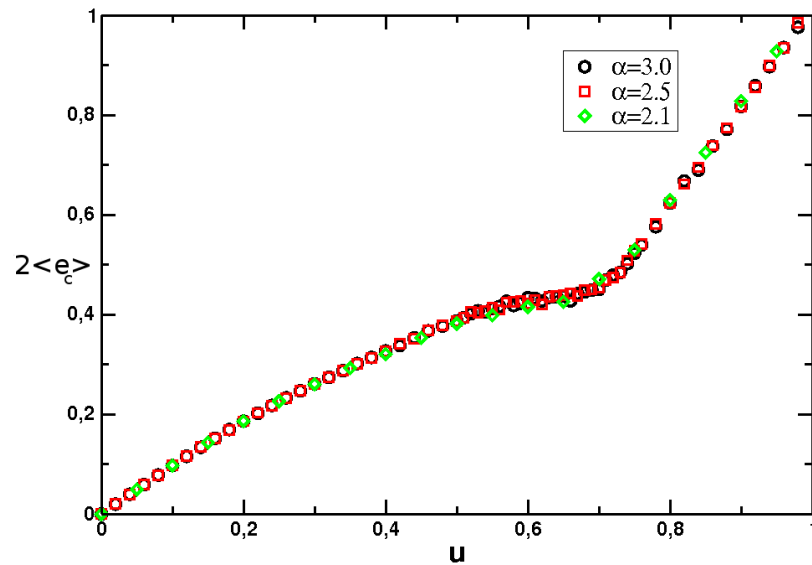
A continuación estudiamos cómo se modifica la curva calórica al variar la conectividad media, variando la cantidad de conexiones máxima y mínima por sitio. En la figura 3.3 se muestran las curvas calóricas para  $N = 500$  con cantidades máxima de conexiones por sitio fija en  $M = 250$  y mínimas variable, a saber

- $m = 8$  y  $\langle k \rangle = 26 = 0.052N$ ,
- $m = 16$  y  $\langle k \rangle = 45 = 0.09N$ ,
- $m = 32$  y  $\langle k \rangle = 73 = 0.146N$ ,
- $m = 64$  y  $\langle k \rangle = 116 = 0.232N$ ,
- $m = 125$  y  $\langle k \rangle = 172 = 0.35N$ ,
- $m = 175$  y  $\langle k \rangle = 209 = 0.418N$ .

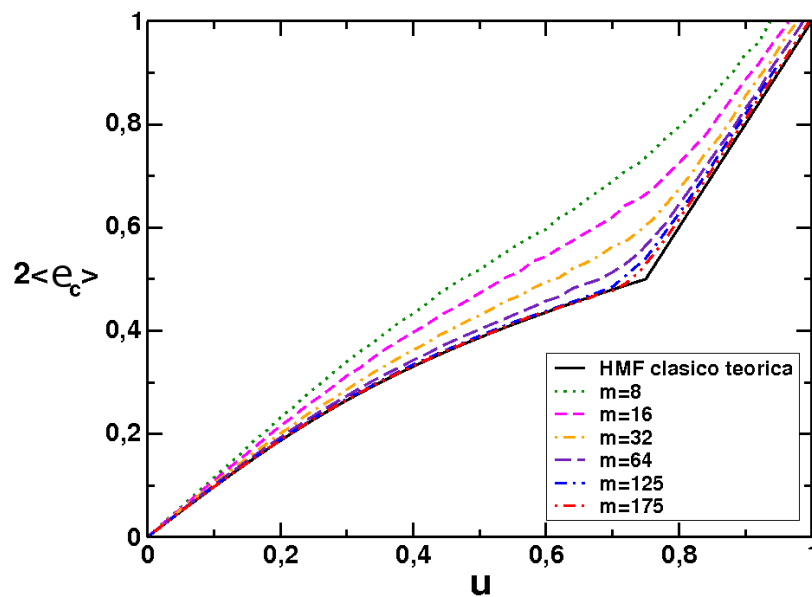
En todos los casos se ha inicializado al sistema con condiciones cercanas al equilibrio. En esta figura se puede observar que a medida que  $\langle k \rangle$  decrece, las curvas calóricas se apartan de la correspondiente a la versión original del HMF. De hecho, cuando  $m = 8$  ambas curvas calóricas se

### 3.3 Resultados numéricos

separan desde valores muy pequeños de energía. Tampoco es claro hasta que valor de  $\langle k \rangle$  sigue sobreviviendo la transición de fase, la cual parece haber desaparecido ya para  $m = 16$ .



**Figura 3.2:** Curvas calóricas para redes embebidas con diferentes valores de  $\alpha$ , a saber  $\alpha = 2.1, 2.5$  y  $3.0$ . Todas corresponden a  $N = 500$ ,  $m = 125$  y  $M = 250$  ( $\langle k \rangle = 175 = 0.35N$ ), con condiciones iniciales cercanas al equilibrio.



**Figura 3.3:** Curvas calóricas para redes embebidas de tamaño  $N = 500$  con  $\alpha = 2.1$ ,  $M = 250$  y diferentes valores de  $m = 8, 16, 32, 64, 125$  y  $175$  (lo cual implica valores de conectividades medias diferentes y crecientes). En todos los casos las condiciones iniciales son cercanas al equilibrio. La curva en línea continua corresponde a la solución exacta del modelo HMF clásico.

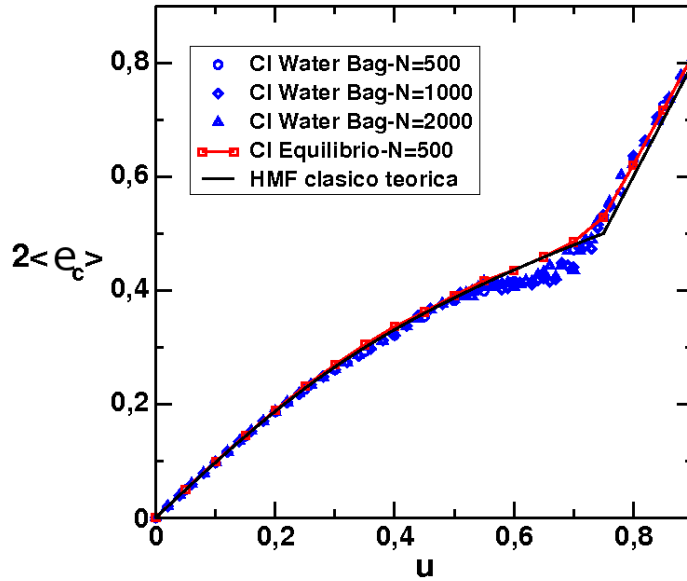
Resumiendo lo visto en esta sección, es posible construir un sistema unidimensional con interacciones locales y dependientes de la distancia, el cual preserva aun la transición entre una fase

ordenada de bajas temperaturas y una fase desordenada de altas temperaturas. Más aun, esta transición parece ser siempre de segundo orden, aunque la confirmación de esta sospecha requeriría un considerable esfuerzo numérico que está fuera del interés de este capítulo.

#### 3.3.2. Comportamiento fuera del equilibrio

Ahora veamos qué ocurre con estas curvas en el caso en que las condiciones iniciales impuestas son del tipo water bag, es decir, condiciones muy alejadas del equilibrio. Recordemos que estas son precisamente las condiciones iniciales que producen el comportamiento anómalo en el modelo HMF original, por lo cual estamos interesados en analizar si en el caso embebido ocurre el mismo tipo de fenómeno. En particular, como vimos, cuando el modelo totalmente conectado es preparado en estas condiciones, para valores de energía interna próximos a la transición de fase, el sistema queda atrapado por siempre en soluciones casi-estacionarias fuera del equilibrio.

En la figura 3.4 graficamos las curvas calóricas correspondientes a las dos condiciones iniciales, lejos y cerca del equilibrio, para una red de  $N = 500$  sitios,  $\alpha = 2, 1$ ,  $M = 250$ ,  $m = 125$  y  $\langle k \rangle = 175 = 0.35N$ . Recordemos, de la sección anterior, que para esta conectividad media el sistema se comporta, termodinámicamente, como el modelo HFM original, presentando una transición de fase para un valor crítico de  $u$  próximo a  $u = 0.75$ . Para la condición water bag también se encuentran superpuestos los datos para tamaños  $N = 1000$  y  $2000$ . A modo de comparación, hemos incluido también la curva teórica correspondiente al modelo HMF original. En este caso omitimos mostrar la curva magnética, la cual presenta el mismo comportamiento que aquel mostrado en la figura 3.1. En esta figura se puede apreciar que, para condiciones iniciales alejadas del equilibrio, la curva calórica se aparta de la curva de equilibrio y de la predicción teórica para el modelo original cerca del punto crítico. En cambio, si el sistema se inicializa en condiciones cercanas al equilibrio, la curva calórica coincide con la esperada para el caso de campo medio (línea sólida). Notemos, sin embargo, que las curvas de ambas condiciones iniciales coinciden para energías muy bajas y muy altas, separándose sólo en la zona de transición de fase, en valores cercanos a  $u = 0.75$ . Este comportamiento nos recuerda al mostrado en las figuras 2.2 y 2.3 del modelo de campo medio. Si bien no verificamos un valor negativo del calor específico, si observamos un plateau en la curva  $T$  vs.  $u$  justo debajo de la transición, comportamiento que suele observarse en las mediciones de la curva calórica de procesos de multifragmentación nuclear [35].



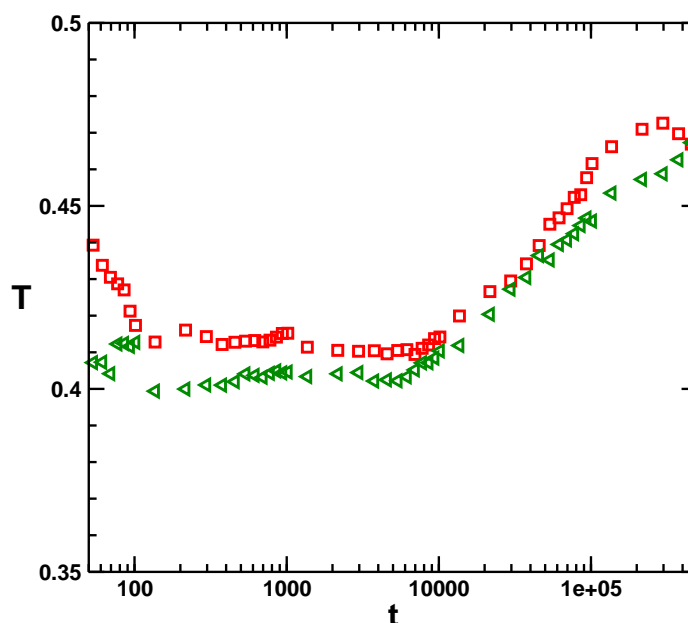
**Figura 3.4:** Curvas calóricas redes con  $\alpha = 2.1$ ,  $m = 125$  y  $M = 250$  ( $\langle k \rangle = 175 = 0.35N$ ). Para condiciones iniciales cercanas al equilibrio la curva obtenida a  $N = 500$ . En cambio, para las condiciones iniciales fuera del equilibrio (water bag) se superponen los resultados para tres tamaños:  $N = 500$ ,  $N = 1000$  y  $N = 2000$ . La curva en línea continua corresponde a la solución exacta del modelo HMF original.

Las curvas calóricas recién mostradas parecen indicar que en la zona de energías justo por debajo de la transición de fase ocurre algún tipo de comportamiento anómalo. Recordemos que en el modelo HMF original para estas condiciones iniciales aparecen estados casi-estacionarios, en los cuales el sistema se queda atrapado por un cierto tiempo (que diverge con  $N$ ) en una solución que no corresponde al valor de temperatura de equilibrio. Más aún, este valor es inferior al de la temperatura de equilibrio.

Basándonos en estas ideas, a continuación mostraremos los resultados de la evolución temporal de la temperatura  $T = 2 \langle E_c \rangle / N$  de un sistema de rotadores embebidos en un espacio euclídeo unidimensional cuya dinámica evoluciona según las ecuaciones de movimiento (3.4). En la figura 3.5 se encuentran graficados los resultados de la temperatura en función del tiempo para dos muestras individuales. El sistema de  $N = 10000$  rotadores,  $\alpha = 2.5$ ,  $M = 250$  y  $m = 120$  fue inicializado con condiciones water bag. Si bién se muestran solamente dos realizaciones para una cierta combinación de parámetros, hemos podido observar que este mismo comportamiento se repite para otros casos en estas condiciones iniciales<sup>2</sup>. Las curvas de la figura 3.5 muestran cómo evoluciona la temperatura del sistema que tiene energía interna por partícula  $u = 0.67$ , justo por debajo del valor de la transición de fase, que es donde aparecen las características anómalas del modelo. Lo que se puede ver es que en los primeros pasos de tiempo la temperatura del sistema desciende hasta llegar a un cierto valor, en el cual permanece por un dado período de tiempo (entre los tiempos  $t = 100$  y  $t = 10000$ ). Luego de mantenerse durante un lapso en un valor casi constante, la temperatura del sistema vuelve a ascender, presumiblemente hasta llegar a su valor de equilibrio (el cual no podemos calcular analíticamente). Esta descripción corresponde a la presencia de un estado de casi-equilibrio de características similares a los encontrados en el modelo HMF original. Notemos la similitud con la parte b) de la figura 2.3 del capítulo 2 donde se mostró la evolución temporal de  $T$  para el modelo

<sup>2</sup>Cabe destacar que estas curvas son costosas en cuanto al tiempo necesario para completar la simulación de cada una de ellas.

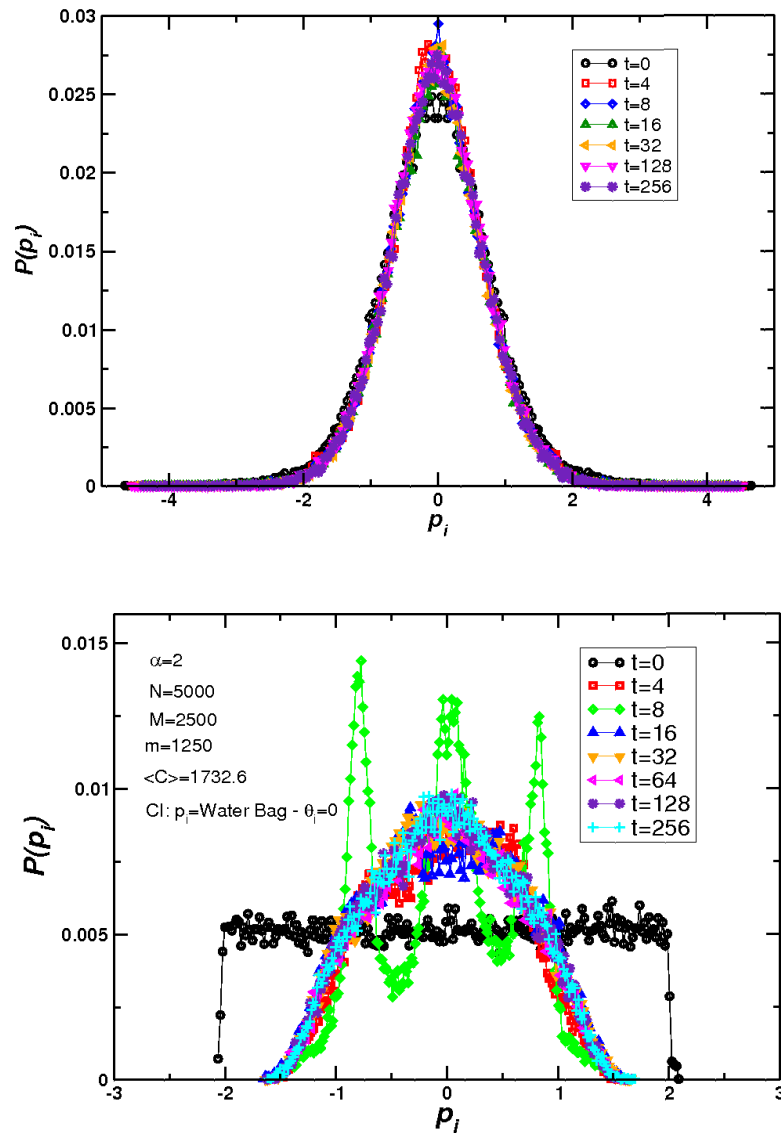
HMF en su versión de campo medio.



**Figura 3.5:** Evolución temporal de la temperatura del sistema de rotadores para el modelo HMF embebido. Los datos corresponden a una red de tamaño  $N = 10000$  con  $\alpha = 2.5$ ,  $M = 250$  y  $m = 125$  ( $\langle k \rangle = 175 = 0.0175N$ ) con condiciones iniciales water bag. Las curvas corresponden a dos realizaciones individuales.

Por último, mostraremos las distribuciones de momentos del modelo para diferentes tiempos y ambas condiciones iniciales, de equilibrio y fuera de equilibrio. Los dos gráficos de la figura 3.6 muestran el histograma de momentos del modelo HMF embebido para un sistema de  $N = 5000$  sitios,  $\alpha = 2.1$ ,  $M = 2500$  y  $m = 1250$  ( $\langle k \rangle = 1718 = 0.3436N$ ) para diferentes tiempos, a saber,  $t = 0, 4, 8, 16, 32, 64, 128$  y  $256$ . El cuadro de arriba corresponde a condiciones iniciales gaussianas (cercanas al equilibrio), mientras que en el de abajo el sistema se inicializó con condiciones tipo water bag (alejadas del equilibrio). En ambos casos, se muestra un promedio de 10 realizaciones. Lo que se puede observar es un comportamiento diferente de la distribución de momentos según se inicialice al sistema con condiciones gaussianas o water bag. En la figura superior se aprecia que el histograma de momentos a  $t = 0$  es una gaussiana y permanece con esta misma forma para todos los tiempos mostrados. En contraste, la evolución de los histogramas para condiciones iniciales tipo water bag (abajo) muestran un panorama totalmente distinto. Al tiempo inicial  $t = 0$  la distribución tiene la forma water bag (círculos negros). En un instante inmediatamente posterior, la distribución se deforma hacia una curva que se asemeja a una parábola invertida, la cual se mantiene hasta tiempo  $t = 128$ . A medida que el tiempo transcurre la distribución presenta formas cada vez más complejas, tal como se puede apreciar al tiempo  $t = 256$ . La forma de la distribución de momentos para este último instante recuerda a la figura 2.6 del Capítulo 2, donde se mostró que a medida que el tiempo crece las distribuciones de momentos para condiciones iniciales tipo water bag en el modelo HMF original se vuelve cada vez más compleja, presentando varios picos.

### 3.4 Conclusiones del capítulo



**Figura 3.6:** Distribuciones de momentos para diferentes tiempos y condiciones iniciales de equilibrio (arriba) y de no equilibrio (abajo). Los parámetros usados en la generación de la red son  $N = 5000$  con  $\alpha = 2.5$ ,  $M = 2500$  y  $m = 1250$ .

### 3.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo introducimos una nueva versión del modelo HMF donde los  $N$  rotadores que conforman el sistema se encuentran ubicados en los nodos de una red compleja embebida en un espacio euclídeo unidimensional. El cambio fundamental en este nuevo modelo reside en que los rotadores del sistema sienten el potencial ejercido solamente por un conjunto de vecinos con los cuales interacciona, en contraste con la interacción tipo Curie–Weiss que existe en la versión original. En la nueva versión del modelo la conectividad de cada rotador está gobernada por un distribución de

ley de potencias. Además, consideramos que la red de rotadores está embebida, lo que introduce la noción de distancia geográfica como un nuevo ingrediente a considerar en el modelo.

Mediante la integración de las ecuaciones de movimiento del sistema, usando los mismos métodos numéricos que en el modelo HMF original, realizamos un análisis de las propiedades dinámicas del modelo. Para ello, calculamos las curvas calóricas y magnéticas para dos condiciones iniciales diferentes, una cercana y una alejada de la condición de equilibrio del sistema. Hicimos un estudio de tamaño finito, graficando varias curvas para diferentes tamaños de redes y distintos parámetros de embebido de las mismas, pudiendo verificar diferentes comportamientos del sistema según la condición inicial utilizada. Tal como ocurre en el modelo HMF original, si el sistema se inicializa con condiciones cercanas al equilibrio la curva calórica generada numéricamente se superpone con la curva teórica del modelo HMF original, siempre y cuando la conectividad media sea suficientemente alta. En cambio, cuando la red de rotadores se inicializa en condiciones iniciales alejadas del equilibrio (las condiciones conocidas como *water bag*) la curva calórica del modelo embebido se aparta del comportamiento de la curva obtenida con las anteriores condiciones iniciales (y por ende se aparta de la curva teórica del modelo original) en la zona de energías levemente inferiores a la de transición de fase del modelo. Además, se pudo observar que el comportamiento es independiente del exponente  $\alpha$  de la red compleja, pero que sí depende de la cantidad de conexiones máxima y mínima de los sitios, y por ende el mismo puede deberse a la conectividad media de la red. Más aun, parece haber un límite en la conectividad media de la red a partir de la cual se empiezan a observar los comportamientos mencionados. O sea, para valores muy bajos de la conectividad media, el sistema pierde la transición de fase y pasa a comportarse como un sistema unidimensional con interacciones entre vecinos próximos.

El resultado destacable de este estudio es que se pudo corroborar algunas de las características anómalas que se observan en el modelo HMF pero en un sistema **unidimensional** con interacciones complejas. Es decir, pudimos observar ciertas características de un modelo de campo medio con interacciones de largo alcance en uno de corto alcance de interacciones complejas y con un número pequeño de conectividad media (en relación al tamaño del sistema).



## 4.1. Introducción

Una *red neuronal artificial* es un arreglo de unidades conectadas entre sí. Estos elementos, a los que llamaremos *neuronas artificiales*, son dispositivos matemáticos descritos usualmente por funciones muy sencillas que caracterizan sus estados, los cuales cambian autónomamente dependiendo de que las señales entrantes superen un valor umbral determinado. En este sentido, estas unidades tratan de imitar los rasgos más importantes de las neuronas biológicas, las cuales son células capaces de disparar, recibir, procesar y enviar información. Las redes neuronales sirven, por lo tanto, como modelos para el estudio del comportamiento cooperativo y de las propiedades computacionales exhibidas por los sistemas nerviosos de los animales. Si bien las redes neuronales constituyen una simplificación de la neuro-biología, estos modelos simples permiten estudios sistemáticos y ayudan a entender los principios subyacentes en los mecanismos de computación que utilizan los sistemas biológicos [50].

El estudio de las *redes neuronales*, como un campo particular dentro del área de la inteligencia artificial, ha merecido un sorprendente incremento de interés por parte de la comunidad científica en los últimos 20 años. Este interés ha provenido de las más variadas disciplinas, tales como la física, la neurobiología, la matemática, la psicología y la ingeniería, entre otras. A la vez que permitió comenzar a estudiar las funciones mentales a partir de modelos matemáticos y computacionales, el estudio de las redes neuronales artificiales trajo aparejado en su corta historia el desarrollo de técnicas muy sofisticadas, tanto analíticas como numéricas, que nos permiten hoy analizar una gran variedad de problemas complejos.

Las redes neuronales se basan en la *suposición conectivística*, según la cual la capacidad del cerebro biológico para desarrollar actividades sofisticadas (incluyendo operaciones mentales), reside en la intrincada y compleja arquitectura de sus conexiones sinápticas. Tal arquitectura está determinada tanto por la topología de la red (quién está conectado con quién) como por la matriz de pesos sinápticos (cuán eficiente es el acoplamiento entre dos neuronas conectadas). La mayoría

de los trabajos presentados en la literatura han explorado esta última propiedad, mientras que se le ha prestado poca atención a la primera. En el caso de las llamadas redes atractoras, mayormente utilizadas para modelar el problema de memoria asociativa, casi todos los esfuerzos se han concentrado en el estudio de redes totalmente conectadas o aleatoriamente diluidas (grafos aleatorios). De hecho, estos estudios han demostrado la relevancia de la topología, probando que un adecuado proceso de *poda de las conexiones* puede producir un mejoramiento sustancial en el desempeño del sistema. Recientemente los físicos han tenido en cuenta el hecho de que la topología de la red puede jugar un papel fundamental, mediante la incorporación de estructuras sinápticas más sofisticadas. En particular, el uso de redes de mundo pequeño y/o libres de escala, han mostrado cuán relevante es la arquitectura para el desempeño del sistema nervioso.

Por otro lado, es importante notar que casi todos los intentos de modelar cerebros biológicos se han hecho utilizando redes en donde la distancia entre las neuronas no juega ningún rol en la conformación de la conectividad sináptica (redes de alcance infinito). Sin embargo, los sistemas neuronales biológicos se encuentran embebidos en un espacio euclídeo de baja dimensionalidad. Y a pesar del hecho de que las neuronas pueden eventualmente cubrir distancias muy grandes, sin ninguna duda la distancia entre neuronas juega un papel importante en el desarrollo del sistema neuronal. Por otro lado, existe en la actualidad un sofisticado cuerpo de evidencias experimentales que sugiere que las redes sinápticas de cerebros reales pueden tener las propiedades de mundo pequeño y libre de escala.

El objetivo de nuestro trabajo es juntar estos dos ingredientes, complejidad y baja dimensionalidad, en un modelo neuronal para memoria asociativa, siguiendo el proceso de embebido descrito en el capítulo 1. El objetivo es verificar si la combinación de estas propiedades topológicas puede mejorar la capacidad de reconocimiento de las redes. A fin de simplificar el problema, consideraremos el modelo conocido como *modelo de Hopfield* [51], introducido en el año 1982 para modelar el proceso de reconocimiento de patrones por asociación. A pesar de su aparente simplicidad, este modelo (como así también todas sus variantes) logra capturar los elementos esenciales necesarios para modelar el problema de la memoria asociativa en sistemas neuronales reales, a saber, unidades no lineales, comportamiento cooperativo y competitivo, conectivismo y dinámica de asociaciones tipo entrada-salida.

En la primera parte del presente capítulo introduciremos el modelo de Hopfield para memoria asociativa en su versión original, con el objetivo de utilizar estos conceptos en el desarrollo original que se mostrará en la última parte del capítulo. Allí analizaremos dicho modelo en un arreglo regular bidimensional con topología de conexiones complejas.

## 4.2. Desde las neuronas hasta las redes neuronales

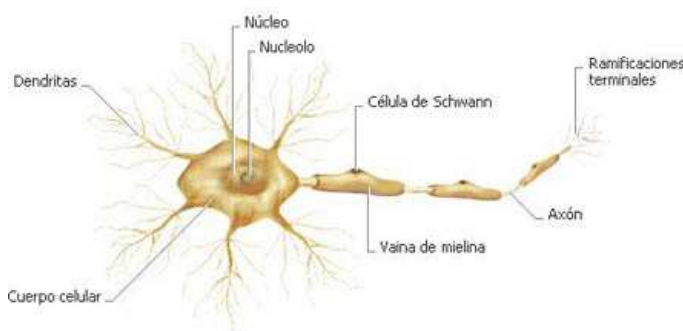
Hoy en día existe una gran cantidad de modelos que pretenden explicar diferentes aspectos de la dinámica de los sistemas neuronales. Una buena razón para ello es la existencia de varios niveles de descripción y de abstracción en el ámbito de la neurobiología, abarcando desde el modelado de neuronas individuales hasta el modelado de las más sofisticadas funciones mentales, pasando por un sinnúmero de problemas intermedios. Otro motivo es que la comunidad relacionada a las redes neuronales es muy amplia e interdisciplinaria, abarcando tanto la biología, la psicología y la farmacología, como la matemática, la física teórica, la computación y la ingeniería. Claramente, las motivaciones, los interrogantes y las técnicas son bien diferentes en cada una de estas áreas. Por lo tanto, los modelos diseñados para abordar un problema dado tendrán propiedades y características

## 4.2 Desde las neuronas hasta las redes neuronales

muy particulares que no serán representativas de otros problemas.

En esta sección describiremos muy brevemente las propiedades básicas de las neuronas que, junto con las células gliares, constituyen las componentes más importantes del sistema nervioso de los mamíferos. Esta descripción está orientada a reconocer cuáles son las características que se usan en el modelado de redes neuronales.

El cerebro de un mamífero contiene del orden de  $10^{11}$  neuronas o células nerviosas. La principal función de una neurona consiste en recibir, procesar y transmitir información en forma de impulsos eléctricos. Si bien existen diferentes tipos de neuronas, la anatomía de la mayoría de ellas consiste de tres regiones morfológicamente bien definidas: las *dendritas*, el *cuerpo celular* y el *axón* (ver figura 4.1) [52].



**Figura 4.1:** Representación esquemática de la morfología de una neurona típica de un vertebrado. Extraído de [52].

El *cuerpo celular* o *soma* es el centro metabólico de la célula. Desde el cuerpo celular usualmente salen dos tipos de extensiones: las *dendritas* y el *axón*. La mayoría de las neuronas tienen varias dendritas, que se ramifican en forma de árbol y sirven como la principal vía de entrada de las señales provenientes desde otras células nerviosas. En contraste, desde el cuerpo celular emerge un único axón, que es la principal unidad de conducción de los impulsos nerviosos en la neurona [52].

La señal eléctrica que se propaga a través del axón se denomina *potencial de acción* (*disparo* o simplemente *señal*). Esta señal constituye un impulso nervioso a todo o nada, es decir, una vez que se supera un cierto umbral, se produce el disparo de la señal y el proceso continúa hasta completarse. El potencial de acción tiene una amplitud de unos  $100mV$ , una duración de aproximadamente  $1ms$  y se propaga a una velocidad de unos  $100m/s$  [52].

Pero, ¿cómo fluye la información dentro de una neurona y dentro del sistema nervioso? Para que se produzca un dado comportamiento, cada neurona participante genera una secuencia de cuatro tipos distintos de señales dentro de la célula: una señal de entrada, una señal integradora, una señal conductora y una señal de salida. Para entender este proceso es necesario conocer las propiedades eléctricas de las células. En reposo, las neuronas mantienen una diferencia de potencial de unos  $65mV$  entre el interior y el exterior de la membrana celular. Esta diferencia de potencial, conocida como *potencial de membrana*, es producida debido a la concentración desigual de iones, principalmente sodio ( $Na^+$ ) y potasio ( $K^+$ ). El  $Na^+$  se encuentra en mayor concentración afuera que adentro de la célula, mientras que el  $K^+$  se encuentra en mayor concentración en el interior que en el exterior de la membrana celular.

En una neurona en estado de reposo no fluye ningún tipo de corriente entre una parte y otra de la

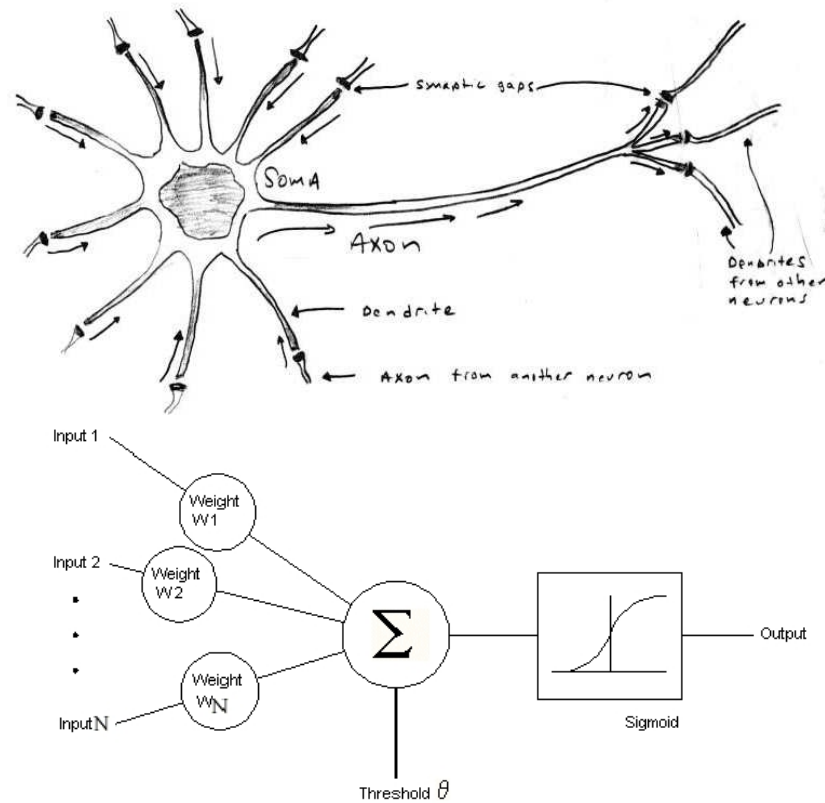
célula, siendo el potencial de membrana siempre el mismo. En neuronas sensoriales, el flujo de corriente se inicia típicamente en una región especializada de la neurona (*superficie receptiva*), donde existen ciertas proteínas que son sensibles a estímulos sensoriales. Allí, un estímulo externo (señal de entrada) puede producir la apertura abrupta de los canales iónicos sensibles al  $\text{Na}^+$ , produciendo un ingreso de  $\text{Na}^+$  al interior de la célula, y ocasionando una depolarización de la membrana. Si el potencial de membrana resultante excede un cierto umbral (señal integradora), se genera un potencial de acción que se transmite a lo largo del axón. En la neurona el potencial de acción se produce principalmente en el segmento inicial del axón, el primer *nodo de Ranvier* o el *montículo del axón*, que son las regiones de la célula con mayor concentración de canales iónicos sensibles al  $\text{Na}^+$ . Es en esta zona donde todos los potenciales sinápticos o receptores se suman y la neurona decide si disparar o no uno o varios potenciales de acción. Luego de que la célula se despolariza, la misma se debe repolarizar nuevamente para poder generar un nuevo potencial de acción. Este proceso es controlado mediante el ingreso de iones  $\text{K}^-$  al interior de la célula. Luego del mismo, existe un tiempo durante el cual la neurona no es capaz de excitarse nuevamente, conocido como *período refractario*. El equilibrio inicial de concentración de iones  $\text{Na}^+$  y  $\text{K}^-$  se restituye nuevamente mediante *bombas iónicas*.

El potencial de acción generado se propaga a lo largo de axón. Las ramas del axón de una neurona (neurona *pre-sináptica*) transmiten las señales a otras (neuronas *post-sinápticas*) en un sitio llamado *sinapsis*, mediante la emisión de ciertas sustancias químicas llamadas neurotransmisores. En esta región, la señal se transforma para poder ser transmitida a otras unidades. Las ramas de un solo axón, típicamente, pueden formar sinapsis con otras 1000 neuronas [52].

La propagación de los impulsos eléctricos, tanto dentro de la misma neurona como desde una neurona a otra, es un proceso extremadamente complejo, en el cual intervienen innumerables agentes y reacciones químicas. Estas interacciones constituyen la base del procesamiento de la información del cerebro. Los modelos neuronales intentan recrear ciertos aspectos del funcionamiento del cerebro, utilizando solamente sus características esenciales sin tener en cuenta todos los detalles del mismo. Es decir, se usa la premisa de la física estadística, según la cual no todos los detalles microscópicos de un sistema son relevantes a la hora de describir su comportamiento macroscópico. Es por ello que los modelos neuronales utilizan como unidades a neuronas artificiales sumamente simples. A continuación describiremos algunos de los modelos de neuronas que se usan en el estudio de las redes neuronales.

### 4.2.1. Las neuronas de McCulloch y Pitts

Los primeros intentos por modelar el funcionamiento del cerebro usando neuronas formales simples datan del año 1943, cuando Walter Pitts y Warren McCulloch [53] propusieron una red de elementos de dos estados capaz de realizar ciertas operaciones lógicas. Según ellos, una *neurona formal* es una variable binaria que puede estar en dos estados:  $n_i = 1$  o  $n_i = 0$ . En el primer caso, la neurona está activa, es decir, está disparando un pulso, mientras que el segundo estado corresponde a una neurona que está en reposo.



**Figura 4.2:** Representación esquemática de una neurona biológica (arriba) y una artificial (abajo).

En este modelo el estado de una neurona está dado por una suma pesada de las entradas provenientes de otras neuronas, de acuerdo a la siguiente regla:

$$n_i(t + \Delta t) = \Theta \left( \sum_j w_{ij} n_j(t) - \theta_i \right), \quad (4.1)$$

donde  $\Theta(x)$  es la función escalón definida como:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

En la expresión (4.1), los pesos  $w_{ij}$  representan la eficacia de la sinapsis entre la neurona  $j$ -ésima (pre-sináptica) y la  $i$ -ésima (post-sináptica). Esta matriz puede contener valores positivos, en caso de que la sinapsis sea excitatoria, negativos, en caso de que la sinapsis sea inhibitoria, o cero, en el caso de que no exista una conexión entre ambas neuronas o la misma esté totalmente atrofiada. El parámetro  $\theta_i$  es el umbral de activación de la  $i$ -ésima neurona, el cual debe ser superado para que se produzca un disparo.

La suma de las entradas provenientes de otras neuronas se conoce como *potencial post-sináptico*:

$$h_i = \sum_j w_{ij} n_j,$$

y la representamos como  $\Sigma$  en la parte inferior (neurona artificial) de la figura 4.2. De esta forma, el estado de la neurona se determina por comparación de  $h_i$  con el umbral de activación  $\theta_i$ :

$$n_i = \begin{cases} 0 & \text{si } h_i < \theta_i \\ 1 & \text{si } h_i \geq \theta_i. \end{cases} \quad (4.3)$$

Se puede demostrar que, combinando neuronas de este tipo se pueden implementar las operaciones lógicas NOT, AND, OR y XOR, si se eligen adecuadamente la arquitectura, los valores de los pesos y los valores de los umbrales.

Estas neuronas introducidas por McCulloch y Pitts se pueden hacer más complejas hasta obtener un comportamiento tan realista como se desee. En particular, en 1962 Hodgking y Huxley recibieron el Premio Nobel de Medicina precisamente por haber conseguido modelar en forma muy detallada la dinámica del potencial de acción de una neurona utilizando un conjunto pequeño de ecuaciones diferenciales acopladas. En el medio, es posible imaginar un sinnúmero de modelos de complejidad intermedia. En esta tesis nos limitaremos a utilizar neuronas binarias levemente diferentes a las introducidas por McCulloch y Pitts pero totalmente equivalentes, en las cuales el estado  $+1$  se reserva para neuronas que disparan y el estado  $-1$  para neuronas en reposo.

En 1949 el psicólogo Donald Hebb [54] propuso que los sistemas neuronales pueden aprender y formar asociaciones a través de modificaciones selectivas de sus conexiones sinápticas. Este fenómeno, conocido como *plasticidad sináptica*, es la base del llamado *paradigma conectivista*. La hipótesis de Hebb establece que cuando las neuronas están activas en un determinado patrón, su propia actividad induce cambios en sus coeficientes sinápticos ( $w_{ij}$ ) de forma tal que refuerza la estabilidad de ese patrón de actividad.

Una vez definido el modelo de neuronas, se establece la red neuronal como un conjunto de  $N$  neuronas artificiales conectadas mediante una matriz de conexiones sinápticas  $W$ , cuyas eficacias sinápticas están descritas por las componentes  $w_{ij}$ . En otras palabras, definir una red neuronal es, de acuerdo al llamado paradigma de Hebb [54], definir la arquitectura de conexiones del conjunto de neuronas.

### 4.2.2. La memoria asociativa

El estudio de redes neuronales ha permitido analizar diferentes problemas de las ciencias cognitivas, de los cuales los dos más importantes corresponden a los llamados *paradigma de aprendizaje* y *paradigma de memoria asociativa*.

El *aprendizaje* se refiere a la capacidad que tienen los organismos vivos de auto-organizarse en base a las interacciones con el mundo exterior, de forma tal de adaptar su comportamiento a un medio ambiente cambiante [55].

La *memoria asociativa* es la capacidad que tienen algunos organismos de recuperar información previamente almacenada a partir del conocimiento parcial o imperfecto de dicha información.

El problema de la memoria asociativa ilustra de un modo claro la manera en que el cómputo colectivo de unidades simples puede dar lugar a un comportamiento complejo, similar al observado en cerebros biológicos. En una computadora convencional, el almacenamiento de información se realiza mediante una dirección que hace alusión a un lugar físico en el cual se almacena la información. A diferencia de esto, el cerebro de un mamífero, por ejemplo, es capaz de almacenar

### 4.3 Descripción del modelo de Hopfield

información sobre un objeto o un sonido sin necesidad de saber donde está físicamente guardada la información.

En término de redes neuronales, se puede plantear el problema de la memoria asociativa de la forma que mostraremos a continuación. Supongamos que tenemos una red neuronal, definida por un conjunto de  $N$  neuronas caracterizadas cada una por una variable binaria  $\{n_i \in \{-1, 1\}\}_{i=1, \dots, N}$ , más un conjunto de pesos sinápticos  $\{w_{ij} \in R\}_{i, j=1, \dots, N}$ . Cada neurona además debe poseer una regla de actualización dinámica, como por ejemplo la de McCulloch y Pitts. Dado que existen  $N$  neuronas binarias, el sistema tiene un conjunto de  $2^N$  configuraciones accesibles. Entonces, almacenar en forma asociativa consiste en seleccionar un conjunto de  $p$  patrones o memorias  $\{\xi_i^\mu\}_{i=1, \dots, N}^{\mu=1, \dots, p}$  de forma tal que cuando el sistema es inicialmente preparado en una configuración  $\{n_i(t=0)\} = \{\zeta_i\}$  dada (que asumiremos modela el estímulo que recibe la red), ésta responderá evolucionando autónomamente al patrón  $\{\xi_i^\mu\}$  que más se asemeje a  $\{\zeta_i\}$ . Es decir, el sistema debe relajar dinámicamente en forma autónoma a la configuración  $\{n_i\} = \{\xi_i^\mu\}$  o a una muy parecida a ella. Cuando esto sucede, decimos que la red reconoció a la configuración  $\{\zeta_i\}$  como un ejemplo del  $\mu$ -ésimo concepto almacenado.

