

Tesis Doctoral en Física

**Sistemas de Einstein-Vlasov y
Superficies Singulares**

Marcos A. Ramirez

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física
como parte de los requerimientos para la obtención
del grado de Doctor en Física de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

Mayo de 2012
©FaMAF - UNC 2012
Director: Reinaldo J. Gleiser

*A mi familia
y a la inmensidad*

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por la Comisión Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) a través de becas de Postgrado tipo I y II. Agradezco a esta institución y la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Córdoba (SeCyT-UNC) por los subsidios que posibilitaron viajes a congresos e insumos necesarios para esta labor.

Agradezco también a los miembros (profesores, compañeros y alumnos) del Grupo de Relatividad de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física, los cuales siempre mostraron buena predisposición para el debate. En particular agradezco a Gustavo Dotti, quien fuera mi codirector en el primer plan de trabajo que presentamos ante la facultad, por el apoyo brindado, sobre todo en mis primeros pasos como investigador. Y más en este último tiempo de mi paso por la carrera doctoral, agradezco a Sergio Dain, quien se fue convirtiendo en consejero y guía para lo que vendrá.

Pero desde lo académico agradezco sobre todo a Reinaldo Gleiser por introducirme en la mayoría de los temas de los que trata esta tesis, y guiarme a lo largo de todo mi doctorado. Su forma de comprender *la física detrás del formalismo*, intuyendo resultados muchas veces sin resolver una sola ecuación, resulta inspiradora, y creo que algo de su estilo, en especial esto de encarar problemas fundamentales por medio de modelos muy simples, pero que contienen lo esencial de la física que uno está tratando de entender, se encuentra latente en este trabajo.

Desde lo personal tengo, tal vez, mucho más que agradecer. Más allá de todos aquellos que me apoyaron, que son muchos y sé que no necesitan que sus nombres queden escritos en este libro aburrido, también están aquellos que saben que esto es sólo un paso, que estarían conmigo también si nunca hubiera escrito esta tesis, y que son aquellos a los que agradecerles con palabras siempre me será insuficiente. A ellos les dedico esta tesis.

PACS: 04.20.Jb, 04.40.Dg, 04.70.Bw, 04.50.Gh, 04.30.Nk, 04.20.Ex
04.20.Jb: Relatividad general clásica. Soluciones exactas.
04.40.Dg: Estrellas relativistas: estructura, estabilidad, y oscilaciones.
04.70.Bw: Agujeros negros clásicos.
04.50.Gh: Agujeros negros en altas dimensiones, cuerdas negras y objetos relacionados.
04.30.Nk: Ondas gravitacionales. Propagación de ondas e interacciones.
04.20.Ex: Problema del valor inicial, existencia y unicidad de soluciones.

Palabras clave: Superficies singulares, Sistemas de Einstein-Vlasov, Inestabilidad, Splitting shells, Unicidad, Branas, Apostolatos-Thorne shell, Modos cuasinormales

Resumen

Las superficies singulares son una herramienta muy utilizada en la investigación de propiedades generales de las ecuaciones de Einstein en presencia de materia y en el modelado de ciertos sistemas que abarcan desde capas de estrellas en cúmulos globulares hasta la totalidad del universo visible. Por un lado, representan un tipo de aproximación matemáticamente consistente que simplifica el análisis de sistemas que suponemos muy delgados en alguna de sus dimensiones; por el otro, se utilizan en la construcción de “toy models” para ganar intuición en problemas teóricos generales, como la caracterización de mecanismos de emisión de radiación gravitatoria, o la conjetura del censor cósmico.

Los sistemas de Einstein-Vlasov son sistemas de partículas no colisionantes y autogravitantes. Pueden representar a cualquier sistema astrofísico compuesto por múltiples constituyentes de dimensiones mucho menores al sistema en su conjunto (partículas) y con baja probabilidad de colisión entre los mismos. En particular, se utilizan como modelo de materia para estudiar la dinámica de cúmulos de estrellas, de galaxias, y del universo entero en ciertos estadios de su evolución.

En este trabajo de tesis estudiamos principalmente sistemas que consisten en superficies singulares con materia de Vlasov en diversas simetrías, haciendo particular énfasis en la estabilidad y en la existencia de familias de configuraciones cuyo límite cuando una de sus dimensiones tiende a cero sea uno de estos sistemas, para así encontrar criterios para determinar la plausibilidad de los mismos. Descubrimos aspectos no triviales en conexión con la falta de unicidad en la evolución de datos iniciales distribucionales que tendrían consecuencias en modelos astrofísicos y cosmológicos de interés actual. En primer lugar, analizamos la dinámica de cáscaras en simetría esférica, donde encontramos inestabilidades ante separación de componentes y soluciones que representan cáscaras que se fragmentan en dos o más cáscaras. En segundo lugar, demostramos que cáscaras estables estáticas son límites de familias de configuraciones tridimensionales. Luego, extendemos este análisis de estabilidad a dimensiones arbitrarias, a modelos de materia más generales y a otras simetrías, para interpretarlos en el contexto de cosmología de branas. Por último, encontramos soluciones completas y a nivel linearizado en simetría cilíndrica con propiedades de “back-reaction” antiintuitivas en donde describimos la radiación gravitatoria resultante y su relación con el problema de los valores iniciales y la noción de modos cuasinormales.