Dada la dinámica de McCulloch y Pitts, el problema se reduce entonces a encontrar una elección adecuada de los  $\{w_{ij}\}$ , de modo tal que el proceso de relajación antes descrito sea como se pretende. Es decir, se pretende que las  $p$  configuraciones  $\{\{\xi_i^\mu\}_{i=1, \dots, N}\}_{\mu=1, \dots, p}$  sean atractores estables de la dinámica del sistema.

Deseamos resaltar que en este capítulo nos abocaremos solo a analizar el problema de la memoria asociativa. A continuación, explicaremos la solución ideada por Hopfield en lo que se conoce hoy como *el modelo de Hopfield*.

### 4.3. Descripción del modelo de Hopfield

El modelo de Hopfield es un modelo mecánico-estadístico de una red neuronal, basado en neuronas binarias, que tiene la propiedad de almacenar y recuperar información en forma asociativa. El mismo consiste de  $N$  neuronas binarias representadas por las variables de estado  $S_i$  que pueden tomar valores  $+1$  (neurona activa) y  $-1$  (neurona en reposo). Notemos que, por conveniencia matemática, hemos realizado un cambio de variables para pasar de las variables binarias de McCulloch y Pitts  $n_i = 0, 1$  a variables del tipo Ising  $S_i = \pm 1$ . Esto nos permitirá, en ciertos casos, realizar analogías con el modelo de Ising para sistemas magnéticos. La dinámica del sistema viene dada ahora por la siguiente regla de actualización de las neuronas artificiales:

$$S_i(t+1) = \text{sgn} \left( \sum_j w_{ij} S_j(t) - \theta_i \right), \quad (4.4)$$

donde  $\text{sgn}(x)$  es la función signo. Notemos que con esta nueva elección, los valores que pueden tomar los patrones almacenados serán también  $\xi_i^\mu = \pm 1$ . Asumiremos además que los patrones almacenados son variables aleatorias independientes y que los umbrales  $\{\theta_i\}$  son todos nulos.

La regla de actualización para el estado de las neuronas que utiliza el modelo es la conocida como secuencial, porque en cada tiempo se elige una neurona al azar y se actualiza su estado de acuerdo a la regla (4.4). La elección de los pesos sinápticos  $w_{ij}$  adoptada por Hopfield [51] en su trabajo del año 1982 es la siguiente:

$$w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu}. \quad (4.5)$$

Esta elección corresponde a una forma particular de la regla de Hebb, ya que la eficacia sináptica entre dos neuronas depende de la actividad entre ellas y no depende de la actividad del resto. Notemos que la matriz de acoplamientos sinápticos definida por la expresión (4.5) es simétrica, es decir que  $w_{ij} = w_{ji}$ . Esto implica que si la neurona  $i$  está conectada con la  $j$ , entonces la  $j$  está conectada con la  $i$  con la misma eficacia. Se puede demostrar que bajo ciertas condiciones, esta elección de  $w_{ij}$  implica que los patrones memorizados (u otros muy parecidos) son configuraciones estables de la dinámica del sistema, es decir, si el sistema alcanza una de estas configuraciones almacenadas, se mantendrá en esta misma configuración por siempre.

El modelo de red neuronal con unidades binarias para modelar el problema de memoria asociativa que usa la regla de Hebb (4.5) con actualización asincrónica (secuencial) que acabamos de describir recién es lo que se conoce como *modelo de Hopfield*. Existe otra formulación del modelo que se basa en la función de Liapunov o energía del sistema, pero como no será útil a los fines de nuestro trabajo, la omitiremos en esta tesis.

#### 4.3.1. La capacidad de almacenamiento del modelo de Hopfield

Es sabido que los sistemas biológicos tienen una capacidad finita para almacenar patrones diferentes. Es más, sabemos que esta capacidad es bastante limitada si se la compara con la capacidad de almacenamiento de las computadoras modernas. Cabe entonces preguntarse, ¿cuántos patrones es capaz de almacenar la red neuronal de Hopfield? Un estudio mecánico estadístico realizado por Daniel Amit, Hanoch Gutfreund y Haim Sompolinsky en 1987 [56, 57] resolvió definitivamente esta cuestión de forma muy elegante y sofisticada. De aquí en más consideraremos solamente el caso en que los patrones almacenados son configuraciones aleatorias elegidas entre si en forma independiente. En otras palabras, el valor de cada una de las variables aleatorias  $\xi_i^v$  se obtiene de una distribución de probabilidad que tiene la forma:

$$p(\xi_i^v) = \frac{1}{2}(1 - \xi_i^v) + \frac{1}{2}(1 + \xi_i^v), \quad (4.6)$$

en tanto, la probabilidad del conjunto de patrones viene dada por:

$$P(\{\xi_i^v\}) = \prod_i \prod_v p(\xi_i^v). \quad (4.7)$$

Aprovechando que el modelo de Hopfield tiene acoplamientos simétricos y que la dinámica del mismo puede ser asociada fácilmente a la dinámica Monte Carlo de un modelo de vidrio de espín en la aproximación Curie–Weiss (donde cada espín interactúa con todos los otros espines de la red mediante una interacción aleatoria y competitiva cuya intensidad no depende de la distancia entre los momentos magnéticos) ellos fueron capaces de encontrar, utilizando el truco de las réplicas, la función partición del modelo. Este cálculo, realizado para unidades neuronales estocásticas, les permitió acceder a la solución del problema determinista (como límite de ruido cero), obteniendo dos regímenes diferentes:

- si el número de patrones es mayor que cierto valor crítico  $p_{max}$  entonces la red no funciona como dispositivo de almacenamiento asociativo, pues los atractores de la dinámica del sistema no están correlacionados con los patrones almacenados;



### 4.3 Descripción del modelo de Hopfield

- si el número de patrones es menor que  $p_{max}$ , la red evoluciona hacia uno de los patrones almacenados o, en su defecto, a una configuración muy cercana a él (en términos de distancia de Hamming). En otras palabras, la red funciona como dispositivo de almacenamiento asociativo, y lo hace muy bien, pues reconoce con poco error.

El valor  $p_{max}$  escala con la conectividad media de la red, que en el caso particular de Hopfield es  $N - 1$ . Es más, se puede ver que:

$$p_{max} \approx 0.138(N - 1) \approx 0.138N$$

Cuando la relación  $p/N$  alcanza el valor crítico  $p_{max}/N$ , el sistema sufre un cambio abrupto. En términos mecánico-estadísticos decimos que el sistema sufre una transición de fase de primer orden entre un estado de reconocimiento ( $p/N < p_{max}/N$ ) y otro de no reconocimiento ( $p/N > p_{max}/N$ ).

La forma de caracterizar la capacidad de reconocimiento de una red particular (definida para un dado conjunto de patrones almacenados) es medir la superposición de una configuración típica del estado estacionario final de la red (usualmente obtenido como un promedio temporal en el estado estacionario) con el patrón más cercano al que ha conseguido llegar. Más aun, por ser simétricos los acoplamientos del modelo de Hopfield, es fácil mostrar que los estados estacionarios están restringidos a ser puntos fijos de la dinámica del sistema. Supongamos por un momento que colocamos la red inicialmente en una configuración aleatoria y dejamos evolucionar el sistema hasta alcanzar una configuración punto fijo atractora  $\{S_i^f\}$ . Supongamos también que esta configuración final tiene como patrón más próximo a la memoria (a la configuración almacenada)  $\{\xi_i^v\}$ . Entonces definimos la superposición entre el estado final y la  $v$ -ésima memoria como:

$$m_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^f \xi_i^v. \quad (4.8)$$

Notemos ahora que si  $m_f$  es igual a uno, esto quiere decir que la configuración final coincide en todas las neuronas con el  $v$ -ésimo patrón almacenado. Es más, a medida que ambas configuraciones comienzan a discrepar en más y más neuronas, el valor de  $m_f$  comienza a decaer. En particular, para  $m_f = 0$  podemos afirmar que ambas configuraciones están totalmente descorrelacionadas.

A fin de analizar cómo se degrada la capacidad de reconocimiento del modelo de Hopfield necesitamos conocer cómo varía el valor de la cantidad  $m_f$  a medida que cambia el valor de  $p$ . Como ya hemos mencionado,  $p_{max}$  escala con el número total de neuronas de la red  $N$ , entonces es de esperar que  $m_f$  dependa de  $p$  y de  $N$  a través del parámetro  $\gamma = p/N$  recientemente introducido. O sea, debemos encontrar la función  $m_f(\gamma)$ .

En 1987, Amit y sus colaboradores [57] fueron capaces de encontrar una solución analítica para este problema, donde  $m_f(\gamma)$  surge, en el límite termodinámico y en el límite determinista, del siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} \exp\left(-\frac{m_f^2}{2\gamma r}\right) \quad (4.9)$$

$$r = \frac{1}{(1-C)^2} \quad (4.10)$$

$$m_f = \operatorname{erf}\left(-\frac{m_f}{2\gamma r}\right), \quad (4.11)$$

### 4.3 Descripción del modelo de Hopfield

---

donde  $erf(x)$  es la función error definida por

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du. \quad (4.12)$$

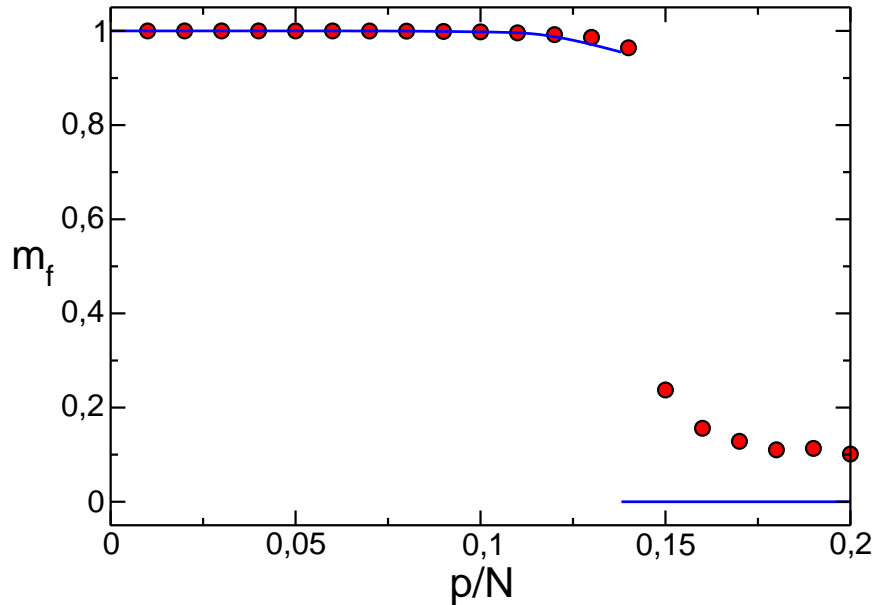
Observemos que la solución que mostramos recién es válida para el límite termodinámico, es decir, para un sistema donde  $N \rightarrow \infty$ . Otra forma de construir numéricamente la curva de reconocimiento del modelo de Hopfield es realizar una simulación de un sistema de tamaño finito. Para ello, se utiliza el siguiente protocolo:

1. Se prepara al sistema inicialmente en uno de los patrones almacenados y se lo deja evolucionar hasta alcanzar un punto fijo.
2. Una vez que el sistema llegó al punto fijo, calculamos el valor de  $m_f$  para esa simulación.
3. Repetimos esta operación un número grande de veces (típicamente 100) y calculamos el valor medio de  $m_f$ .
4. Variamos el valor de  $p$  dejando  $N$  fijo hasta completar la gráfica de  $m_f$  vs.  $p/N$ .

En la figura 4.3 mostramos la llamada curva de reconocimiento del modelo de Hopfield. En línea continua azul presentamos la curva calculada analíticamente (correspondiente al límite termodinámico) resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas descripto recientemente. Los puntos fueron obtenidos mediante simulaciones numéricas para una red de  $N = 1000$  neuronas. Como vemos, para valores pequeños de  $p/N$  la curva teórica y la obtenida numéricamente coinciden muy bien. No obstante, en la curva numérica nunca observamos la caída drástica predicha por la teoría. Esto se debe apenas a efectos de tamaño finito. Si uno realiza esta misma curva numérica para valores crecientes de  $N$  puede verificar que, para valores de  $p/N < p_{max}/N$ , los valores promedios de  $m_f$  no dependen fuertemente de  $N$ , en tanto para valores de  $p/N > p_{max}/N$  estos promedios dependen fuertemente de  $N$  y tienden a cero a medida que el tamaño del sistema crece.

Resumiendo, hemos visto que el modelo de Hopfield funciona muy bien como dispositivo de almacenamiento de memoria asociativa siempre y cuando trabajemos dentro del rango de valores de  $p$  (número de patrones almacenados) y de  $N$  (número de neuronas) tal que  $p/N < 0.138\dots$ . Como ya mencionamos, estos resultados se restringen al caso en que los patrones almacenados son tomados al azar, sin correlaciones entre neuronas ni entre patrones (se puede ver, aunque está fuera del interés de esta tesis, que a medida que los patrones almacenados se correlacionan entre sí, la capacidad de reconocimiento se degrada, o sea, el valor de  $p_{max}/N$  decae drásticamente).

Dos limitaciones importantes del modelo de Hopfield se refieren al hecho de que la matriz de conexiones sinápticas es simétrica ( $w_{ij} = w_{ji}$ ) y totalmente conectada (cada neurona interactúa con todas las otras neuronas). Desde el punto de vista biológico está claro que estas dos restricciones están lejos de acercarse a lo que sucede en sistemas reales, donde el número promedio de conexiones por neurona es muchos órdenes de magnitud menor al número total de neuronas. Además, éstas son fuertemente asimétricas, al punto tal de que en general si la sinapsis existe en una dirección, no existe en la otra. Por otro lado, desde el punto vista computacional estas dos propiedades, simetría y conectividad extrema, son muy difíciles y costosas de implementar en un dispositivo de almacenamiento artificial.



**Figura 4.3:** Curva de reconocimiento  $m_f$  vs.  $p/N$  para el modelo de Hopfield. En línea continua se muestra la obtenida analíticamente para el caso determinista y en el límite termodinámico ( $N \rightarrow \infty$ ) y en círculos rojos la obtenida numéricamente para una red de  $N = 1000$  neuronas.

Desde la resolución analítica del modelo de Hopfield en el año 1987, ha habido un creciente interés de la comunidad científica en encontrar modificaciones lo más simples posibles al mismo, capaces de mejorar su capacidad de reconocimiento. Estos intentos apuntaron en dos direcciones diferentes: algunos sugirieron modificar la regla de Hopfield para construir los acoplamientos sinápticos, en tanto otros apostaron a preservar la regla y modificar únicamente la topología de conexiones mediante el proceso de poda o dilución, o sea, eliminando sinapsis con alguna prescripción. Como los resultados originales en esta parte de tesis apuntan precisamente a mejorar la capacidad de reconocimiento del modelo mediante la eliminación de conexiones, y a los fines de poder comparar diferentes resultados de la literatura con los obtenidos en este trabajo, en la próxima sección introduciremos brevemente dos variaciones del modelo de Hopfield que incrementan notablemente su capacidad de reconocimiento (el valor de  $p_{max}/N$ ).

### 4.3.2. Variaciones del modelo de Hopfield con dilución asimétrica

#### El modelo de Hopfield ultra-diluido

En la red de Hopfield, las conexiones son simétricas ( $w_{ij} = w_{ji}$ ) y cada neurona está conectada con todas las otras, mientras que en las redes biológicas es bien conocido que las conexiones son asimétricas y en promedio cada neurona está conectada solo a una pequeña fracción  $\rho = 10^{-6}$  de las restantes  $10^{11}$ . Derrida [58] introdujo estas características diluyendo una red de Hopfield en la cual los  $w_{ij}$  fueron construidos previamente siguiendo la regla de Hebb [51]. Este modelo consiste de  $N$  neuronas tipo Ising  $\sigma = \pm 1$ , cuyas interacciones  $J_{ij}$  dependen de  $p$  patrones almacenados. Por

### 4.3 Descripción del modelo de Hopfield

definición del modelo, los valores de  $J_{ji}$  vienen dados por:

$$J_{ij} = C_{ji} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu}, \quad (4.13)$$

y los  $C_{ij}$  son variables aleatorias independientes que diluyen la sinapsis original cuando  $C_{ij} = 0$ . Para cada par  $(i, j)$ ,  $C_{ij}$  y  $C_{ji}$  son elegidos aleatoriamente de acuerdo a la distribución de probabilidades:

$$\rho(C_{ij}) = \frac{C}{N} \delta(C_{ij} - 1) + \left(1 - \frac{C}{N}\right) \delta(C_{ij}). \quad (4.14)$$

Notemos que las interacciones  $J_{ij}$  y  $J_{ji}$  son escogidas independientemente, existiendo una probabilidad no nula de que sean diferentes. En otras palabras, se ha introducido también asimetría en la red de conexiones.

Para este modelo se pueden considerar dos dinámicas diferentes:

1. Dinámica paralela, para la cual a cada tiempo  $t$ , todas las neuronas son actualizadas simultáneamente según la ley definida por las ecuaciones:

$$\sigma_i(t + \Delta t) = \begin{cases} +1 & \text{con probabilidad } (1 + \exp(-2h_i(t)/T_0)) \\ -1 & \text{con probabilidad } (1 + \exp(2h_i(t)/T_0)). \end{cases} \quad (4.15)$$

donde

$$h_i(t) = \sum_j J_{ij} \sigma_j(t), \quad (4.16)$$

El parámetro  $T_0$  que aparece en (4.15) es una temperatura ficticia que controla el ruido en la dinámica. Para la dinámica paralela la escala de tiempo es,

$$\Delta t = 1. \quad (4.17)$$

2. Dinámica secuencial aleatoria, para la cual a cada tiempo  $t$  se elige una neurona  $i$  al azar entre las  $N$  y se actualiza dicha neurona según la ley definida por las ecuaciones (4.16) y (4.15). Como para cada paso de tiempo sólo una neurona es actualizada, elegimos la siguiente escala de tiempo:

$$\Delta t = \frac{1}{N}. \quad (4.18)$$

Los resultados a continuación valen sólo en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$  y para el caso de dilución extrema o fuerte, que corresponde al caso particular  $C \ll \ln(N)$ . Consideraremos la evolución de una configuración  $\{\sigma_i(t)\}$  que tiene únicamente superposición macroscópica (no se anula al tomar el límite termodinámico) con un patrón almacenado, denotada como  $m(t)$ , y superposición microscópica (se anula al tomar el límite termodinámico) con los otros  $p - 1$  patrones aleatorios almacenados. Como en el modelo original de Hopfield, la superposición  $m(t)$  está definida como,

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \xi_i^1 \sigma_i(t) \rangle. \quad (4.19)$$

Es posible determinar analíticamente la curva crítica  $T_0$  vs  $p/C$ ,  $T^*(p/C)$ , tal que por debajo de ella el sistema almacena y por encima no. En particular, en el límite determinista  $T_0 = 0$  y en el límite termodinámico, el valor crítico de  $\gamma = p/C$  es

$$\gamma_c = \frac{2}{\pi} \approx 0.6366, \quad (4.20)$$

### 4.3 Descripción del modelo de Hopfield

y la transición es de segundo orden  $m^* \sim (\gamma_c - \gamma)^{\frac{1}{2}}$ . Uno puede ver que para  $T_0 = 0$  y  $\gamma \rightarrow 0$

$$m^* \simeq 1 - \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} e^{-\frac{1}{2\gamma}}. \quad (4.21)$$

Vemos entonces que este modelo asimétrico diluido estudiado tiene una transición de segundo orden, a diferencia de la de primer orden para el modelo de Hopfield. Además  $\gamma_c$  es mayor aquí, indicando que es posible almacenar más patrones con el mismo esfuerzo computacional. Se puede ver además, aunque está fuera del interés de esta tesis, que la naturaleza del atractor es también muy diferente de lo observado en el caso de Hopfield, y que el sistema visita un atractor caótico muy próximo a la memoria almacenada. Finalmente, es importante destacar que, pese a la gran restricción que impone la dilución fuerte, estos resultados analíticos concuerdan muy bien, salvo diferencias por efectos de tamaño finito, con las simulaciones numéricas realizadas en sistemas mucho más realistas, para los cuales  $C \ll N$ , conforme se mostró en [59] y [60].

#### El modelo de Hopfield ultra-diluido en una red compleja campo medio

Este modelo, que consiste básicamente en el modelo de Hopfield definido sobre una red dirigida y generada con el algoritmo de Barabasi-Albert, fue introducido en [62].

El modelo se basa en tres características importantes desde el punto de vista topológico:

1. *Dilución preferencial y asimétrica de las sinapsis*: tal como sucede en el modelo de poda selectiva [43], es deseable que la dilución no sea puramente aleatoria.
2. *Distribución ley de potencias del grado de conectividad de las neuronas*: Esto quiere decir que deseamos que, una vez construída la red neuronal, no posea una escala de distancias sinápticas característica [63].
3. *Evolución de la red*: en este modelo se pretendió emular, en forma simplificada, el proceso de desarrollo del sistema nervioso, el cual consta de al menos dos etapas bien marcadas: una etapa embrionaria, donde la red de conexiones está principalmente (aunque no exclusivamente) sujeta a condiciones genéticas, y una segunda etapa de maduración en la cual la red nerviosa se tiene que adaptar al medio ambiente. Esta segunda etapa implica la existencia de una regla dinámica de crecimiento y reconectado de la red, que a la vez le permita responder correctamente al medio ambiente cambiante. En este sentido, el desafío es conseguir una regla de crecimiento de la red de conexiones que permita a la vez garantizar las propiedades 1 y 2 anteriormente descritas. Para ello, el modelo utiliza las ideas introducidas por Barabási y Albert [14], con el cual ellos obtienen, mediante una regla de evolución, una red que presenta fuerte dilución y distribución de grado tipo ley de potencias.

Como es usual, se analiza numéricamente la capacidad de almacenamiento del modelo. La complejidad de la matriz sináptica impide cualquier análisis analítico. A fin de caracterizar el reconocimiento, se mide como siempre el parámetro

$$m_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1} \xi_i S_i, \quad (4.22)$$

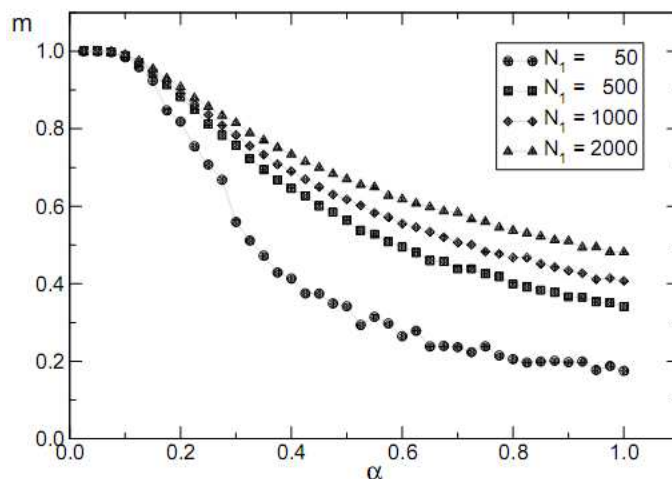
donde  $\{S_i\}$  corresponde a una configuración estacionaria de la dinámica del modelo.

## 4.4 El modelo Hopfield embebido en una red compleja

La dinámica es exactamente igual a la del modelo usual de Hopfield, con actualización asincrónica y aleatoria de los estados de las neuronas de acuerdo a la regla:

$$S_i(t+1) = \text{signo}(h_i), \quad \text{con} \quad h_i = \sum_j w_{ij} s_j. \quad (4.23)$$

En [62] se realizaron simulaciones numéricas de  $m_f$  vs  $\gamma = p/\langle k \rangle$ , donde  $\langle k \rangle$  es la conectividad de la red final. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.4.



**Figura 4.4:**  $m_f$  vs.  $p/\langle k \rangle$  (que el autor denominó con la letra  $\alpha$ ) para el modelo Hopfield con dilución y complejidad definido en [62]. Las curvas corresponden a diferentes tamaños del sistema. Extraído de [62]

## 4.4. El modelo Hopfield embebido en una red compleja

En las secciones anteriores introdujimos el modelo de Hopfield para memoria asociativa y discutimos no sólo sus propiedades, sino también algunas extensiones introducidas en la literatura, orientadas todas a mejorar su capacidad de reconocimiento. Por haberse originado en el estudio de vidrios magnéticos, el modelo de Hopfield posee muchas de las propiedades que los físicos estadísticos usualmente atribuyen a los modelos de la física de la materia condensada. En particular, hay dos propiedades importantes del modelo de Hopfield que, como hemos visto, están lejos de imitar lo que sucede realmente con los sistemas neuronales biológicos. En primer lugar, el modelo asume una conectividad total, o en términos más biológicos, cada neurona recibe estímulos y a la vez estimula a todas las otras neuronas. Esta propiedad tiene la enorme ventaja de facilitar notablemente el cálculo matemático de las propiedades estacionarias del modelo, pero sin embargo está muy lejos de representar lo que sucede en un sistema nervioso real. La segunda limitación sería del modelo consiste en el hecho de que las interacciones son siempre simétricas. En otras palabras, la sinapsis entre la neurona presináptica A y la neurona postsináptica B es igual a la sinapsis entre la neurona B y la neurona A.

Si bien los trabajos realizados con redes totalmente conectadas han arrojado resultados muy interesantes en el modelado de los sistemas neuronales, hemos visto que introducir elementos tomados de la naturaleza, como la dilución y la asimetría, mejoran sustancialmente la capacidad de

reconocimiento del modelo, al aumentar el número máximo de patrones que se pueden almacenar con un número fijo de neuronas. Pero existen otras propiedades referidas a la topología de la red de conexiones sinápticas que han mostrado ser muy importantes no sólo a la hora de modelar redes neuronales realistas, sino también a la hora de mejorar la solución al problema de memoria asociativa. Una de ellas se refiere a la forma particular en que las neuronas se conectan entre sí. Son muchos los estudios experimentales que muestran que la probabilidad de que una neurona tomada al azar tenga una dada conectividad (de entrada o salida)  $k$  está caracterizada, al menos en un amplio rango de valores de  $k$ , por un decaimiento como ley de potencia. Esto quiere decir que, si bien hay pocas neuronas fuertemente conectadas, estas pocas neuronas son muy importantes y determinantes a la hora de calcular los momentos de dicha distribución de probabilidad. En particular, lo que se ha observado es que muchas regiones cerebrales tienen la propiedad de ser libres de escala y mundo pequeño a la vez, introduciendo un grado de complejidad topológica inusual en el modelado de la arquitectura de conexiones. Y en este sentido, existe ya en la literatura trabajos que abordan el estudio del modelo de Hopfield en redes libres de escala [64] o en redes de mundo pequeño [65]. En ambos casos, los autores muestran cómo estas dos propiedades mejoran sustancialmente la capacidad de la red, apoyando una vez más la tesis de que los elementos observados en la naturaleza, o sea, aquellas propiedades topológicas creadas por los mecanismos de selección a lo largo de cientos de miles de años, mejoran el desempeño de este modelo para memoria asociativa. En otras palabras, dilución, asimetría y complejidad parecen ser tres ingredientes fundamentales tanto para modelar un sistema real, como al proponerse desarrollar un dispositivo neuronal artificial capaz de almacenar eficientemente memoria por asociación.

Sin embargo, hay una propiedad muy importante que todos estos modelos asumen, ya sea el modelo de Hopfield original [51, 56, 57], o sus versiones diluidas, tanto en redes aleatorias [58], óptimas [61], mundo pequeño [65] o libres de escala [64]. Y esta propiedad la podemos catalogar como el carácter campo medio de todos ellos. Esta caracterización como modelos tipo campo medio surge de la analogía con la física estadística de la materia condensada, y se refiere al hecho de que, independientemente de la conectividad media del modelo (o sea, de su grado de dilución), las vecindades o conjuntos de neuronas que interaccionan directamente con una dada neurona (tanto de entrada como de salida) son elegidas al azar con igual probabilidad. En otras palabras, la distancia topológica entre neuronas no juega absolutamente ningún rol en la construcción o definición de la red de conexiones sinápticas. Desde el punto de vista biológico es claro que en los sistemas neuronales naturales, a diferencia de lo que sucede en muchos materiales, las interacciones de largo alcance son no sólo frecuentes, sino también relevantes. Algunas neuronas en particular tienen la propiedad de alcanzar con sus axones neuronas postsinápticas muy lejanas, y aún así transmitir señales en forma muy eficiente. Sin embargo, a nadie puede escapar que los sistemas nerviosos están inmersos o embebidos en un espacio euclídeo tridimensional, y que la distancia entre neuronas tiene un rol relevante en el desarrollo del mismo, ya que en general prevalecen las conexiones de corto alcance por sobre las de largo alcance. En otras palabras, estamos ahora agregando un elemento biológico novedoso, usualmente olvidado (quizá por lo obvio) y cuyas consecuencias no habían sido exploradas hasta ahora en la literatura.

A partir de la presente sección presentaremos un estudio numérico de la capacidad de almacenamiento de una red neuronal de Hopfield definida en una red diluida, asimétrica, mundo pequeño, libre de escala y además embebida en un espacio euclídeo de baja dimensionalidad. Y debido a que la mayoría de las capacidades mentales más relevantes se computan en el neocórtex cerebral, restringiremos nuestros estudios a redes en un sustrato bidimensional, usando el concepto de redes embebidas en una red cuadrada, tal como lo definimos en el capítulo 1.

Es importante destacar que, hasta donde conocemos, todas las evidencias previas en relación al uso de redes *regulares* (vecinos próximos o corto alcance en general) de baja dimensión para el modelo de Hopfield indican un claro deterioro en la capacidad de almacenamiento cuando se lo compara con el modelo de Hopfield totalmente conectado (versión original). Como quedará claro en el desarrollo de esta sección, el principal objetivo de nuestra investigación es mostrar cómo el uso de redes diluidas, asimétricas, complejas y embebidas en un espacio euclídeo bidimensional puede mejorar drásticamente el comportamiento del modelo de Hopfield como dispositivo de memoria asociativa, aún cuando se lo compare con arquitecturas totalmente conectadas o grafos aleatorios.

Observemos que en el modelo de Hopfield las neuronas se encuentran conectadas todas con todas, es decir que es un modelo de campo medio, y sus conexiones son simétricas. Al considerar que las neuronas de Hopfield se encuentran ubicadas en una red embebida, el cambio sustancial que estamos introduciendo es el hecho de que cada neurona estará conectada solamente con algunas vecinas, según la distribución de ley de potencias (caracterizada con el exponente  $\alpha$ ). Si bien en el desarrollo original del método de embebido se pensó en un grafo no direccionado [4, 5], en este caso las conexiones serán salientes y no simétricas, es decir trabajaremos con un grafo direccionado.

Como primer paso en la construcción del modelo, generamos una red tal como se explicó en el capítulo 1. En particular, se generará una red compleja caracterizada por un exponente  $\alpha$  con valores máximo y mínimo para la cantidad de enlaces permitidos por sitio ( $m$  y  $M$  respectivamente), que estará embebida en un espacio euclídeo bidimensional. Así, el tamaño o número de neuronas de la red está definido como  $N = L \times L$ , donde  $L$  es el largo del área del neocortex que se desea modelar. A cada nodo de este reticulado asociamos una neurona binaria (tipo Ising)  $S_i$ , que puede tomar los valores  $+1$  (si la neurona dispara un pulso) o  $-1$  (si la neurona está en reposo). En este caso, para cada neurona  $i$  definimos el número  $k_i$  de conexiones *salientes*, el cual debe decaer como ley de potencia a medida que  $k_i$  aumenta,

$$P(k) = Ck^{-\alpha}.$$

Por último, a cada conexión direccionada se le asigna una eficiencia sináptica  $w_{i,j}$  dada por la receta usual del modelo de Hopfield:

$$w_{ij} = \frac{1}{k_i} \sum_{\mu=1}^N \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu},$$

donde  $\xi_i^{\mu} = \pm 1$  (con  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $\mu = 1, 2, \dots, p$ ) son las  $p$  configuraciones almacenadas elegidas al azar y en forma independiente.

En definitiva, nuestro modelo de Hopfield bidimensional y complejo está caracterizado por apenas tres parámetros, a saber:  $m$ ,  $M$  y  $\alpha$ . Sin embargo, nos interesa, como vimos en el capítulo anterior, cómo decae la capacidad de reconocimiento de una red con estas propiedades topológicas a medida que aumenta el número  $p$  de patrones almacenados mientras se mantiene fijo el número  $N$  de neuronas.

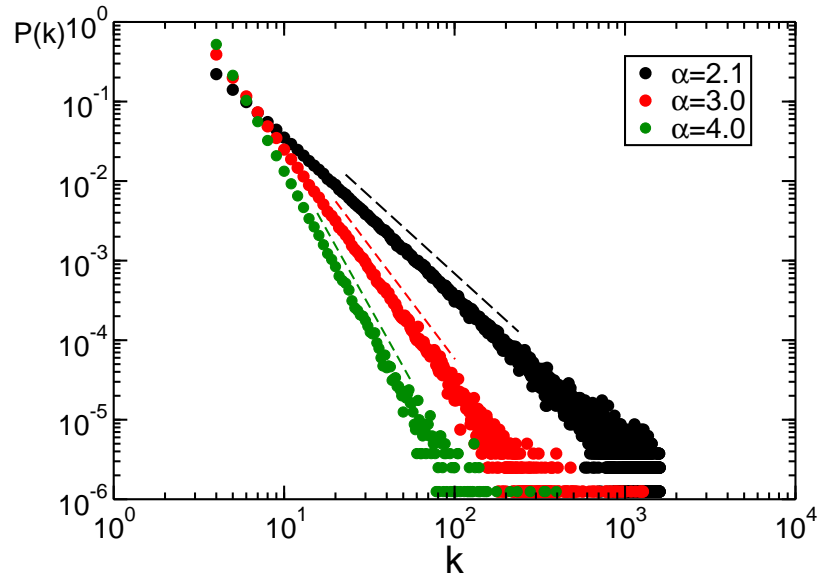
## 4.5. Resultados numéricos

En esta sección presentaremos los resultados originales obtenidos numéricamente sobre la capacidad de reconocimiento del modelo de Hopfield cuando la red de conexiones sinápticas se construye sobre una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional.



## 4.5 Resultados numéricos

Como primer paso, mostraremos el histograma de grados obtenidos para esta red embebida no direccionada, con el objetivo de corroborar el valor del exponente  $\alpha$  de la ley de potencias. En la figura 4.5 mostramos el gráfico de la distribución de grados, en doble escala logarítmica, para una red con  $L = 40$  y para tres valores para  $\alpha$ , a saber, 2.1, 3.0 y 4.0. En estos gráficos se han usado los parámetros de red  $m = 4$  y  $M = N = 1600$ . Hemos comprobado que en todos los casos el exponente resultante luego del proceso de embebido (dado por la pendiente de la recta en el gráfico logarítmico) conserva el valor especificado inicialmente.

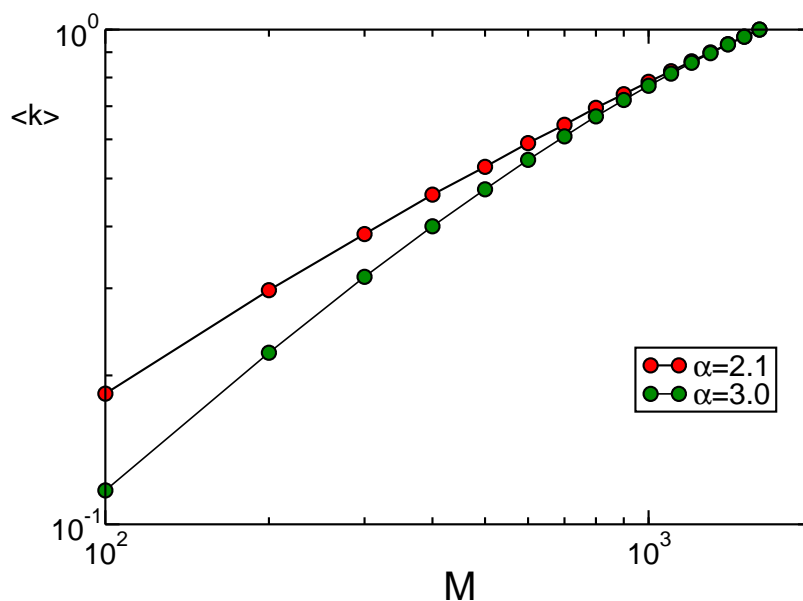


**Figura 4.5:** Función distribución de grados  $P(k)$  para una red embebida de  $N = 40 \times 40 = 1600$  nodos construida con los siguientes parámetros:  $m = 4$ ,  $M = N$  y  $\alpha = 2.1, 3$  y  $4$ .

### 4.5.1. La conectividad media

En términos de computabilidad, un parámetro muy relevante de la red es la conectividad media por neurona  $\langle k \rangle$ , que es función de los tres parámetros que definen la red,  $\alpha$ ,  $m$  y  $M$ . En la figura 4.6 hemos graficado dicha conectividad media por neurona como función de  $M$ , el máximo número de conexiones por sitio, para diferentes valores del exponente  $\alpha$ , manteniendo fijo el valor  $m = 4$ , el mínimo número de conexiones por sitio.

Es importante destacar que  $\langle k \rangle$  no depende en absoluto de  $N$ , lo que constituye una característica biológica relevante, ya que es bien sabido que la conectividad media medida en sistemas neuronales reales no depende del tamaño típico del cerebro de la especie. Notemos que la conectividad media decrece cuando el valor del exponente  $\alpha$  se incrementa, efecto que es más pronunciado cuanto menor es  $M$ .



**Figura 4.6:** Conectividad media por neurona en función del máximo número de conexiones permitido  $M$  para diferentes valores del exponente  $\alpha = 2.1$  y  $3$ , todos con  $m = 4$  fijo.

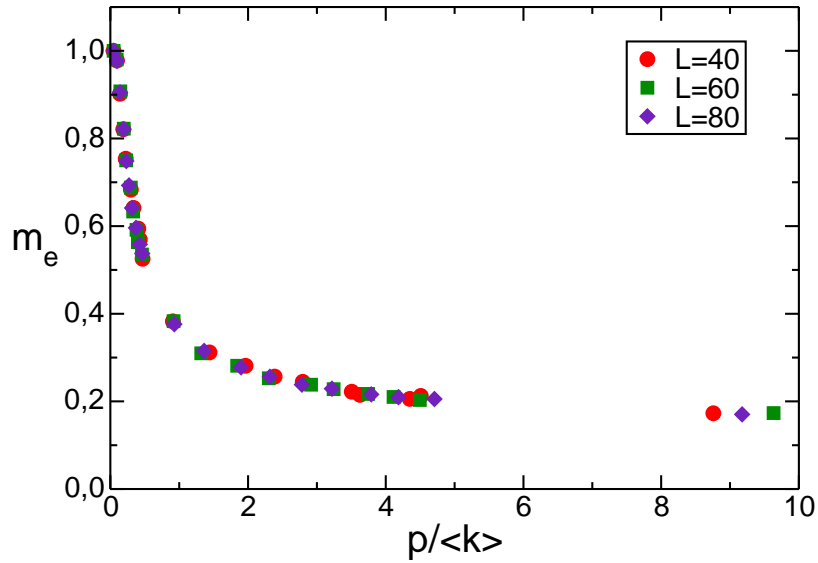
#### 4.5.2. La capacidad de almacenamiento

En esta sección analizaremos la capacidad de almacenamiento del modelo de Hopfield diluido y asimétrico definido sobre la red compleja descrita en la sección anterior. Para ello seguiremos la receta usual, incrementando secuencialmente el número de patrones almacenados  $p$  y evaluando la superposición final:

$$m_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \langle S_i \rangle,$$

donde  $\langle \dots \rangle$  denota promedios tanto temporales, una vez que la red alcanza el estado estacionario, como configuracionales. Notemos que el subíndice  $e$  hace referencia a que estamos calculando la capacidad de almacenamiento en el estado estacionario, luego de un cierto transitorio. En cada simulación inicializamos el sistema en una de las configuraciones almacenadas, a fin de evaluar la estabilidad de estos patrones. Aquí  $\mu$  se refiere a la memoria más próxima al estado estacionario del sistema.

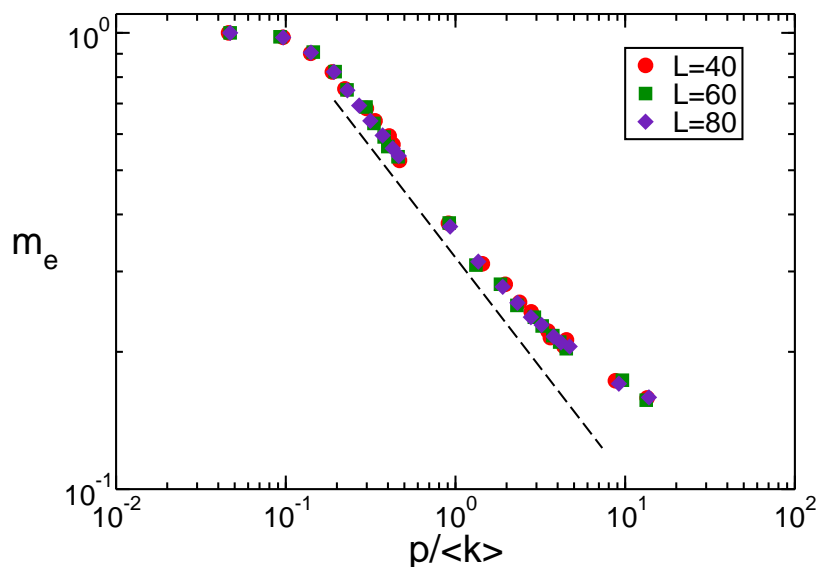
En este caso, nos interesa analizar el comportamiento de la capacidad de almacenamiento de la red en función de la cantidad de patrones almacenados  $p$  normalizado según la conectividad media de la red, es decir  $p/\langle k \rangle$ . En la figura 4.7 graficamos  $m_e$  en función de  $p/\langle k \rangle$  para  $\alpha = 2.1$ ,  $m = 4$  y  $M = 1600$ , y para diferentes tamaños lineales del sistema,  $L = 40, 60$  y  $80$ . En esta figura hay dos puntos importantes a destacar. En primer lugar, podemos observar un decaimiento muy suave de  $m_e$  a medida que  $p/\langle k \rangle$  se incrementa, indicando un buen desempeño en la recuperación de información del modelo, sobre todo cuando lo comparamos tanto con el modelo de Hopfield original como con la versión diluida en una red aleatoria. En segundo lugar, podemos confirmar que las propiedades de almacenamiento son prácticamente independientes del tamaño de la red y escalan como  $p/\langle k \rangle$ , como de hecho ocurre cuando el modelo se define sobre una red ultra-diluida aleatoria [58, 59]. Por lo tanto, de ahora en adelante nos restringiremos a analizar el caso  $L = 40$ .



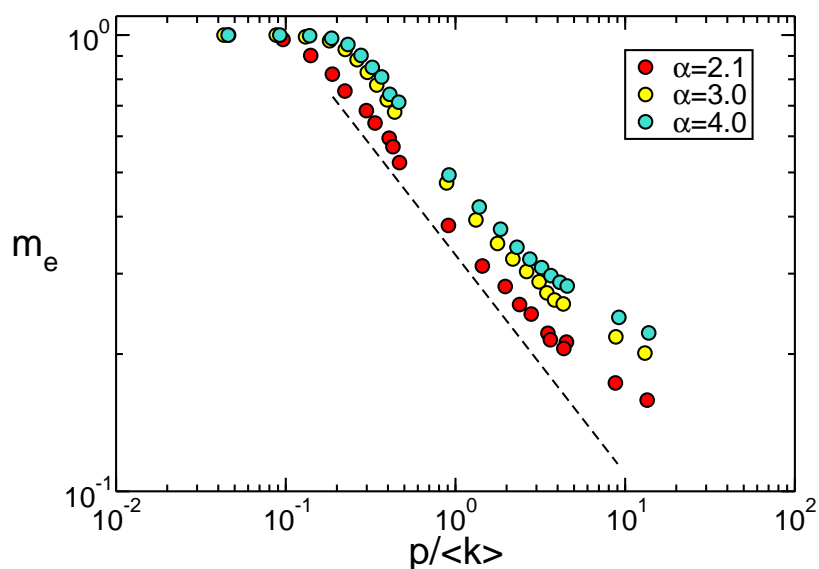
**Figura 4.7:** Parámetro  $m_e$  vs.  $p/\langle k \rangle$  para redes embebidas en un espacio euclídeo bidimensional con  $L = 40, 60$  y  $80$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $m = 4$  y  $M = 1600$  ( $\langle k \rangle \approx 21$ ).

En la figura 4.8 hemos representado los mismos datos que fueron mostrados en la figura 4.7, pero ahora usando doble escala logarítmica. Este gráfico confirma que la superposición  $m_e$ , para valores grandes de  $p/\langle k \rangle$ , decae como una ley de potencias o aun más lentamente. Este hecho resulta visible en forma gráfica observando que los puntos siempre caen por encima de la línea de trazo, que representa un comportamiento ley de potencias en el gráfico en escala doble logarítmica. Este resultado es sorprendente, puesto que indica que la red no presenta, hasta donde alcanzamos a calcular, una transición hacia una fase de no reconocimiento. En otras palabras, aparentemente se puede recuperar información por asociación para cualquier valor finito de  $p/\langle k \rangle$ .

Por último, en la figura 4.9 mostramos una comparación de la curva  $m_e$  en función de  $p/\langle k \rangle$  para diferentes valores de  $\alpha$ , a saber, 2.1, 3.0 y 4.0. El resto de los parámetros de embebido están fijos en los siguientes valores:  $L = 40$ ,  $m = 15$  y  $M = N = 1600$ . El gráfico está representado en doble escala logarítmica, y se puede observar que las tres curvas no son coincidentes entre sí, lo cual indica que existe una influencia, no muy importante, del exponente de la ley de potencias en el comportamiento de  $m_e$ . A pesar de ello, se sigue cumpliendo que la capacidad de almacenamiento no decae a cero para ningún valor explorado de  $p/\langle k \rangle$ . Nuevamente, la línea de trazo representa un comportamiento tipo ley de potencias, por lo cual se evidencia el decaimiento de todas las curvas de forma más lenta que una ley de potencias.



**Figura 4.8:** Gráfico de la figura 4.7, pero usando doble escala logarítmica. La línea de trazo representa un comportamiento del tipo ley de potencias. Observar que todos los puntos se encuentran por encima de esta línea, indicando un decaimiento de ley de potencias o más lento.



**Figura 4.9:** Parámetro  $m_e$  vs.  $p/\langle k \rangle$  para redes embebidas en un espacio euclídeo bidimensional con parámetros de red  $L = 40$ ,  $m = 15$  y  $M = 1600$  y tres valores de  $\alpha$ , a saber, 2.1, 3.0 y 4.0. La línea de trazo representa un comportamiento del tipo ley de potencias. Observar que todos los puntos se encuentran por encima de esta línea, indicando un decaimiento de ley de potencias o más lento.

### 4.5.3. Comparación con otros modelos

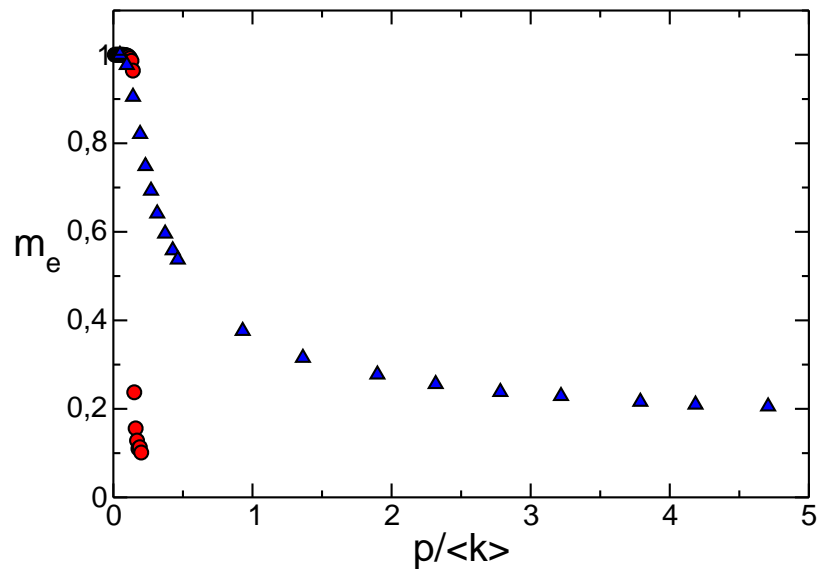
Finalmente, en esta sección compararemos nuestros resultados con aquellos descritos previamente para otras versiones del modelo de Hopfield, a saber,

## 4.5 Resultados numéricos

- el modelo de Hopfield original, simétrica y totalmente conectado [51];
- el modelo de Hopfield ultra-diluido en un grafo aleatorio campo medio [58];
- el modelo de Hopfield ultra-diluido en un grafo complejo (mundo pequeño y libre de escala) campo medio [62].

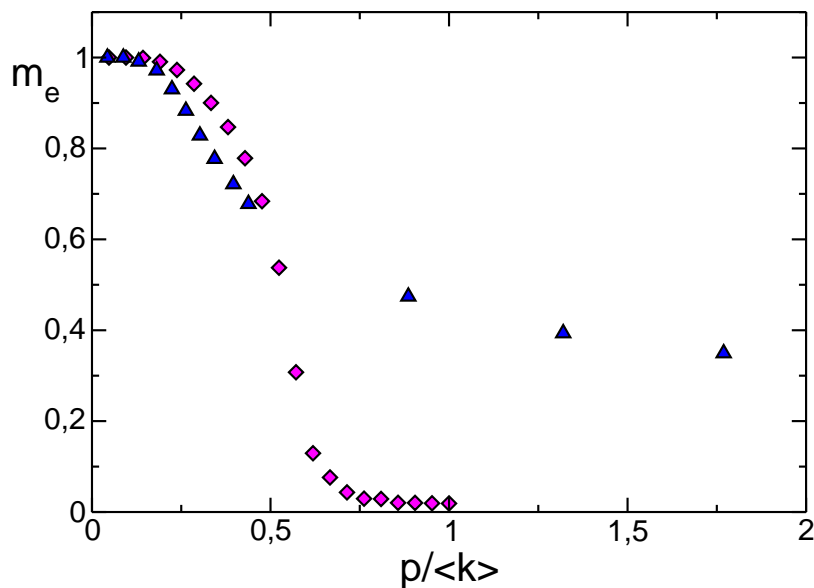
Recordemos aquí que el atributo *campo medio* hace referencia al hecho de que en los procesos de dilución no se tiene en cuenta la distancia entre neuronas.

En la figura 4.10 comparamos la capacidad de almacenamiento para los modelos de Hopfield embebido (triángulos azules) y en su versión original (círculos rojos). Para el modelo embebido hemos usado  $L = 80$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $m = 4$  y  $M = 1600$ . Para el modelo de Hopfield original usamos  $N = 1000$ .



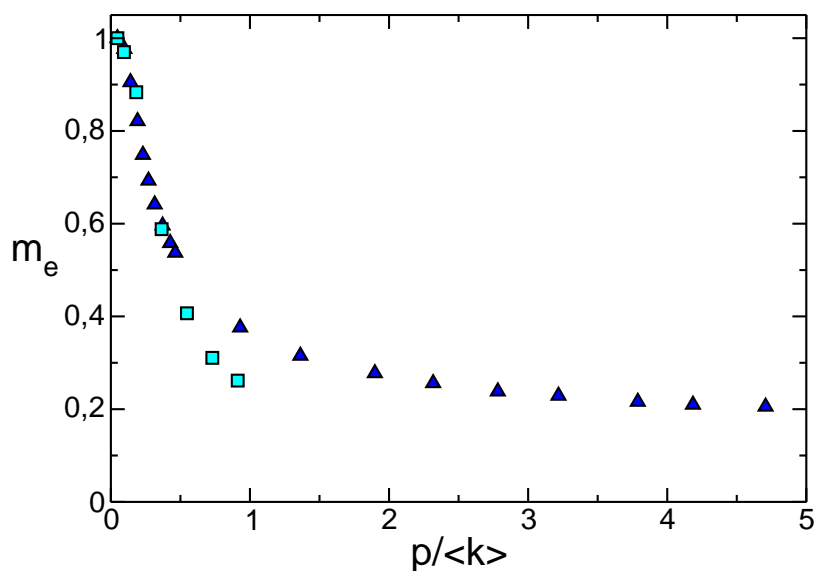
**Figura 4.10:** Parámetro  $m_e$  vs.  $p/\langle k \rangle$  para el modelo de Hopfield embebido (triángulos azules) con  $\alpha = 3.0$ ,  $L = 80$ ,  $m = 4$  y  $M = 1600$  y para el modelo de Hopfield en su versión original (círculos rojos) con  $N = 1000$ .

En la figura 4.11 comparamos los mismos resultados de la red embebida pero ahora con el modelo de Hopfield ultra-diluido en una red aleatoria. Ambas redes fueron construidas con la misma conectividad media por neurona y nuevamente graficamos  $m_e$  en función de  $p/\langle k \rangle$ . Los triángulos azules corresponden al modelo en la red embebida con  $L = 80$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $m = 4$  y  $M = 1600$ , en tanto que los rombos morados corresponden a una red ultra-diluida aleatoria con  $N = 20000$  neuronas.



**Figura 4.11:** Parámetro  $m_e$  vs.  $p/\langle k \rangle$  para el modelo de Hopfield embebido (triángulos azules) con  $\alpha = 2.1$ ,  $L = 80$ ,  $m = 4$  y  $M = 1600$  y para el modelo de Hopfield en la red ultra-diluida aleatoria (rombos morados) con  $N = 20000$ .

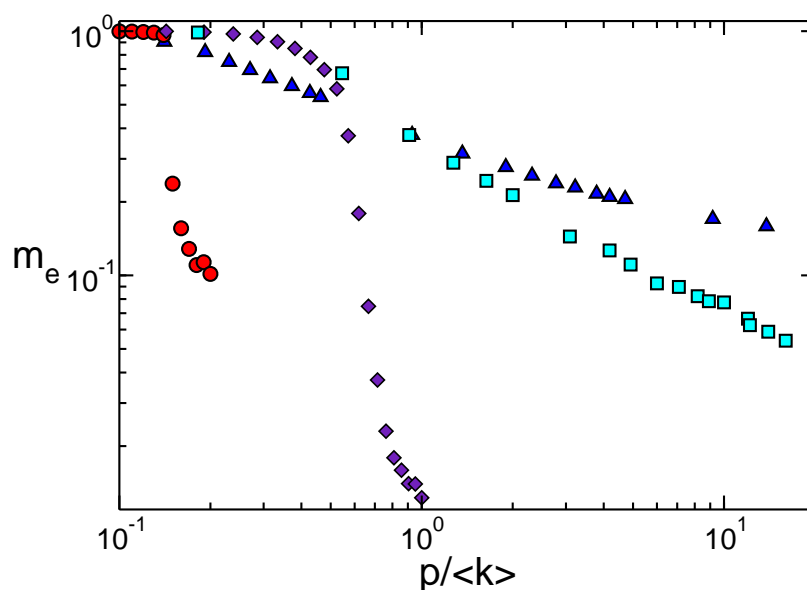
Realizamos ahora la misma comparación con el modelo con ultra-dilución en una red compleja campo medio [62] y los resultados se presentan en la figura 4.12. triángulos azules corresponden al caso de embebido bidimensional con  $\alpha = 2.1$ ,  $L = 80$ ,  $m = 4$  y  $M = 1600$ , en tanto que los cuadrados celestes fueron obtenidos con el modelo ultra-diluido en la red compleja para una red de  $N = 10000$  neuronas. En ambos casos se utilizó la misma conectividad media por neurona.



**Figura 4.12:** Parámetro  $m_e$  vs.  $p/\langle k \rangle$  para el modelo de Hopfield embebido (triángulos azules) con  $\alpha = 2.1$ ,  $L = 80$ ,  $m = 4$  y  $M = 1600$  y para el modelo de Hopfield ultra-diluido en una red compleja campo medio (cuadrados celestes) con  $N = 10000$ .

## 4.6 Conclusiones del capítulo

Finalmente, y a modo de resumen de esta subsección, en la figura 4.13 graficamos simultáneamente los resultados obtenidos para los cuatro modelos pero en doble escala logarítmica: el modelo de Hopfield embebido (triángulos azules) con  $\alpha = 2.1$ ,  $L = 80$ ,  $m = 4$  y  $M = 1600$ , el modelo de Hopfield ultra-diluido en una red compleja campo medio (cuadrados celestes) con  $N = 10000$ , el modelo de Hopfield en la red ultra-diluida aleatoria (rombos morados) con  $N = 20000$  y el modelo de Hopfield en su versión original (círculos rojos) con  $N = 1000$ . Podemos apreciar que el modelo embebido bidimensional tiene un mejor desempeño que las otras tres versiones. Junto al modelo en la red compleja campo medio comparte la virtud de presentar un decaimiento tipo ley de potencia (o más lento) de la superposición final a medida que el número de patrones aumenta manteniendo la conectividad media fija. Los otros dos modelos en cambio muestran una nítida transición a una fase de no reconocimiento para grandes valores de  $p/\langle k \rangle$ , la cual puede ser reproducida y estudiada en forma analítica.



**Figura 4.13:** Parámetro  $m_e$  vs.  $p/\langle k \rangle$  para cuatro versiones diferentes del modelo de Hopfield: el modelo de Hopfield embebido (triángulos azules) con  $\alpha = 2.1$ ,  $L = 80$ ,  $m = 4$  y  $M = 1600$ ; el modelo de Hopfield ultra-diluido en una red compleja campo medio (cuadrados celestes) con  $N = 10000$ ; el modelo de Hopfield en la red ultra-diluida aleatoria (rombos morados) con  $N = 20000$ ; el modelo de Hopfield en su versión original (círculos rojos) con  $N = 1000$ .

En la próxima sección analizaremos las principales conclusiones de el estudio descrito en este capítulo.

## 4.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo hemos introducido muy brevemente los elementos básicos del modelado de redes neuronales, haciendo especial hincapié en el problema de almacenado y reconocimiento de información por asociación (problema de memoria asociativa). Hemos descrito con cierto grado de detalle el modelo introducido en 1982 por John Hopfield [51], dejando las cuentas más engorrosas para que el lector consulte la bibliografía sobre el tema. Vimos cómo se mide la capacidad de reconocimiento, mostramos cómo surgió la solución analítica del modelo para el caso particular en

que las memorias almacenadas son totalmente independientes entre sí y comparamos los resultados analíticos con los resultados numéricos. Estos confirman que para valores pequeños del  $p/N$  la red funciona muy bien como dispositivo almacenador, pero que sufre una transición drástica (transición de primer orden o discontinua) cuando  $p = p_{max} \approx 0.138N$ , de forma tal que para  $p > p_{max}$  el sistema no funciona más como dispositivo capaz de reconocer por asociación.

A continuación presentamos dos variaciones del modelo original de Hopfield, previamente estudiadas por otros autores en la literatura, almacenando siempre patrones descorrelacionados. Estas variaciones supusieron preservar la regla de construcción de los acomplamientos sinápticos pero introdujeron diferentes formas de diluir aleatoriamente la matriz de conexiones, todas incluso en el límite de ultra-dilución, en el cual la conectividad media por partícula se mantiene fijo entanto  $N$  puede crecer indefinidamente. En el caso del modelo ultra-diluido [58] definido en un grafo totalmente aleatorio con conectividad media  $C \ll \ln(N)$ , vimos que la capacidad de reconocimiento aumenta con respecto a la versión original del modelo, en la cual los acomplamientos son simétricos y cada neurona interactúa con todas las otras. El sistema sufre ahora una transición continua a una región de no-reconocimiento para valores de  $p > p_{max} = 2C/\pi \approx 0.636C$ , sensiblemente mayor al encontrado en el modelo totalmente conectado de Hopfield. Además, como ventaja adicional podemos mencionar que en este modelo los acomplamientos son asimétricos, lo cual le da más sentido biológico. Por último vimos el desempeño del modelo de Hopfield definido en una red tipo Barabasi-Albert (libre de escala), con un muy buen desempeño también a la hora de analizar la capacidad de reconocimiento.

La parte original de este capítulo se presentó en la sección previa, donde hemos analizamos el mismo problema de reconocimiento de patrones en forma asociativa pero ahora en un modelo de Hopfield definido sobre una red bidimensional y compleja (libre de escala y mundo pequeño). Este tipo de topología, que se observa ya en varios experimentos biológicos, permite mejorar sustancialmente la capacidad de reconocimiento de la red de Hopfield y de su versión ultra-diluida, sugiriendo una posible explicación evolutiva para la aparición de estas estructuras tan complejas en cerebros naturales. Fue posible observar que el modelo embebido bidimensional tiene un mejor desempeño que las otras tres versiones que fueron presentadas. Más aun, la capacidad de reconocimiento de la red embebida compleja decae más lento que una ley de potencias, indicando que la red es capaz de reconocer patrones en un rango más amplio. Por otro lado, no fue posible observar una transición de fase desde una fase de reconocimiento a una de no reconocimiento como ocurre en el modelo original de Hopfield o en el grafo aleatorio.



---

## Introducción al fenómeno de la sincronización

---

### 5.1. Introducción

El término *sincronización* se refiere al hecho, ampliamente observado en la naturaleza, por el cual dos o más componentes de un sistema dado pueden eventualmente operar al unísono. El universo está lleno de bellos y sorprendentes ejemplos de comportamiento sincronizado, tan variados que van desde escalas moleculares hasta astronómicas. En particular, la misma existencia de la vida está sustentada en la habilidad que tienen los organismos vivos para coordinar sus ritmos internos con los ciclos del ambiente que están regidos por los movimientos del planeta tierra.

Como ocurre siempre con los fenómenos emergentes, la explicación más básica de la sincronización reside en la capacidad que tienen los elementos de un dado sistema para interactuar, a veces incluso muy débilmente, y por medio de esas interacciones imponer al conjunto un comportamiento cooperativo y correlacionado que da lugar a la aparición de un ritmo cíclico global. Lo que hace a la sincronización particularmente sorprendente es su ubicuidad, debida principalmente a la gran variedad de interacciones que son capaces de imponer un comportamiento global organizado a los componentes individuales un sistema.

La historia de la sincronización comienza en el año 1665 debido a las observaciones realizadas por el científico danés Christian Huygens. Estando enfermo pudo observar desde su cama el movimiento de dos relojes de péndulo que colgaban de una pared de la habitación. Huygens observó que ambos péndulos oscilaban de tal forma que siempre se movían o bien en el mismo sentido (en fase) o bien en sentidos opuestos (en anti-fase), aun cuando eran eventualmente perturbados. Al describir este fenómeno, que él llamó *simpatía de los relojes*, Huygens sentó las bases de lo que hoy conocemos como *sincronización mutua* [66, 67].

La sincronización no se limita al caso de los péndulos mutuamente sincronizados. Los biólogos, por ejemplo, han encontrado sincronización en los organismos vivos. Paradójicamente fue un astrónomo, Jean-Jacques Dortous de Mairan, quien en 1729 realizó el primer experimento crono-

biológico documentado de diseño espectacularmente sencillo (¡sólo necesitó una planta y un armario!). De Mairan observó que las vainas de cierta planta sensitiva<sup>1</sup> se movían hacia arriba y hacia abajo siguiendo el ciclo diario del día y la noche. Más aun, también descubrió que estas vainas se seguían moviendo cumpliendo un ciclo de aproximadamente 24 horas en un armario oscuro, sin la influencia de la luz solar. Desde aquel descubrimiento se han realizado estudios que revelan la existencia de un reloj biológico interno que regula el ritmo circadiano<sup>2</sup> (diario) de los organismos vivos. En ausencia de influencias externas (como la luz del sol, por ejemplo), estos relojes pueden diferir muy levemente de un ciclo de 24 horas, pero en condiciones normales se encuentran sincronizados con el ciclo externo de luz-oscuridad [66, 68].

Luego de las observaciones fenomenológicas pioneras de Huygens en el siglo XVII, los físicos han tratado de entender el origen microscópico de la sincronización. Sin embargo, esto no fue posible hasta las contribuciones realizadas por Wiener [69, 70] y Winfree [71] ya en el siglo XX, quienes sentaron las bases matemáticas que rigen el modelado de la sincronización. A mediados de los años '70, y siguiendo las ideas introducidas por Winfree, Kuramoto desarrolló por primera vez una aproximación a los mecanismos estadísticos que rigen este problema [7, 8]. A pesar de la simplicidad de su modelo, Kuramoto fue capaz de explicar cómo la competencia entre las frecuencias propias de los componentes del sistema y una interacción global muy pequeña pueden dar lugar a una transición entre una fase desordenada (caracterizada por ritmos individuales no correlacionados) y una fase ordenada (donde todos los componentes oscilan con cierto grado de unisidad). Desde entonces, el modelo conocido como *Modelo de Kuramoto* ha atraído la atención de una creciente comunidad científica, incluyendo no sólo físicos, sino también biólogos, ingenieros, químicos, entre otros.

El estudio de la sincronización se enfoca en encontrar los mecanismos básicos que son responsables del comportamiento sincrónico colectivo entre los miembros de una dada población. Ya sea que este comportamiento se origine mediante fuentes externas o internas al sistema, y cualquiera sea su origen (físico, bioquímico, etc) y grado de complejidad, lo que se pretende es encontrar la esencia de la sincronización con unas pocas leyes básicas.

En este capítulo se introducirán los conceptos generales, haciendo especial hincapié en el modelo de Kuramoto. Se mostrarán las propiedades del modelo en su versión original (campo medio) y algunos resultados del estudio del modelo en un arreglo regular cuadrado. Usando las bases sentadas en este capítulo, en los dos próximos analizaremos la dinámica del modelo de Kuramoto en una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional con diferentes tipos de interacciones. En el capítulo 6 estudiaremos el fenómeno de sincronización sobre una red compleja cuando las interacciones entre sitios son constantes, en tanto que en el capítulo 7 se analizará el caso en que la fuerza de las interacciones entre vecinos es competitiva y depende de la distancia entre ellos.

## 5.2. Definiendo la sincronización

Antes de comenzar con el estudio del modelado de procesos de sincronización, es conveniente hacer un paréntesis para entender algunos conceptos y definiciones que usaremos en adelante.

---

<sup>1</sup>Conocida como la mimosa púdica, la sensitiva, moriviví o dormilona

<sup>2</sup>El término circadiano proviene del latín *circa*, alrededor y *dies*, día; significa literalmente “cerca de un día”. La rama de la biología que estudia los ritmos temporales de los organismos vivos tales como el diario, el semanal, el estacional, o el anual es la *cronobiología*

La pregunta natural que surge es: ¿qué entendemos por sincronización? En la literatura se pueden encontrar definiciones tales como: *Sincronización es el ajuste de los ritmos de objetos oscilantes debido a la interacción débil que existe entre ellos* [66]. Así, se dice que un *conjunto de osciladores está sincronizado cuando la frecuencia de cada uno de ellos se ha bloqueado en la misma frecuencia de todas las restantes* [66, 72].

Llamamos *objetos oscilantes* a ciertos sistemas cuya oscilación está conducida mediante una fuente de energía y sus oscilaciones son estables ante pequeñas perturbaciones. Cuando hablamos de sincronización, los objetos bajo estudio son capaces de oscilar solos, es decir, sin una fuente de energía externa. Este tipo de osciladores se conocen como *osciladores auto-sustentados*. Cuando tenemos un grupo de dos o más de estos objetos oscilantes, pueden ocurrir interacciones entre ellos.

Cuán fácilmente se puede sincronizar un grupo de tales osciladores dependerá de cuán diferentes son entre sí las frecuencias naturales de los mismos sin la influencia del resto de los osciladores. Como veremos más adelante, las *frecuencias naturales* son las que tiene cada oscilador cuando se encuentra aislado del resto y se obtienen generalmente de una cierta distribución aleatoria (gaussiana, lorentziana, entre otras). Por lo tanto, una buena medida de cuán distintas son las frecuencias naturales puede ser el ancho de esta distribución. Existe un rango de anchos de la distribución de frecuencias naturales para las cuales es posible que la sincronización ocurra. Ya dentro de estos parámetros, es el acoplamiento que modela la interacción entre ellos el que entra en juego y eventualmente puede hacer que todas las frecuencias de los osciladores resulten ser idénticas y constantes.

Para describir el comportamiento de los osciladores, es útil hacerlo en el contexto del *espacio de las fases*. Recordemos que el espacio de fases de un sistema está formado por un conjunto de variables que describen su estado. Así, un punto en el espacio de las fases representa un estado del sistema en un determinado tiempo; y en la medida que el sistema evoluciona temporalmente, se genera una curva o trayectoria en dicho espacio. Para el caso de los osciladores auto-sustentados la curva descrita en su evolución temporal tiene una forma particular, que resulta ser una curva cerrada conocida como *ciclo límite*. Como nuestros osciladores deben ser estables ante pequeñas perturbaciones, los osciladores auto-sustentados tienen ciclos límites estables en el espacio de las fases. Esto quiere decir que las trayectorias cercanas al ciclo límite se aproximan hacia él, o equivalentemente, cualquier perturbación que haga salir al sistema levemente de su ciclo límite lo llevará de regreso a su ciclo original [73].

En este contexto es posible definir dos conceptos importantes referidos a un oscilador auto-sustentado: su *fase*  $\theta$  y su *frecuencia natural*  $\omega$ . La fase se define de tal forma que  $\theta$  avanza en el tiempo y se incrementa en  $2\pi$  radianes cada vez que da una vuelta completa en el ciclo límite. La frecuencia natural es la tasa de cambio de la fase del oscilador en ausencia del resto. O sea, la frecuencia natural nos dice cuán rápidamente viaja el oscilador alrededor de su propio ciclo límite cuando esta aislado [66, 74].

A un conjunto de osciladores como los recién descritos que se mueven en un ciclo límite atractivo global de amplitud constante se lo conoce como *conjunto de osciladores de fase* o *conjunto de osciladores de ciclo límite*. Además, podemos asegurarnos de que una perturbación externa no los apartará de este ciclo límite global si le incluimos un acoplamiento débil. En esta situación, es necesaria sólo una variable, la fase global, para describir la dinámica del sistema. Sabemos ahora que este no es el único enfoque posible para abordar el estudio de los osciladores mutuamente acoplados<sup>3</sup>, pero es el más útil para describir nuestro trabajo.

---

<sup>3</sup>Otra posibilidad es pensar en *osciladores de pulso acoplados*

### 5.3. Un poco de historia: de Wiener a Kuramoto

El modelo de Kuramoto fue originalmente motivado por el fenómeno de la sincronización colectiva, en la cual un enorme número de osciladores se bloquean en una frecuencia común, a pesar de las diferencias entre las frecuencias naturales de los osciladores individuales [75].

El primero en estudiar matemáticamente la sincronización colectiva fue Wiener [69, 70]. Él fue quien especuló que tal fenómeno debería estar presente en la generación de ritmos alfa en el cerebro. Si bien la matemática que propuso era muy difícil de tratar, Wiener reconoció la ubicuidad del fenómeno en el mundo natural. Las oscilaciones macroscópicas pueden emerger de la sincronización mutua de un gran número de procesos individuales más elementales. Los mecanismos que gobiernan la sincronización espontánea de tales elementos son intrincados y pueden ser muy diferentes para sistemas distintos. Sin embargo, todos estos sistemas pueden ser fenomenológicamente representados como ensambles de elementos dinámicos interactuantes cuya evolución individual está dada por un ciclo.

Posteriormente, en el año 1967, Winfree [71] planteó el problema en términos de una población de osciladores de fase interactuantes. Él propuso una serie de aproximaciones que hacían al problema más fácil de tratar y construyó su modelo suponiendo que todos los osciladores son casi idénticos y que todos ellos están débilmente acoplados. Si además se plantea una división en la escala temporal, la matemática se simplifica tremendamente. En una escala temporal rápida los osciladores relajan rápidamente a sus ciclos límites si las perturbaciones ejercidas por otros osciladores son pequeñas; aquí cada oscilador nunca se aleja demasiado del ciclo límite por lo que su estado puede ser aproximado por su fase. Luego, en una escala temporal grande se puede hablar del cambio de fase que sufre cada oscilador debido a la presencia del resto de los osciladores. Así, la matemática resulta mucho más fácil de tratar, debido a que la única variable en juego es la fase de cada oscilador.

Como simplificación adicional, Winfree consideró que cada oscilador estaba acoplado a un ritmo colectivo generado por el resto de la población, lo cual constituye una aproximación de campo medio. Con todos estos elementos se obtiene que la tasa de cambio de la fase del  $i$ -ésimo oscilador  $\theta_i$  está dada por una combinación de su frecuencia natural  $\omega_i$  con el estado colectivo del resto de los osciladores. La sensibilidad de cada oscilador hacia el estado colectivo está dada por una función  $Z$ , y su propia contribución al ritmo colectivo está especificada por medio de la función  $X$ . Así, para cada oscilador, la ecuación de movimiento está dada por:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left( \sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.1)$$

donde el sistema consta de  $N$  osciladores de fase.

Por medio de simulaciones numéricas y cálculos analíticos, Winfree encontró que los osciladores de su modelo pueden sufrir el análogo temporal de una transición de fase. Cuando el rango de frecuencias naturales es grande comparado con el acoplamiento, el sistema se comporta de forma incoherente, con todos sus osciladores andando con su propia frecuencia natural. Si se reduce el rango de frecuencias naturales el estado incoherente persiste hasta que el acoplamiento cruza un cierto umbral a partir del cual un grupo de osciladores súbitamente entran en sincronía.

Al parecer, este fenómeno cooperativo causó una profunda curiosidad en Yoshiki Kuramoto, quien comenzó a trabajar en este tema en el año 1975. Siguiendo los trabajos hechos anteriormente por Winfree, el primer trabajo de Kuramoto [7] fue una breve descripción de algunos resultados

exactos de lo que luego comenzaría a conocerse como *Modelo de Kuramoto*. En trabajos posteriores [8, 76]-[79], Kuramoto fue refinando sus resultados y planteando al mismo tiempo nuevos interrogantes.

### 5.4. El modelo de Kuramoto

Kuramoto usó las mismas suposiciones que postuló Winfree con su intuición, pero ahora les dió un fundamento matemático firme. Usando un método perturbativo de promedios, Kuramoto probó [8] que la dinámica de largo plazo de cualquier sistema de osciladores de fase casi idénticos y débilmente acoplados puede ser descrito mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.2)$$

donde  $\Gamma_{ij}(x)$  es la función de interacción que determina la forma en que se encuentran acoplados el oscilador  $i$  con el oscilador  $j$ .

Observemos que este paso representa una simplificación muy grande del modelo. Pero aún así estas ecuaciones son muy difíciles de tratar de manera general, pues la función  $\Gamma$  puede tomar una forma totalmente arbitraria y la topología de las conexiones no se encuentra especificada.

Tal como lo hizo Winfree, Kuramoto asumió que cada oscilador puede ser afectado por cualquier otro, es decir trabajó con el caso de osciladores globalmente acoplados (campo medio). Además, supuso que los acoplamientos entre cualquier par de osciladores tienen el mismo peso y que dependen sinusoidalmente de la diferencia entre las fases de ambos. Con esto, para un sistema de  $N$  osciladores, la función de acoplamiento tiene la forma:

$$\Gamma_{ij} = \frac{W}{N} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (5.3)$$

donde  $W$  es la constante de acoplamiento y el factor  $\frac{1}{N}$  permite que el sistema tenga el comportamiento deseado en el límite de  $N \rightarrow \infty$ . En este punto estamos en condiciones de presentar la forma que toma el modelo clásico de Kuramoto.

#### 5.4.1. Ecuaciones de movimiento

El modelo de Kuramoto describe la dinámica de  $N$  osciladores de fase de frecuencias naturales  $\omega_i$  que se encuentran acoplados entre sí con una interacción tipo campo medio. Si  $\theta_i$  es la fase del oscilador  $i$  y  $\omega_i$  es su frecuencia natural, la evolución temporal del  $i$ -ésimo oscilador está dado por las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{W}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.4)$$

donde  $W$  es la constante de acoplamiento y  $N$  es el tamaño del sistema.

Las frecuencias naturales  $\omega_i$  generalmente son elegidas de acuerdo a una distribución  $g(\omega)$  que es simétrica alrededor de una cierta frecuencia  $\omega_0$ , es decir,  $g(\omega_0 + \omega) = g(\omega_0 - \omega)$ . Usualmente se

usa una distribución gaussiana y la frecuencia media se fija en  $\omega_0 = 0$ , con lo cual  $g(\omega) = g(-\omega)$  (observemos que esto es equivalente a trabajar en un sistema que rota con frecuencia  $\omega_0$ ). De esta forma se logra una importante simplificación sin modificar las ecuaciones de movimiento.

Lo que hace tan interesante al modelo de Kuramoto es que es posible trabajar analíticamente y encontrar de forma exacta la transición de fase. Además, y a pesar de ser extremadamente simplificado, el modelo logra reproducir comportamientos observables de sincronización colectiva.

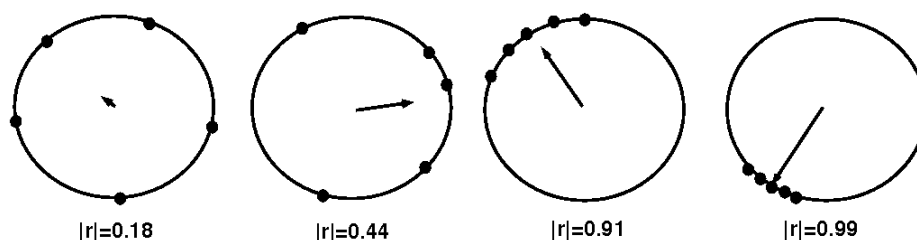
### 5.4.2. El parámetro de orden

Para comprender la dinámica del sistema es útil definir un parámetro de orden complejo:

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (5.5)$$

que constituye una medida macroscópica que se puede interpretar como el ritmo colectivo producido por la población completa de osciladores.

De esta forma, podemos pensar a nuestro sistema de osciladores de fase como un enjambre de puntos moviéndose alrededor de un círculo unitario en el plano complejo. Podemos imaginar que (5.5) es una flecha que nace del centro de tal círculo, tal como se indica en la figura 5.1. El módulo del parámetro de orden  $r$  es una medida de cuán colectivo es el comportamiento del sistema (cuán sincronizado es el movimiento), mientras que  $\psi$  es una fase promedio del conjunto de osciladores. Por ejemplo, si los osciladores se encuentran “desparramados” en todo el círculo, entonces las oscilaciones individuales se suman de forma incoherente y no producen una oscilación macroscópica; luego  $r \approx 0$ . La situación contraria se produce cuando todos los osciladores se encuentran “apiñados” en un solo grupo que gira en el círculo comportándose como un gran oscilador, con  $r \approx 1$ .



**Figura 5.1:** Representación gráfica de la noción del parámetro de orden complejo del modelo de Kuramoto. De izquierda a derecha, el valor absoluto de  $r$  es  $|r| = 0.18, 0.44, 0.91$  y  $0.99$ .

Las ecuaciones de movimiento (5.4) se pueden reescribir en términos del parámetro de orden (5.5). Para ello multipliquemos a ambos miembros de la ecuación (5.5) por  $e^{-i\theta_i}$ , de donde obtenemos:

$$r e^{i(\psi - \theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j - \theta_i)}.$$

Igualando las partes imaginarias tenemos:

$$r \text{sen}(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \text{sen}(\theta_j - \theta_i).$$

Reemplazando este último resultado en (5.4) tenemos:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + W r \text{sen}(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.6)$$

De este resultado resulta evidente el carácter de campo medio del modelo, pues la interacción entre los osciladores puede ser descrita solamente en términos de las cantidades  $r$  y  $\psi$ . El término de interacción nos está diciendo que la fase de cada oscilador está siendo llevada hacia la fase promedio del sistema completo en vez de hacerlo hacia sus frecuencias individuales. Más aun, la fuerza efectiva con la cual esto ocurre es proporcional a  $r$ . Por lo tanto, cuando la población se hace más coherente  $r$  aumenta, lo cual induce un aumento en el acoplamiento  $rW$  en (5.6) que trae como consecuencia que más osciladores se sincronicen. Este proceso puede continuar en la medida que más osciladores entren en sincronía, o de lo contrario quedar autolimitado. En este proceso estamos hablando de sincronización espontánea.

### 5.5. Resultados analíticos y numéricos

En esta sección repasaremos brevemente los resultados analíticos obtenidos por Kuramoto en su primer trabajo. Luego mostraremos algunos resultados obtenidos por medio de simulaciones numéricas de las ecuaciones de movimiento.

Originalmente, Kuramoto buscó las soluciones estacionarias del modelo, es decir, aquellas en las cuales  $r(t)$  es constante y  $\psi(t)$  rota uniformemente con frecuencia  $\omega_0$ . Sin pérdida de generalidad, podemos pararnos en el sistema de coordenadas que rota con la misma frecuencia  $\omega_0$  y elegir el origen del sistema de forma tal que  $\psi = 0$ . Esta situación corresponde a una configuración en la cual el vector parámetro de orden no está rotando ni cambiando su magnitud. Con estas suposiciones, las ecuaciones de movimiento (5.6) se simplifican a la forma:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - W r \text{sen}(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.7)$$

Ya que hemos asumido que  $r$  es constante en (5.7), luego todos los osciladores son efectivamente independientes. La idea es resolver estas ecuaciones de movimiento para todos los osciladores, en donde  $r$  interviene sólo como un parámetro, usando alguna condición de auto-consistencia.

Se pueden encontrar soluciones con dos comportamientos de largo plazo distintos, dependiendo de la magnitud de  $|\omega_i|$  en relación a  $Wr$ . De la ecuación (5.7) se puede ver que es posible encontrar una solución estática de la forma  $\dot{\theta}_i = 0$  si  $|\omega_i| \leq Wr$ , cuando

$$\omega_i = W r \text{sen}(\theta_i), \quad (5.8)$$

con  $|\theta_i| \leq \pi/2$ . En este caso los osciladores se aproximan a un punto fijo estable. Se dice que estos osciladores se han frenado (o bloqueado) en una frecuencia  $\omega_0$  igual a la del sistema de coordenadas original, y su movimiento es estacionario. Por otro lado, los osciladores cuyas frecuencias  $|\omega_i| > Wr$  no serán capaces de frenarse en esta frecuencia ( $\dot{\theta}_i \neq 0$ ), y por lo tanto permanecerán moviéndose en el círculo unidad de manera no uniforme. Se dice que estos osciladores quedan a la deriva o vagando con frecuencias tanto mayores como menores que la de los que se han frenado. Los osciladores frenados corresponden al centro de la distribución  $g(\omega)$  y son los que se encuentran sincronizados, mientras que los osciladores que quedan a la deriva son los que están en la cola de la distribución y están desincronizados.