Abstract

Singular hypersurfaces are a commonly used tool in the research on general properties of Einstein equations and for constructing models for certain systems from shells of stars in globular clusters to the entire visible universe. On the one hand, they represent a kind of mathematically consistent approximation that simplifies the analysis of systems which we suppose very thin in one of their dimensions. On the other hand, they are useful for the construction of toy-models that help to gain intuition about general theoretical problems, like the characterization of gravitational radiation mechanisms, or the cosmic censorship conjecture.

The Einstein-Vlasov systems are collisionless and self-gravitating particle ensembles. They can represent any astrophysical system composed of a multiplicity of constituents whose sizes are much smaller than that of the entire system, and whose direct collision probabilities can be neglected. In particular, they are used as a matter model to study the dynamics of stellar clusters, galaxies, and the entire universe at certain stages of its evolution.

In this thesis we mainly study singular surfaces made of Vlasov matter in different symmetries, making emphasis in the stability problem and the existence of families of configurations that have a representative of this kind of system as a limit when one of their dimensions goes to zero. In doing so we can find criteria that constraint the plausibility of these systems. We discovered non-trivial aspects related to the lack of uniqueness in the evolution of distributional initial data, that may have consequences for relevant astrophysical and cosmological models. In the first place, we analyze the dynamics of shells in spherical symmetry, and find instabilities against separation of the constituents as well as solutions that represent shells that split into two or more shells. In the second place, we show that static and stable shells are limits of families of three-dimensional configurations. Then, we extend this instability analysis to an arbitrary number of dimensions, more general matter models and other symmetries, in order to interpret them in the context of brane-world cosmologies. Finally, we analyze full and linearized solutions in cylindrical symmetry with counter-intuitive back-reaction properties, in which we describe the resulting gravitational radiation and its relation to the initial value problem and the notion of quasinormal modes.

Prólogo

En esta tesis se exponen resultados de investigaciones realizadas a lo largo de cinco años, desde 2007 a la actualidad, y que constituyen un compendio de tópicos variados, pero con algunos ejes en común, los cuales surgieron tal vez más *a posteriori* que como parte de un plan de trabajo preestablecido. La mayoría del contenido de esta tesis fue expuesto en diversas reuniones científicas de alcance nacional e internacional, y se encuentra publicado en los trabajos [1], [2], [3], [4], [5] y [6].

El objetivo general de este trabajo es el de contribuir al entendimiento de las propiedades de las ecuaciones de Einstein, en presencia de materia fenomenológica, y analizar la adecuación física de modelos de interés actual con superficies singulares.

Podemos distinguir dos grandes temáticas que atraviesan de distinta manera este trabajo de tesis. La primera es la caracterización de espacio-tiempos con superficies singulares (sección 1.1). Estas superficies pueden ser una idealización de objetos que son, en última instancia, suaves y tridimensionales, donde una de sus dimensiones características resulta muy pequeña en relación a las otras dos; o pueden también representar objetos fundamentales, como ser, por ejemplo, el universo visible en el contexto de cosmología de branas (sección 1.1.3). Más allá de su representatividad para con sistemas existentes en la naturaleza, las superficies singulares probaron ser modelos físicamente razonables para elaborar ejemplos relativamente simples que resultan útiles en la investigación de temas teóricos de interés actual, como la conjetura del censor cósmico, o los mecanismos de emisión de radiación gravitatoria.

La segunda temática relacionada a este trabajo es el análisis de sistemas de Einstein-Vlasov (sección 1.2), haciendo énfasis en distintos tipos de estabilidad para los mismos. Estos sistemas constituyen modelos de materia relevante por su relativa simpleza, robustez matemática, y adecuación a diversos sistemas astrofísicos.

Parte de lo aquí vertido tiene que ver con la intersección de estos temas: materia de Vlasov en superficies singulares (secciones 2.2, 2.3, 2.4, y 4.2). Construimos una amplia gama de modelos de este tipo que exhiben

distintas propiedades de interés. Los análisis de estabilidad son algo a tener en cuenta para dilucidar en qué medida pueden tener sentido físico. Encontramos que existen situaciones en las que estos modelos resultan robustos; como situaciones en las que no, en las que las partículas constituyentes deberían comportarse de una manera diferente a la necesaria para constituir una superficie singular.

En relación más específica con el primer tema, analizamos la plausibilidad de un conjunto de modelos con superficies singulares con diverso contenido de materia y de diversa dimensionalidad (secciones 2.2, 2.4, y particularmente el capítulo 3). Extendemos el análisis de estabilidad realizado con materia de Einstein-Vlasov en cuatro dimensiones a superficies singulares en D dimensiones con contenido de materia más general. Extendemos los criterios de estabilidad para estas situaciones, sugiriendo un mecanismo de inestabilidad que sería relevante y no trivial para superficies singulares con cualquier contenido de materia. El análisis de estabilidad ante *separación de componentes* es algo característico de esta tesis, y es una herramienta nueva para discutir la robustez, representatividad y significado físico de soluciones con superficies singulares. En particular, mostramos que éstos criterios imponen restricciones para los parámetros que caracterizan diversos modelos de cosmología de branas, mostrando una de las posibles implicancias que éste análisis de estabilidad tendría en modelos cosmológicos de relevancia actual.