En este punto pareciera haber una contradicción, debido a que la existencia de osciladores que vagan parece ir en contra de la suposición original de que  $r$  y  $\psi$  son constantes. Para evitar este problema, Kuramoto impuso además que los osciladores que están a la deriva tengan una distribución estacionaria en el círculo unidad aunque los osciladores individuales se estén moviendo. Para asegurarse de que esta distribución sea independiente del tiempo, la misma debe ser inversamente proporcional a la velocidad de los osciladores en  $\theta$ . De esta forma, en los lugares en que haya pocos osciladores éstos deben estar moviéndose rápido para mantener un número de osciladores constante. Se define entonces la densidad de osciladores  $\rho(\theta, \omega)$ , la fracción de osciladores con frecuencia natural  $\omega$  que están entre  $\theta$  y  $\theta + d\theta$ , como:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Wr\text{sen}(\theta)|}. \quad (5.9)$$

La constante de normalización  $C$  es tal que  $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta = 1$ , lo cual implica que:

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Wr)^2}.$$

A continuación haremos uso de una condición de auto-consistencia: la solución del parámetro de orden que encontremos debe ser compatible con la definición (5.5). Ya que hemos dividido la población de osciladores en dos partes, podemos decir que la población total de osciladores es la suma de ambas, luego:

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{frenados}} + \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{deriva}}, \quad (5.10)$$

donde los promedios se realizan sobre la población de osciladores. Ya que  $\psi = 0$ , luego  $\langle e^{i\theta} \rangle = r e^{i\psi} = r$ , con lo cual la ecuación anterior se transforma en:

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{frenados}} + \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{deriva}}. \quad (5.11)$$

Ahora es necesario conocer la contribución de ambos términos en la ecuación de consistencia. De forma sencilla es posible abordar estos cálculos usando la definición de la densidad de población de osciladores (5.9) y haciendo consideraciones de simetría. El detalle de los cálculos se puede ver, por ejemplo, en [75]. Se encuentra que la contribución de osciladores de deriva es nula. La ecuación de auto-consistencia tiene la contribución de la parte sincronizada que da como resultado:

$$r = Wr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) g(Wr\text{sen}\theta) d\theta. \quad (5.12)$$

La ecuación (5.12) tiene una solución trivial  $r = 0$ , que corresponde a un estado totalmente incoherente con  $\rho(\theta, \omega) = 1/2\pi$  para todo  $\theta$  y  $\omega$ . La solución no trivial viene dada por

$$1 = W \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Wr\text{sen}\theta) d\theta. \quad (5.13)$$

Se encuentra que esta rama es no nula a partir de un cierto valor crítico de la constante de interacción  $W = W_c$  dada por:

$$W_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (5.14)$$



Esta expresión constituye la solución analítica que dio Kuramoto para el valor de la constante de interacción a partir de la cual el sistema comienza a sincronizarse. Haciendo una expansión de (5.13) en serie de potencias de  $r$  se puede obtener una expresión aproximada del comportamiento de  $r$  cerca del valor de transición [75, 80]:

$$r \sim \sqrt{\frac{-16}{\pi g''(0)W_c^4}(W - W_c)}. \quad (5.15)$$

Notemos que en la transición de fase el parámetro de orden se comporta como  $r \approx (W - W_c)^{1/2}$  para cualquier distribución  $g(\omega)$  simétrica con un máximo suave en el origen ( $g''(\omega) \neq 0$ ). Entonces el sistema sufre una transición de segundo orden, y el exponente crítico  $1/2$  caracteriza a este tipo de transiciones en la aproximación de campo medio. Los cálculos que acabamos de describir han sido realizados para situaciones más generales con distribuciones  $g(\omega)$  simétricas no centradas en el origen y hasta incluso no simétricas, obteniéndose resultados similares. El lector interesado debe dirigirse, por ejemplo, a los trabajos [80, 81].

Sin la forma exacta de  $g(\omega)$ , ésta es la máxima información que se puede dar del sistema. Usualmente, aún cuando se cuenta con la forma de  $g$ , es imposible resolver exactamente  $r(W)$ , como ocurre con la distribución Gaussiana, por ejemplo. Pero, cuando la distribución es del tipo Lorentziana o de Cauchy es posible hallar la expresión explícita de  $r$  como función de  $W$ . Kuramoto se percató de este hecho y resolvió exactamente el problema para este caso. Si

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad (5.16)$$

la solución de la ecuación de consistencia (5.13) es:

$$r = \sqrt{1 - \frac{W_c}{W}}, \quad (5.17)$$

para  $W \geq W_c$ .

### Simulaciones numéricas

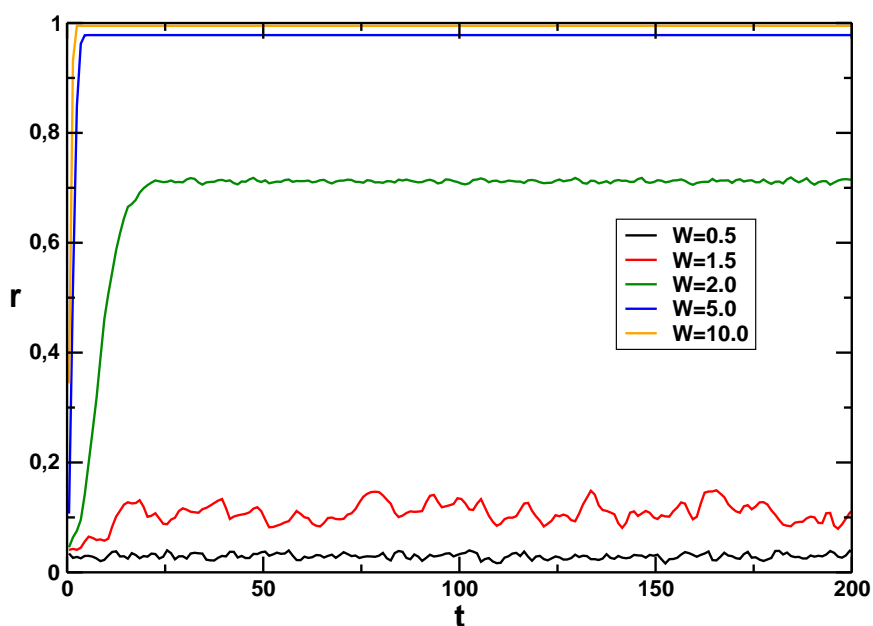
Consideremos por ejemplo el caso en que la distribución de frecuencias naturales es una gaussiana o normal de la forma  $g(\omega) = \frac{e^{-\omega^2/2}}{\sqrt{\pi}}$  ( $\omega_0 = 0$ ). De la ecuación (5.14) podemos obtener el valor crítico de la constante de interacción, simplemente reemplazando  $g(0) = 1/\sqrt{\pi}$ . Se obtiene que la transición del estado desordenado al sincronizado ocurre para  $W_c \approx 1.596^4$ .

Por otro lado, es posible hacer un análisis más detallado del sistema por medio de simulaciones numéricas. Los resultados que se muestran a continuación fueron obtenidos mediante la integración numérica de las ecuaciones de movimiento de Kuramoto (5.4) mediante el método de Euler con paso de tiempo  $\delta t = 0.02$ . Las frecuencias naturales  $\omega_i$  fueron elegidas de la distribución gaussiana recién mostrada y las fases iniciales de los osciladores están distribuidos al azar entre  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

La figura 5.2 muestra la evolución temporal del parámetro de orden  $r$  para un sistema de  $N = 1000$  osciladores con diferentes intensidades de acoplamiento. Todas las curvas corresponden a un promedio sobre 10 muestras. En todos los casos se observa que el sistema, luego de un

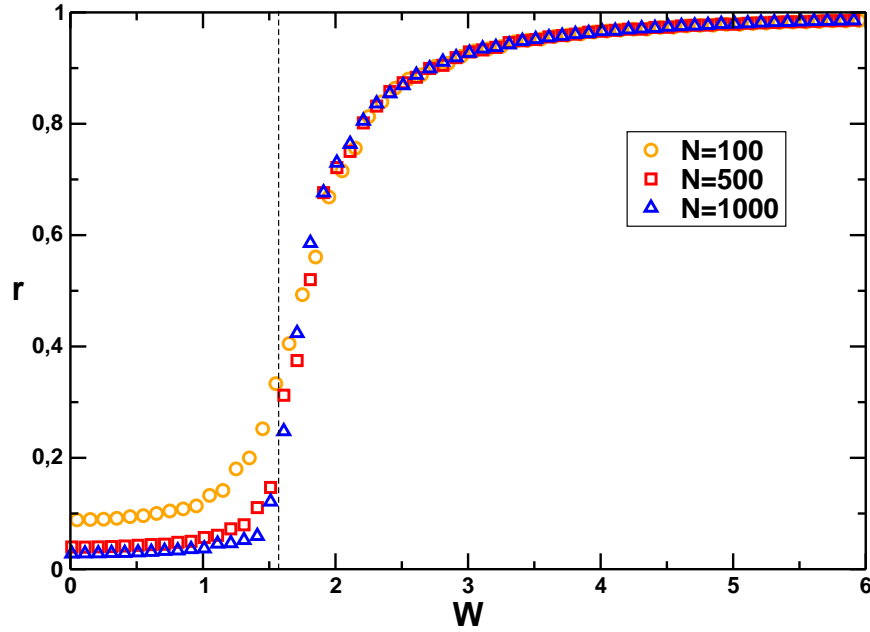
<sup>4</sup>Para este caso, es posible obtener una expresión implícita para la relación entre  $r$  y  $W$  [80].

cierto transitorio (típicamente menor a 10 pasos de tiempo), llega a un valor estacionario. El valor estacionario de  $r$  es más cercano a cero para  $W$  pequeños (sistema no sincronizado), mientras que a medida que el acoplamiento crece se aproxima a su máximo valor 1 (sincronización global). Además, se puede apreciar que la curva es más ruidosa cerca del valor de transición  $W_c \approx 1.596$ .



**Figura 5.2:** Evolución temporal del parámetro de orden  $r$  para el modelo de Kuramoto con una distribución de frecuencias naturales normal. Las curvas corresponden a un promedio sobre 10 muestras y distintos valores de acoplamiento.

En la figura 5.3 se grafica el parámetro de orden  $r$  en función de la constante de acoplamiento  $W$  para distintos tamaños del sistema. El valor de  $r$  se toma como el promedio temporal sobre varias muestras de la curva  $r(t)$  luego de cierto transitorio, es decir cuando ya ha alcanzado su valor estacionario (ver figura 5.2). Observemos que la transición de fase para esta distribución de frecuencias naturales ocurre en  $W_c \approx 1.596$  (línea vertical). Se pueden observar claramente que existen efectos de tamaño finito, por lo cual la parte de la curva correspondiente a la fase no sincronizada nunca es cero, aunque se aproxima cada vez más a medida que el tamaño del sistema crece.



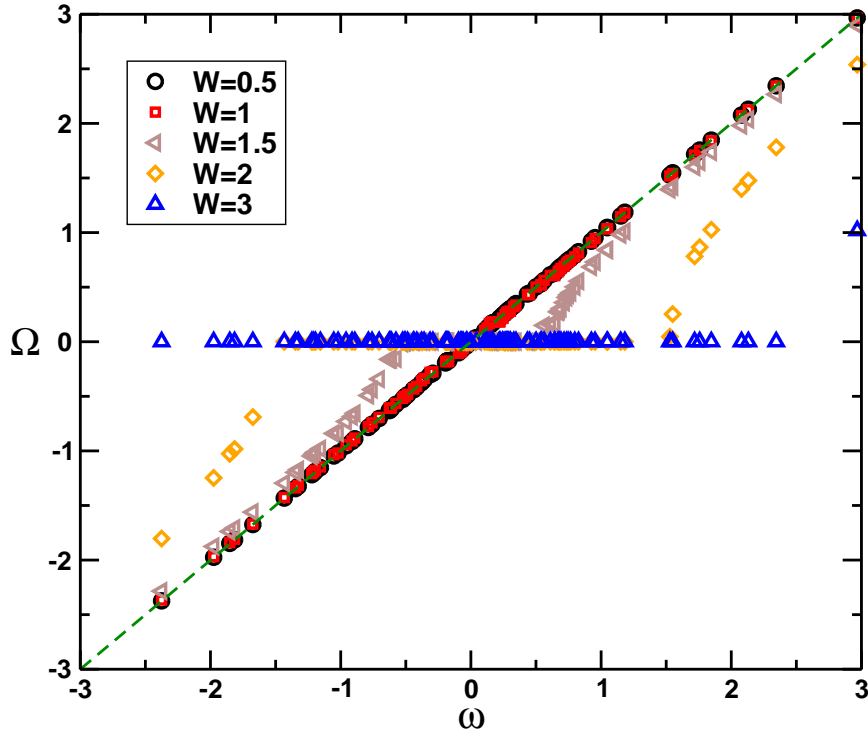
**Figura 5.3:** Parámetro de orden  $r$  en función de la constante de acoplamiento  $W$  para el modelo de Kuramoto de campo medio. En este caso comparamos ensambles de distintos tamaños para una distribución de frecuencias naturales gaussianas  $g(\omega) = \frac{e^{-\omega^2/2}}{\sqrt{\pi}}$ .

La fase de cualquier oscilador individual describe una evolución complicada, típicamente caótica. En general, las frecuencias  $\dot{\theta}_i$  de los osciladores en un tiempo dado difieren de sus frecuencias naturales  $\omega_i$ . Por ello, es de utilidad definir el promedio temporal de  $\dot{\theta}_i$ , llamada *frecuencia efectiva* o *frecuencia media*,

$$\Omega_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\theta}_i(t) dt. \quad (5.18)$$

En la figura 5.4 se encuentra graficado, para un dado  $W$ , el valor de la frecuencia media temporal  $\Omega_i$  (para tiempos largos) en función de la frecuencia natural  $\omega_i$  para cada uno de los osciladores de un sistema de tamaño  $N = 100$ .

Observando con atención las figuras 5.3 y 5.4 podemos apreciar el comportamiento típico de los osciladores de fase del modelo de Kuramoto. Recordemos que el valor absoluto del parámetro de orden nos dice cuán sincrónico es el movimiento colectivo. Teniendo esto en mente vemos que para acoplamientos pequeños ( $W$  pequeña) no se produce sincronización. Esto se evidencia en el valor nulo (si despreciamos efecto de tamaño finito) de  $r$  de la figura 5.3. En la figura 5.4 esto se ve reflejado en el hecho de que cada oscilador conserva su frecuencia natural para tiempos grandes ( $\Omega_i = \omega_i$ ). Al aumentar el valor de  $W$ , existe un determinado valor crítico para el cual los osciladores comienzan a acoplarse unos con otros. Es decir, aparece un aglomerado formado por una fracción de osciladores que tienen frecuencias efectivas idénticas. A partir de este momento cada vez más osciladores se sincronizan al ritmo colectivo (se suman al aglomerado) hasta que, para valores suficientemente grandes de  $W$ , todos ellos se encuentran oscilando en una misma frecuencia común, llamada *frecuencia de sincronización*. Esto se pone de manifiesto en el valor creciente de  $r$  hasta llegar a 1 en la figura 5.3. En la figura 5.4 observamos el alineamiento de todas las frecuencias de los osciladores en un valor común. Por la simetría de la distribución inicial de frecuencias, este valor es  $\Omega_i = 0$  para todo  $i$ .

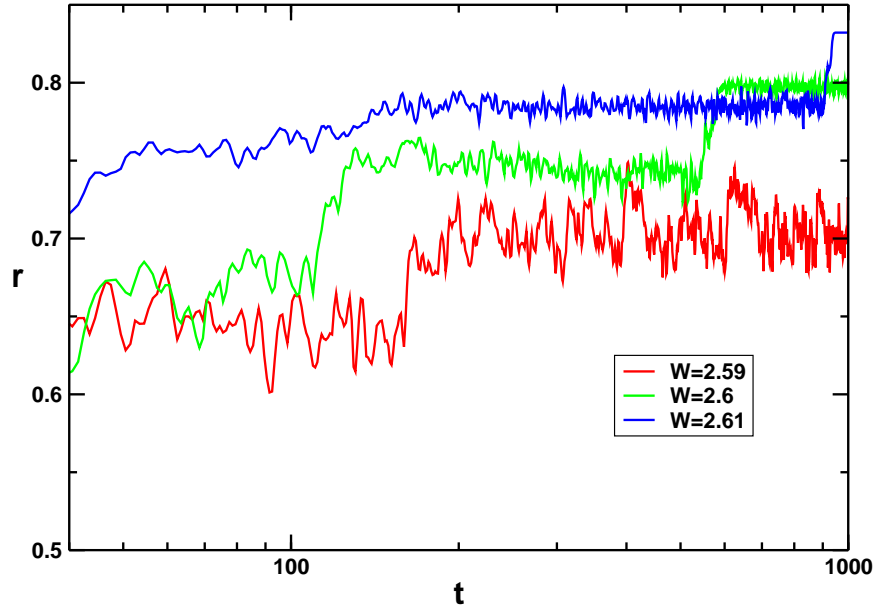


**Figura 5.4:** Frecuencia media temporal  $\Omega_i$  en función de la frecuencia natural  $\omega_i$  para cada oscilador  $i$ , correspondiente a un sistema de  $N = 100$  osciladores con una distribución normal de frecuencias naturales.

## 5.6. Estados casi-estacionarios

En trabajos recientes [82] se ha abordado el estudio de un curioso comportamiento no esperado para el modelo de Kuramoto. De forma similar a lo que ocurre en el modelo Hamiltoniano de Campo Medio (HMF) descrito en el capítulo 2 se ha encontrado la presencia de estados casi-estacionarios cerca de la transición del modelo de Kuramoto de campo medio.

La figura 5.5 muestra un ejemplo de este comportamiento. Las curvas corresponden a la evolución temporal de parámetro del orden  $r$  para valores de  $W$  muy cercanos a la transición de sincronización, con un promedio sobre 10 muestras para un sistema de  $N = 1000$  osciladores. En este caso, las frecuencias naturales del sistema fueron elegidas de una distribución uniforme  $-2 \leq \omega \leq 2$ , por lo que  $W_c \approx 2.55$  (según (5.14)). Inicialmente las fases están distribuidas entre  $0 \leq \theta < 2\pi$ , por lo que  $r(0) = 0$ . Lo que se observa es que, para tiempos largos, el sistema no llega a un valor de equilibrio, sino que presenta estados meta-estables similares a los observados en el modelo HMF cerca del valor de transición de fase. La duración de estos estados llamados casi-estacionarios parece depender del tamaño del sistema, análogamente a lo que ocurre con el modelo HMF. La clave de la aparición de estos estados parece ser nuevamente las condiciones iniciales que se le imponen al sistema.



**Figura 5.5:** Evolución temporal de  $r$  para valores de  $W$  cercanos a  $W_c$ . El sistema consta de  $N = 1000$  osciladores de Kuramoto y las curvas son un promedio de 10 muestras.

Podemos mencionar algunas analogías entre ambos modelos [82]. A pesar de que las ecuaciones de movimiento del modelo de Kuramoto no tienen un carácter Hamiltoniano como las del modelo HMF, ambas pueden considerarse como casos particulares de la ecuación de un péndulo genérico. La ecuación de movimiento de tal péndulo está dada por:

$$A\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C\sin(\theta) = \Gamma, \quad (5.19)$$

donde  $B$  es la constante de amortiguamiento viscoso, mientras que  $A$  y  $C$  son constantes que dependen de la masa, la fuerza y la longitud. Observemos que si elegimos  $B = \Gamma = 0$  (caso conservativo) en (5.19), recuperamos las ecuaciones de movimiento del modelo HMF. En este caso, las ecuaciones quedan escritas en términos de la magnetización del sistema  $M$ , en el caso de que el ángulo global del sistema es  $\Phi = 0$  y considerando que cada rotador (que en este caso es un péndulo) se está moviendo en un potencial de campo medio determinado por el resto de los rotadores o péndulos:

$$\ddot{\theta}_i = -M\sin(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.20)$$

Si, en cambio, consideramos las ecuaciones de un péndulo sobre-amortiguado (cuando  $A$  es despreciable con respecto al coeficiente de fricción  $B$ ), obtenemos las ecuaciones de movimiento del modelo de Kuramoto escritas en términos del parámetro de orden  $r$  con una fase global nula:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Wr\sin(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.21)$$

En este caso las frecuencias naturales  $\omega_i$  juegan el rol de la constante de fricción  $\Gamma$ .

Las similitudes formales que acabamos de analizar le dan más sustento a la posibilidad de encontrar una explicación común de la meta-estabilidad. Además, resalta el importante rol que tienen dinámica y la elección de las condiciones iniciales en el origen del fenómeno, que ocurre en estos sistemas totalmente acoplados.

## 5.7. El modelo de Kuramoto definido en la red cuadrada

El modelo de Kuramoto que describimos en la sección anterior ha sido modificado en una gran variedad de formas. Es así que en la literatura se pueden encontrar, por ejemplo, el modelo de Kuramoto de campo medio con ruido blanco, con desorden, con acoplamientos temporalmente retardados, con campos externos, con ruido multiplicativo, con inercia o incluso modelos de Kuramoto definidos en redes de diferentes topologías [80, 81, 83]. Estos últimos casos son de nuestro particular interés, ya que se vinculan con los trabajos que presentaremos en el resto de esta tesis.

En la literatura se pueden encontrar también trabajos que analizan el modelo de Kuramoto en redes unidimensionales, bidimensionales o multidimensionales. En estos casos el alcance de la interacción juega un rol fundamental a la hora de determinar si el sistema es capaz de sincronizarse o no.

Consideremos ahora un arreglo regular cuadrado (bidimensional) de tamaño  $N = L \times L$  con condiciones de contorno periódicas. Cada uno de los nodos de la red está ocupado por un oscilador de fase de Kuramoto y cada sitio interactúa solamente con sus cuatro primeros vecinos. En otras palabras, cada oscilador de la red está conectado con sus vecinos más cercanos mediante una interacción constante. La evolución del sistema está dada por las ecuaciones de movimiento (5.4) adaptadas a este nuevo sistema. Así, la ecuación de movimiento para el  $i$ -ésimo oscilador es:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{W}{4} \sum_m \text{sen}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.22)$$

Notemos que la suma corre sobre los cuatro primeros vecinos de sitio  $i$  y ya no sobre todos los osciladores, pues en este caso las interacciones son de corto alcance. Además, la constante de normalización ya no es  $N$  sino que es la cantidad de vecinos del sitio.

Integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento, es posible observar el comportamiento resultante del sistema. Al igual que antes, hemos usado el método de Euler con paso de tiempo  $\delta t = 0.02$  para la integración de las ecuaciones (5.22). Se inicializó el sistema con una distribución normal de frecuencias naturales y fases elegidas al azar con valores  $0 \leq \theta_i < 2\pi$ .

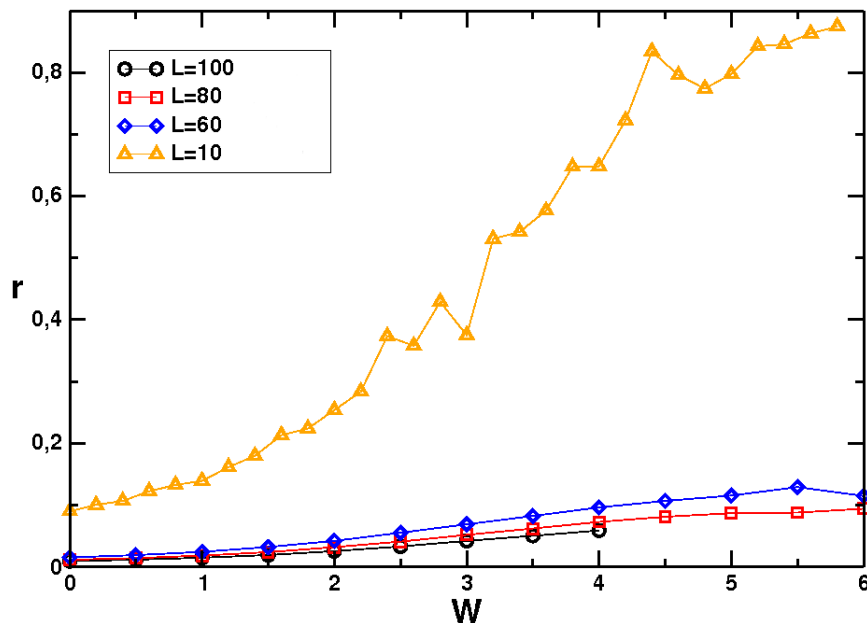
En la figura 5.6 se muestran curvas del parámetro de orden  $r$  como función de la constante de interacción  $W$  para diferentes tamaños de redes. El parámetro de orden está dado por la ecuación (5.5). En los gráficos se puede observar que, a diferencia de lo que ocurre con el modelo de campo medio,  $r$  no alcanza nunca su máximo valor, aún para grandes valores de  $W$  (comparar con la figura 5.3). Más aun, a medida que el tamaño del sistema aumenta la curva de  $r(W)$  se despega cada vez menos del valor nulo que tiene inicialmente, indicando que en el límite termodinámico el sistema es incapaz de ordenarse.

A pesar de que no ocurre una sincronización de las fase de los osciladores de la red, es posible que se observe cierto grado de orden local. Para analizar esta posibilidad es útil realizar un gráfico de la frecuencia media temporal  $\Omega_i$  (5.18) en función de la frecuencia natural de cada oscilador. En la figura 5.7 se muestra este gráfico para el caso de una red de  $10 \times 10$  sitios (pero resultados similares se encuentran para tamaños más grandes). Se puede apreciar que para valores de  $W$  pequeños las frecuencias medias temporales de cada oscilador se parecen a sus frecuencias naturales, tal como ocurre para el modelo de campo medio. Pero cuando el valor de la interacción se incrementa los osciladores tratan de sincronizarse y sus frecuencias medias se aproximan a cero. A diferencia de lo que ocurre para el modelo de campo medio, los osciladores de la red nunca llegan a formar un único

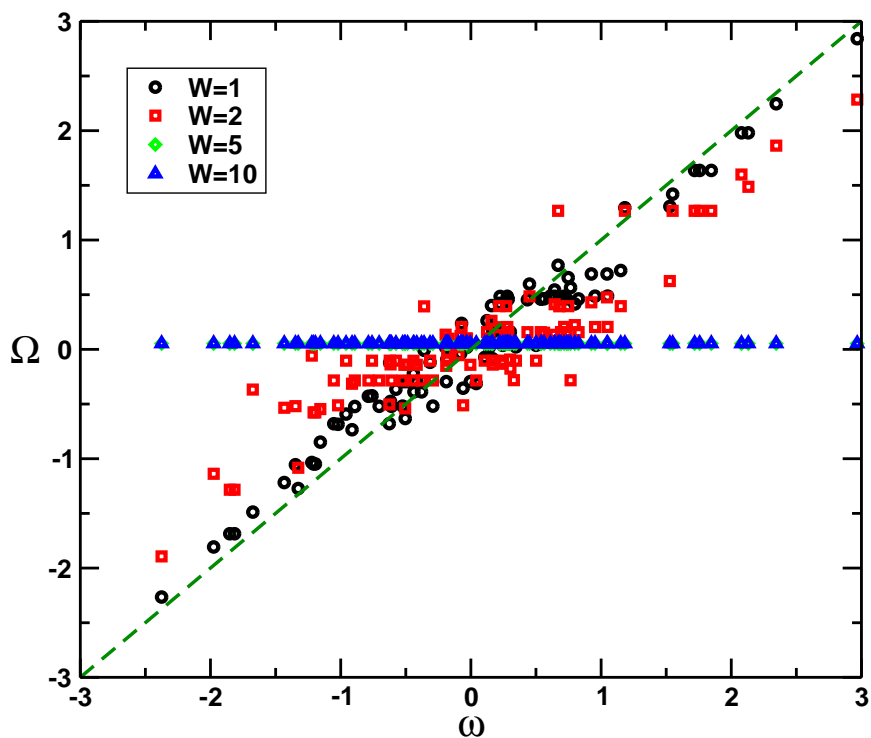
aglomerado donde todos se mueven con una frecuencia común, tal como se verá más claramente en la siguiente figura.

Las figuras 5.8 son tres fotos instantáneas de un sistema de las mismas características que todos los anteriores, pero de  $N = 100 \times 100$  osciladores. Cada punto de la figura representa, en escala de grises, el valor de la frecuencia angular del sitio correspondiente. Cada figura corresponde, de izquierda a derecha, a valores de la constante de acoplamiento  $W = 2$ ,  $W = 5$  y  $W = 10$ . Observemos cómo para el caso de la menor constante de acoplamiento la distribución de frecuencias es aleatoria, es decir, cada sitio se encuentra oscilando a distinta frecuencia que el resto. A medida que el acoplamiento crece, se empiezan a observar ciertos grupos de osciladores que están a la misma frecuencia, es decir hay un cierto grado de sincronía local en el sistema. Pero aun para valores muy altos de  $W$  no es posible apreciar una sincronización global de la red.

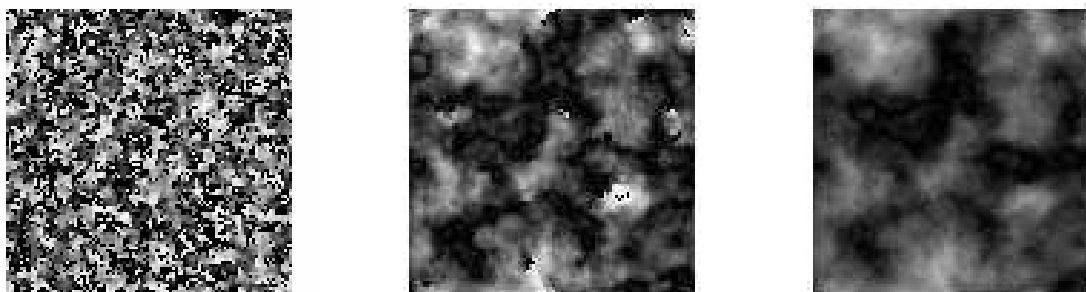
Del análisis de este conjunto de gráficos se puede inferir que no existe un valor suficientemente grande de  $W$  capaz de producir un cambio de fase en el sistema desde un estado desordenado a uno globalmente sincronizado. Sí se observa, en cambio, la formación de ciertos grupos de osciladores espacialmente próximos que logran producir un ritmo común. El estado de sincronización global, lejos de mejorar, empeora a medida que el tamaño de la red aumenta. Este resultado, que a primera vista puede parecer desalentador, sirve sin embargo para modelar diferentes sistemas naturales donde se observan aglomerados localmente sincronizados.



**Figura 5.6:** Parámetro de orden  $r$  en función de la constante de interacción para el modelo de Kuramoto definido en una red cuadrada con interacciones a primeros vecinos. Se muestran distintos tamaños lineales  $L$  de las redes. Se usó una distribución de frecuencias naturales normal.



**Figura 5.7:** Frecuencia media temporal  $\Omega_i$  en función de la frecuencia natural  $\omega_i$  para cada oscilador  $i$  para distintos valores de  $W$ . Los gráficos corresponden a una red cuadrada de  $N = 10 \times 10$  osciladores con una distribución normal de frecuencias naturales e interacciones a primeros vecinos.



**Figura 5.8:** Configuración espacial de una red cuadrada de  $100 \times 100$  sitios con interacciones a primeros vecinos para tres valores de la constante de acoplamiento  $W = 2, 5$  y  $10$ . Se usó una distribución de frecuencias naturales normal.

## 5.8. Sincronización en redes complejas

Los sistemas naturales formados por ensambles de elementos acoplados están caracterizados por arquitecturas de interacciones complejas. Las fuerzas de las interacciones entre dos elementos cualquiera puede variar fuertemente de un par a otro. Así, mientras algunos pares pueden estar acoplados, puede que otros ni siquiera interactúen. Una clase de modelos con interacciones comple-



jas bien conocido son las *redes neuronales*, de las cuales pueden emerger comportamientos colectivos que hacen recordar a las funciones propias de los organismos biológicos. Del mismo modo que las redes neuronales, se puede pensar que un conjunto de elementos acoplados con interacciones heterogéneas están ocupando los nodos de una red, donde los enlaces están presentes entre aquellos elementos que potencialmente pueden interactuar. La colección de sitios donde los elementos están localizados y los enlaces entre ellos conforman el grafo de la red [80].

Fue entonces que la necesidad de entender la sincronización en el contexto de las redes neuronales biológicas promovió los primeros estudios de sincronización de osciladores acoplados poniendo en consideración las redes de interacciones entre ellos. Los primeros estudios en esta dirección fueron realizados por Strogatz y Mirollo en 1988 [84] y luego por Niebur et al. en 1991 [85], ambos orientados al estudio de la sincronización colectiva de osciladores no lineales con frecuencias naturales aleatorias en diferentes esquemas de acoplamientos en arreglos bidimensionales. A pesar de que la concepción actual de complejidad es diferente, las topologías estudiadas por Niebur se pueden considerar como una primera aproximación que revela cómo la complejidad en las conexiones puede afectar las propiedades de sincronización del sistema. En este trabajo se usó un arreglo cuadrado bidimensional como soporte para tres topologías de conexiones diferentes: cuatro primeros vecinos, conectividad gaussiana truncada a una distancia de  $2\sigma$ , y finalmente conexiones aleatorias de alcance infinito. Como resultado, encontraron que las conexiones de largo alcance aleatorias permiten una sincronización más rápida y robusta que la topología de primeros vecinos o esquemas de conexiones localmente densos.

En el año 1998, Watts y Strogatz [1] presentaron un modelo simple de estructura de una red que originalmente pretendía introducir un sustrato de conexiones en el problema de la sincronización del canto de un conjunto de grillos, que mostraban un alto grado de coordinación aún a distancias grandes (lo que llevó a pensar que estaban conectados de alguna manera no visible). Paradójicamente, este trabajo no significó una gran contribución en el área de la sincronización, pero sí sentó las bases de la teoría moderna de redes complejas, al introducir el concepto de *redes de mundo pequeño*, propiedad que ya había introducido Milgram [2] en su famoso experimento de los *seis grados de separación*.

Los primeros estudios sobre la sincronización en topologías complejas, donde se considera que cada nodo es un oscilador de Kuramoto, fueron hechos sobre redes de mundo pequeño ([86, 87]) y en grafos del tipo de Barabasi-Albert ([88]).

Podemos citar también el trabajo realizado por Gleiser et al. [89], donde se estudió la sincronización de osciladores de fase que se encuentran en una red que evoluciona con el tiempo. La red inicialmente es aleatoria y se reconecta de forma de favorecer la sincronización mutua entre los osciladores. Lo que se encontró fue que tal red evoluciona hacia una estructura de tipo mundo pequeño.

Además, existen en la literatura trabajos que utilizan el formalismo que se conoce como *función maestra de estabilidad*. En este sentido, podemos citar los trabajos de Fink et al. de 2000 [90] y Pecora y Carroll de 1998 [91].

Existe en la literatura un trabajo realizado por Arenas *et. al.* [83], que constituye un resumen más completo de todos los trabajos relacionados en esta área. Invitamos al lector interesado a consultarlo, así como a las referencias que allí se incluyen.

Para pensar el modelo de Kuramoto en topologías complejas, es necesario reformular las ecua-

ciones de su dinámica de la siguiente forma:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.23)$$

donde  $\sigma_{ij}$  es la constante de acoplamiento entre el par de sitios conectados  $(i, j)$  y  $a_{ij}$  es la matriz de conexiones. Luego, el modelo original de Kuramoto (ecuaciones (5.4)) se recupera tomando  $a_{ij} = 1$ ,  $\forall i \neq j$  y  $\sigma_{ij} = W/N$ ,  $\forall i, j$ .

El primer problema que surge es el de determinar la dinámica de interacción de forma apropiada. Al contrario de lo que ocurre con el caso de campo medio, existen varias formas de establecer la topología de conexiones y la constante de acoplamiento. En cuanto a la constante de acoplamiento las posibilidades son las siguientes:

- $\sigma_{ij} = W/N$  al igual que en el caso de campo medio.
- $\sigma_{ij} = W/k_i$ , con  $k_i$  el grado del nodo  $i$  en cuestión.
- $\sigma_{ij} = W/C$ , donde  $C$  es una constante, como podría ser la conectividad media de la red  $\langle k \rangle$ , o el grado máximo de la red  $k_{max}$ , por ejemplo.

Para nuestros resultados originales que mostraremos en los dos capítulos subsiguientes elegiremos una topología de conexiones complejas embebida en un espacio euclídeo bidimensional con constante de acoplamiento normalizada según el grado del propio sitio ( $k_i$ ). Es importante observar que, como consecuencia del proceso de embebido que se describió en el capítulo 1, obtenemos un sistema de osciladores de fases de Kuramoto que operan en una red con las siguientes características particulares:

- Cada oscilador tiene una ubicación geográfica determinada y, como consecuencia, las distancias entre sitios están perfectamente determinadas.
- Cada oscilador está conectado con una cierta cantidad de sitios que no son sus primeros vecinos, ni son todos sus vecinos, ni tampoco una selección aleatoria de los mismos. Por el contrario, cada oscilador sentirá la interacción de los osciladores según una topología compleja.

Vale destacar que no existen demasiados trabajos en la literatura que se dediquen al estudio de la sincronización en este tipo de sistemas embebidos en un espacio euclídeo, que como ya hemos mencionado en el capítulo 1, representan mejor a la mayoría de los problemas del mundo natural. Algunos de los trabajos de este estilo que podemos mencionar son los de Wang et al. [92] y Yin et al. [93] quienes han estudiado la sincronización colectiva de osciladores sobre redes de mundo pequeño uni y bidimensionales, en las cuales la constante de acoplamiento depende de la distancia geográfica entre nodos. Lo que ellos encontraron fue una fuerte dependencia de la sincronizabilidad con la distancia geográfica de las conexiones agregadas en forma aleatoria. Aquellos trabajos resaltaron el rol importante que juega la distancia geográfica en la sincronización de la red.

### 5.9. Conclusiones del capítulo

En este capítulo hemos introducido los conceptos básicos relacionados con el fenómeno de sincronización. En particular, hemos presentado el conocido modelo de Kuramoto que explica la sincronización mutua de un conjunto de  $N$  osciladores de fase que interaccionan todos con todos.

Además, y como se puede ver en la amplia literatura disponible, el modelo de Kuramoto puede ser adaptado a distintos tipos de situaciones, dependiendo de la topología de conexiones que se implemente. Debido a nuestro particular interés en redes bidimensionales, hemos estudiado las propiedades del modelo en una red cuadrada con interacciones a primeros vecinos, con el objeto de comparar estos resultados con los que veremos en el capítulo siguiente en el cual las interacciones surgirán de una arquitectura compleja. El principal resultado en este sentido es que, a diferencia de lo que ocurre con el modelo de campo medio, el sistema bidimensional no se sincroniza en forma global cuando las interacciones son de corto alcance.



---

## Sincronización en una red bidimensional compleja con interacciones uniformes

---

### 6.1. Introducción

Como en cualquier fenómeno crítico, la aparición del comportamiento sincrónico a través de una transición de fase tiene lugar en unas pocas formas universales, dependiendo de algunos detalles microscópicos del sistema, tales como la naturaleza y el rango de las interacciones, el número de grados de libertad de cada componente y la topología de las conexiones de la red. En este sentido, un gran corpus de libros y publicaciones científicas se han dedicado a analizar en detalle el rol de cada uno de estos ingredientes en el comportamiento macroscópico del sistema como un todo. De entre todos los aspectos ya analizados, en esta instancia estamos interesados solamente en el rol de la *geografía* y de la *topología* de las conexiones de la red. En este contexto, es importante mencionar que es posible encontrar en la literatura de las últimas décadas el estudio de una variedad muy grande de topologías que van desde versiones de campo medio (análisis original de Kuramoto) hasta redes de baja dimensionalidad con interacciones a primeros vecinos para modelar situaciones más realistas [94], tal como vimos en el capítulo anterior. Para situaciones intermedias se ha hecho un gran esfuerzo para entender el fenómeno de la sincronización en redes complejas, ya sean naturales o artificiales, estudiando el modelo de Kuramoto en estructuras de mundo pequeño y/o libres de escala [81, 83]. Un ejemplo de particular interés es el trabajo de McGraw y Menzinger [95], quienes analizaron el efecto de la manipulación de los coeficientes de clustering en redes libres de escala sin cambiar la distribución de grados, concluyendo que el clustering de la red promueve la sincronización de los nodos más conectados.

Como ya hemos mencionado en capítulos anteriores, la noción de *distancia geográfica* es ignorada usualmente en estudios de las redes complejas, debido quizá a las muy engorrosas complicaciones matemáticas y numéricas que implica esta consideración. Por el contrario, la mayoría de las redes complejas analizadas son del tipo campo medio, en el sentido que los mecanismos de conexión y reconexión no tienen en cuenta ninguna noción de distancia entre las unidades. Sin

embargo, el mundo está lleno de ejemplos de redes complejas, ya sean naturales o artificiales, en donde la noción de distancia juega un rol fundamental. Además, estas redes suelen estar embebidas en un espacio euclídeo de baja dimensionalidad, presentan propiedades de mundo pequeño y tienen distribuciones libres de escala.

El cerebro de los mamíferos es un sistema complejo por excelencia. Es una combinación única de varios tipos de células unidas por numerosas conexiones (sinapsis) que forman columnas, circuitos y áreas. Durante los últimos años se han hecho numerosos esfuerzos para avanzar en el entendimiento del cerebro, abordando el problema desde diversos puntos de vista [96, 97]. En particular, estudios recientes realizados con técnicas de resonancia magnética funcional (fRMN) han revelado que la red funcional de conexiones en el cerebro<sup>1</sup> exhibe características del tipo mundo pequeño con distribución de conectividades tipo ley de potencia [10, 63]. Además, la sincronización de la actividad distribuida del cerebro ha sido propuesta como uno de los principales mecanismos de procesamiento de la información neuronal [98, 99, 100].

En este y en siguiente capítulo mostraremos los resultados originales del estudio de la sincronización en una red compleja. El objetivo principal en este capítulo, cuyos resultados se encuentran publicados en [101], es analizar los efectos del embebido en la sincronización de un conjunto de osciladores de fase no lineales de Kuramoto e investigar si el hecho de usar una red embebida puede facilitar la sincronización en comparación con una red equivalente pero no embebida. Para ello consideraremos dos topologías diferentes. Por un lado consideraremos una red embebida en un espacio euclídeo bidimensional y la compararemos con una equivalente en la cual no se tiene en cuenta la longitud de las conexiones. Esta última constituye una versión de campo medio de la embebida y, tal como se explicó en el capítulo 1, se obtiene fijando el mismo exponente de la ley de potencia pero eligiendo al azar la vecindad de cada sitio, sin tener en cuenta la distancia euclídea. Primero analizaremos el comportamiento del parámetro de orden de Kuramoto para luego estudiar el comportamiento de la frecuencia media de los osciladores en función de su frecuencia natural para ambos tipos de redes. Mostraremos que, a diferencia de lo que ocurre con las redes no embebidas, en donde se observa un comportamiento de tipo campo medio caracterizado por la presencia de un único grupo de osciladores sincronizados, en las redes embebidas se puede observar la presencia de diversidad de grupos sincronizados a diferentes valores de frecuencias medias. Finalmente, considerando el comportamiento de la frecuencia media en función del grado de la red, estudiaremos el rol de los hubs en las propiedades de sincronización del sistema. Por su parte, en el capítulo 7 abordaremos el estudio de las propiedades de sincronización de osciladores de fase de Kuramoto en una red compleja embebida en un espacio bidimensional en donde la fuerza de las interacciones depende de la distancia entre sitios. Este estudio estará orientado al modelado de la formación de patrones que emergen en el cortex visual del cerebro de los mamíferos.