Distinto al problema de la estabilidad, pero relacionado con el mismo, analizamos también ciertas propiedades de este tipo soluciones, que podrían arrojar luz sobre cuestiones aún no del todo comprendidas de la teoría. En particular, observamos que la emisión de radiación gravitatoria en el caso de una cáscara en simetría cilíndrica (sección 4.2) puede exhibir propiedades antiintuitivas. Investigamos en particular la aparición de modos cuasinormales (capítulo 4.2.7) y su conexión con el problema de los valores iniciales.

Los casos analizados sirven para ganar intuición acerca de las propiedades que pueda tener una formulación de valores iniciales cuando se tienen superficies singulares (capítulo 5). Este problema tiene una conexión profunda con la inestabilidad en el sentido amplio y la existencia de modos cuasinormales.

La estructura de este trabajo de tesis es la siguiente. En la introducción expondremos brevemente generalidades sobre las superficies singulares, la cosmología de branas, los sistemas de Einstein-Vlasov, y la noción de modos cuasinormales. No se describirá allí ningún resultado nuevo. Los temas expuestos en ese capítulo se pueden encontrar en libros clásicos del área como [7], el más reciente de Choquet-Bruhat [8] y en los *reviews* y *papers* citados en el texto. En el segundo capítulo hablaremos de distintos tipos de sistemas de Einstein-Vlasov en simetría esférica, donde se expondrán algunos resultados propios publicados en [1], [2] y [3]. En el tercer capítulo expondremos

lo que se encuentra desarrollado en el trabajo [5], donde hablamos de superficies en simetría esférica de un número arbitrario de dimensiones y con una familia más amplia de modelos de materia, para así extrapolar parte del análisis hecho en el capítulo anterior a la cosmología de branas. En el cuarto capítulo hablaremos de modelos en simetría cilíndrica, a partir del contenido de los trabajos [4] y [6], haciendo particular énfasis en el problema de la “backreaction” de la materia en la interacción con ondas gravitatorias, que se presenta con características peculiares en el modelo que consideramos, y en la caracterización de *modos cuasinormales*. En el último capítulo, y a manera de conclusión, planteamos el problema de Cauchy para datos que contienen superficies singulares.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Superficies singulares	3
1.1.1. Condiciones de empalme en electromagnetismo	5
1.1.2. Condiciones de empalme en Relatividad General	6
1.1.3. Cosmología de Branas	9
1.2. Sistemas de Einstein-Vlasov	13
1.2.1. Modelos con simetría esférica	15
1.2.2. Modelos con simetría cilíndrica	17
1.3. Modos Cuasinormales	18
2. Einstein-Vlasov en simetría esférica	21
2.1. Configuración estática	21
2.1.1. Sistemas con un espectro discreto de momentos angulares	22
2.1.2. Cáscaras de Einstein	31
2.2. Cáscara fina	32
2.2.1. Soluciones estáticas	36
2.3. Límite de cáscara delgada para familias de cáscaras gruesas de Einstein-Vlasov	37
2.3.1. Cáscara con un único momento angular	38
2.3.2. Cáscaras de dos momentos angulares	40
2.3.3. Cáscaras de Einstein	43
2.4. Estabilidad de las cáscaras finas	44
2.4.1. Estabilidad de las órbitas de partículas individuales	45
2.4.2. Estabilidad ante fragmentación de la cáscara	46
3. Superficies singulares isótropas en dimensiones arbitrarias	53
3.1. Superficies singulares en espacio-tiempos de $D = n + 2$ dimen- siones con simetría esférica	54
3.1.1. Simetría Z_2 centrada en la superficie	56
3.1.2. Sin simetría Z_2	56
3.1.3. Modelos de materia y ecuaciones de movimiento	58

3.2. Estabilidad ante separación de componentes no interactuantes en simetría esférica	63
3.2.1. Separación en tres partes con simetría Z_2	63
3.2.2. Separación en dos partes sin simetría Z_2	66
3.3. Branäs en bulk <i>Schwarzschild</i> – <i>AdS</i> ₅	73
3.3.1. Ecuaciones de Friedmann	74
3.3.2. Inestabilidad ante separación de componentes no interactuantes	76
3.3.3. Universos-branäs que se dividen en varios fragmentos	77
3.3.4. Comentarios finales	80
4. Cáscaras finas en simetría cilíndrica	83
4.1. Ecuaciones de campo y condiciones de empalme	83
4.2. Cáscara fina de partículas contrarrotantes	85
4.2.1. Ecuaciones de movimiento	86
4.2.2. Un conjunto particular de soluciones	87
4.2.3. Soluciones linearizadas	94
4.2.4. El problema del valor inicial para el sistema linearizado	100
4.2.5. El problema del valor característico	106
4.2.6. Estabilidad de las soluciones estáticas	109
4.2.7. Modos cuasinormales	110
4.2.8. Integración numérica de perturbaciones arbitrarias	116
4.2.9. Comentarios finales	119
5. El problema del valor inicial con superficies singulares	123
Referencias	131

Capítulo 1

Introducción

En la teoría de la Relatividad General, se propone la existencia de una entidad geométrica denominada *espacio-tiempo* en la cual todo lo que *existe*, *existió*, y *existirá* tiene asidero. Se la entiende como una entidad dinámica, ya que interactúa y se transforma junto con las entidades que viven en él. La idea fundacional de la teoría es que la geometría de esta entidad depende de la distribución de *materia y energía* en la misma, y que esta geometría se manifiesta ante nuestros sentidos como *interacción gravitatoria*.

Vivimos en un mundo tridimensional, lo que quiere decir que interpretamos naturalmente que los objetos ocupan un lugar en un espacio de tres dimensiones. La *geometría* se puede definir como el estudio del espacio, o podríamos decir el estudio de *los espacios*. Los conceptos a los que nos suele remitir la palabra *geometría*, en primera instancia, suelen ser los de puntos, rectas, planos, polígonos, poliedros, y sus reglas de “armado”. Podríamos decir que estas reglas *son* la geometría¹, ya que dan cuenta en algún sentido de la *estructura del espacio*. La geometría usual, la que parece ser *la geometría* de nuestra cotidianidad, se llama *geometría euclídeana* y es sólo un tipo de las muchas geometrías que a los matemáticos se les fueron ocurriendo a lo largo de los siglos. Decir que nuestro espacio no es euclídeo, si no que es otro, pero que a escala humana se percibe como euclídeo, es una idea más antigua que la Relatividad. De todas maneras, el más profundo quiebre conceptual que la teoría propuso en su momento, más que la consideración de *geometrías no-euclídeanas* para el espacio, tiene que ver con la noción de *espacio-tiempo*.

¿Qué quiere decir entonces la geometría del espacio-tiempo? La idea de caracterizar ambas nociones (*intuiciones a priori*, desde Kant), como aspectos de una única entidad fue tal vez la más revolucionaria de las ideas de Einstein. Podríamos decir que lo que motivó la postulación de una en-

¹Como ejemplo clásico en los textos de Relatividad, se suele mencionar que siempre que se arme un triángulo en el espacio “cotidiano”, los ángulos internos del mismo sumarán 180°, algo que un lector con papel, regla, lápiz y transportador puede comprobar.

tividad de estas características, fue el *descubrimiento* de que las distancias y los intervalos de tiempo, y en particular la noción de *simultaneidad*, no son magnitudes o propiedades que estén definidas unívocamente para un par de *eventos* dados, si no que dependen de en qué condiciones se las mida, dependen del observador, es decir, son *relativas*. Parte del espíritu de la teoría consiste en la búsqueda de leyes para las cuales no hay *a priori* observadores preferenciales, marcos de referencia que con sus laboratorios den cuenta de las “verdaderas” leyes. Si éstas nociones, fundamentales y absolutas para la concepción Newtoniana del espacio, no están unívocamente definidas, entonces no resultan útiles para escribir las leyes de la física desde la concepción de que no hay un *marco de referencia* preferencial como el de los observadores inerciales en la física Newtoniana. En este contexto surgió el *espacio-tiempo*, como el dominio en la cual estas leyes podían ser escritas de manera muy abstracta, pero absoluta, y hacer de la teoría de la Relatividad la teoría de *lo que no es relativo*, categoría que no incluye a las distancias ni a los intervalos de tiempo.

La Relatividad General se sintetiza en un conjunto de ecuaciones, escritas en lenguaje tensorial, denominadas ecuaciones de campo de Einstein,

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (1.1)$$

donde el lado izquierdo, G_{ab} , llamado tensor de Einstein, es un objeto geométrico relacionado con la *curvatura espacio-temporal*, mientras que el lado derecho, T_{ab} , llamado tensor de masa-energía, es un objeto que da cuenta de la distribución de materia y energía en el espacio-tiempo. A diferencia de G_{ab} , el tensor T_{ab} no se define de manera unívoca para cualquier situación, y es característico de los *modelos de materia* que uno quiera implementar para un contexto particular. Lo más oscuro de la teoría está en este punto, ya que para caracterizar T_{ab} necesitamos de otras teorías físicas que modelen la materia y los campos, y llevarlas al lenguaje de la Relatividad, asunto que en muchos casos es altamente no trivial. En general, las magnitudes intervinientes en T_{ab} tienen sus propios grados de libertad y ecuaciones de evolución, las cuales se acoplan a las de la geometría del espacio-tiempo a través de (1.1), por lo que el análisis de las propiedades matemáticas del sistema resultante depende fuertemente del modelo utilizado, y resultan frecuentemente difíciles los resultados generales, en los cuales sólo se impongan condiciones generales para la materia, como las así llamadas *condiciones de energía* por mencionar algunas condiciones típicas.

Hace casi cien años que Einstein dió a conocer su teoría, y aún hoy existen puntos oscuros desde lo teórico, así como también fenomenología asociada aún no testeada experimentalmente. En este contexto resulta aún pertinente proponer simplificaciones para (1.1), como ser simetrías específicas y/o modelos de materia simples, para analizar cuestiones como *la conjetura*

del *tensor cósmico* por mencionar el más clásico de los problemas aún abiertos en el área.