## 6.2. El modelo

En esta sección analizaremos los resultados numéricos obtenidos del estudio de una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional de osciladores de fase de Kuramoto  $\theta_i$  ( $0 \leq \theta_i < 2\pi$ ). Para observar cuál es el efecto del embebido de la red, compararemos con una versión no

---

<sup>1</sup>La red funcional de conexiones del cerebro describe las correlaciones temporales entre eventos neurofisiológicos (especialmente cercanos o distantes). Por su parte, la red anatómica se puede definir como el conjunto de todas las conexiones físicas o estructurales entre neuronas, grupos de neuronas o áreas del cerebro en un instante determinado [63, 97].

embebida y de campo medio de la misma red. Los detalles de ambas construcciones se han especificado en el capítulo 1. En ambos casos, la dinámica global del sistema está regida por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales de Kuramoto:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + W \sum_{j \in V_i} \frac{1}{k_i} \text{sen}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.1)$$

donde  $\omega_i$  es la frecuencia natural del oscilador  $i$ ,  $W$  es la constante de acoplamiento,  $V_i$  es la vecindad del sitio  $i$  y  $k_i$  es su grado. La vecindad del sitio queda especificada luego del proceso de generación de la red, ya sea en su versión embebida como en la versión no embebida. Observemos que ahora el subíndice  $i$  de cada sitio representa la posición del mismo en un arreglo regular cuadrado, por lo que está compuesto de dos coordenadas  $(m, l)$ . Notemos que la constante de acoplamiento  $W$  es independiente de la distancia de cada sitio.

En cuanto a la constante de normalización en las ecuaciones de movimiento, se pueden encontrar en la literatura sobre el tema una variedad de elecciones, tal como se discutió en el capítulo 5. Así, algunos trabajos usan la conectividad media de la red, otros usan un valor constante y otros usan la conectividad del sitio. Para nuestros trabajos, elegimos usar la conectividad del sitio, aunque las pruebas realizadas usando la conectividad media de la red no sugieren cambios cualitativos apreciables en los resultados.

### 6.3. Resultados numéricos

Para las simulaciones numéricas que mostraremos a continuación se usaron redes de  $N = L \times L$  nodos con  $L = 100$ . Inicialmente, las fases se eligen al azar dentro del intervalo  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Las frecuencias naturales  $\omega_i$  también se eligen al azar de una distribución gaussiana de varianza 1 y media cero, es decir una distribución normal:

$$g(\omega_i) = \frac{\exp(-\omega_i^2/2)}{\sqrt{2\pi}}. \quad (6.2)$$

Nos concentraremos en tres casos diferentes:

- $\alpha = 2.5$  con  $m = 4$  y  $M = 400$ .
- $\alpha = 3.0$  con  $m = 4$  y  $M = 100$ .
- $\alpha = 5.0$  con  $m = 4$  y  $M = 40$ .

Recordemos que  $\alpha$  es el exponente de la ley de potencia que caracteriza la topología de conexiones compleja,  $m$  y  $M$  son la mínima y máxima cantidad de conexiones posibles para cada sitio y  $A$  caracteriza el radio máximo de alcance de los enlaces (tal como se definió en el capítulo 1). La elección de  $m = 4$  garantiza que para valores grandes del exponente de la ley de potencias  $\alpha$ , la red se aproximará a una red regular cuadrada de corto alcance. Con la intención de evitar la formación de estructuras auto-similares dentro de las redes, usaremos el valor  $A = 10$  en los tres casos, lo cual fija el valor de  $M$  según el valor de  $\alpha$  elegido [4].

### 6.3.1. El parámetro de orden

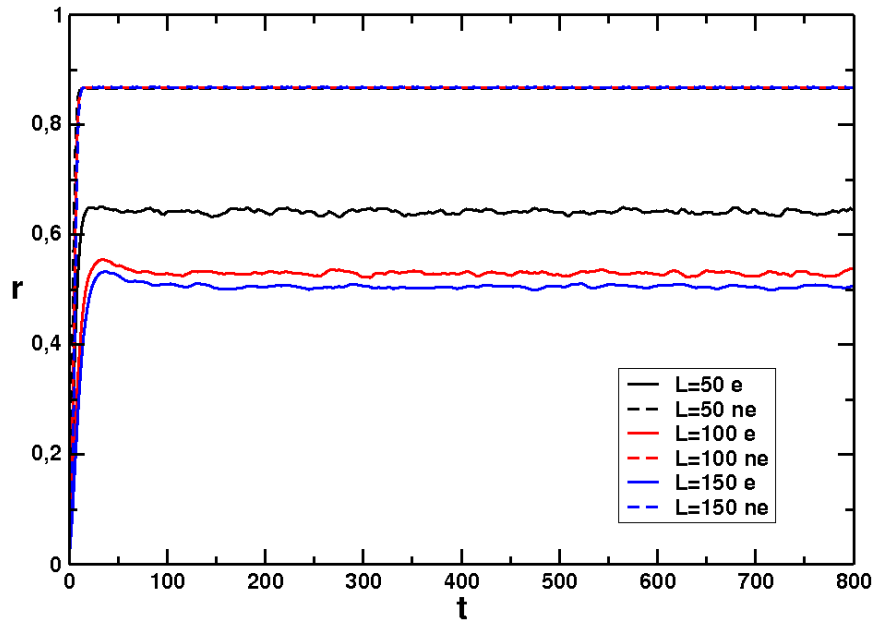
Consideremos la evolución temporal del parámetro de orden del modelo, previamente definido en el capítulo 5, dado por:

$$r(t) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \right\|. \quad (6.3)$$

Recordemos que  $0 \leq r(t) \leq 1$  es una medida de la coherencia de los osciladores. Para calcular la evolución temporal del sistema integramos las ecuaciones de movimiento (6.1) usando el método de Euler con un paso de tiempo  $\delta t = 0.02$ .

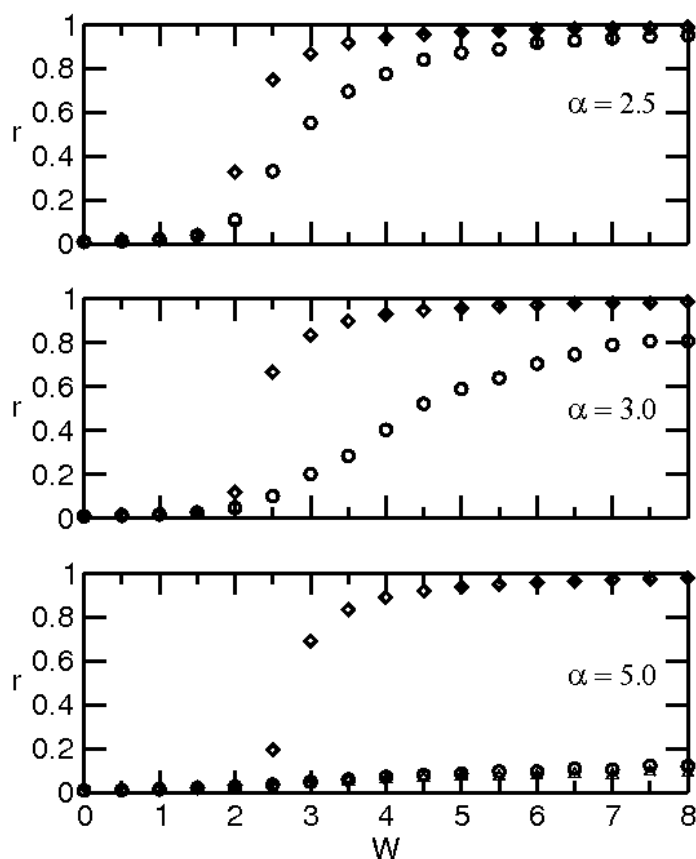
La figura 6.1 muestra precisamente las curvas de  $r$  vs  $t$  para redes de distintos tamaños en sus versiones embebida (e) y no embebida (ne). Los casos mostrados corresponden a  $\alpha = 2.5$  con  $m = 4$  y  $M = 400$  con un valor de acoplamiento  $W = 3.0$ . Las curvas fueron realizadas con un promedio sobre 100 muestras, donde en cada muestra se genera una red nueva y también se sorteán condiciones iniciales nuevas. En todos los casos explorados, encontramos comportamientos similares a los observados en esta figura. Lo que se observa claramente es un comportamiento diferente entre las redes embebidas y no embebidas. Las redes no embebidas se estabilizan rápidamente en su estado estacionario en un valor de  $r$  mayor que el correspondiente a la embebida. Además, este valor no depende del tamaño de la red. Por el contrario, el valor estacionario de las redes embebidas presentan un efecto de tamaño finito, y en todos los casos es menor que el de la correspondiente no embebida. Este comportamiento nos recuerda a lo que ocurre en las redes con interacciones a primeros vecinos, en donde no ocurre una sincronización global de la red, y como consecuencia el parámetro de orden nunca llega a la unidad. Basándonos en los resultados de estas curvas, hemos considerado que el sistema se encuentra en un estado estacionario luego de transcurrido un transitorio de  $t = 100$  a  $t = 200$ . Todos los gráficos que mostraremos a continuación fueron realizados eliminando un transitorio de este orden, a fin de asegurarnos de que el sistema se encuentre estacionario.





**Figura 6.1:** Evolución temporal del parámetro de orden  $r$  para redes de distintos tamaños en sus versiones embebida (línea continua) y no embebida (línea de trazo). En todos los casos  $\alpha = 2.5$  con  $m = 4$  y  $M = 400$  con  $W = 3.0$  y la curva corresponde a un promedio de 100 muestras. Observar que las tres curvas correspondientes al caso no embebida se superponen.

En la figura 6.2 hemos graficado  $r$ , el valor estacionario del parámetro de orden  $r(t)$ , como función de la constante de acoplamiento  $W$  para tres valores del exponente  $\alpha$ , a saber:  $\alpha = 2.5$  (arriba),  $\alpha = 3.0$  (medio) y  $\alpha = 5.0$  (abajo). Estas curvas corresponden a un promedio realizado sobre 50 realizaciones con diferentes fases iniciales aleatorias y diferentes frecuencias naturales. En todas las figuras hemos graficado ambos tipos de redes no embebidas (diamantes) y embebidas (círculos). Para  $\alpha = 5$  también se han incluido los resultados correspondientes a una red cuadrada regular del mismo tamaño con conexiones a primeros vecinos. En estos gráficos se puede verificar que, independientemente del valor de  $\alpha$ , el embebido de la red dificulta la sincronización global del sistema. Sin embargo, tanto para el caso de  $\alpha = 2.5$  como para  $\alpha = 3.0$ , para un valor suficientemente grande del acoplamiento la red compleja bidimensional logra ordenarse en un estado sincronizado. Al contrario, para  $\alpha = 5.0$  se puede ver que, como es de esperarse, la red embebida se comporta casi como un modelo de primeros vecinos, sin alcanzar el estado de sincronización global.

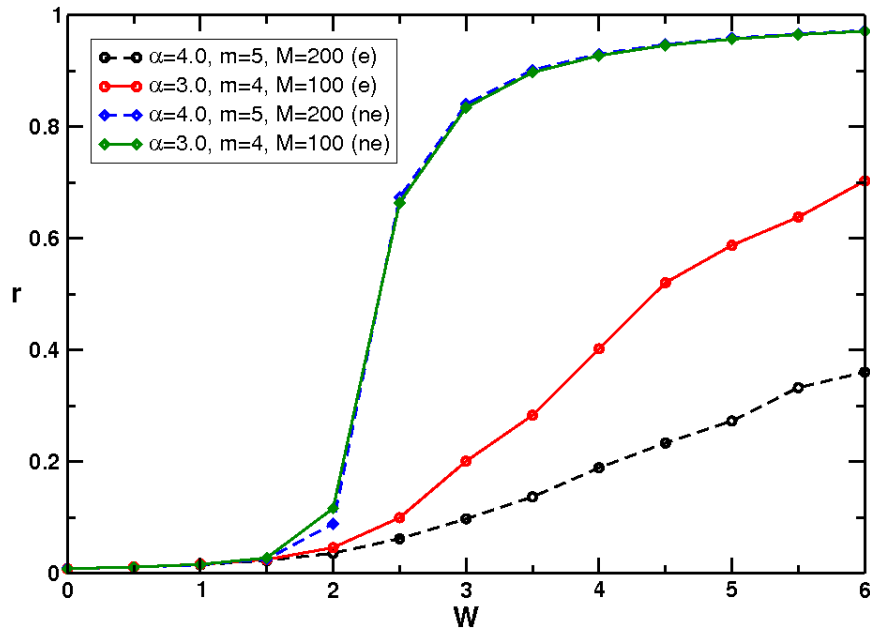


**Figura 6.2:** Valor estacionario del parámetro de orden  $r$  vs. la constante de acoplamiento  $W$  para redes libres de escala no embebidas (diamantes) y embebidas (círculos). Para  $\alpha = 5.0$  también se ha graficado el caso de una red cuadrada regular con interacciones a primeros vecinos (triángulos), que es casi coincidente con la red embebida. Observar la fuerte dependencia del parámetro de orden con el exponente de  $\alpha$  para todas las redes embebidas [101].

### 6.3.2. El efecto de la conectividad media

A continuación exploraremos cómo depende el comportamiento del modelo con la conectividad media de la red. En la figura 6.3 mostramos curvas de  $r$  vs.  $W$  para diferentes configuraciones de red que tienen la misma conectividad media,  $\langle K \rangle = 6.8$ , todas ellas de  $N = 100 \times 100$  sitios<sup>2</sup>. Esta conectividad media fue obtenida con los siguientes parámetros de red:  $\alpha = 3.0$  con  $m = 4$ ,  $M = 100$  (línea continua); y  $\alpha = 4.0$  con  $m = 5$  y  $M = 200$  (línea de trazo). Para estos dos casos, hemos analizado una red embebida (círculos) y otra no embebida (diamantes).

<sup>2</sup>Recordemos que en el capítulo 1 se mostró que la conectividad media está determinada por una combinación de los parámetros de la red, dado por la ecuación (1.4).

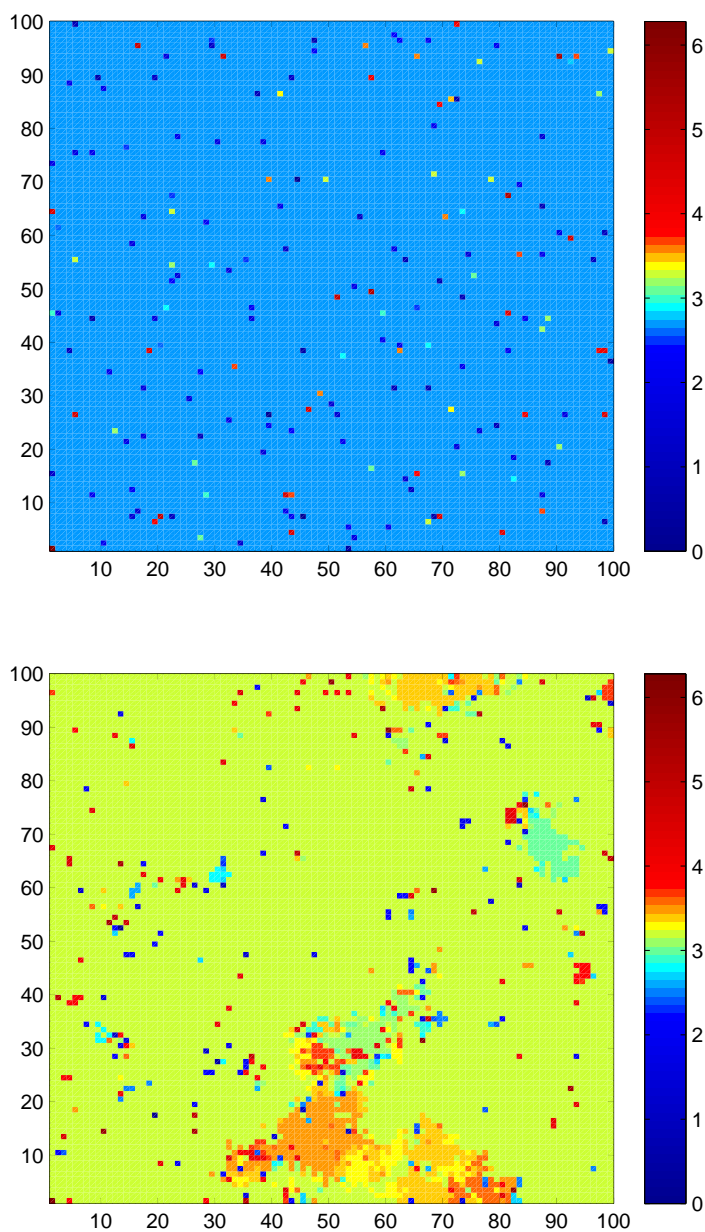


**Figura 6.3:** Valor estacionario del parámetro de orden  $r$  vs. la constante de acoplamiento  $W$  para redes con  $\langle K \rangle = 6.8$ , todas ellas de  $N = 100 \times 100$  sitios. Los parámetros de las redes son:  $\alpha = 3.0$  con  $m = 4$ ,  $M = 100$  (línea continua); y  $\alpha = 4.0$  con  $m = 5$  y  $M = 200$  (línea de trazo). Se muestran los casos de red embebida (círculos) y no embebida (diamantes).

En la figura 6.3 podemos ver cómo a igual conectividad media el modelo se sincroniza más en el caso no embebido. Para redes no embebidas (diamantes) las curvas correspondientes a diferentes parámetros de la red se superponen, y no son visibles diferencias significativas entre ellas. Esto nos dice que el comportamiento de las redes no embebidas no depende de los parámetros de red específicos: a igual conectividad media igual curva de  $r(W)$ . Por otro lado, en el caso de las redes embebidas (círculos) se puede observar una fuerte dependencia con los parámetros de la red,  $\alpha$ ,  $m$  y  $M$ , es decir, de la topografía de la misma. Aunque ambas redes tienen la misma conectividad media, estas se diferencian en la disposición espacial de sus enlaces, lo cual influye fuertemente en el comportamiento global del modelo. Estos resultados muestran que el grado de sincronización no depende solamente de la conectividad media de la red y de la topología de la red, sino también de su geografía. De hecho, vemos que las redes con la misma distribución de grados y la misma conectividad presentan un comportamiento diferente cuando se construyen sobre una estructura tipo campo medio o sobre una estructura embebida en un arreglo de baja dimensionalidad. El punto más importante aquí es que podemos inferir que las redes embebidas favorecen la formación de grupos geográficamente localizados de neuronas sincronizadas. Resumiendo, las estructuras complejas embebidas permiten la aparición de grupos de neuronas localizadas geográficamente que no pueden observarse en estructuras de campo medio. Por otro lado, en la figura 6.2 pudimos ver que además las redes embebidas mejoran la capacidad de sincronización comparadas con las redes regulares de corto alcance.

## 6.3.3. La frecuencia media

Con el objetivo de obtener información más detallada acerca de la presencia o ausencia de clusters sincronizados en el sistema, consideraremos la frecuencia media de oscilación  $\Omega_i$  de cada oscilador en un intervalo de tiempo  $T$ , luego de un cierto transitorio. Calcularemos esta cantidad tal como se definió en la capítulo 5, ecuación (5.18). Para todo los resultados que mostraremos en esta sección hemos usado un transitorio  $t = 100$  y un tiempo de promedios  $T = 500$ .

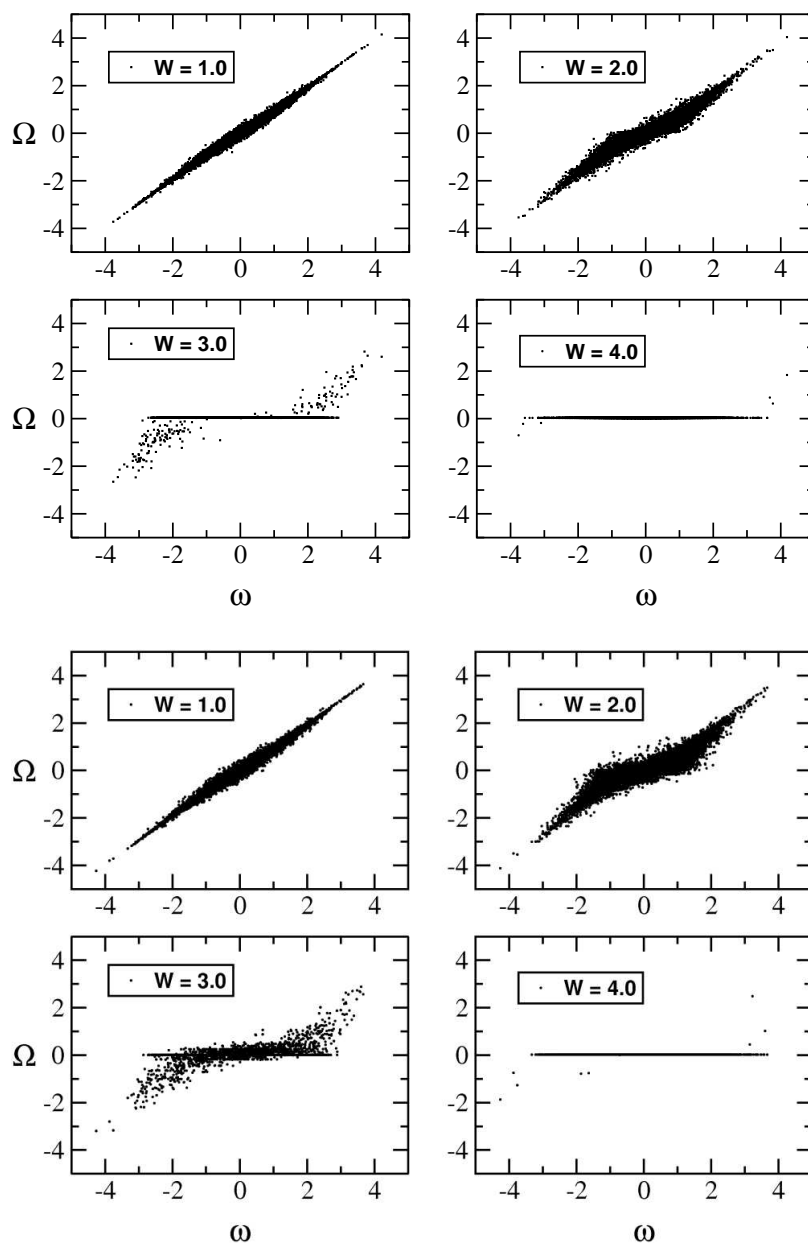


**Figura 6.4:** Frecuencia media  $\Omega$  para una red no embebida (arriba) y una embebida (abajo), ambas con  $\alpha = 2.5$ ,  $W = 3.0$ ,  $m = 4$ ,  $M = 400$  y  $A = 10$  [101].

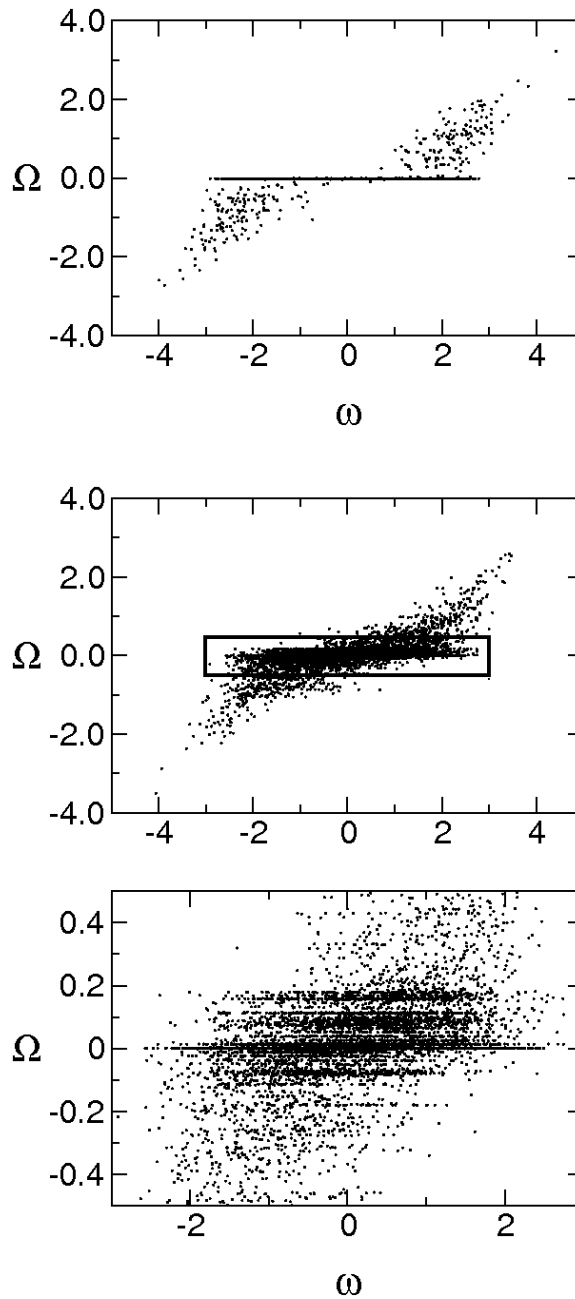
En la figura 6.4 se compara el comportamiento de  $\Omega$  entre una red no embebida (arriba) y una embebida (abajo) ambas con  $\alpha = 2.5$  y acoplamiento  $W = 3.0$ . Se puede ver claramente la presencia de clusters de nodos con la misma frecuencia media en la red embebida, mientras que no se observan dichas estructuras en la red no embebida. Estas redes son las mismas que fueron analizadas en el capítulo 1 en el contexto de la distancia química. Recordando las figuras 1.9 se puede apreciar cómo el proceso de embebido introduce correlaciones que juegan un papel importante en la formación de patrones de sincronización.

En la figura 6.5 hemos graficado la frecuencia media  $\Omega$  de cada oscilador en función de su frecuencia natural  $\omega$  para una red compleja no embebida (arriba) y una red compleja embebida (abajo), ambas con exponente  $\alpha = 2.5$  y para cuatro valores de acoplamiento,  $W = 1.0, 2.0, 3.0$  y  $4.0$ . En estos gráficos, la presencia de clusters de sincronización se ponen en evidencia a través de líneas horizontales, que indican que ese conjunto de osciladores han cambiado sus frecuencias naturales por una misma frecuencia  $\Omega$ . Para ambas redes se puede ver que para valores bajos de acoplamiento, por ejemplo  $W = 1.0$ , los osciladores presentan apenas una leve desviación de sus frecuencias naturales. En el otro extremo, para acoplamientos grandes,  $W = 4.0$  por ejemplo, casi todos los osciladores están sincronizados y presentan una misma frecuencia media. También en ambos tipos de redes los últimos nodos en sincronizarse son aquellos que están cerca de los extremos de la distribución de frecuencias naturales.

Para valores de acoplamiento intermedios, en cambio, el comportamiento de ambas redes difiere. La red no embebida recuerda muy fuertemente al modelo de campo medio, donde se forma un solo cluster de sincronización que va creciendo a medida que la constante de acoplamiento crece. Por otro lado, en la red embebida se observa una dispersión alrededor del valor medio de sincronización, y solo se observa un único cluster si el valor de la constante de acoplamiento es muy grande. Para analizar este efecto con más detalle hemos realizado la figura 6.6. En esta figura mostramos en detalle la frecuencia media en función de la frecuencia natural de cada nodo para ambos tipos de redes, esta vez para  $\alpha = 3.0$  y  $W = 3.0$ . Al igual que en el caso anterior ( $\alpha = 2.5$ ), la red no embebida presenta un único cluster de sincronización (figura superior) y la red embebida (figura del centro) presenta dispersión alrededor del valor medio. Como era de esperarse a partir del comportamiento de  $r$  observado en la figura 6.2, la dispersión en las frecuencias crece a medida que aumenta el exponente  $\alpha$ . El recuadro inferior de la figura es un detalle ampliado del comportamiento de  $\Omega$  alrededor de la media. Este detalle revela una característica que evidentemente se aparta del modelo de campo medio: se pueden observar con claridad una cantidad de clusters sincronizados a diferentes frecuencias. Cada uno de ellos corresponden a osciladores de lugares geográficos alejados que han llegado a sincronizarse entre sí (recordar también la figura 1.9). Observar que las frecuencias a las cuales estos clusters se sincronizan son muy parecidas, luego cuando la constante de acoplamiento se incrementa, los clusters se pueden sincronizar entre sí. Eventualmente, para acoplamientos lo suficientemente grandes, aparece un único cluster como se observó en la figura 6.5.



**Figura 6.5:** Frecuencia media  $\Omega$  en función de la frecuencia natural  $\omega$  para redes no embebidas (cuatro gráficos superiores) y redes libres de escala embebidas (cuatro gráficos inferiores) con exponentes  $\alpha = 2.5$ ,  $m = 4$ ,  $M = 400$ ,  $A = 10$  y cuatro constantes de acoplamiento  $W$  diferentes [101].



**Figura 6.6:** Frecuencia media  $\Omega$  en función de la frecuencia natural  $\omega$  para una red no embebida (arriba) y para una red embebida (figura media) con constantes de acoplamiento  $W = 3.0$ ,  $\alpha = 3.0$ ,  $m = 4$ ,  $M = 100$  y  $A = 10$ . En la figura inferior se muestra un detalle ampliado del caso embebido donde se observa la presencia de clusters sincronizados a diferentes frecuencias medias [101].

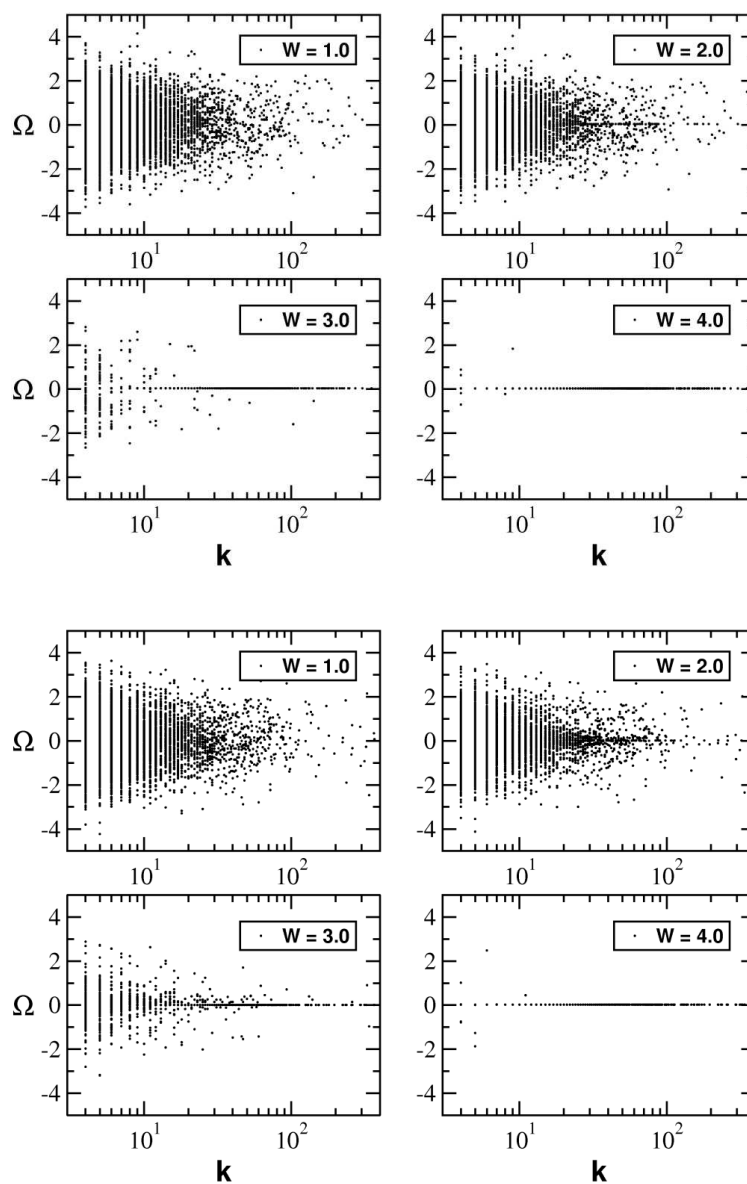
#### 6.3.4. El rol de los hubs

Por último, analizaremos el efecto que tiene el embebido en el papel que juegan los hubs<sup>3</sup> de la red. Para ello, en la figura 6.7 graficamos la frecuencia media  $\Omega$  en función de la conectividad  $k$  de

<sup>3</sup>Un hub es un nodo con un número muy grande de conexiones

### 6.3 Resultados numéricos

cada sitio de una red no embebida (superior) y embebida (inferior). En ambos casos usamos  $\alpha = 2.5$  y cuatro valores diferentes para la constante de acoplamiento. La figura está representada en escala logarítmica debido a la gran amplitud del rango de  $k$ . En ambos casos observamos el mismo comportamiento cualitativo: los nodos con mayores conectividades son los primeros en sincronizarse al orden global, mientras que aquellos con conectividades menores se sincronizan cuando la constante de acoplamiento es lo suficientemente grande. Esto está indicando que el rol de los hubs en la sincronización no tiene una dependencia demasiado fuerte con el hecho de que la red se encuentre embebida [95].



**Figura 6.7:** Frecuencia media  $\Omega$  en función de la conectividad  $k$  para una red no embebida (cuatro gráficos superiores) y embebida libre de escala (cuatro gráficos inferiores) con un exponente  $\alpha = 2.5$ ,  $m = 4$ ,  $M = 400$ ,  $A = 10$  y cuatro constantes de acoplamiento diferentes [101].



### 6.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo hemos analizado los efectos del embebido de las redes en las propiedades de sincronización de un sistema de osciladores de fase no lineales de Kuramoto, resultados que fueron publicados en [101]. A partir de la comparación de los resultados obtenidos en una red embebida libre de escala con los análogos en una red no embebida podemos ser capaces de discernir de qué forma la presencia de estructuras complejas locales en la matriz de interacción afecta al parámetro de orden y a las correlaciones espaciales del modelo. Tal como se espera, la baja dimensionalidad de la red embebida dificulta la sincronización global. Sin embargo, es posible la formación de estructuras sincronizadas, cosa que no se observa en los modelos no embebidos. Es importante mencionar que en ambos casos, redes embebidas y no embebidas, los nodos más conectados de la red (los llamados hubs) juegan un rol fundamental. De hecho, los nodos con conectividades más altas se sincronizan primero, y a medida que la constante de acoplamiento va creciendo se van sumando al orden global los nodos con conectividades más pequeñas.

Resumiendo, en esta parte de la tesis hemos presentado un modelo de Kuramoto en una red embebida geográficamente. Este modelo incluye muchos de los comportamientos observados en los sistemas reales, tales como baja dimensionalidad, distribución de grado tipo ley de potencias, características de mundo pequeño y un cierto grado de localidad, entre otros. Nuestros resultados resaltan el rol de las estructuras embebidas no solo en la aparición de orden en redes de baja dimensionalidad, sino también la aparición de parches de unidades localmente sincronizadas.



---

## Sincronización en una red embebida bidimensional con interacciones dependientes de la distancia

---

### 7.1. Introducción

El proceso de desarrollo del cerebro conlleva la formación de patrones por medio de auto-organización, o sea, mediante mecanismos dinámicos auto-regulados [102]. Dado el gran número de neuronas presentes en un cerebro, y a su vez, la gran cantidad de conexiones que entre ellas se establecen en el proceso de desarrollo, se debe excluir el determinismo genético como única posibilidad explicativa de la compleja arquitectura de conexiones. En lugar de esto, parece existir un conjunto de reglas y procedimientos que guían el proceso de formación de las conexiones. A diferencia de lo que sucede en sistemas físicos, en los sistemas biológicos la estructura auto-organizada no surge a partir de estados inicialmente inhomogéneos, sino a partir de estímulos externos que son almacenados en patrones espacio-temporales. Y este proceso, mediante el cual la información fluye del mundo exterior hacia el interior del cerebro (que es usualmente llamado, en términos de redes neuronales, proceso de aprendizaje no supervisado), da lugar a la auto-organización.

Uno de los problemas que ha sido más investigado en torno al cerebro es la formación de patrones en la corteza visual, a cuyo estudio nos avocaremos en este capítulo. Existe una serie de experimentos que sugieren que los elementos importantes que intervienen en estos procesos no están pre-especificados, sino más bien que emergen durante un proceso auto-organizado [103]-[106]. Ciertos experimentos de registros electrofisiológicos de la corteza visual de gatos y monos revelaron que existen ciertos patrones que forman las neuronas de esa área. Más aún, los patrones espaciales que se generan por la estimulación del ojo derecho forman bandas que están entrelazadas con las bandas de neuronas que han sido estimuladas por el ojo izquierdo [107]. Estas son las *bandas de dominancia ocular*, y la explicación de las mismas les valió el Premio Nobel a D.H. Hubel y T.N. Wiesel en 1981 [103]. Otro fenómeno que ha sido también muy estudiado experimentalmente en los últimos años es la presencia de oscilaciones altamente sincronizadas en la corteza visual del cerebro de los gatos [108, 109, 110, 111].

Desde aquellos experimentos, la comunidad científica ha publicado diversos trabajos que intentan modelar la formación de patrones en la corteza visual de los mamíferos. Por ejemplo, Niebur *et al.* [85] se inspiraron en esta clase de fenómenos para investigar la dinámica de arreglos bidimensionales de osciladores de Kuramoto acoplados a través de diferentes esquemas de conexiones. En este trabajo se observó que, a igual constante de acoplamiento global, el acoplamiento más disperso permite una sincronización en fase más rápida y robusta que si la topología de conexiones es a primeros vecinos o localmente densa. Es importante mencionar que este tipo de esquema de conexiones captura algunos de los elementos de la anatomía cortical. Existe un trabajo desarrollado por Cho y Kim [6] en el cual estamos interesados particularmente y que analizaremos más adelante en este capítulo, en el que se propone un modelo dinámico con interacciones de largo alcance del tipo *sombrero mexicano* para explicar diversos fenómenos relacionados a la formación de mapas visuales. Aunque en aquel trabajo se logró reproducir de forma cualitativa ciertos patrones corticales de la corteza estriada de los monos, se usó una aproximación de campo medio. Según esta aproximación, cada neurona de la corteza visual, ubicada en los sitios de un arreglo bidimensional cuadrado, siente la influencia del resto de las neuronas. Desde el punto de vista biológico es sabido que las neuronas del cerebro no interactúan con todas sus vecinas, sino que lo hacen con algunas de ellas. Además, se sabe que la red de conexiones del cerebro tiene propiedades complejas, son de tipo mundo pequeño con distribución de conexiones del tipo ley de potencias [63], y que la distancia geográfica entre ellas juega un rol fundamental.

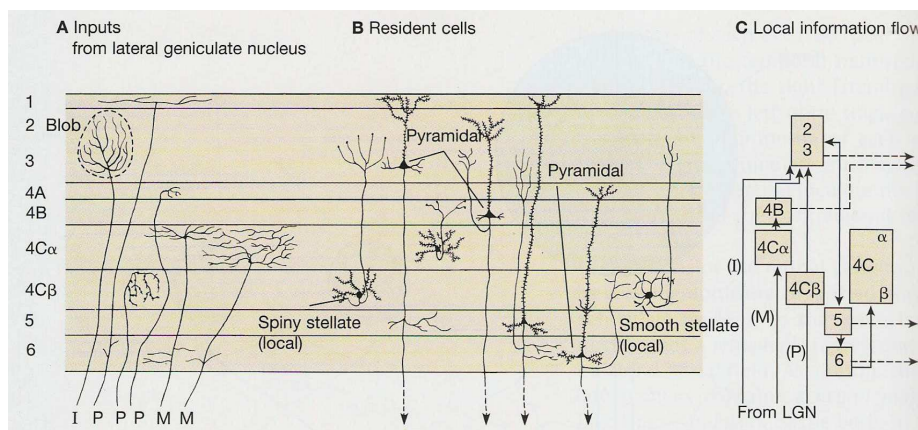
Inspirados en las propiedades de la corteza visual de los mamíferos, en este capítulo mostraremos los resultados de un estudio numérico sobre la capacidad de sincronización de un conjunto de osciladores de Kuramoto que oscilan en una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional. Para ello, usaremos el método de embebido introducido en el capítulo 1. Cada oscilador tiene su frecuencia natural, que caracteriza su comportamiento individual, y además está conectado con un cierto número de vecinos con los cuales interactúa. El método de embebido garantiza que la vecindad de cada sitio es tal que la red entera es de mundo pequeño y libre de escala. Como primer paso, introduciremos las principales características de la corteza visual de los mamíferos para poder entender cómo se forman los patrones en ella. A continuación introduciremos y analizaremos los resultados del modelo de Cho y Kim [6] que servirá de punto de partida para el desarrollo de nuestra versión. Posteriormente, introduciremos nuestra propuesta para el modelado de los patrones de la corteza visual, que incluye dos variaciones de nuestro propio modelo. Las dos últimas secciones estarán dedicadas a mostrar los resultados originales de nuestro trabajo.