1.1. Superficies singulares

Cuando hablamos de *entidad geométrica* en el contexto del apartado anterior, hablamos más precisamente de una *variedad*. Es la noción matemática de variedad la que formaliza la noción de “continuidad” o “suavidad” del conjunto abstracto de puntos que son los eventos del espacio-tiempo, y la idea de que, *localmente*, los mismos se pueden caracterizar como si fueran un abierto de \mathbb{R}^4 .

Definición: llamamos *variedad* a un conjunto X tal que existe un *atlas* (i.e. pares (U_I, ϕ_I) , siendo los U_I un cubrimiento de X y las ϕ_I biyecciones entre U_I y un abierto u_I de \mathbb{R}^n) tal que en las intersecciones $U_I \cap U_J$ las funciones $\phi_I \circ \phi_J^{-1}$ son biyecciones continuas. Si las $\phi_I \circ \phi_J^{-1}$ son C^k llamamos a la variedad una *variedad diferenciable* de clase C^k .

En general, suponemos que las variedades de la física son siempre C^∞ . Inclusive para la noción de *superficie singular* que definiremos más adelante, que tiene que ver con la existencia de objetos no regulares en algún sentido, no resulta necesario considerar variedades que no sean C^∞ , ya que hablamos de la estructura misma del “tejido” del espacio-tiempo, y la falta de suavidad se va a dar en los objetos definidos *sobre* este tejido.

Podemos definir subvariedades de dimensión menor dentro de una variedad. Una *superficie* es justamente ésto en el contexto de las variedades. La idea de que la subvariedad es “suave” en relación a la variedad más grande se formaliza con la idea de *embedding*:

Definición: llamamos *subvariedad* de M a un subconjunto $S \subset M$ tal que sea variedad con un atlas inducido por el atlas de M , lo que quiere decir que los pares $(S \cap U_I, \phi_I|_{S \cap U_I})$ definen un atlas en S .

Definición: llamamos *embedding* a una función $f : N \rightarrow M$, donde N es una variedad de dimensión menor a la de M , tal que $f(N)$ resulta una subvariedad de M , y que representa un difeomorfismo entre N y $f(N) \subset M$.

En general, cada vez que hablemos de superficies hablamos de *embeddings*. La idea de una superficie singular en una variedad tiene que ver con promover a distribución algún campo sobre la misma, de manera tal de que las entidades físicas resulten representadas por funciones regulares en todas partes, salvo en una superficie. En una teoría de campos, las ecuaciones de campo suelen ser tales que si las fuentes son “suaves” en algún sentido (C^n), el campo también lo va a ser (típicamente C^{n+k} , donde k es el orden de las ecuaciones de campo). Concretamente, la idea de *superficie singular* está asociada a fuentes “concentradas” en la superficie.

Para hablar de tensores distribucionales, debemos definir primero la noción de *campo de prueba*, siguiendo a [9]:

Definición: llamamos *campo de prueba* a una densidad tensorial suave $t_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n}$ de peso -1 y de soporte compacto.

Estos campos de prueba van a cumplir el rol que cumplen las *funciones de prueba* en la definición de *distribución*. Definimos entonces

Definición: llamamos *distribución tensorial* a todo mapa lineal entre el conjunto de campos de prueba de un dado orden (n, m) y los reales, los cuales notamos como $\alpha(t) = \alpha_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_m}(t_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n})$, que cumple con la siguiente condición de continuidad. Dada una secuencia de campos de prueba ${}_i t_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n}$ tal que si (i) los soportes de ${}_i t$ están contenidos en un mismo conjunto compacto, y (ii) la secuencia ${}_i t$ converge uniformemente a t , como así también sus respectivas derivadas; entonces la secuencia $\alpha({}_i t)$ converge en $\alpha(t)$.

En particular, todo tensor suave $\mu_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n}$ tiene asociado una distribución definida por,

$$\hat{\mu}_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_m}(t_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n}) \equiv \int_M \mu_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_m} t_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n} \quad (1.2)$$

que deja en claro el motivo por el cual adoptamos estas definiciones. Por supuesto, no toda distribución sale de un campo tensorial suave. Decimos en particular que un campo tensorial μ de rango (n, m) es *localmente integrable*, si para cada campo de prueba t de rango (m, n) , la densidad escalar $\mu(t)$ es medible e integrable (Lebesgue). De la definición de arriba, vemos que todo campo tensorial *localmente integrable* tiene una distribución asociada.

Consideremos ahora una distribución α que tenga soporte en una hipersuperficie Σ , que es la imagen de un *embedding* en la variedad, lo que quiere decir que para todo campo de prueba \tilde{t} cuyo soporte no interseque Σ tenemos $\alpha(\tilde{t}) = 0$. Si α representa la fuente de algún campo, podemos decir que la fuente está *concentrada* en Σ , siempre que las ecuaciones correspondientes tengan sentido como ecuación entre distribuciones. La noción de *fente concentrada* se hace más precisa si imponemos la existencia de un campo tensorial A definido en Σ , y asociado a α , tal que,

$$\alpha(\tilde{t}) = \int_{\Sigma} A \phi^* \tilde{t} \quad (1.3)$$

donde $\phi : \Sigma \rightarrow M$ es el *embedding* correspondiente a Σ , ϕ^* es el *pullback* asociado, y A tiene que tener la estructura de índices apropiada para que contraído con $\phi^* \tilde{t}$ constituya una densidad escalar en Σ . Se puede demostrar que la expresión subintegral de arriba resulta ser de peso -1 en Σ . De esta manera, podemos promover las ecuaciones para el campo cuya fuente es α como ecuaciones entre distribuciones. Típicamente estas ecuaciones van a constituirse en relaciones, para cada punto de Σ , entre los valores que toma el campo y algunas de sus derivadas (de un lado y del otro de la superficie),

y el valor de A en ese punto. Relaciones como éstas se suelen denominar *condiciones de empalme* para la teoría de campos.

Consideramos a continuación, para ganar intuición para cuando hablemos de Relatividad, el caso del campo electromagnético.

1.1.1. Condiciones de empalme en electromagnetismo

Las ecuaciones de Maxwell están definidas de manera tal que se puede caracterizar las fuentes del campo mediante el 4-vector de corriente j^b

$$\nabla_a F^{ab} = -4\pi j^b \quad (1.4)$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0. \quad (1.5)$$

Encontrar condiciones de empalme significa describir el campo en un entorno de una superficie y relacionar los valores que toma el mismo de un lado de la superficie con los del otro lado y con las fuentes concentradas en la misma, si las hubiera. Si la distribución de las fuentes es suave en el espacio, las condiciones de empalme resultan, típicamente, equivalentes a la continuidad del campo. En cambio, estas condiciones resultan no triviales cuando tenemos fuentes “concentradas” en una superficie Σ , esto es, cuando las fuentes se representan mediante una distribución como la que describimos en el último párrafo de la subsección anterior.

Como mencionamos, la idea es promover los tensores F^{ab} y j^a como distribuciones. Vamos a suponer que tanto F^{ab} como j^a son campos tensoriales *localmente integrables*, y, en particular, que en entornos que no intersectan con Σ tenemos $j^a = 0$, y F^{ab} suave. En particular, ∇F , como distribución, se define mediante la expresión

$$\hat{\nabla} F^a(t_a) \equiv - \int_M F^{ab} \nabla_a t_b. \quad (1.6)$$

Como j^a tiene soporte en Σ , la ecuación (1.4) se escribe

$$\int_M F^{ab} \nabla_a t_b = 4\pi \int_M j^a t_a \equiv 4\pi \int_\Sigma J^a \phi^* t_a \quad (1.7)$$

donde J^a es un vector definido en $T\Sigma$ que representa la densidad superficial de corriente, y forma parte de la definición de *fuentes concentradas*.

Consideramos coordenadas gaussianas en un entorno de Σ , y una región cerrada *infinitesimal* \mathcal{O}_p , de la forma $dS \times [-\epsilon, \epsilon]$, donde $-\epsilon \leq \eta \leq \epsilon$, siendo η la coordenada normal, y que está centrado en $p \in dS \subset \Sigma$; y un campo de prueba $\tilde{t}_a = \sqrt{-g} n_a$ de soporte \mathcal{O}_p , siendo $n^a \equiv (\partial/\partial\eta)^a$. En el límite cuando \mathcal{O}_p se reduce al punto p , las integrales de arriba implican,

$$[F^{ab} n_b] = -4\pi J^a \quad (1.8)$$

donde $[A] = A|_{\eta=0^+} - A|_{\eta=0^-}$. Eligiendo en cada punto una tetrad adaptada a la superficie $(e_0^a, e_1^a, e_2^a, n^a)$, definimos $E_a = F_{ab}e_0^b$, $B_a = -1/2\epsilon_{ab}^{cd}F_{cd}e_0^b$. Escribiendo $J^a = [\sigma, J^i]$ en la base de la tetrad, la expresión de arriba resulta,

$$[E^i n_i] = 4\pi\sigma \quad , \quad \epsilon^{ijk}n_j[B_k] = 4\pi J^i \quad (1.9)$$

que son justamente las *condiciones de borde para el campo electromagnético* que aparecen en cualquier texto clásico de electromagnetismo.

Podíamos haber escrito, dando un sistema coordenado arbitrario x^μ ,

$$j^\mu = J^\mu \delta(S(x^\alpha)) \quad (1.10)$$

donde la expresión $S(x^\alpha) = 0$ representa a Σ en este sistema. Esta forma de escribir las fuentes concentradas puede resultar más intuitiva, por la familiaridad que envisten las deltas de Dirac. Pero en definitiva, si tenemos que definir la operación entre una *distribución escalar* como la delta, y un tensor, la expresión que definiría a j^a como distribución vectorial sería,

$$\hat{j}^a(t_a) = \int_M \phi_* J^a \delta(S) t_a \equiv \int_\Sigma J^a \phi^* t_a \quad (1.11)$$

donde ϕ_* es el *pushforward* de vectores. En este sentido, la expresión 1.3 puede formalmente escribirse $\alpha = \hat{a}$, donde $a = A\delta(S)$.

La discusión anterior se hizo sólo para ilustrar mediante un ejemplo simple las nociones de *fente concentrada* y de *superficie singular*. Esta tesis trata específicamente de fuentes concentradas en Relatividad General, que es lo que trataremos a continuación.