## 7.2. Propiedades de la corteza visual

Un ejemplo muy estudiado e importante de auto-organización a nivel del cerebro de los mamíferos es el sistema visual. Una vez finalizado el proceso de maduración del individuo, las fibras nerviosas que emergen de la retina se proyectan, vía el tálamo, a un área específica del cerebro llamada *corteza visual primaria* (también conocida como *área 17*, *área VI* o *corteza estriada* [52]). Esta región debe ser capaz de procesar todos los posibles elementos que una escena natural pueda contener: contornos, texturas, colores, sombras, disparidades y movimientos. La corteza cerebral se organiza mediante segregación lateral y especialización de diferentes regiones que están involucradas en la detección y procesamiento de ciertas componentes de una imagen, o en la combinación de varias de estas componentes, dando lugar a la formación de patrones espaciales llamados *mapas corticales*. Hoy es aceptado que estos mapas surgen de un proceso auto-organizado y que son, al menos en un grado importante, aprendidos a partir de la experiencia visual. Si bien original-

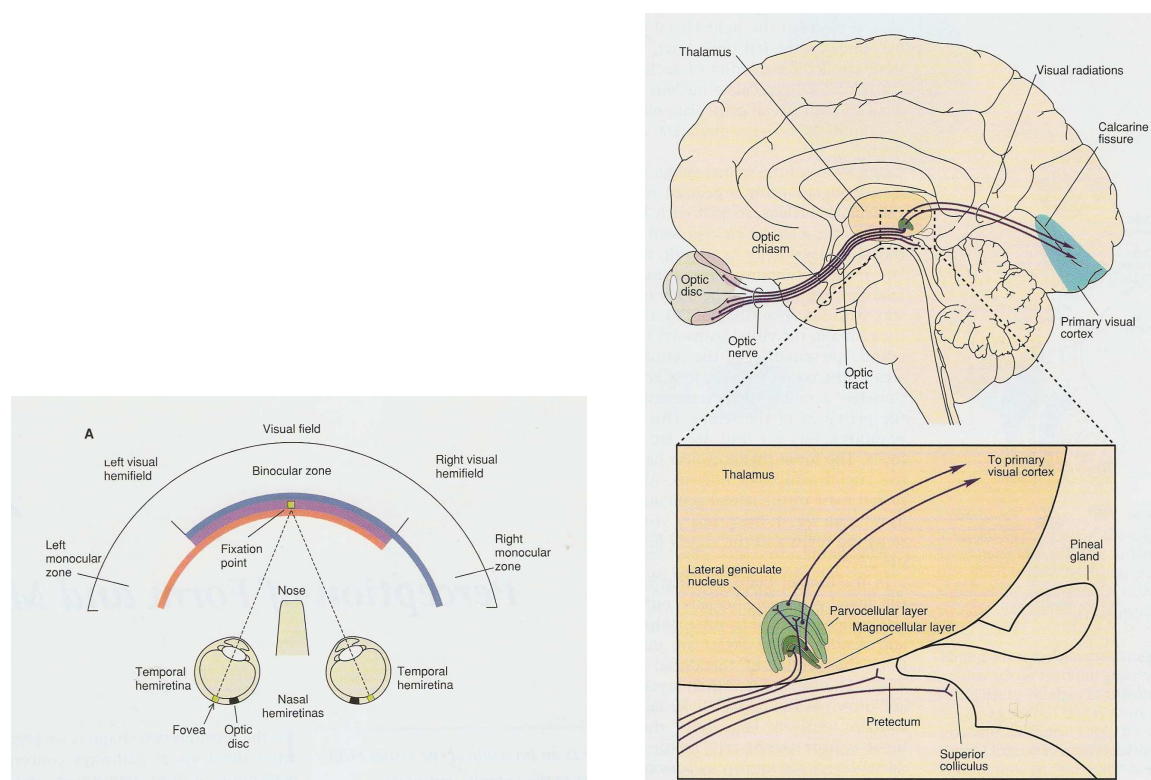
## 7.2 Propiedades de la corteza visual

mente se cuenta con una estructura rudimentaria aún en la ausencia de experiencia visual, se sabe que es necesaria una adecuada estimulación visual a fin de que la corteza obtenga su capacidad de procesar información. Los experimentos han mostrado que la maduración continúa aún después del nacimiento y que la organización final depende fuertemente de los patrones percibidos. No obstante, existe cierta controversia sobre el grado de importancia del proceso de aprendizaje en la organización final [102].



**Figura 7.1:** Capas anatómicas de la corteza visual primaria, cada una de ellas con sus conexiones características. A) Se muestra cómo la mayor parte de las fibras aferentes procedentes del núcleo geniculado lateral terminan en la capa 4 (que, a su vez, está dividida en varias subcapas). B) Se muestran los distintos tipos de neuronas que existen en la corteza visual. Las células estrelladas espinosas y las piramidales, ambas con dendritas espinosas, son excitatorias. Las células estrelladas lisas son inhibitorias. Las células piramidales se proyectan hacia el exterior de la corteza, mientras que los dos tipos de células estrelladas son neuronas locales. C) Se muestra el flujo de información basado en las conexiones anatómicas. Extraído de [52]

La corteza cerebral de los primates es una capa delgada de células (de aproximadamente 2 cm de espesor) que cubre la mayor parte de la superficie del cerebro. Si bien la corteza puede dividirse histológicamente en seis capas de células, la capacidad de respuesta de las neuronas varía sólo lateralmente y parece ser aproximadamente la misma en todas las capas. Siguiendo esta premisa, la mayoría de los modelos de organización cortical se basan en estructuras bidimensionales. Y esta descripción, a pesar de su simplificación, parece ser capaz de captar los ingredientes esenciales de la organización cortical. Si se avanza más en la descripción de las diferentes capas, se observa que la capa IV recibe la corriente de señales de entrada de largo alcance, procedentes de la retina y del núcleo geniculado lateral del tálamo, y envía señales verticalmente a las capas II y III. Las señales de salida parten de las capas V y VI hacia el tálamo y otras estructuras neuronales. En la figura 7.1 se muestra en forma esquemática el flujo de información entre las capas anatómicas de la corteza visual primaria.



**Figura 7.2:** En la figura de la izquierda se muestra el campo visual con sus zonas monoculares y binoculares. La figura de la derecha muestra un diagrama simplificado del recorrido de las proyecciones desde la retina hasta las áreas visuales del tálamo, el núcleo geniculado lateral, donde van a parar el 90% de los axones retinianos y es la principal estructura subcortical encargada de transportar la información visual a la corteza cerebral. Extraído de [52]

Las fibras nerviosas originadas en las células ganglionares de la retina se proyectan, vía el tálamo, a la corteza visual primaria de manera topográfica (figura 7.2). De esta manera, regiones cercanas en la retina se proyectan en regiones vecinas de la corteza. Este tipo de patrones de conectividades se conoce como *mapa topográfico*. El factor de magnificación del mapa, conocido como *factor de magnificación cortical*, varía según la localización. La proyección del tálamo en la corteza es débilmente divergente, de tal forma que cada neurona de la corteza recibe los impulsos provenientes de una pequeña zona de la retina. Sin embargo, solamente el estímulo que se representa en el centro de esta región, conocido como *campo receptivo* provoca una respuesta medible. Los campos receptivos son el resultado de la dinámica colectiva de un gran número de células. Usualmente, se adopta una descripción mesoscópica que utiliza los campos receptivos no de una sola célula, sino de un pequeño volumen de células, una *columna*.

Dos propiedades importantes de las células de las regiones de la corteza estriada responsable por la percepción visual son la *selectividad orientacional* (SO) y la *dominancia ocular* (DO). La primera se refiere a una tendencia pronunciada de la mayoría de las neuronas corticales a responder máximamente a estímulos visuales orientados (barras luminosas o bordes) dentro de un rango finito y bien definido de orientaciones. La selectividad orientacional de una neurona está descrita por una función de estímulo (tuning curve) que típicamente exhibe un pico. Esta función puede ser descrita en forma sencilla con dos parámetros: la orientación preferencial, que denota la orientación del estímulo visual que maximiza la respuesta, por un lado, y la diferencia entre en la magnitud de

la respuesta obtenida cuando el estímulo tiene la orientación preferencial y cuando el estímulo es ortogonal a la misma. La segunda, dominancia ocular, se refiere a la diferencia de respuesta a un mismo estímulo visual presentado a ambos ojos. Vale destacar que las células que están ubicadas en regiones correspondientes de ambos ojos proyectan su señal a la misma área de la corteza. Una región se denomina monocular si responde al estímulo presentado a un ojo en particular, y se dice binocular si responde igualmente bien a un estímulo presentado a ambos ojos.

La corteza visual primaria está organizada en módulos funcionales, de modo que las neuronas con campos receptivos similares forman columnas. Estas estructuras orientadas verticalmente cruzan las capas de la corteza visual, cuyas células controlan porciones retinianas casi idénticas. La corteza visual primaria se dispone en estrechas columnas (cada columna tiene un ancho de 30 a 100  $\mu\text{m}$  y una profundidad de 2 cm). Existen al menos tres sistemas de columnas [52]:

1. *Columnas de orientación*, que descomponen cada parte del campo visual en segmentos lineales cortos de orientación diferente. Éste es el primer paso de un proceso aparentemente necesario para la discriminación de la forma
2. Regiones llamadas *manchas*, en donde tiene lugar el procesamiento del color. Esta región contiene células que no poseen selectividad de orientación.
3. *Columnas de predominio ocular*, donde se combinan las aferencias procedentes de ambos ojos, paso necesario para la percepción de la profundidad.

Por lo tanto, además del circuito de capas, las células de la corteza visual se organizan en sistemas funcionales orientados verticalmente (conteniendo neuronas con propiedades similares de respuesta). A su vez, las diferentes columnas se encuentran unidas por conexiones horizontales. De esta forma, la información fluye en ambas direcciones.

Los patrones espaciales de preferencia orientacional y de dominancia ocular en la corteza estriada de los macacos han sido ampliamente estudiados usando técnicas ópticas de imágenes. En particular, la distribución anatómica de las columnas de orientación diferente se pueden visualizar directamente en la corteza cerebral viva. Mediante un colorante sensible al voltaje o mediante diferencias inherentes de la dispersión de la luz en las células activas e inactivas, una cámara de gran sensibilidad puede detectar el patrón de orientación de las columnas activas o inactivas cuando el estímulo presentado es una barra de luz con un eje de orientación específico, tal como se muestra en la figura 7.3. Las desviaciones sistemáticas entre una columna y la siguiente se ven interrumpidas a veces por las manchas.

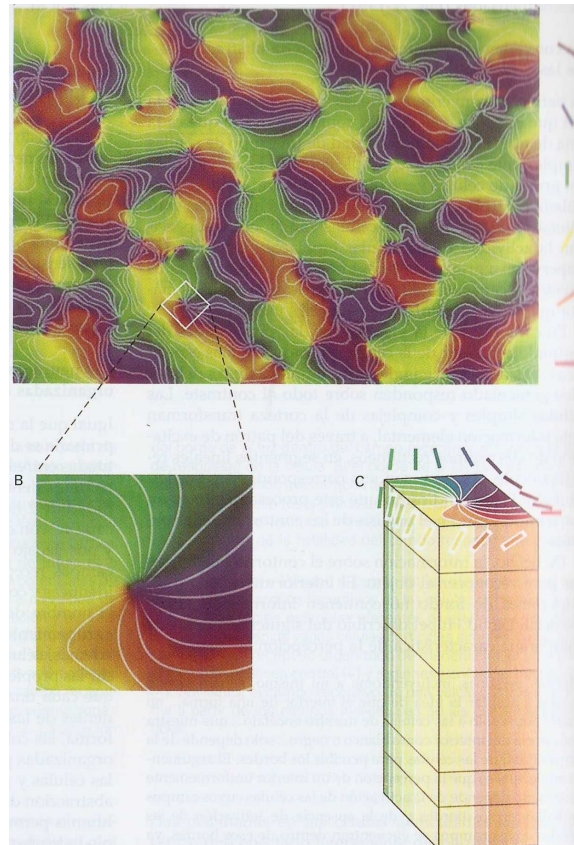


**Figura 7.3:** Patrón de las columnas de diferentes orientaciones en la corteza cerebral de un mono. En este experimento, Gary Blasdel aplicó un colorante sensible al voltaje a la corteza estriada de un mono y estimuló el campo visual con barras de distintas orientaciones, una tras otra, mientras tomaba las imágenes con técnicas de televisión. Luego, usando técnicas computacionales, se visualizaron los resultados mediante la asignación de un mismo color a las regiones que se habían iluminado con cada orientación. Para una región pequeña cualquiera los bloques de orientación son franjas paralelas. Extraído de [112].

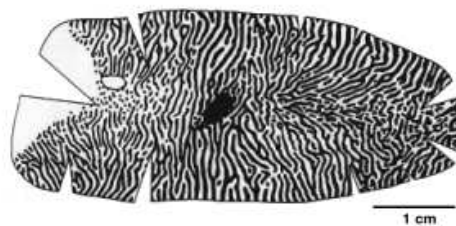
Una selección de columnas funcionales de células de la corteza visual posee la maquinaria nerviosa para analizar una región separada del campo visual y puede considerarse como un módulo funcional. En la figura 7.4 se muestra la relación entre las columnas de orientación, las columnas de predominio ocular y las manchas dentro de un módulo. Cada módulo contiene un conjunto completo de columnas de orientación, un conjunto de columnas de predominio ocular (ojos derecho e izquierdo) y varias manchas. La totalidad del campo visual puede representarse en la corteza visual por el agrupamiento regular de estos módulos.

La figura 7.5 muestra los patrones de dominancia ocular formados en la corteza estriada de un macaco. Se ha observado la tendencia a la formación de fajas. En las siguientes secciones analizaremos distintos modelos tendientes a reproducir este tipo de patrones observados en la corteza estriada de los mamíferos. En particular, examinaremos los resultados del modelo propuesto por Cho y Kim [6], que logra reproducir estos patrones mediante un análisis numérico. A continuación, haremos lo propio con el modelo de Kuramoto sobre una red de osciladores embebido en un espacio bidimensional con interacciones dependientes de la distancia.





**Figura 7.4:** A) Imagen de un rectángulo de 9x12 mm de la superficie cortical de un mono mientras veía contornos de distintas orientaciones. Las áreas más activas durante la presentación de una orientación concreta se indican con el color elegido para representar la orientación (barras de la derecha). B) Muestra un aumento del área de un *molinillo*. C) Organización tridimensional de las columnas de orientación de la corteza visual primaria. Extraído de [52].



**Figura 7.5:** Organización de las columnas de orientación y de predominio ocular, así como de las manchas de un módulo funcional de la corteza visual primaria. Extraído de [6].

### 7.3. El modelo de Cho y Kim

A partir de este punto, analizaremos el modelado de las neuronas de cierta región de cerebro (la corteza visual), usando el formalismo de los osciladores de fase. Pero, ¿cómo es posible modelar el comportamiento de una neurona en la forma de un oscilador? Para responder esta pregunta

pensemos en un conjunto de osciladores y supongamos que la actividad rítmica de cada elemento está descrita en función de una variable física que evoluciona regularmente en el tiempo. Cuando esta variable alcanza un cierto umbral, el elemento emite un pulso que se transmite al resto del sistema. Luego, un mecanismo vuelve al sistema a su estado inicial, y el ciclo se repite. De esta forma, cada elemento se comporta como un oscilador. Así podemos pensar que el pulso emitido altera a los vecinos modificando sus períodos. Esta visión nos recuerda al comportamiento de las neuronas biológicas [81]. Es así que podemos modelar un cierto comportamiento de las neuronas del cerebro pensándolas como objetos oscilantes.

En el año 2003 Cho y Kim [6] presentaron un modelo dinámico de osciladores o rotores para modelar la formación de patrones de preferencia orientacional que ocurren en la corteza visual del cerebro de los mamíferos. Recordemos la estructura de columnas que recién describimos, según la cual cada columna de preferencia orientacional de la corteza visual está formada por un grupo de neuronas que tienen el mismo ángulo de orientación preferencial (zonas que se activan bajo un estímulo de esta misma orientación, por ejemplo una barra orientada). Según este modelo, la variación en el ángulo preferencial del  $i$ -ésimo grupo de neuronas  $\phi_i$  ( $0 \leq \phi_i < \pi^1$ ), cuando existe un estímulo lateral en las columnas de preferencia orientacional, está descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = 2\varepsilon \sum_j I(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \text{sen}(2\phi_j - 2\phi_i) - 2\mu B_i \text{sen}(2\phi_i - \phi_i'), \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.1)$$

Los parámetros  $\varepsilon$  y  $\mu$  son la tasa de cambio del estímulo provenientes de células laterales y células del núcleo geniculado lateral (NGL), respectivamente, mientras que  $B$  y  $\phi'$  son la intensidad y la fase del estímulo.

Por su parte, la función  $I(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$  representa la interacción lateral con la vecindad, dependiente de la distancia entre los sitios  $i$  y  $j$ . Es sabido que las neuronas en el cerebro se activan o no dependiendo del estímulo, ya sea excitatorio o inhibitorio, que reciben de sus pares vecinas. Estos estímulos pueden ser recibidos desde neuronas que se ubican más allá de su vecindad geográfica, es decir, mediante una interacción de largo alcance [107]. Esta interacción puede ser positiva, lo cual introduce actividad, o negativa, que la inhibe. Una función que modela estas características es la conocida como *sombrero mexicano*:

$$I(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \left(1 - c \frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7.2)$$

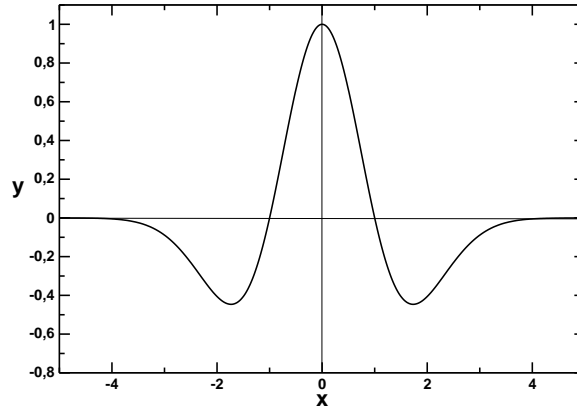
Como se puede ver en la figura 7.6, esta función tiene la propiedad de ser atractiva a distancias cortas y repulsiva para vecinos más alejados, decayendo en intensidad para distancias grandes. Los rangos en que la función se comporta como atractiva y/o repulsiva y las intensidades de tales comportamientos se puede ajustar con la ayuda de los parámetros  $c$  y  $\sigma$ . Cabe aclarar que la distancia entre dos sitios  $\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_j$  es la distancia euclídea en un espacio bidimensional, y está dada por:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad (7.3)$$

donde  $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$  son las coordenadas del sitio. Para mayor comodidad podemos identificar  $2\varepsilon = w$ :

$$W(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = 2\varepsilon I(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = wI(\vec{r}_i, \vec{r}_j).$$

<sup>1</sup>En el modelo de Cho y Kim, los ángulos son elegidos entre 0 y  $\pi$ , debido a que las respuestas medidas a estímulos orientacionales tienen sentido solo en este rango.



**Figura 7.6:** Función de interacción dependiente de la distancia del tipo sombrero mexicano. Los parámetros usados aquí son  $c = 1$  y  $\sigma = 1$ .

Luego, la función de interacción toma la siguiente forma:

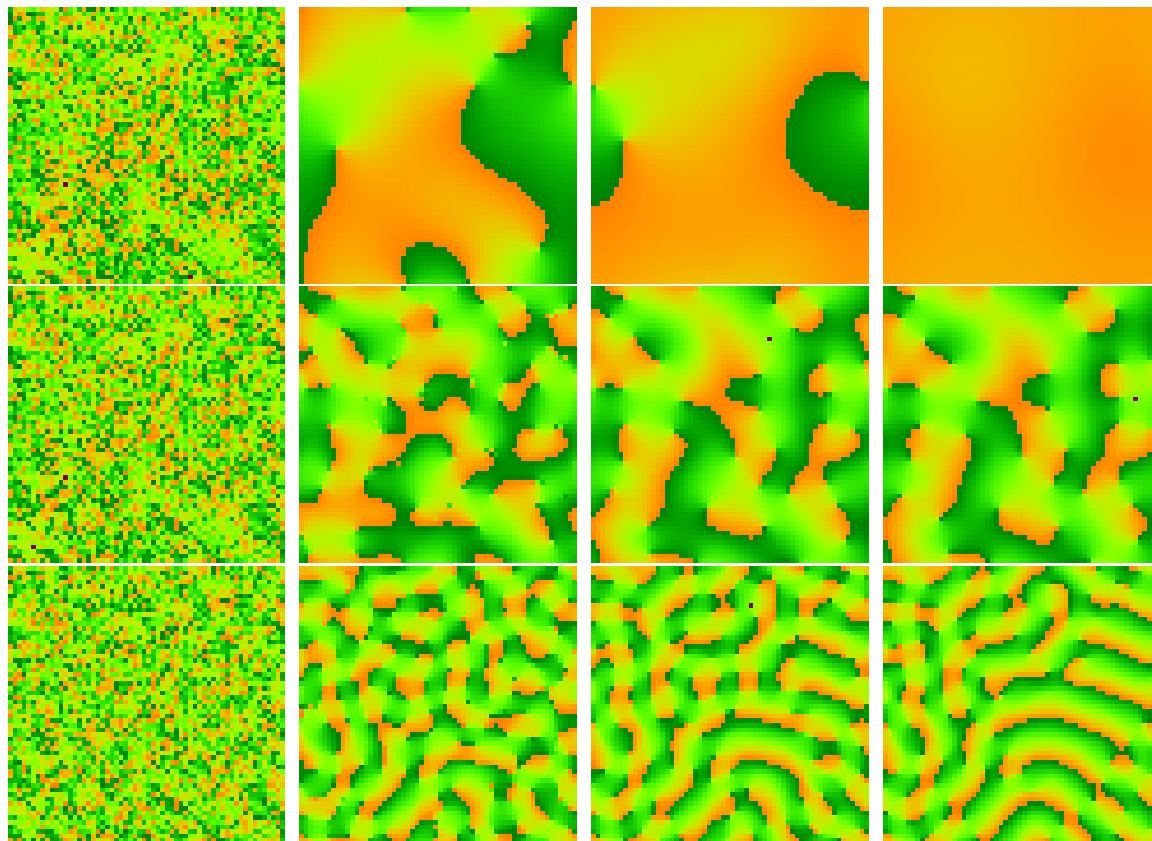
$$W(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = w \left( 1 - c \frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}{2\sigma^2} \right) \quad (7.4)$$

Al observar las ecuaciones de movimiento, nos resultan particularmente familiares. Si en (7.1) tomamos  $\mu = 0$  (estímulo de las células del NGL constante), obtenemos las ecuaciones de movimiento del modelo de Kuramoto para osciladores con frecuencias naturales nulas ( $\omega_i = 0$ ) y acoplamiento dependiente de la distancia dado por  $W(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = wI(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ . En este caso debemos tener en cuenta que la fase de cada oscilador está dada por  $\theta_i = 2\phi_i$ , por lo que nuestra variable angular se moverá en el rango  $0 \leq \phi < \pi$ .

En el trabajo de Cho y Kim se pensó en una red regular cuadrada, donde cada sitio representa al  $i$ -ésimo grupo de neuronas. Cada sitio de la red no tiene restricciones en la cantidad de vecinos con los que puede interactuar, en este sentido se trata de un modelo de campo medio. La restricción viene impuesta por la intensidad de la conexión que se va debilitando (y de forma repulsiva) para sitios que se encuentran muy lejanos espacialmente, debido a la forma misma de la función sombrero mexicano. Cabe destacar que, si bien este tipo de interacciones es más representativa de lo que ocurre en el cerebro (en donde las conexiones pueden ser tanto excitatorias como inhibitorias y la fuerza de la sinapsis depende de la distancia física entre neuronas, siendo más débil para neuronas alejadas), la suposición de que todas las neuronas pueden interactuar con todo el resto constituye una simplificación de lo que ocurre en el cerebro.

El modelo Cho y Kim logra reproducir cualitativamente la formación de patrones que se observan en la corteza visual de los mamíferos. Para el caso particular en que  $\mu = 0$  se pueden obtener patrones como los que se muestran en las figuras 7.7. En esta figura se representa el valor de la fase  $\phi_i$  de cada sitio del arreglo en diferentes tonalidades, según la escala de colores mostrada en la figura 7.8. Se puede observar la formación de fajas de sitios con los mismos valores de fases (igual color en la figura). Estas figuras fueron obtenidas a partir de la resolución numérica de las ecuaciones de movimiento (7.1) usando el método de Euler con paso de tiempo  $\delta t = 0.02$ . Inicialmente, las fases  $\phi_i$  de los osciladores fueron elegidas de forma aleatoria entre 0 y  $\pi$ . En todos los casos se trata de arreglos de  $N = 60 \times 60$  sitios. Se muestra la evolución temporal del sistema con  $w = 0.02$  y tres valores de  $c$ , a saber,  $c = 0.1$ ,  $c = 0.3$  y  $c = 1.0$  respectivamente de arriba hacia abajo. De izquierda

a derecha el tiempo va aumentando desde  $t = 0$ ,  $t = 15$ ,  $t = 50$  hasta  $t = 100$ . Se puede observar que para el valor  $c = 0.1$  no se forma ningún patrón para tiempos grandes. A partir del valor  $c = 0.3$  se comienza a observar la aparición de patrones a partir ya de tiempos pequeños, y estos patrones van evolucionando en el tiempo.



**Figura 7.7:** Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim de campo medio para distintos tiempos, de izquierda a derecha:  $t = 0$ ,  $t = 15$ ,  $t = 50$ ,  $t = 100$ . El tamaño de la red es  $N = 60 \times 60$ , mientras que los parámetros de la función de acoplamiento (7.4) son  $w = 0.02$  y  $\sigma^2 = 6$  con  $c$  variable. Las figuras de la primera fila corresponden a  $c = 0.1$ , la de la segunda a  $c = 0.3$  y las de la tercera a  $c = 1.0$ .



**Figura 7.8:** Escala de colores. De izquierda a derecha la escala va de 0 a  $2\pi$ .

Teniendo en cuenta las salvedades del caso, podemos decir que las ecuaciones de movimiento (7.1) del modelo propuesto por Cho y Kim para el caso en que  $\mu = 0$  no son otra cosa que las ecuaciones de movimiento del modelo de Kuramoto para osciladores con frecuencias naturales  $\omega_i = 0$  para todo  $i$ , con intracciones que dependen de la distancia entre los sitios. Nuestra propuesta ahora consiste en introducir un elemento más al modelo recién descrito: una topología compleja de interacciones entre osciladores. En las secciones subsiguientes se analizarán dos modelos, uno en el cual tomaremos los mismos parámetros del modelo de Cho y Kim y otro donde introduciremos un parámetro  $\sigma$  de la función de interacción que varía de un sitio a otro.

## 7.4. El modelo embebido

El modelo de Cho y Kim que acabamos presentar constituye un aproximación de campo medio al modelado del problema de la formación de patrones en la corteza visual del cerebro de algunos mamíferos. Si bien usualmente en la literatura se abordan este tipo de aproximaciones donde todas las neuronas sienten la influencia de todo el resto, es claro que constituye solo una primera aproximación al problema y que dista bastante de lo que realmente ocurre en la naturaleza.

Existen numerosas evidencias que indican que la red de conexiones en las distintas áreas del cerebro es compleja. Más aun, algunos trabajos indican que las neuronas del cerebro están conectadas siguiendo una distribución del tipo de ley de potencias y que constituyen una red de mundo pequeño [63]. Si bien existen numerosos trabajos que estudian distintos aspectos del cerebro en forma de una red neuronal compleja, otro ingrediente que juega un rol fundamental en el cerebro es la ubicación física de las neuronas, y es un punto que usualmente no es tenido en cuenta.

En vista de estos hechos, para lograr una representación más realista de la formación de patrones en la corteza visual del cerebro de los mamíferos, debemos tener en cuenta los siguientes ingredientes:

1. Arquitectura de interacciones compleja: red de mundo pequeño y libre de escala.
2. Ubicación geográfica de las neuronas.
3. Interacciones entre las neuronas dependientes de la distancia: atractivas a corto alcance y repulsivas a largo alcance.

Las dos primeras características se pueden implementar utilizando una red compleja embebida en un espacio euclídeo, que en caso de la corteza visual del cerebro está bien representada por un arreglo bidimensional (recordar los conceptos introducidos en la sección 7.2). Por su parte, la última característica se puede conseguir utilizando una función de interacción dependiente de la distancia del tipo sombrero mexicano.

Inspirados en el modelo de Cho y Kim, en esta sección estudiaremos un modelo para la formación de patrones en la corteza visual que mezcle los ingredientes que acabamos de describir. De esta forma modelaremos el problema con más realismo, tratando de acercarnos a lo que ocurre en la naturaleza. Como veremos a continuación, este problema es equivalente al estudio de la sincronización de un conjunto de osciladores de fase que se encuentran ubicados en los nodos de una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional y que evolucionan según la dinámica de Kuramoto con ciertas especificaciones: frecuencias naturales nulas para todos los osciladores y constante de acoplamiento dependiente de la distancia entre sitios.

Pensemos en una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional (nuevamente generada según las especificaciones del capítulo 1). El  $i$ -ésimo grupo de neuronas se encuentra ubicado en cada uno de los nodos de tal red, y su respectivo ángulo de preferencia orientacional está dado por  $\theta_i$ . Supongamos que la variable  $\theta_i$  evolucionará de acuerdo a la siguiente regla:

$$\dot{\theta}_i = \sum_{j \in V_i} \frac{1}{k_i} W(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \text{sen}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.5)$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales corresponden al modelo de Cho y Kim con  $\theta_i = 2\phi_i$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ),  $\mu = 0$  y  $W(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = wI(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ . Observemos que el cambio sustancial respecto de las

ecuaciones de movimiento originales de Cho y Kim (7.1) es que la suma ya no corre sobre todos los sitios de la red, sino que apenas se consideran las contribuciones de la vecindad de cada sitio  $V_i$ , dada por la topología compleja de conexiones de la red embebida, y donde  $k_i$  es el grado de  $i$ -ésimo sitio.

Ahora podemos observar claramente que las ecuaciones de movimiento (7.5) son parecidas a las correspondientes a la dinámica del modelo de Kuramoto (6.1) para  $\omega_i = 0$ . Apenas difieren en que la interacción  $W$  no se puede factorizar, ya que no será la misma para todos los sitios. En este trabajo consideramos la interacción dependiente de la distancia con la forma funcional del sombrero mexicano (7.2).

El ángulo de preferencia orientacional del  $i$ -ésimo grupo de neuronas se comporta como un oscilador de fase de Kuramoto. Por consiguiente, el problema de estudiar la formación de patrones en la corteza visual es equivalente a un problema de sincronización de un grupo de osciladores. Es por ello que de ahora en adelante, estos dos conceptos serán tratados en forma equivalente.

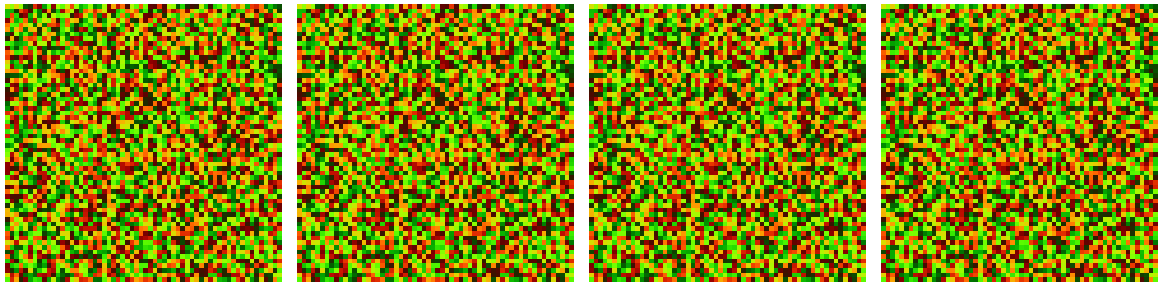
Una vez planteadas las reglas del modelo, el primer desafío que se nos presenta consiste en elegir la forma específica de la función de acoplamiento tipo sombrero mexicano. Es claro que existe un gran número de posibilidades al respecto, pero analizaremos apenas dos de ellas. La elección más inmediata es usar los mismos parámetros que utilizaron Cho y Kim en su trabajo, para analizar si los patrones que ellos encontraron siguen apareciendo aún en esta versión compleja de su modelo. Otra opción es elaborar algún tipo de regla que nos permita diferenciar el alcance de las interacciones según el sitio. La diferencia fundamental entre estas dos elecciones de parámetros es que Cho y Kim fijaron la función de acoplamiento y es la misma para todos los sitios, lo cual es razonable ya que en la versión de campo medio todos los sitios de la red son equivalentes. En cambio, la segunda opción se condice con el hecho de que en la red compleja los sitios no son todos equivalentes entre sí, lo que resulta más plausible desde el punto de vista biológico, en donde las neuronas no tienen ni las mismas conexiones ni el mismo alcance.

Como primer paso, reproduciremos las condiciones impuestas para el modelo de campo medio de Cho y Kim, pero ahora usando una versión de la red que sea compleja, con el objetivo de comprobar si se pueden observar el mismo tipo de patrones. Para ello, se efectúa la integración numérica de las ecuaciones de movimiento (7.5) usando la interacción dada en (7.4), nuevamente usando el método de Euler con paso de tiempo  $\delta t = 0.02$ . Para poder comparar de forma directa, usaremos redes de igual tamaño que las analizadas en el caso de campo medio ( $N = 60 \times 60$ ) y con los mismos parámetros del sombrero mexicano. Las redes están caracterizados por  $\alpha = 2.1$  y  $A = 10$  (parámetro relacionado al alcance de las interacciones) con distintos valores de las cantidades máximas y mínimas de conexiones por sitio,  $M$  y  $m$  respectivamente. La elección de  $\alpha = 2.1$  se debe a que es el valor que más se aproxima al comportamiento de campo medio, dentro de los valores posibles que permite el algoritmo de embebido (recordar que el mismo vale para  $\alpha > 2$  [4, 5]). Además, la manipulación de las cantidades mínima y máxima de conexiones por sitio nos permite generar redes muy cercanas al campo medio (cuando  $m \lesssim M \sim N$ ) o muy próximas a una del tipo primeros vecinos (cuando  $m = 4$  y  $m \lesssim M$ ), ambas muy importantes desde el punto de vista teórico. Las redes intermedias entre estos dos extremos son precisamente las más representativas desde el punto de vista biológico.

Para explorar la formación de patrones, analizamos el comportamiento del modelo para distintos parámetros. En las figuras 7.9 se muestran las fases del sistema a distintos tiempos. Los parámetros de la función de interacción tipo sombrero mexicano (7.2) son  $w = 0.02$ ,  $\sigma = 6$   $c = 1.0$ , para mantener la elección de Cho y Kim. Los parámetros del embebido de la red son  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,

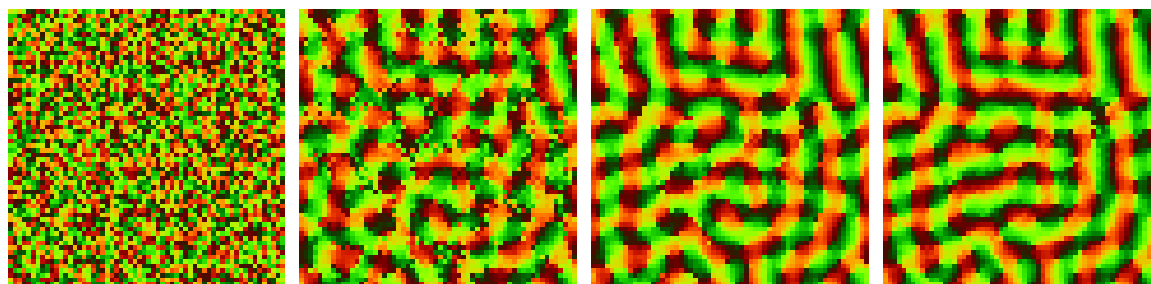
## 7.4 El modelo embebido

$m = 100$  y  $M = 500$ . De izquierda a derecha, las figuras corresponden a  $t = 0$ ,  $t = 15$ ,  $t = 50$ ,  $t = 100$ . Se puede apreciar que la red, que inicialmente tiene una distribución aleatoria de fases  $\theta_i$  entre  $0$  y  $2\pi$ , permanece sin formar ningún tipo de patrón en su evolución en tiempo. Es así que aun para  $t = 100$  (última figura) la red presenta el mismo aspecto cualitativo que al tiempo inicial (primera figura).



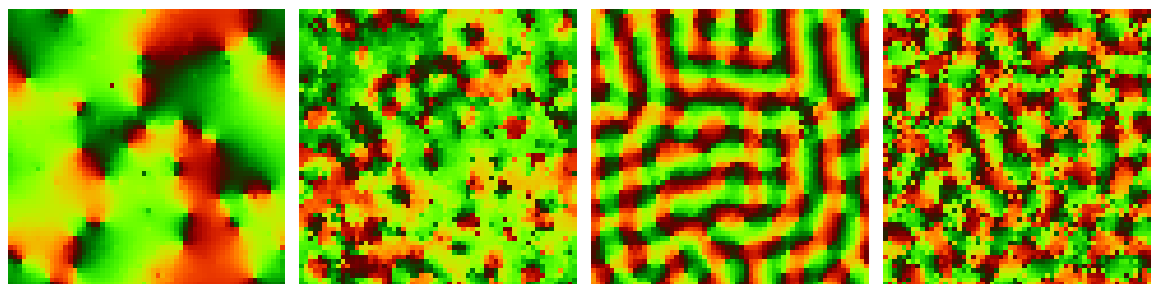
**Figura 7.9:** Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido para distintos tiempos, de izquierda a derecha:  $t = 0$ ,  $t = 15$ ,  $t = 50$ ,  $t = 100$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . La función de interacción está caracterizada por  $w = 0.02$ ,  $\sigma^2 = 6$  y  $c = 1.0$ . Las fases iniciales fueron elegidas aleatoriamente entre  $0$  y  $2\pi$ .

En las figuras 7.10 hemos graficado las fases del sistema pero intensificando la interacción por medio del incremento en la variable  $w$ . Se muestran las figuras equivalentes a las anteriores para  $w = 5.0$ . Comparando ambas figuras, se puede observar que un incremento en  $w$  hace que aparezcan patrones. Notemos que hemos utilizados valores de  $w$  más grandes que los usados en el modelo de campo medio, debido a que en el caso embebido las interacciones están normalizadas según el valor de la conectividad de cada sitio, dando una interacción efectiva por sitio un tanto más pequeña. Nuevamente, se han usado condiciones iniciales aleatorias entre  $0$  y  $2\pi$  para las fases  $\theta_i$  y redes de  $N = 60 \times 60$ . La primera figura muestra el estado inicial de la red, en donde se puede apreciar la elección de la condición inicial. En el segundo cuadro, que corresponde al tiempo  $t = 15$ , ya se evidencia la aparición de una cierta estructura en la red, que se hace aun más evidente en los dos últimos ( $t = 50$  y  $t = 100$ ). Notemos que la figura correspondiente al tiempo  $t = 15$  nos recuerda a una ya mostrada anteriormente en esta capítulo. Volvamos a la sección 7.2 y observemos la figura 7.3 que muestra el patrón de columnas de orientación en la corteza cerebral de un mono, obtenido experimentalmente por Blasdel. La similitud entre ambas imágenes que se ve a simple vista es un muy buen indicio del funcionamiento de este nuevo modelo que introduce un ingrediente del comportamiento biológico y reproduce bien un patrón medido experimentalmente.



**Figura 7.10:** Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido para distintos tiempos, de izquierda a derecha:  $t = 0$ ,  $t = 15$ ,  $t = 50$ ,  $t = 100$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . La función de interacción está caracterizada por  $w = 5.0$ ,  $\sigma^2 = 6$  y  $c = 1.0$ .

Por último, en las figuras 7.11 y 7.12 mostramos las fases  $\theta_i$  de las redes a un mismo tiempo  $t = 100$  para distintos parámetros de embebido. Los parámetros de la función de interacción (7.2) son  $\sigma = 6$ ,  $w = 5.0$  y  $c = 1.0$ . Las figuras 7.11 corresponden a  $\alpha = 2.1$  con diferentes valores de  $m$  y  $M$ . La primera foto muestra el estado de un sistema donde la cantidad mínima y máxima de conexiones permitidas por sitio son  $m = 4$  y  $M = 6$ . Estas cantidades hacen que la red se aproxime a una con conexiones de primeros vecinos, que si bien no es plausible desde un punto de vista biológico, resulta útil para fines teóricos. Se puede observar la aparición de ciertos grupos de osciladores sincronizados, visualizados como manchas de un cierto color, muy similares a las figuras 5.8 mostradas en el capítulo 5 cuando analizamos la sincronización en un arreglo regular con interacciones a primeros vecinos. La última figura también corresponde al caso extremo opuesto, con  $m = 3590$  y  $M = 3600$ , que se aproxima a una red con conexiones de campo medio. Lo que observamos en este caso es la aparición de un cierto patrón, similarmente a lo que ocurre en el modelo original de Cho y Kim. Las segunda y tercera figuras corresponden a casos intermedios entre los dos extremos descritos recién, a saber  $m = 4$  y  $M = 3600$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ , respectivamente. Como ya hemos mencionado, estos son los casos que nos interesan a fin de contemplar características más similares a las biológicas. Resulta claro en este caso que ambas elecciones no originan el mismo tipo de estructura espacial, siendo la figura con  $m = 100$  y  $M = 500$  la que más se asemeja al tipo de patrones que queremos modelar.