1.1.2. Condiciones de empalme en Relatividad General

El problema de caracterizar superficies singulares fue considerado consistentemente en términos geométricos, es decir, independientemente de sistemas coordenados, ya en la década de los 60' por Israel [10]. En el paper citado se desarrolla un formalismo general que, brevemente, consiste en lo siguiente: consideremos una 3-superficie orientable, un *embedding* en el espacio-tiempo, consideremos un campo vectorial n_μ de módulo unidad (± 1) normal a la hipersuperficie (campo que debe existir en un entorno de la misma) y definamos su *curvatura extrínseca* o segunda forma fundamental:

$$K_{\mu\nu}|_{\eta=0} = \nabla_\mu n_\nu|_{\eta=0} \quad (1.12)$$

Tomando coordenadas gaussianas en un entorno podemos calcular el tensor de Riemann en función de la curvatura extrínseca y la 3-métrica inducida en la 3-superficie, de allí podemos calcular el tensor de Einstein obteniendo las denominadas *ecuaciones de Gauss-Codacci contraídas* :

$$G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu|_{\eta=0} = \frac{1}{2}(K^2 - K_{ij}K^{ij} - (n^\mu n_\mu)^3 R) \quad (1.13)$$

$$G_{\mu\nu}e_i^\mu e_j^\nu|_{\eta=0} = K_{,i} - K_{i;j}^j \quad (1.14)$$

siendo 3R el escalar de Ricci para la 3-métrica (de ahora en más todas las cantidades que provengan de la 3-métrica se indican así), e_i^μ vectores ortonormales tangentes a la superficie y los índices ijk componentes con respecto a estos vectores ortonormales.

La componente restante $G_{\mu\nu}e_i^\mu e_j^\nu$ toma la forma:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}e_i^\mu e_j^\nu &= {}^3G_{ij} - (n_\alpha n^\alpha) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (K_{ij} - {}^3g_{ij}K) \right. \\ &\quad \left. + KK_{ij} - \frac{1}{2}{}^3g_{ij}K^2 - \frac{1}{2}{}^3g_{ij}K^{kl}K_{kl} \right] \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde η , como en el inciso anterior, es la coordenada gaussiana normal, por lo que $n^\mu = (\partial_\eta)^\mu$.

Si suponemos materia concentrada en la 3-superficie, el tensor de masa-energía correspondiente, que es el objeto que cumple el rol de *fuentes* en las ecuaciones de Einstein, puede escribirse de la forma,

$$T_{\mu\nu}(x^\alpha) = S_{\mu\nu}(x^\alpha)\delta(S(x^\alpha)) \quad (1.16)$$

donde $S(x^\alpha)$ y $\delta(S(x^\alpha))$ son los objetos que definimos en el apartado anterior. Con un $T_{\mu\nu}$ distribucional de estas características, podemos realizar un procedimiento análogo al que realizamos para encontrar las condiciones de empalme en electromagnetismo. Evaluamos $T_{\mu\nu}$ y $G_{\mu\nu}$ como distribuciones en una sucesión de funciones de prueba $\sqrt{-g}e_\alpha^a e_\beta^b$, donde e_α es un elemento de la tetraeda conformada por los e_i y n , cuyo soporte sea de la forma $dS \times [-\epsilon, \epsilon]$ en coordenadas gaussianas. Haciendo colapsar este soporte a un punto sobre Σ , tomando en particular dos vectores tangentes $\sqrt{-g}e_i^a e_j^b$ para las funciones de prueba, y teniendo en cuenta (1.15), obtenemos,

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} G_{\mu\nu}e_i^\mu e_j^\nu d\eta = -(n^\alpha n_\alpha)([K_{ij}] - {}^3g_{ij}[tr(K)]) = \kappa S_{\mu\nu}e_i^\mu e_j^\nu = \kappa S_{ij} \quad (1.17)$$

donde aparecen nuevamente los corchetes que simbolizan el “salto” de la discontinuidad de los objetos evaluados en la superficie. Vemos entonces que para que haya un S_{ij} no nulo necesitamos de una discontinuidad en las curvaturas extrínsecas. Como queremos que la métrica inducida esté bien definida, la métrica debe ser continua, lo que resulta discontinuo es por lo tanto la *conexión* en Σ . En términos de la métrica la discontinuidad está en sus primeras derivadas, en particular en las derivadas con respecto a η .

Por otra parte, de las ecuaciones (1.13) y (1.14), y considerando campos de prueba de la forma $\sqrt{-g}n^a n^b$ y $\sqrt{-g}n^a e_i^b$, respectivamente, obtenemos las otras *condiciones de empalme*,

$$S^{ij}[K_{ij}]_+ = \kappa[T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu] \quad (1.18)$$

$$S_{i;j}^j = (n^\alpha n_\alpha)[T_{\mu\nu}n^\mu e_i^\nu] \quad (1.19)$$

donde la última ecuación expresa la *conservación de la fuente*, y es consecuencia de las identidades de Bianchi. Las expresiones (1.17), (1.18) y (1.19) son las así llamadas condiciones de empalme (*junction conditions*) de Israel-Darmois.