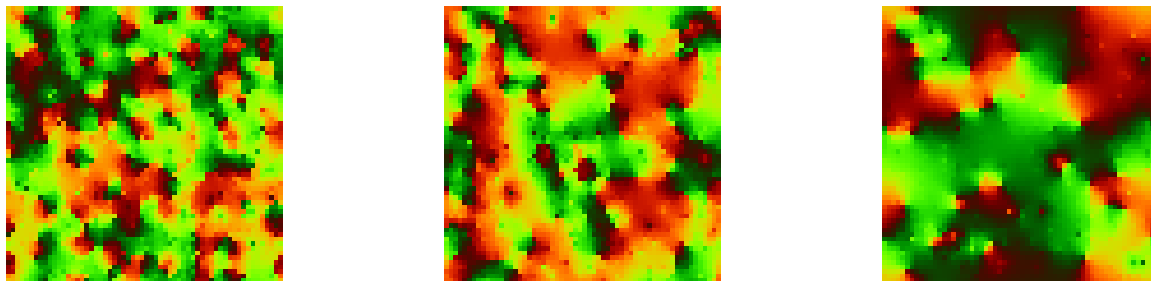


**Figura 7.11:** Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido para tiempo  $t = 100$ . De izquierda a derecha las figuras corresponden a  $m = 4$  y  $M = 6$ ,  $m = 4$  y  $M = 3600$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ , y  $m = 3590$  y  $M = 3600$ . En todos los casos, los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . La función de interacción está caracterizada por  $w = 5.0$ ,  $\sigma^2 = 6$  y  $c = 1.0$ .

Las figuras 7.12 muestran el estado del sistema a tiempo  $t = 100$  de tres redes con distintos parámetros de embebido, que han sido elegidos idénticos a los usados en el capítulo 6 cuando



analizamos interacciones constantes. De izquierda a derecha, los parámetros de embebido son:  $\alpha = 2.5$  con  $m = 4$  y  $M = 400$ ,  $\alpha = 3.0$  con  $m = 4$  y  $M = 100$ , y  $\alpha = 5.0$  con  $m = 4$  y  $M = 40$ . En todos los casos se trata de redes de  $N = 60 \times 60$  sitios con condiciones iniciales de las fases aleatorias entre  $0$  y  $2\pi$ . En los tres casos se aprecia una cierta estructura espacial del tipo de aglomerados, pero no aparecen las estructuras observadas en los patrones corticales.



**Figura 7.12:** Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido para tiempo  $t = 100$ . De izquierda a derecha las figuras corresponden a  $\alpha = 2.5$  con  $m = 4$  y  $M = 400$ ,  $\alpha = 3.0$  con  $m = 4$  y  $M = 100$ , y  $\alpha = 5.0$  con  $m = 4$  y  $M = 40$ . En todos los casos, el tamaño de la red es  $N = 60 \times 60$ . La función de interacción está caracterizada por  $w = 5.0$ ,  $\sigma^2 = 6$  y  $c = 1.0$ .

Las figuras 7.9, 7.10, 7.11 y 7.12 muestran que si bien no siempre es posible la formación de patrones en este modelo existe cierta elección de parámetros que facilita la aparición de la estructura espacial presente en los mapas corticales. Además, es necesario un valor de interacción lo suficientemente grande para lograrlo, tal como lo revela las fotos mostradas en 7.9 y 7.10. En la siguiente sección abordaremos el caso en que la elección de los parámetros de la función sombrero mexicano tiene en cuenta que los sitios de la red embebida no son equivalentes.

## 7.5. El modelo embebido con alcance de las interacciones dependientes del sitio

La formación de patrones espacio temporales como los que surgen en la corteza visual de los mamíferos surgen también en numerosos sistemas naturales, usualmente a raíz de la interacción competitiva entre fuerzas atractivas de corto alcance y fuerzas repulsivas de largo alcance que decaen lentamente sobre sustratos bidimensionales. Tal es el caso por ejemplo, de la formación de patrones de magnetización observados en películas magnéticas ultra-delgadas sobre un sustrato metálico no magnético, donde la competencia entre las interacciones de intercambio ferromagnéticas de corto alcance compiten con las complejas interacciones dipolo-dipolo de largo alcance, dando lugar a sofisticados patrones de magnetización que forman fajas, burbujas y laberintos, dependiendo de ciertos parámetros del sistema, tales como la temperatura y el ancho de la película [113, 114].

En el modelo original de Cho y Kim todos los sitios son equivalentes, pues al ser de campo medio, cada uno de ellos siente la influencia del resto de los osciladores de igual forma. Es por ello que al usar la interacción del tipo sombrero mexicano, cada oscilador interactúa con el resto con la misma intensidad, tanto los que lo hacen en forma atractiva como los que interactúan repulsivamente. Cuando, en cambio, usamos una red compleja embebida en un espacio bidimensional, estamos introduciendo una cierta estructura espacial de conexiones que rompe la uniformidad del campo medio, tal como se mostró en el capítulo 1. Como consecuencia, cada sitio ya no es equi-

valente al resto. Es por ello que el hecho de usar una misma función de interacción para todos los osciladores de la red no necesariamente garantiza la aparición de los patrones observados en el modelo de campo medio. Es necesario entonces replantearnos qué tipo de interacciones tienen sentido en este caso.

Para generar la competencia necesaria para la formación de patrones pensaremos en una función del tipo sombrero mexicano para la cual, del alcance total efectivo de las interacciones, la mitad sean positivas y la otra mitad negativas. Para ello definiremos dos distancias típicas de la función:  $r_1$  será el radio hasta donde las distancias son positivas y  $r_2$  será el radio total efectivo de la interacción. La distancia  $r_1$  está determinada por los ceros de (7.4):

$$r_1^2 = \frac{\sigma^2}{c}. \quad (7.6)$$

En cuanto a  $r_2$ , la definiremos como la distancia a la cual la función decae en una cantidad igual a  $1/e$ , lo cual nos da que

$$r_2^2 = 2\sigma^2. \quad (7.7)$$

La condición que fijamos para asegurar la competencia de las interacciones es entonces:

$$r_2 = 2r_1,$$

lo cual implica que

$$c = 2.$$

Una vez fijo el parámetro  $c$ , nos resta analizar el rol que ejerce la cantidad  $\sigma$ . La expresión (7.7) nos dice que  $\sigma$  determina el alcance efectivo de las interacciones, más allá del cual podemos considerarlas nulas. Basados en la observación de que los sitios no son equivalentes en la red compleja, concluimos de que este parámetro no debe ser igual para toda la red. Más aun, deberá depender del alcance de las conexiones del sitio en cuestión. Teniendo en cuenta la forma en la cual los enlaces de la red se construyen (privilegiando primeros los sitios más cercanos y eventualmente llegando a sitios alejados), parece factible usar el alcance máximo de las conexiones  $r_{max}$  como medida de  $r_2$ . El radio  $r_{max} = r_{max}(k_i)$ , definido en el capítulo 1, es una distancia característica que depende de la conectividad de cada sitio. Ya que típicamente las conexiones del sitio llegarán a una distancia menor que la máxima permitida, elegiremos:

$$\sigma^2(i) = \frac{r_{max}(k_i)}{\sqrt{2}}. \quad (7.8)$$

Con esta elección de parámetros nos estamos asegurando que el rango de conexiones de cada sitio con sus vecinos conectados tenga mitad de interacciones positivas y mitad de negativas. Cabe destacar que esto no ocurría con la elección anterior, ya que para los sitios con una cantidad pequeña de conexiones todas las interacciones pueden resultar ser atractivas, lo cual reprime la competencia y desfavorece la formación de patrones.

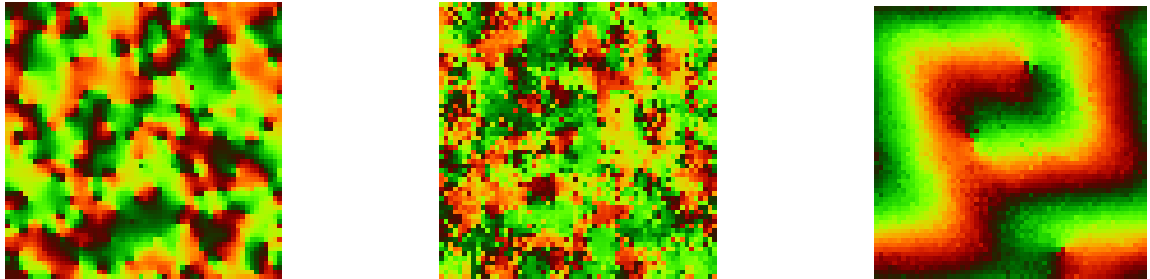
Resumiendo, construimos un modelo para osciladores de fase con interacciones dependientes de la distancia considerando una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional. Cada uno de los sitios representa un oscilador cuya fase es  $\theta_i$  con frecuencia natural  $\omega_i = 0$  que evoluciona de acuerdo a la dinámica de Kuramoto dada por las ecuaciones (7.5). Cada sitio interactúa con sus vecinos conectados, siguiendo una distribución de conectividades tipo ley de potencias, donde el

exponente de la red  $\alpha$  está determinado en la construcción de la red. Tanto la intensidad como el signo de las interacciones dependen de la distancia euclídea medida a partir de cada sitio con la forma funcional dada por (7.2). El rango de alcance de las interacciones depende del radio de alcance de conexiones  $r_{max}(k_i)$ , el cual determina el valor del parámetro  $\sigma_i$  que, por ende, dependerá del sitio. Para asegurar la competencia entre las interacciones atractivas y repulsivas de cada oscilador se fija el parámetro de la función sombrero mexicano  $c = 2.0$ . Esto garantiza que la mitad del rango de conexiones serán atractivas y la otra mitad repulsivas. A continuación mostraremos los resultados obtenidos usando redes con diferentes parámetros.

### Análisis de los parámetros de embebido

Analicemos los resultados de las simulaciones numéricas usando esta nueva definición de las interacciones. Nuevamente, se integraron las ecuaciones de movimiento (7.5) con  $W$  dado por (7.2) usando el método de Euler con paso de tiempo  $\delta t = 0.02$ .

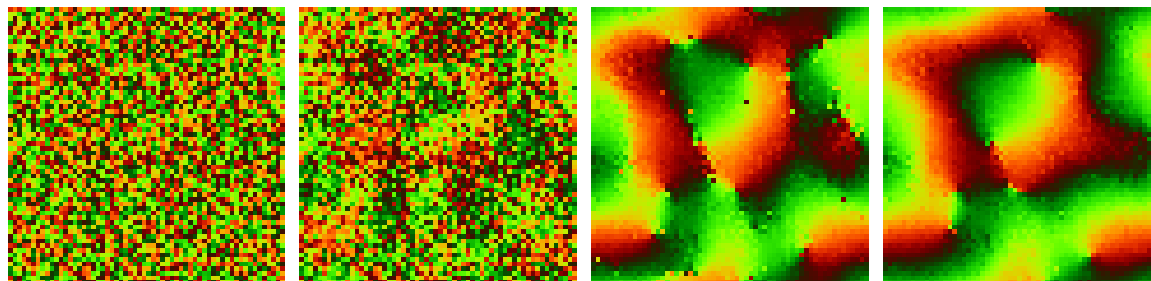
Las figuras 7.13 muestran los valores de las fases  $\theta_i$  usando la escala de colores mostrada en la figura 7.8. Inicialmente las fases  $\theta_i$  son aleatorias entre 0 y  $2\pi$ . Se muestra el estado del sistema al tiempo  $t = 50$  para distintas elecciones en las cantidades máxima y mínima de conexiones por sitio para redes de  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$  y  $A = 10$ . La intensidad de las interacciones de la función sombrero mexicano es  $w = 5.0$ . Estas figuras se corresponden con las tres primeras de la figura 7.11, a saber,  $m = 4$  y  $M = 6$ ,  $m = 4$  y  $M = 3600$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Podemos observar que las primeras dos fotos de ambas figuras son similares en el sentido de que para ambos modelos se forman grupos de osciladores sincronizados con sus fases en el mismo valor. En la tercer imagen de ambos modelos, que corresponde a  $m = 100$  y  $M = 500$  aparece un cierto patrón de fajas. La diferencia entre ambos patrones es que el correspondiente a la figura 7.13 presenta un patrón de franjas más anchas.



**Figura 7.13:** Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a tiempo  $t = 50$ . De izquierda a derecha:  $m = 4$  y  $M = 6$ ,  $m = 4$  y  $M = 3600$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ , todas con  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$  y  $A = 10$ . Los parámetros de la función de interacción tipo sombrero mexicano son  $w = 5.0$  y  $c = 2.0$ , con  $\sigma$  dependiente del sitio. Las fases iniciales se eligen aleatoriamente entre 0 y  $2\pi$ .

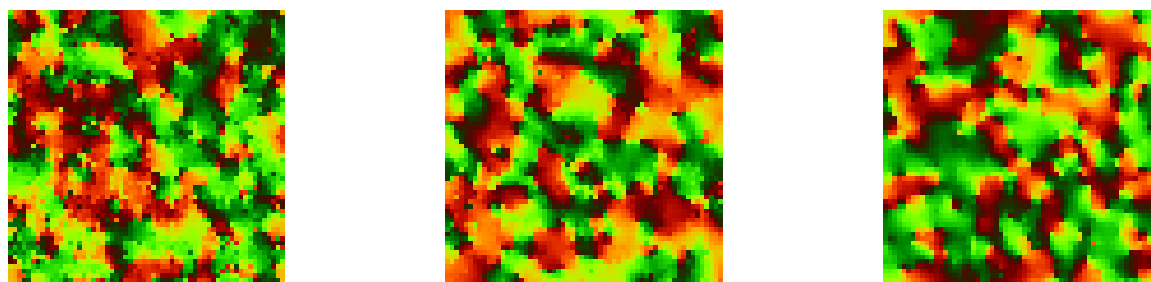
La figura 7.14 muestra el efecto de la intensidad de la interacción  $w$ . Todas las figuras son fotos de las fases del sistema de  $60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$  con  $m = 100$  y  $M = 500$  al tiempo  $t = 100$ . De izquierda a derecha, el valor de  $w$  aumenta, a saber:  $w = 0.02$ ,  $0.1$ ,  $0.5$  y  $1.0$ . Observemos que mantenimiento fijos todos los demás parámetros, el aumento de la intensidad de la interacción trae aparejado la aparición de patrones en la red. De hecho, para un valor pequeño de  $w$  no se aprecia la formación de ningún tipo de estructura, tal es el caso de  $w = 0.02$  y  $0.1$ . Pero a medida que se

intendifica la interacción, por ejemplo a  $w = 0.5$  y  $1.0$ , comienzan a aparecer ciertas estructuras hasta que finalmente, para un  $w$  lo suficientemente grande es clara la formación de un patrón de fajas. Esto ocurre cuando la intensidad es  $w = 1.0$ , como se puede ver en la última foto de la figura 7.13. Hemos podido observar que a partir de allí, un aumento en el valor de  $w$  no produce ningún cambio en el patrón que aparece en la red.



**Figura 7.14:** Fases  $\phi_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a tiempo  $t = 50$ . De izquierda a derecha:  $w = 0.02$ ,  $w = 0.1$ ,  $w = 0.5$  y  $w = 1.0$ , todas con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Las fases iniciales se eligen aleatoriamente entre  $0$  y  $2\pi$ .

La figura 7.15 muestra el estado del sistema al tiempo  $t = 100$  de tres redes diferentes, siguiendo la elección de parámetros usados en el capítulo 6 cuando analizamos sistemas donde el peso de las interacciones son las mismas para todos los sitios. De izquierda a derecha:  $\alpha = 2.5$  con  $m = 4$  y  $M = 400$ ,  $\alpha = 3.0$  con  $m = 4$  y  $M = 100$ ,  $\alpha = 3.0$  con  $m = 4$  y  $M = 40$ , todas con  $A = 10$  y  $w = 5.0$ . Nuevamente, las condiciones iniciales para las fases son aleatorias entre  $0$  y  $2\pi$ , mientras que las figuras muestran el estado del sistema al tiempo  $t = 100$ . En estas tres figuras se pueden observar grupos de osciladores que tienen la misma fase, lo cual se evidencia en forma de manchas del mismo color. Sin embargo, no se aprecia la aparición de las franjas típicas que se ven en los patrones del cortex visual.



**Figura 7.15:** Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a tiempo  $t = 100$ . De izquierda a derecha:  $\alpha = 2.5$  ( $m = 4$  y  $M = 400$ ),  $\alpha = 3.0$  ( $m = 4$  y  $M = 100$ ) y  $\alpha = 5.0$  ( $m = 4$  y  $M = 40$ ). Los parámetros usados son  $N = 60 \times 60$ ,  $w = 5.0$ ,  $c = 2.0$  y  $\sigma$  dependiente del sitio. Las fases iniciales se eligen aleatoriamente entre  $0$  y  $2\pi$ .

Según los resultados obtenidos a partir de la variación de los parámetros del embebido de la red y de la intensidad de las interacciones, elegiremos un único conjunto de valores para continuar nuestra investigación en lo que resta de este capítulo. Para la red compleja adoptaremos los valores  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Los parámetros de la función de interacción los fijaremos en  $c = 2$ ,  $\sigma = 6$  y  $w = 5.0$ . A continuación mostraremos el análisis realizado sobre redes de tamaño  $60 \times 60$  utilizando diferentes condiciones iniciales para el sistema.

## El efecto del estímulo externo

Experimentalmente se ha podido observar que el estímulo inicial externo es determinante en el posterior desarrollo de los patrones de la corteza visual. En el caso de los monos, por ejemplo, el proceso inicial para la formación de mapas corticales comienza justo después del nacimiento y se completa a las seis semanas de edad [107]. Existen experimentos en los cuales se ha podido observar que la formación de los patrones se puede alterar siempre y cuando los mismos no estén completamente formados [103]. Por ejemplo, la remoción o cierre de un ojo durante las siete semanas posteriores al nacimiento causa la disminución del ancho de las bandas de los patrones de predominio ocular que reflejan las señales provenientes de tal ojo, en tanto que las bandas que se relacionan con el ojo no obstruido se ensanchan. Si ambos ojos son vendados, el efecto sobre las franjas del patrón parece ser muy pequeño, siempre que esto se realice dentro de un cierto período crítico. Si estos experimentos se llevan a cabo después de los 2 meses de edad, cuando la generación de patrones ya se ha completado, parece no haber efectos en el patrón. Hubel et al. [103], sugirieron que la formación de estos patrones se produce durante el desarrollo como consecuencia de la competencia entre las terminales de los ojos en la corteza. Así, si una región está dominada por las sinapsis del ojo derecho, éstas inhiben el establecimiento de las sinapsis del ojo izquierdo. De esta forma, si se cierra un ojo, no habrá inhibición sobre las terminales del otro ojo y por lo tanto no se formarán patrones.

En el caso de nuestro modelo, el estímulo externo está representado por las condiciones iniciales en las fases que se le aplica a la red. Según el ejemplo que acabamos de mencionar, es de suma importancia el análisis del efecto que tienen las condiciones iniciales impuestas al sistema en el posterior desarrollo de los patrones. En los resultados mostrados en la sección anterior nos hemos limitado solo a un tipo de condiciones iniciales, en donde las fases son elegidas al azar entre 0 y  $2\pi$ . A continuación exploraremos otras variantes en la elección del estímulo externo, a saber:

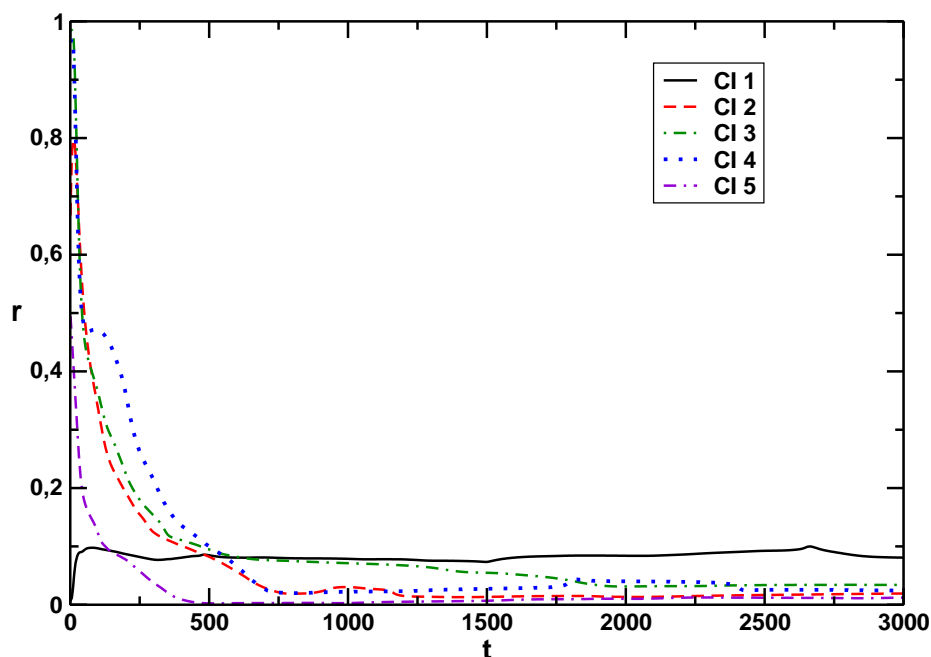
- *CI1*: Se eligen las fases  $\theta_i$  en forma aleatoria entre 0 y  $2\pi$ .
- *CI2*: Se eligen las fases  $\theta_i$  en forma aleatoria entre 0 y  $\pi$ .
- *CI3*: Todas las fases de  $\theta_i = 0$  para todo  $i$ , excepto una línea (la columna  $L/2$ ) de osciladores que son aleatorios entre 0 y  $2\pi$ .
- *CI4*: Todas las fases de  $\theta_i = 0$  para todo  $i$ , excepto dos líneas (las columnas  $L/4$  y  $3L/4$ ) de osciladores que son aleatorios entre 0 y  $2\pi$ .
- *CI5*: Mitad de los osciladores tienen sus fases  $\theta_i = 0$  (mitad izquierda de la red) y la otra mitad tienen fases aleatorias entre 0 y  $2\pi$  (mitad derecha).

Recordemos que nos restringeremos al caso de una red de  $N = 60 \times 60$  sitios, con parámetros de red  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . En primera instancia, calcularemos el parámetro de orden  $r$ , tal como fue definido en el capítulo 5 y luego veremos el estado instantáneo de las fases del sistema.

## El parámetro de orden

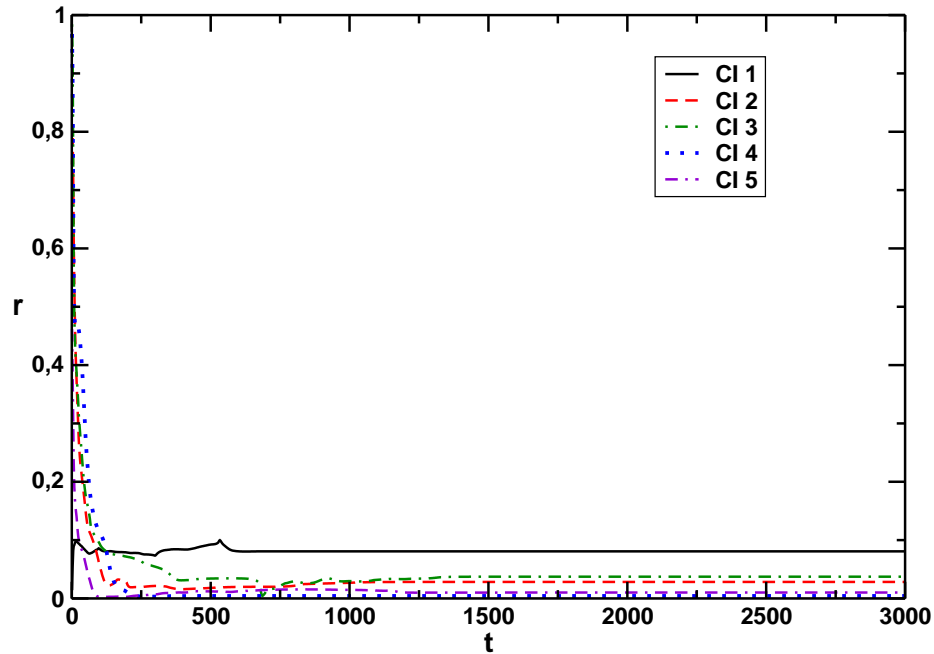
En esta sección exploraremos el comportamiento del parámetro de orden  $r$  en función del tiempo, donde  $r$  está definido por la ecuación (6.3). En la figura 7.16 se muestra el resultado de la

integración numérica de  $r(t)$  para una red que evoluciona según las ecuaciones movimiento (7.5) En el mismo gráfico se muestran las curvas correspondientes a distintas condiciones iniciales para las fases del sistema, previamente definidas, usando el parámetro de acoplamiento  $w = 1.0$  en la función de interacción del tipo sombrero mexicano.



**Figura 7.16:** Evolución temporal del parámetro de orden para  $\alpha = 2.1$  con  $m = 100$  y  $M = 500$ . Se muestran las condiciones iniciales  $CI1$  a la  $CI5$  con acoplamiento  $w = 1.0$ .

La figura 7.17 muestra los resultados análogos para  $w = 5.0$ . Observemos que la curva que corresponde a la  $CI1$  tiene un valor inicial  $r(t = 0) = 0$ , debido a que las fases están totalmente descorrelacionadas inicialmente. En cambio, las curvas  $r(t)$  con  $CI3$  y  $CI4$  comienzan desde un valor cercano a 1, debido a que inicialmente casi todas las fases tienen el mismo valor (excepto una o dos filas de osciladores cuyas fases son aleatorias). Un comportamiento intermedio se puede apreciar en los casos  $CI2$  y  $CI5$  en los cuales  $0 < r(t = 0) < 1$ .



**Figura 7.17:** Evolución temporal del parámetro de orden para  $\alpha = 2.1$  con  $m = 100$  y  $M = 500$ . Se muestran las condiciones iniciales *CI1* a la *CI5* con acoplamiento  $w = 5.0$ .

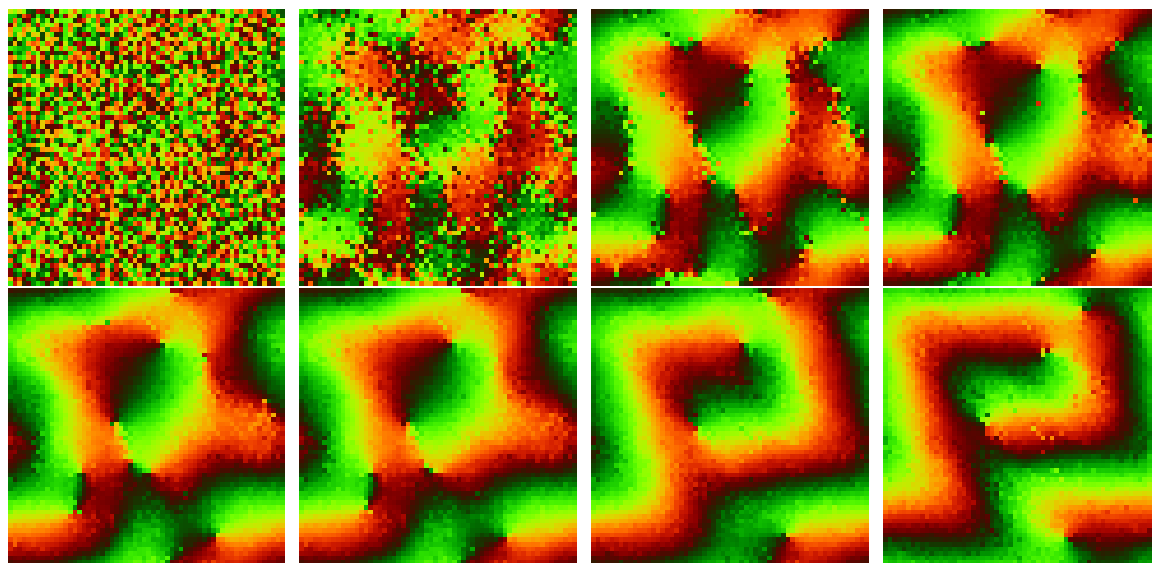
En todos los casos, las curvas de  $r$  muestran una tendencia a estabilizarse luego de un cierto tiempo a un valor pequeño. Es necesario notar que la función  $r(t)$  es un indicador de la sincronización global del sistema. Por lo tanto, el hecho de que  $r$  tome un valor muy pequeño nos dice que no todos los osciladores de la red se encuentran oscilando con la misma fase, pero no es un indicador de la presencia de patrones. Para explorar este aspecto, es necesario observar estados instantáneos de las fases del sistema, tarea que realizaremos a continuación.

### Las fases del sistema

Nos concentraremos ahora en el estado instantáneo de las fases del sistema. Para las distintas condiciones iniciales, veremos fotos de las fases de los osciladores en diferentes tiempos. Recordemos que nos restringiremos al análisis de redes de  $N = 60 \times 60$  con  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Además, en esta sección fijaremos el valor del acoplamiento en  $w = 5.0$ .

Las figuras 7.18 muestran la evolución temporal de las fases del sistema, con la escala de colores 7.8. Los cuadros corresponden a fotos instantáneas de la red cuando inicialmente (primera imagen) las fases son elegidas al azar entre  $0$  y  $2\pi$ , o sea con condiciones iniciales *CI1*. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, se muestran los tiempos  $t = 0, 3, 7, 10, 15, 20, 40$  y  $100$ . En este figura se puede observar cómo, partiendo de una condición inicial aleatoria, la evolución del sistema lo lleva a un estado final donde claramente aparece un patrón del tipo de bandas. A tiempo cero las fases tienen valores al azar, pero rápidamente al paso de tiempo  $t = 7$  se comienza a visualizar una cierta estructura que va cambiando hasta formarse franjas de osciladores sincronizados (aproximadamente al tiempo  $t = 50$ ). Finalmente, al paso de tiempo  $t = 100$ , la estructura de bandas de estabiliza y según hemos observado en nuestras simulaciones el patrón se estabiliza con esta forma. Basándonos en esta observación, en las próximas figuras mostraremos solamente el estado inicial y el final

del sistema, tomando este último a tiempo  $t = 100$  para asegurarnos de que el patrón ya se ha estabilizado.

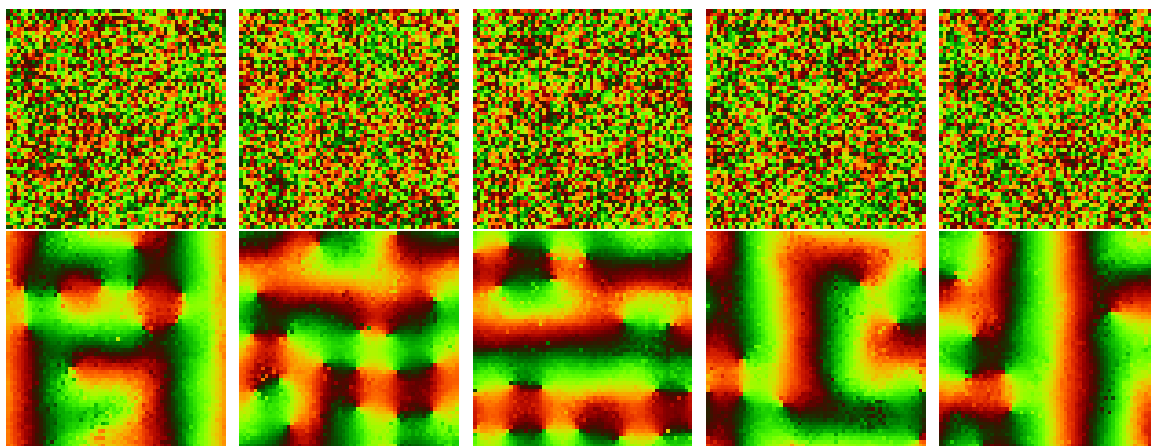


**Figura 7.18:** Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0, 3, 7, 10, 15, 20, 40$  y  $100$ . Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Las condiciones iniciales son dadas por *CII*.

La figura 7.19 muestra también las fotos instantáneas de las fases del sistema que se ha iniciado con condiciones *CII*. En este caso, las figuras superiores corresponden al instante inicial  $t = 0$  y la línea inferior de figuras muestran el estado final de las fases del sistema al  $t = 100$  para la correspondiente condición inicial. Es decir, si bien para todos los casos el sistema se inicializa con fases aleatorias entre  $0$  y  $2\pi$ , cada una de las imágenes de la fila superior es una configuración de fases diferente<sup>2</sup>. Lo que se puede observar es que si bien cada condición inicial lleva a la formación de un patrón de fajas, cada uno de estos estados es diferente al resto. Es decir que cada elección de las fases iniciales conlleva a la formación de un patrón único.

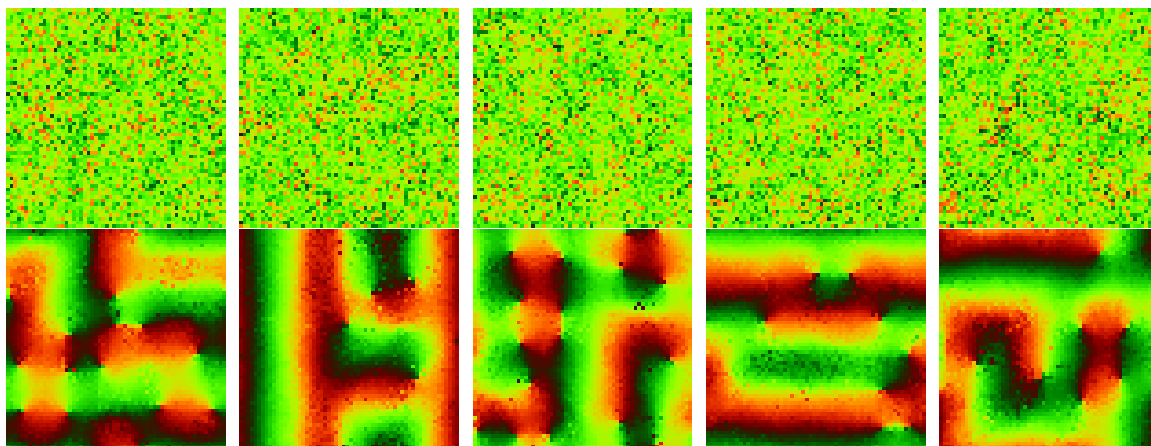
<sup>2</sup>Cada configuración inicial diferente se logra cambiando la semilla del generador de números aleatorios que utilizamos en nuestras simulaciones.





**Figura 7.19:** Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0$  (superior) y 100 (inferior) Se usaron cuatro elecciones distintas de la configuración aleatoria inicial, siempre usando la condición inicial  $CI1$ . Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ .

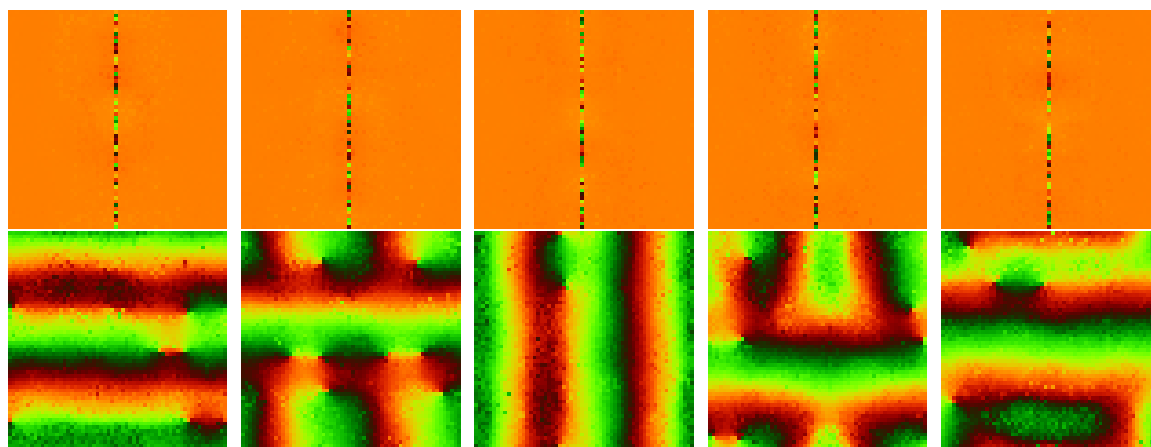
En la figura 7.20 se muestran los resultados análogos a los anteriores pero cuando se inician las fases con condiciones iniciales  $CI2$ . Esto es, la figura superior muestra el instante inicial de las fases del sistema, y la inferior el instante final al tiempo  $t = 100$ . Al igual que en el caso con  $CI1$ , en el instante final la red presenta un cierto patrón de bandas de sitios que oscilan con la misma fase, siendo cada patrón único. Esto nos dice que una variación en los valores de las fases, elegidos en forma aleatoria entre 0 y  $\pi$  lleva al sistema a un estado final distinto, pero en todos los casos aparecen patrones del tipo de los observados en la corteza visual del cerebro de los mamíferos.



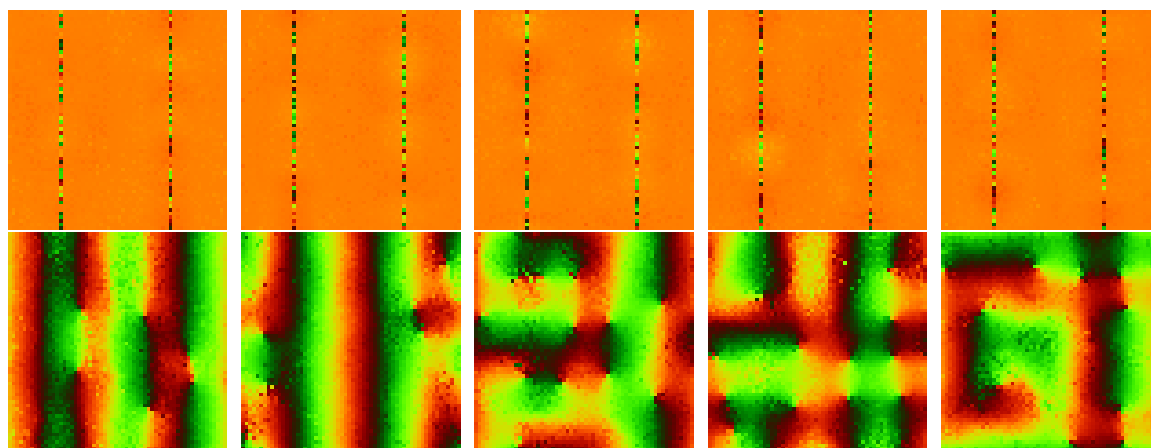
**Figura 7.20:** Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0$  (arriba) y 100 (abajo). Se usaron cuatro elecciones distintas de la configuración aleatoria inicial, siempre usando la condición inicial  $CI2$ . Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ .

Los resultados de las simulaciones numéricas correspondientes a las condiciones iniciales  $CI3$  y  $CI4$  se muestran en las figuras 7.21 y 7.22 respectivamente. En ambos casos, las imágenes superiores muestran el estado inicial del sistema en cinco situaciones y las inferiores muestran el estados final

de la correspondiente configuración de tal red. Las figuras superiores difieren una de la otra en la elección de las fases de las líneas de osciladores que se eligen al azar, estando el resto de la red con fases nulas. En ambos casos podemos observar el mismo tipo de comportamiento, y lo que ocurre es que los patrones de bandas se siguen formando al tiempo final aún cuando la mayoría de los osciladores se encuentran con sus fases iniciales idénticas y todas nulas. Es notable además que, al igual que en las anteriores condiciones iniciales analizadas, una configuración inicial distinta lleva al sistema a un estado final distinto. Esto se evidencia en el hecho de que no se forman dos patrones iguales a partir de dos condiciones iniciales distintas.



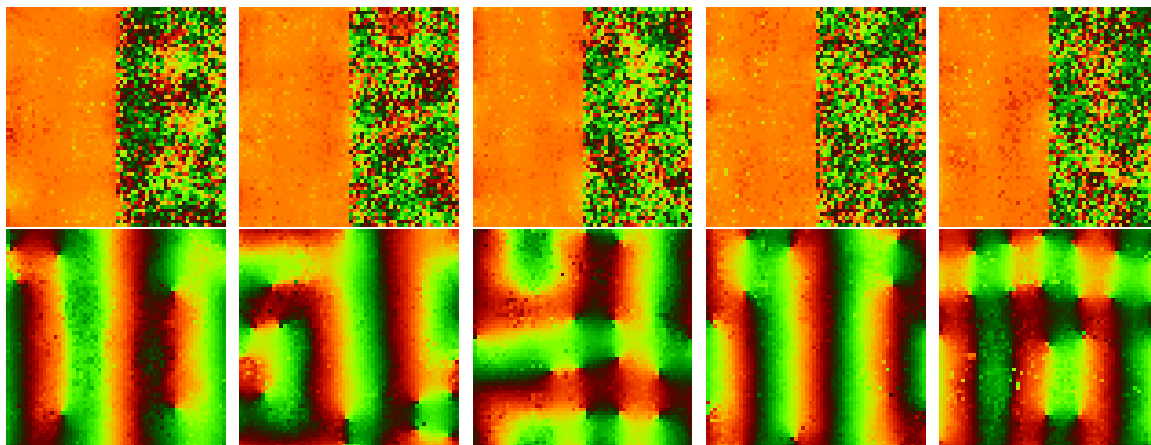
**Figura 7.21:** Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0$  (arriba), y 100 (abajo). Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Las condiciones iniciales son dadas por *CI3*.



**Figura 7.22:** Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0$  (arriba) y 100 (abajo). Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Las condiciones iniciales son dadas por *CI4*.

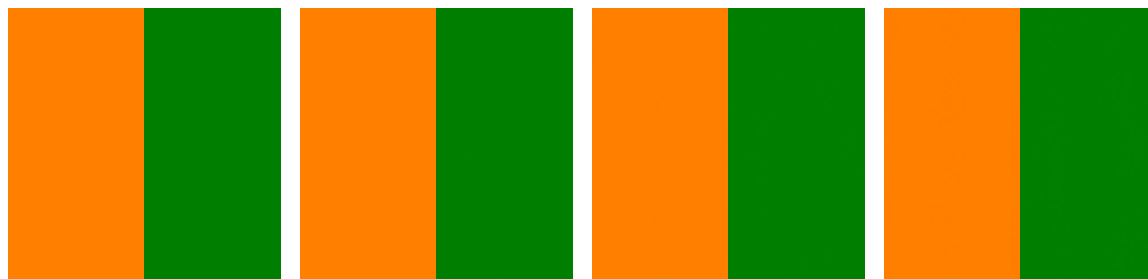
En la figura 7.23 se muestra la evolución de las fases de la red cuando es inicializada con condiciones *CI5*. Las figuras de arriba muestran el instante inicial  $t = 0$  para cinco elecciones distintas para las fases del sistema. La figura inmediata inferior muestra el estado final de la red a  $t = 100$ , al

igual que las figuras anteriormente mostradas. Se puede apreciar de la aparición de un patrón diferente para cada uno de los cuadros superiores. Los patrones que se forman son del tipo de bandas, al igual que para las condiciones iniciales anteriores.



**Figura 7.23:** Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0$  (arriba) y 100 (abajo). Se usaron cuatro elecciones distintas de la configuración aleatoria inicial, siempre usando la condición inicial *CI5*. Todas las fotos corresponden a  $W = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ .

Por último, y a modo de comparación, en la figura 7.24 mostramos la evolución temporal de las fases de la red usando otra elección para el estado inicial del sistema. De izquierda a derecha, las figuras corresponden a distintos instantes, a saber,  $t = 0, 5, 10$  y 15. En este caso, la condición inicial consiste en la mitad izquierda de la red con fases nulas y la mitad derecha con fases todas iguales a  $\pi$ . Esta condición inicial es similar a la *CI5*, pero quitando la aleatoriedad de la mitad derecha de la red. Al contrario de todos los casos mostrados anteriormente, al transcurrir el tiempo la imagen no evoluciona hacia algún patrón, por el contrario, todas las fases permanecen estáticas en el tiempo. Este ejemplo nos recuerda a algunos de los resultados experimentales obtenidos para los macacos, tal como mencionado al comienzo de esta sección. Según estos experimentos, si se le remueve o cierra uno o ambos ojos al mono durante las primeras semanas de vida (que son un período crítico en la formación de los mapas corticales) el efecto que se observa es la disminución del ancho de las bandas del ojo correspondiente o la ausencia total de patrones, según el caso. Es decir, la ausencia de un estímulo inicial externo ocasiona el deterioro o la no formación de los patrones corticales. Este hecho se condice con los resultados de nuestro modelo en donde todos los casos analizados parecen indicar que la aparición de los patrones de bandas está asociado a un cierto grado de aleatoriedad (un cierto estímulo) en el estado inicial de la red.



**Figura 7.24:** Fases  $\theta_i$  del modelo de Cho y Kim embebido a distintos tiempos:  $t = 0, 5, 10, 15$ . Todas las fotos corresponden a  $w = 5.0$  con  $\sigma$  dependiente del sitio y  $c = 2.0$ . Los parámetros de la red son:  $N = 60 \times 60$ ,  $\alpha = 2.1$ ,  $A = 10$ ,  $m = 100$  y  $M = 500$ . Las condiciones iniciales son: la mitad izquierda de la red con  $\theta = 0$  y la mitad derecha con  $\theta = \pi$ .

## 7.6. Conclusiones del capítulo

En el presente capítulo hemos estudiado el modelado de la formación de patrones que ocurren en la corteza visual del cerebro de los mamíferos. Para ello estudiamos el fenómeno de sincronización en una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional donde la intensidad de las interacciones entre los osciladores depende de la distancia euclídea entre ellos, con el objetivo de analizar si es capaz de producir este tipo de fenómenos. En la primera parte del capítulo analizamos las ideas introducidas por Cho y Kim [6], quienes introdujeron un modelo dinámico de rotadores que evolucionan según un conjunto de ecuaciones que pueden ser llevadas a las ecuaciones de movimiento del modelo de sincronización de osciladores de fase de Kuramoto. Si bien el trabajo de Cho y Kim logró modelar la aparición de patrones de franjas cualitativamente similares a lo que se pudo observar experimentalmente en la corteza visual del cerebro de los macacos, el mismo constituye una simplificación de la estructura de las neuronas del cerebro. En aquel trabajo se utilizó un arreglo cuadrado bidimensional de neuronas que interactúan de acuerdo a una función que depende de la distancia entre sitios de forma atractiva para los vecinos cercanos y repulsiva para los más lejanos, lo cual es representativo de lo que ocurre con la sinapsis en el cerebro. Sin embargo, en ese modelo todas las neuronas pueden sentir el efecto de todas las restantes, lo cual constituye una aproximación de campo medio poco realista desde el punto de vista biológico.

Partiendo de las ideas introducidas por Cho y Kim, presentamos un modelo original en el cual la corteza visual está representada por una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional. Cada sitio de este arreglo representa a una neurona del cortex cerebral, cuya dinámica está modelada como un oscilador de fase de Kuramoto que interactúa según la conexión de esta red compleja con una fuerza que depende de la separación entre sitios conectados con una forma funcional del tipo sombrero mexicano. Esta nueva versión del modelo es más realista, pues cada neurona no siente la influencia de la totalidad de sus vecinas, sino solamente de aquellas que están conectadas con ella de acuerdo a una ley de potencia con un cierto exponente  $\alpha$ , puesto que ciertos trabajos indican que las redes de conexiones del cerebro tienen esta propiedad.

Consideramos dos variaciones de este modelo: uno en el cual los parámetros de la función interacción es fija y otro en el cual estos parámetros varían según la conectividad de cada sitio de la red. En todos los casos vimos que con una cierta elección de los parámetros de embebido es posible encontrar patrones de franjas del tipo que se observan en la corteza estriada de los mamíferos. Además, al estudiar el efecto del estímulo externo en la formación de patrones, hemos podido

## 7.6 Conclusiones del capítulo

---

verificar que una variación en la condición inicial conlleva a la aparición de un patrón diferente. Con esto pudimos corroborar que al introducir características más plausibles desde el punto de vista biológico al modelado de los patrones de la corteza visual, es posible reproducir tales patrones cualitativamente en forma exitosa.



---

### Conclusiones

---

La estructura de esta Tesis refleja la cronología de su desarrollo, pues al abordar el problema de modelar la sincronización neuronal a nivel de la corteza cerebral con interacciones sinápticas competitivas (excitatorias e inhibitorias coexistiendo), se requiere incluir simultáneamente muchos ingredientes a nivel celular. Sin embargo, como ocurre siempre en Física Estadística, discernir el rol que cada elemento juega en el comportamiento global del sistema requiere un cuidadoso análisis secuencial, a fin de poder tener al final un modelo completo pero confiable. El hilo conductor de este trabajo fue la hipótesis de que la topografía de la red sináptica es importante a la hora de analizar el comportamiento de sistemas neuronales, tanto naturales como artificiales, siendo éste un ingrediente que no se llevaba en cuenta en la comunidad de Física Estadística, a pesar de la evidencia empírica acerca de la complejidad y baja dimensionalidad de las redes de conexiones sinápticas observadas en sistemas reales. Esto es particularmente válido en la corteza visual, donde el proceso de reconocimiento se da mediante la formación de patrones de actividad neuronal muy complejos (fajas, defectos, laberintos, burbujas, etc).

Sabemos que, en general, es usual encontrar complejidad a nivel global en sistemas totalmente conectados, pero es raro observarla en sistemas de baja dimensionalidad. El desafío de esta Tesis fue mostrar que se puede tener comportamiento complejo global (formación de patrones espaciales, creación de múltiples cuencas atractoras y existencia de estados casi-estacionarios (QSS) de tiempo de vida medio infinito) en sistemas de baja dimensionalidad controlando adecuadamente la arquitectura de conexiones. Y es importante aclarar que estas estructuras surgen principalmente en sistemas biológicos, los cuales son moldeados por procesos de adaptación, y no en sistemas físicos inertes.

Como primera etapa nos propusimos analizar el efecto de la topografía en el modelo HMF, que es sin duda el modelo más simple que presenta comportamiento complejo, está mecánicamente bien definido y admite soluciones exactas en ciertos límites, permitiéndonos entonces ver cómo la geografía afecta a un modelo carente de cualquier otra complicación. Pero además nos sirvió porque desde el inicio quisimos modelar la corteza cerebral con neuronas de Kuramoto, y éstas son dinámicamente similares a los rotores del modelo HMF. Usamos neuronas de Kuramoto también porque tratamos de modelar procesos de sincronización. Pudimos concluir que la topografía preserva la

complejidad global que hasta entonces sólo se había observado en modelos de dimensión infinita (totalmente conectados), dando lugar a estados casi-estacionarios, fáciles de manipular (a diferencia de los estados de equilibrio) pero robustos en términos de vida media (pues es infinita).

En segundo lugar quisimos analizar cómo la topografía compleja afecta el comportamiento colectivo de una red neuronal con interacciones competitivas y para eso usamos el modelo de Hopfield, nuevamente porque entendemos que es, en términos físico estadísticos, el modelo neuronal paradigmático de sistema simple con comportamiento complejo. Pudimos entonces verificar que la topografía efectivamente ayuda a reforzar el comportamiento cooperativo de un sistema que, en términos sinápticos, es muy similar al modelo final usado. Otra vez, conseguimos entonces verificar que un sistema de baja dimensionalidad puede presentar el mismo tipo de comportamiento (creación de múltiples cuencas atractoras) observado en sistemas totalmente conectados. Y la existencia de múltiples cuencas es fundamental para que el sistema pueda usarse como dispositivo de cómputo.

En la tercera parte quisimos analizar el efecto de la topografía en la sincronización, y usamos el modelo de Kuramoto, ya que es el que usaríamos para modelar las neuronas de la corteza cerebral. Nuevamente verificamos que una red con arquitectura compleja y de baja dimensionalidad permite, no sólo preservar la sincronización global observada en dimensión infinita, sino también preservar la creación espontánea de patrones espaciales ausentes en los mismos.

Finalmente, una vez que analizamos cómo la topografía afecta a cada elemento por separado, juntamos todos los ingredientes en el capítulo 7, donde presentamos un modelo dinámico para la corteza cerebral.

En términos de conclusiones, en cada capítulo hemos ido analizando los resultados parciales más significativos. Como lo explicita el título, el objetivo principal ha sido el modelado de un sistema neuronal de baja dimensionalidad, orientado al estudio de la formación de patrones de preferencia orientacional observados en la corteza visual del cerebro de mamíferos, introduciendo elementos que lo hacen más realista. Este tipo de patrones son inviables en sistemas modelados por redes totalmente conectadas, por redes aleatorias o por redes simplemente regulares. Fue por eso que decidimos abordar el rol de complejidad (distribución de grado tipo ley de potencia y propiedad de mundo pequeño) en un sistema de baja dimensionalidad, como lo son los sistemas neuronales reales.

Hemos usado para tal fin un método de embebido de redes complejas en un espacio euclídeo de baja dimensionalidad (en particular, uni y bidimensionales) introducidos por Rozenfeld *et al* [4, 5], cuyas características, como así también las propiedades de las redes resultantes han sido explicadas en el capítulo 1. Mediante métodos de simulaciones numéricas, hemos implementado este método que, como resultado final, genera una red libre de escala y de mundo pequeño cuyos nodos están ubicados espacialmente en un arreglo regular (en particular, un anillo o una grilla cuadrada con condiciones de contorno periódicas), quedando perfectamente definida la noción de distancia euclídea entre sitios. Hemos dividido nuestro estudio en tres grandes partes, en cada una de las cuales hemos analizado las propiedades relacionadas a diversos modelos emblemáticos de la mecánica estadística, que pasaremos a repasar a continuación.

En la primera parte de la Tesis, en los capítulos 2 y 3, estudiamos las propiedades del modelo Hamiltoniano de campo medio (HMF). Este modelo constituye un paradigma de sistema complejo, pues a pesar de la simplicidad del Hamiltoniano que gobierna su dinámica microscópica, se pueden observar fenómenos emergentes que resultan de las interacciones entre sus partículas constituyentes. Para este modelo se realizaron dos tipos de análisis, uno para el caso del modelo HMF original y



otro para la versión embebida del mismo.

Con respecto a la versión original del modelo HMF realizamos un análisis desde el punto de vista topológico, continuando con los estudios realizados con anterioridad en [39]. Aquel estudio se concentró en la topología de la superficie definida por la energía potencial en el espacio de configuración, analizando el comportamiento de  $\lambda(t)$ , el módulo de la más grande de las  $N$  derivadas de  $V/N$  respecto a  $\theta_i$ . Teniendo en cuenta que cada vez que el sistema toca la sub-variedad crítica el parámetro  $\lambda$  se hace cero, pudimos identificar cuatro tipos de comportamientos diferentes [42]. En la fase desordenada (energías grandes) el sistema visita periódicamente la sub-variedad  $v_c = 1/2$  y el período decrece en forma de una ley de potencias cuando  $U/N$  aumenta. Algo distinto ocurre en la fase ordenada (bajas energías), en donde se observan tres comportamientos diferentes de acuerdo al valor de la energía por partícula, a saber, para valores justo por debajo de la transición de fase el sistema queda atrapado en la variedad crítica visitándola en forma no periódica; para valores muy bajos de energía el sistema nunca visita dicha variedad, en tanto que para valores intermedios el sistema es atraído hacia la variedad crítica para eventualmente escapar de ella. En [41] analizamos cómo la topología de la función energía potencial afecta la función distribución de probabilidad de ambos, ángulos y momentos del modelo HMF original de campo medio. En aquel trabajo se mostró que luego de una configuración inicial muy ordenada, la distribución de momentos comienza a desordenarse, incrementándose su complejidad en la medida que transcurre el tiempo. Además, se ha verificado también que el sistema visita puntos críticos a lo largo de toda la trayectoria casi-estacionaria y no sólo en el régimen de tiempos cortos.

En tanto, en el capítulo 3 implementamos una versión del modelo HMF en donde cada rotador se encuentra ubicado en los nodos de una red compleja (caracterizada por un exponente  $\alpha$ ) embebida en una cadena lineal con condiciones de contorno periódicas. En este caso analizamos cómo influye la estructura de interacciones complejas en el comportamiento del modelo. Usando las mismas técnicas de integración numéricas que para el modelo de campo medio, investigamos las propiedades dinámicas de esta nueva versión. El resultado destacable de este capítulo es que pudimos corroborar que algunos de los comportamientos anómalos siguen estando presentes aún cuando el modelo no es de campo medio. Más aún, pudimos observar que la curva calórica tiene dos comportamientos distintos según se inicialice el sistema en un estado cercano o lejano a la condición de equilibrio. Se puede ver el apartamiento de la curva calórica cuando se usan condiciones iniciales del tipo water bag, tal como ocurre en el modelo original. Cabe destacar que este comportamiento no ha sido antes observado para un sistema de alcance finito tal como el que hemos introducido. Se pudo observar que el comportamiento es independiente del exponente  $\alpha$  de la red compleja, pero que sí depende de la cantidad de conexiones máxima y mínima de los sitios, y por ende de la conectividad media de la red, existiendo un límite en la conectividad media de la red a partir del cual se empiezan a observar los comportamientos mencionados. Complementariamente, se realizó un estudio de la función distribución de momentos del modelo embebido para los tipos de condiciones iniciales.

En la segunda parte de esta Tesis, en el capítulo 4, hemos abordado el estudio del modelo de Hopfield que modela el problema de la memoria asociativa en redes neuronales artificiales. Luego de introducir los conceptos básicos relacionados a esta área y de describir el modelo de Hopfield y sus propiedades, introdujimos una nueva versión de dicho modelo haciendo uso del embebido de redes complejas en un espacio euclídeo bidimensional. Recordemos que en el modelo de Hopfield, las interacciones entre neuronas son del tipo campo medio (todas con todas). Por lo tanto, nuestra principal modificación a dicho modelo es introducir la noción de topografía inexistente en el modelo original. La red ya no es totalmente conectada, y las interacciones tienen propiedades topológicas complejas: libre de escala y de mundo pequeño, tal como se ha reportado recientemente que ocurre

en las redes funcionales del cerebro. Además, si tenemos en cuenta que algunas regiones de cerebro (como lo es la corteza visual) se pueden considerar láminas casi-bidimensionales, la red embebida le aporta dos elementos que le dan propiedades plausibles biológicamente al modelo. Para esta nueva versión compleja del modelo de Hopfield se analizó la capacidad de almacenamiento con el objetivo de compararla con la de la versión de campo medio. En tanto para el caso de campo medio la red funciona muy bien como dispositivo almacenador para valores pequeños del  $p/N$  sufriendo una transición drástica (cuando  $p/N = p_c/N = 0.138\dots$ ) de forma tal que para  $p/N > p_c/N$  el sistema no funciona más como dispositivo de memoria asociativa, para el modelo embebido encontramos un panorama distinto. En este caso, fue posible observar que el modelo embebido bidimensional tiene un mejor desempeño que las otras versiones del mismo. Esto es, la capacidad de reconocimiento de la red embebida compleja decae más lento que una ley de potencias, indicando que la red es capaz de reconocer patrones en un rango más amplio. Por otro lado, no fue posible observar una transición de fase desde una fase de reconocimiento a una de no reconocimiento como ocurre en el modelo original de Hopfield.

Finalmente, en la última parte de la presente Tesis nos dedicamos al estudio del fenómeno de sincronización, a través del análisis del modelo de Kuramoto. Este modelo explica la sincronización mutua de un conjunto de  $N$  osciladores de fase que interactúan todos con todos, constituyéndose en un modelo de campo medio. En el capítulo 5 introdujimos el modelo original de Kuramoto y analizamos sus propiedades, así como las características de este mismo modelo cuando se aplica a una grilla cuadrada bidimensional con interacciones de primeros vecinos. En los dos últimos capítulos se estudió este mismo modelo cuando se encuentra embebido en un espacio euclídeo bidimensional, abordándolo de maneras distintas.

El objetivo último de la Tesis fue modelar el proceso de formación de patrones de la corteza visual de los mamíferos, con las particularidades observadas, agregándole ingredientes que hagan de este modelo uno más representativo de las propiedades biológicas del problema. En el capítulo 6 estudiamos como influye el embebido de las redes complejas en las propiedades de sincronización de un sistema de osciladores de fase no lineales de Kuramoto, con a partir de la comparación de los resultados obtenidos en una red embebida libre de escala con los análogos en una red no embebida. Si bien la baja dimensionalidad de la red embebida dificulta la sincronización global (como era de esperar), es posible la formación de estructuras sincronizadas, que no se evidencia en los modelos no embebidos. Estos resultados originales resaltan el rol de las estructuras embebidas no solo en la aparición de orden en redes de baja dimensionalidad, sino también la aparición de parches de unidades localmente sincronizadas. En este paso añadimos un ingrediente al modelo de campo medio de Kuramoto: un sustento físico bidimensional a la red de osciladores (que en este caso representan neuronas de la corteza visual) que forman una red de conexiones compleja (mundo pequeño y libre de escala). Este paso se acerca un poco más a la biología del problema ya que la corteza visual puede ser considerada funcionalmente como una superficie bidimensional y además las propiedades complejas de la red de conexiones es un elemento observado en las redes neuronales del cerebro biológico.

Finalmente, en el capítulo 7 consideramos el mismo modelo de Kuramoto definido sobre una red compleja embebida en un espacio euclídeo bidimensional, pero ahora las conexiones entre neuronas no son constantes sino que está determinada por la distancia entre ellas, de acuerdo a la llamada función sombrero mexicano. Esta función determina que una dada neurona interactúe en forma atractiva con sus vecinos más cercanos y en forma repulsiva con los más lejanos, decayendo a su vez con la distancia al sitio en cuestión. Partimos de la base del tratamiento presentado por Cho y Kim [6], en el que se propone un modelo dinámico con interacciones de largo alcance del tipo *sombrero*

*mexicano* para explicar la formación de patrones corticales de la corteza estriada de los monos. En aquel trabajo se usó una aproximación de campo medio, según la cual cada neurona está ubicada en los sitios de un arreglo bidimensional cuadrado y siente la influencia de todas y cada una de las restantes neuronas. En esta Tesis consideramos una versión embebida de tal modelo, y además tuvimos en cuenta dos variaciones: una en el cual los parámetros de la función interacción es fija y otra en el cual estos parámetros varían según la conectividad de cada sitio de la red. Hemos podido observar que una cierta elección de parámetros del modelo conlleva a la formación de patrones de franjas, y que además son diferentes acorde a las diferentes elecciones del estímulo externo. Este punto es sensiblemente importante. Si el modelo no es capaz de producir una multiplicidad de atractores diferentes, dependiendo de las preparación inicial del sistema, entonces no tendría capacidad de realizar cómputos, o al menos no tendría capacidad de categorizar los estímulos que le llegan a la región. Pues en términos físicos un estímulo no es más que la preparación del sistema en estados bien determinados por complejos mecanismos de preprocesado.

Concluyendo, hemos presentado un modelo neuronal constituido por una red compleja de interacciones que tiene en cuenta las propiedades geográficas de la corteza visual que es un sistema esencialmente bidimensional. Estas características son más plausibles desde el punto de vista biológico que las que usualmente se usan para el modelado de este tipo de sistemas. Con estas innovaciones hemos conseguido reproducir los patrones de la corteza visual cualitativamente en forma exitosa. Esto indica que el hecho de que las redes reales estén embebidas en un espacio euclídeo no sólo es importante sino que es factible de ser tenido en cuenta en el modelado de tales sistemas, teniendo en cuenta tanto la topología de las conexiones como su distribución espacial.

En el camino hemos dedicado gran esfuerzo al estudio del efecto del embebido en cada una de las propiedades por separado. El estudio del modelado de la corteza visual en mamíferos, punto final de la Tesis, continuará como parte del trabajo de investigación del grupo de *Teoría de la Materia Condensada* de esta Facultad. Sin duda son muchos los aspectos que restan analizar, pero ahora se puede realizar a partir del profundo conocimiento del rol de cada ingrediente importante en el comportamiento del sistema como un todo.



- [1] D. J. Watts, S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 440 (1998).
- [2] S. Milgram, *Psychol.Today* **2**, 60-67 (1967).
- [3] J. Travers, S. Milgram, *Sociometry* **32**, 4, 425-443 (1969).
- [4] A. F. Rozenfeld, R. Cohen, D. ben-Avraham, S. Halvin, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 218701 (2002).
- [5] D. ben-Avraham, A. F. Rozenfeld, R. Cohen, S. Halvin, *Physica A* **330**, 107 (2003).
- [6] M. W. Cho, S. Kim *Phys. Rev. Lett.* **92**, 018101 (2004).
- [7] Y. Kuramoto, H. Arakai (Ed.) *International symposium on mathematical problems in theoretical physics, Lecture notes in physics* **39**, 420 (1975).
- [8] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin (1984).
- [9] S. H. Strogatz, *Nature* **410**, 268 (2001).
- [10] O. Sporns, D. R. Chialvo, M. Kaiser and C. C. Hilgetag, *Trends in Cognitive Sciences* **8**, No 9, 418 (2004).
- [11] F. Harari, *Graph Theory*, Addison-Wesley (1969).
- [12] P. Erdős, A. Rényi, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5**, 17-61 (1960).
- [13] B. Bollobás, *Random Graphs*, Academic, London (1985).
- [14] A.-L. Barabási, and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [15] R. Albert, H. Jeong, and A.-L. Barabási, *Nature (London)* **406**, 378 (2000).
- [16] R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, S. Halvin, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4626 (2000).
- [17] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, *Phys. Rev. E* **63**, 062101 (2001).
- [18] M. Antoni and S. Rufo, *Phys. Rev. E* **52**, 2361 (1995).

- [19] V. Latora, A. Rapisarda and S. Ruffo, *Physica D* **38** (1998).
- [20] V. Latora, A. Rapisarda and S. Ruffo *Phys. Rev. Lett.* **80**, 692 (1998).
- [21] V. Latora, A. Rapisarda, and S. Ruffo, *Physica D* **131**, 38 (1999).
- [22] V. Latora, A. Rapisarda, and S. Ruffo, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2104 (1999).
- [23] V. Latora and A. Rapisarda, *Chaos, Solitons Fractals* **13**, 401 (2001).
- [24] V. Latora, A. Rapisarda and C. Tsallis, *Physica A* **305**, 129 (2002).
- [25] C. Anteneodo and C. Tsallis, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5313 (1998).
- [26] F. Tamarit and C. Anteneodo, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 208(2000).
- [27] A. Campa, A. Giansanti and D. Moroni, *Phys. Rev. E* **62**, 303 (2000).
- [28] T. Dauxois, V. Latora, A. Rapisarda, S. Ruffo and A. Torcini, in *Dynamical and thermodynamics of systems with long range interactions*, T. Dauxois et al. Eds., *Lecture Notes in Physics* **602**, Springer (2002).
- [29] C. Tsallis, *Nonextensive Mechanics and Thermodynamics*, edited by S. Abe and Y. Okamoto, *Lecture Notes in Physics* Vol. 560 (Springer, Berlin, 2001).
- [30] C. Tsallis, *Non-Extensive Entropy-Interdisciplinary Applications*, edited by M. Gell-Mann and C. Tsallis, (Oxford University Press, Oxford, 2004).
- [31] A. Pluchino, V. Latora and A. Rapisarda, *Physica A*, **340**, 187 (2004).
- [32] A. Pluchino, V. Latora and A. Rapisarda, *Physica A* **338**, 60 (2004).
- [33] A. Pluchino, V. Latora and A. Rapisarda, *Physica D* **193**, 315 (2004).
- [34] A. Pluchino, V. Latora and A. Rapisarda, *Phys. Rev. E* **69** 056113 (2004).
- [35] M. Schmidt, R. Kusche, T. Hippler, J. Donges, W. Kronmüller, B. von Issendorff and H. Haberland, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1191 (2001).
- [36] L. Casetti, E.G.D. Cohen and M. Pettini, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4160 (1999).
- [37] L. Casetti, E.G.D. Cohen and M. Pettini, *Phys. Rev. E* **65**, 036112 (2002).
- [38] L. Casetti, M. Pettini and E.G.D. Cohen, *J. Stat. Phys.* **111**, 1091 (2003).
- [39] F. A. Tamarit, C. G. Maglione, D. A. Stariolo and C. Anteneodo, *Phys. Rev. E* **71**, 036148 (2005).
- [40] C. B. Tauro, *El efecto de las condiciones iniciales en la dinámica del modelo HMF*. Trabajo final de Licenciatura en Física, dirigido por: Dr.F.A.Tamarit. Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC, Córdoba, (2004).
- [41] C. B. Tauro, G. Maglione and F.A. Tamarit, *Eur. Phys. J. Special Topics: Trends and Expectations in Complex Systems Science* **143**, 9-12 (2007).

- [42] C. B. Tauro, C.G.Maglione and F.A.Tamarit *XI Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena Journal of Physics: Conference Series 246* (2010).
- [43] M. A. Montemurro, *Slow Relaxation Dynamics in Complex Magnetic Systems and Neural Networks*, Tesis de Doctorato en Física, dirigido por Dr. Francisco Tamarit, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC, Córdoba, (2002).
- [44] V. Latora, A. Rapisarda and C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **64**, 056134 (2001).
- [45] M. A. Montemurro, F. A. Tamarit and C. Anteneodo, *Phys. Rev. E* **67**, 031105 (2003).
- [46] L. Casetti, E. G. D. Cohen and M. Pettini, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4160 (1999).
- [47] L. Casetti, E. G. D. Cohen and M. Pettini, *Phys. Rev. E* **65**, 036112 (2002).
- [48] R. Franzosi, M. Pettini and L. Spinelli, *Phys. Rev. Lett* **84**, 2774 (2000).
- [49] H. Yoshida, *Phys. Lett. A* **150**, 262 (1990).
- [50] H. Sompolinsky, *Physics Today* **December**, 70 (1988).
- [51] J. J. Hopfield, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **79**, 2554 (1982).
- [52] E. R. Kandel, J. H. Schwartz y T. M. Jenseil, *Essentials of Neural Science and Behavior*, Appleton and Lange (1995).
- [53] W. S. McCulloch and W. A. Pitts, *Bull. Math. Biophys.* **5**, 115 (1943).
- [54] D. O. Hebb, *The Organization of Behavior*, Wiley, New York (1949).
- [55] J. Hertz, A. Krogh and R.G. Palmer, *Introduction to the Theory of Neural Computation*, Reading, MA, Addison-Wesley, (1991).
- [56] D. Amit, H. Gutfreund and H. Sompolinsky, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1530 (1985)
- [57] D. Amit, H. Gutfreund and H. Sompolinsky, *Annals of Physics* **173**, 30 (1987)
- [58] B. Derrida, E. Gardner and A. Zippelius, *Europhysics Lett.* **4**, 167 (1987).
- [59] J.J. Arenzon and N. Lemke, *J. Phys. A* **27**, (1994) 5161
- [60] C.R. da Silva, F.A. Tamarit and E.M.F. Curado, *Computer Physics Communications* **121**, 103 (1999).
- [61] M.A. Montemurro and F.A. Tamarit, *Physica A* **294**, 342 (2001).
- [62] J.I.Perotti, F.A.Tamarit and S.A. Cannas, *Physica A* **371**, 1, 71-75 (2006).
- [63] V. Eguiluz, D. Chialvo, G. Cecchi, M. Baliki and A.V. Apkarian, *Phys. Rev. Lett.* **94** 018102 (2005).
- [64] D. Stauffer, A. Ahorony, L. da Fontoura Costa and J. Adler, *Eur. Phys. J. B* **32**, 395 (20013).
- [65] L. Morelli, G. Abramson and M. Kuperman, *Eur. Phys. J. B* **38**, 495 (2004).
- [66] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization, An universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (2001).

- [67] S.H. Strogatz, *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*, Hyperion, New York, (2003).
- [68] D. Golombek (Compilador), *Cronobiología: ritmos biológicos en la salud y la enfermedad (Segunda edición)*, Universidad Nacional de Quilmes (2007).
- [69] N. Wiener, *Nonlinear problems in random theory*, MIT Press, Cambridge, (1958).
- [70] N. Wiener, *Cybernetics*, MIT Press, Cambridge, (1961).
- [71] A. T. Winfree, *Journal of Theoretical Biology* **16**, 15 (1967).
- [72] R. E. Mirollo and S. H. Strogatz, *J. Stats. Phys.* **60**, 245 (1990).
- [73] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, Reading, MA (1994).
- [74] B. C. Daniels, *Synchronization of globally coupled nonlinear oscillators: the rich behavior of the Kuramoto Model*, Ohio Wesleyan University Physics and Astronomy Department, (2005)
- [75] S. H. Strogatz, *Physica D* **143**, 1-20 (2000).
- [76] Y. Kuramoto, *Progr. Theoret. Phys.* **79**, 223 (1984).
- [77] H. Sacaguchi and Y. Kuramoto, *Progr. Theoret. Phys.* **76**, 576 (1986).
- [78] Y. Kuramoto and I. Nishikawa, *J. Statist. Phys.* **49**, 569 (1987).
- [79] Y. Kuramoto, I. Nishikawa and H. Takayama (Ed.) *Cooperativa dynamics in complex physical systems*, Springer, Berlin, (1989).
- [80] S.C. Manrubia, A.S. Mikhailov and D.H. Zanette, *Emergence of Dynamical Order. Synchronization Phenomena in Complex Systems*, World Scientific, Singapore, (2004).
- [81] J.A. Acebrón, L.L. Bonilla, C.J. Pérez Vicente, F. Ritort and R. Spigler, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 137 (2005).
- [82] A. Pluchino and A. Rapisarda, *Proceedings of the 3rd International Conference on News, Expectations and Trends in Statistical Physics* (2005).
- [83] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths and Y. Moreno, C. Zhou, *Physics Reports* **469**, 93 (2008).
- [84] S. H. Strogatz and R. E. Mirollo, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, L699-L705 (1988).
- [85] E. Niebur, H.G. Schuster, D.M. Kammen and C. Koch, *Phys. Rev. A* **44**, 6895 (1991).
- [86] H. Hong, M. Y. Choi and B. J. Kim, *Phys. Rev. E* **65**, 026139 (2002).
- [87] D. J. Watts, *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*, Princeton University Press, Princeton, NJ USA (1999).
- [88] Y. Moreno and A. F. Pacheco, *Europhys. Lett.* **68**, 603-609 (2004).
- [89] P. M. Gleiser and D. H. Zanette, *Europhys. J. B* **53**, 233-238 (2006).
- [90] K. S. Fink, G. Johnson, T. Carroll, D. Mar and L. Pecora, *Phys. Rev. E* **61**, 5080 (2000).



- [91] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 10, 2109 (1998).
- [92] B. Wang, H. W. Tang, Z. L. Xiu and C. H. Guo, *Chin. Phys. Lett.* **23**, 11, 3123 (2006).
- [93] C-Y Yin, B-H Wang, W-X Wang and G-R Chen, *Phys. Rev. E* **77**, 027102 (2008).
- [94] I. Z. Kiss, Y. Zhai and J. L. Hudson, *Science* **296**, 1676 (2002).
- [95] P. N. McGraw and M. Menzinger, *Phys. Rev. E* **72**, 015101(R) (2005).
- [96] C. Zhou, L. Zemanová, G. Zamora-López, C. C. Hilgetag and J. Kurths, *New Journal of Physics* **9**, 178, (2007).
- [97] L. Zemanová, *Structure-function relationship in hierarchical model of brain networks*, Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Potsdam, (2007).
- [98] E. Salinas and T. J. Sejnowski, *Nat. Rev. Neurosci.* **2**, 539 (2001).
- [99] P. Fries, *Trends Cong. Sci.* **9**, 474 (2005).
- [100] A. Schnitzler and J. Gross, *Nat. Rev. Neurosci.* **6**, 285 (2005).
- [101] C. B. Tauro, F.A.Tamarit and P. M. Gleiser *Physica A* **391**, 834 (2012).
- [102] K. Obermayer, G. G. Blasdel and K. Schulten, *Phys. Rev. A* **10**, 7568 (1992).
- [103] D. H. Hubel and T. N. Wiesel, *Proc. R. Soc. London B* **278**, 377 (1977).
- [104] S. LeVay, M. P. Stryker, and C. J. Shatz, *J. Comp. Neurol.* **179**, 223 (1978).
- [105] G. G. Blasdel, *J. Neurophysiol.* **12**, 3115 (1992).
- [106] S. LeVay, D. H. Connolly, J. Houde and D. C. V. Essen, *J. Neurosci.* **5**, 486 (1985).
- [107] D. J. Murray, *Mathematical Biology*, Springer.
- [108] R. Eckhorn, R. Bauer, W. Jordan, M. Brosch, W. Kruse, M. Munk, H.J. Reitboeck, *Biol. Cybern.* **60**, 121 (1988).
- [109] C. M. Gray and W. Singer, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **86**, 1698 (1989).
- [110] C. M. Gray, P. König, A. K. Engel and W. Singer, *Nature* **338**, 334 (1989).
- [111] A. K. Engel, P. König, A. K. Kreiter, W. Singer, *Science* **252**, 1177 (1991).
- [112] D. H. Hubel, *Eye, Brain, and Vision* <http://hubel.med.harvard.edu/index.html>.
- [113] M. Carubelli, O. Billoni, S. Piguin, S. Canas, D. Stariolo and F. Tamarit, *Phys. Rev. B* **77**, 134417 (2008).
- [114] N. Saratz, A. Lichtenberger, O. Portmann, U. Ramsperger, A. Vindigni, and D. Pescia, *Phys. Rev. Lett* **104**, 07703 (2010).



---

## Publicaciones y presentaciones en congresos

---

- C. B. Tauro, G. Maglione and F.A. Tamarit, *Eur. Phys. J. Special Topics: Trends and Expectations in Complex Systems Science* **143**, 9-12 (2007).
- C. B. Tauro, C.G.Maglione and F.A.Tamarit *XI Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena Journal of Physics: Conference Series* 246 (2010).
- C. B. Tauro, F.A.Tamarit and P. M. Gleiser *Physica A* **391**, 834 (2012).
- C. B. Tauro, F. A. Tamarit and J. Perotti, *Storage capacity of Hopfield model embedded in a 2 dimensional lattice*, finalizado para su publicación.
- C. B. Tauro, F. A. Tamarit and P. M. Gleiser, *Visual pattern formation using a bidimensional complex network*, en preparación para su publicación.
- Francisco A.Tamarit, German Maglione, Carolina B.Tauro, Daniel A.Stariolo, Celia Anteneodo. *Quasistationary trajectories of the mean-field XY Hamiltonian model: A topological perspective. 2* Encuentro de Geometría Diferencial. La Falda, Sierras de Córdoba, del 6 al 11 de Junio de 2005.
- Carolina B.Tauro, Cesar G.Maglione, Francisco A.Tamarit. *Efectos de las condiciones iniciales en la dinámica del modelo XY campo medio*. III Taller Regional sobre Mecánica Estadística y Aplicaciones a la Materia Condensada, TREFEMAC05. La Plata, 22 al 24 de Junio de 2005.
- Carolina B.Tauro, Cesar G.Maglione, Francisco A.Tamarit. *El efecto de las condiciones iniciales en la dinámica del modelo HMF*. 90 Reunión Nacional de Física. La Plata, Buenos Aires, del 26 al 29 de Septiembre de 2005.
- F.A.Tamarit, Carolina B.Tauro, German Maglione, Celia Anteneodo and Daniel Stariolo. *Topological aspects of the relaxation dynamics of the XY Mean Field Hamiltonian model*. IXth Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena, San Carlos de Bariloche, between 23-28 October 2005.

- Carolina B.Tauro, German Maglione and Francisco A.Tamarit. *On the effect of initial conditions on relaxation dynamics of the XY Mean Field Model.* IXth Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena, San Carlos de Bariloche, between 23-28 October 2005.
- F.A.Tamarit, German Maglione, Carolina B.Tauro, Celia B.Anteneodo, Daniel A.Stariolo. *The relaxation dynamics of the XY Mean Field Model* School and Conference on Complex Systems and Non extensive Statistical Mechanics. Trieste, Italy, 31 July-8 August 2006. Organized by ICTP.
- Carolina B.Tauro, Cesar G.Maglione, Francisco A.Tamarit. *The kinetic XY model defined on a complex network.* Panamerican Advanced Study Institutes (PASI), Disorder and Complexity, Mar del Plata, 11-20 december 2006.
- Carolina B.Tauro, Cesar G.Maglione, Francisco A.Tamarit. *El modelo XY cinético definido en una red compleja* Simposio de Mecánica Estadística, Teoría de la Información y Biofísica. La Falda, Córdoba, 9 al 11 de abril de 2007.
- F.A.Tamarit, S.A.Cannas, J.I.Perotti y C.B.Tauro. *La capacidad de almacenamiento en una red neuronal con topografía compleja.* Simposio de Mecánica Estadística, Teoría de la Información y Biofísica. La Falda, Córdoba, 9 al 11 de abril de 2007.
- Carolina B.Tauro, Cesar G.Maglione, Francisco A.Tamarit. *El modelo XY cinético definido en una red compleja.* V Taller Regional sobre Mecánica Estadística y Aplicaciones a la Materia Condensada, TREFEMAC07, Los Reyunos, San Rafael, Mendoza 30 de Abril al 2 de Mayo de 2007.
- Francisco A. Tamarit, Juan Perotti, Carolina Tauro, Sergio Cannas, Evaldo M. F. Curado. *Recognition ability of complex neural networks.* Latin American School and conference in Statistical Physics and Interdisciplinary Applications (LASSPIA 2007), Bento Goncalves, Brasil, 5-15 February 2007.
- Carolina B.Tauro, Francisco A.Tamarit y Pablo Gleiser. *Sincronización en una red compleja.* Segundo Simposio de Mecánica Estadística, Teoría de la Información y Biofísica. La Falda, Córdoba, 25 al 27 de marzo de 2008.
- Carolina B.Tauro, Juan Perotti y Francisco A.Tamarit. *Influencia de la arquitectura de conexiones en un modelo de red neuronal para memoria asociativa.* Primer Encuentro de Jóvenes Investigadores en Neurociencias de Córdoba: un enfoque interdisciplinario. Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, 3 de Abril de 2009.
- Carolina B.Tauro, Pablo Gleiser and Francisco A.Tamarit. *Synchronization in lattice-embedded scale-free networks.* XI Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena, October 06-09, 2009, Buzios, Rio de Janeiro, Brazil.

---

## Agradezco profundamente...

---

A Ger, simplemente por todo<sup>1</sup>.

A mi Co-Director Pablo Gleiser, sin el cual no hubiera sido posible la culminación de esta tesis, y a su familia por la hospitalidad que me brindaron.

A mi Director Pancho Tamarit, por el apoyo, por haberme abierto este camino y por el entusiasmo de siempre, a pesar de todas las dificultades.

A mi mamá Betty, a mi papá Daniel, a mi hermano Matías, por estar siempre. Gracias a mis tíos, tías y abuelos (los que aun están y los que ya se fueron).

A mis compañeros de estudio, de beca y de oficina en FaMAF, por tantos momentos (y muchos almuerzos) compartidos. Gracias Ana, Silvia, Pablo, Belen, Fede, Andrés, Ale, Santi, Santi, Eze, Noemi, Juan, Carmen, Any, Jose.

A mis amigas y compañeras March y Xime, cuyo apoyo y sustento fue imprescindible.

A Marcelo Scavuzzo y Gabriel Platzeck del Instituto Gulich/CONAE, por abrirme puertas, por el sustento y la confianza.

A Sandra Torrusio y Mónica Rabolli de la CONAE, por la confianza y el apoyo.

A mis amigos, compañeros, colegas y a todos mis alumnos de Maestría del Instituto Gulich y la CONAE, por el apoyo, la compañía y la alegría. En especial, gracias Fabri, Martín, Anabela, Martha, Cami, Sofi, Nani, Bart, Mati, Romi, Mirko, Nico, Laura.

A la comunidad de FaMAF, en especial a Negui y Walter.

A Otilio, Dalmiro y Mauro, por su excelente trabajo.

Al CONICET que solventó la primera etapa de esta Tesis.

A todos muchas gracias, entre otras cosas, por la paciencia!!!

---

<sup>1</sup> $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n < 3$