Cabe destacar que, siguiendo a Geroch y Traschen [9], las fuentes concentradas de codimensión uno parecen ser las únicas bien definidas, sin tener que agregar más estructura a la teoría, en términos de distribuciones en Relatividad General. Como objetos bien definidos, mediante los cuales se pueden encontrar una multiplicidad de soluciones para las ecuaciones de Einstein, las superficies singulares sirven como herramienta para elaborar ejemplos útiles en la discusión de problemas teóricos relacionados con la interacción entre materia y campo gravitatorio. Resulta en varios casos más sencillo elaborar ejemplos donde la dinámica de la materia tiene menos grados de libertad, al estar “condensada” en una superficie $2 + 1$, y donde las ecuaciones para el campo resultan ser las de vacío con condiciones de empalme. Son estas condiciones las que dan cuenta de la interacción del campo con la materia, ya que relacionan la métrica y sus primeras derivadas en la superficie singular con el contenido de materia-energía de la misma. Este problema de condiciones de borde dinámicas, o *moving boundary problem*, dista mucho de ser sencillo en sí mismo, pero frecuentemente resulta más tratable, y más proclive a las soluciones exactas, que un problema dinámico análogo pero con materia distribuida en las tres dimensiones espaciales. Por ello se han utilizado *shells* de materia para poner a prueba distintos enunciados de la *conjetura del censor cósmico* (por ejemplo, [11], y referencias allí citadas), como así también, como vamos a ver en el capítulo 1.2.2, para evaluar la así llamada *conjetura de hoop*, ([12],[13],[14]), por dar algunos ejemplos.

Pero más allá de ser útiles para la construcción de *toy models*, las superficies singulares son de utilidad para modelar diversas situaciones astrofísicas. Por ejemplo, en el análisis de la dinámica de cúmulos globulares fuera del equilibrio, se pueden modelar “capas” individuales de materia como superficies singulares moviéndose en un campo gravitatorio con simetría esférica generado por el cúmulo en su conjunto ([15],[16],[17]). Podemos mencionar también el estudio de posibles interfaces entre distintas *fases* en el universo temprano, en el contexto de modelos de inflación ([18], [19]). Un tipo particular de superficie singular, las superficies *nulas*, que requieren de un

formalismo diferente al aquí expuesto, resultan útiles para modelar *ondas de choque*, es decir emisiones violentas de radiación [20] que tendrían lugar en ciertos procesos astrofísicos como ser una explosión de supernova.

La siguiente subsección trata de cierta “aplicación” particular de la teoría de superficies singulares, consistente en modelos cosmológicos inspirados en teorías de cuerdas.

1.1.3. Cosmología de Branas

Una aplicación de interés actual de la teoría de superficies singulares la encontramos en el contexto de cosmología de branas (ver por ejemplo [21] y referencias allí citadas). En estos modelos, la superficie singular no es una aproximación, si no que representa una entidad fundamental que es el universo visible de cuatro dimensiones². La idea general es que toda la materia e interacciones, salvo la gravitatoria, estarían confinadas en esta superficie, llamada *universo-brana*, que contiene todo lo que percibimos con nuestros sentidos, y que es un *embedding* en un espacio-tiempo de dimensión mayor a cuatro al que llamamos espacio-tiempo *ambiente* o *bulk*.

La existencia de dimensiones “extras” es una hipótesis de larga data en física teórica. Comenzando por el modelo de Kaluza-Klein, que buscaba unificar el electromagnetismo con la gravedad en un único marco teórico modelando un espacio-tiempo de cinco dimensiones, la existencia de éstas dimensiones invisibles se han hipotetizado en una pluralidad de teorías físicas, generalmente por motivos teóricos formales, como la búsqueda de un marco unificador para las interacciones fundamentales.

La cosmología de branas como tal surge en el contexto de teorías de cuerdas. En este marco teórico que intenta unificar todas las interacciones fundamentales, es necesaria la existencia de dimensiones espaciales extras como requisito para su consistencia [22]. Para poder describir algún tipo de fenomenología resulta necesario modelar la naturaleza de estas dimensiones extras; en particular, dar una justificación de su “invisibilidad”. Previo a la aparición de la noción de brana, se solía suponer que las dimensiones extras eran todas compactas y de dimensiones características del orden de la longitud de Planck. Se suele citar como uno de los puntos de partida para la cosmología de branas un trabajo de Horava y Witten [23] donde se muestra que la así llamada teoría de cuerdas heterótica $E_8 \times E_8$ en diez dimensiones, tiene como cierto límite de acoplamiento fuerte y en bajas energías una teoría de supergravedad en once dimensiones, donde una de estas dimensiones es compacta y con simetría Z_2 (un *orbifold*), y donde los puntos fijos de esta simetría conforman dos hipersuperficies en las cuales se encuentran confi-

²En algunos modelos puede haber más de una superficie singular, las que se pueden interpretar como universos paralelos

nados los campos de gauge E_8 . Más tarde, Witten [24] argumentó que seis de las once dimensiones en esta teoría pueden estar compactificadas y ser de tamaño mucho menor a la distancia entre las hipersuperficies singulares. En este límite, el espacio-tiempo *se ve* como de cinco dimensiones, con dos universos-branas de cuatro dimensiones [25] que viven en él, lo que conforma una imagen que ya contiene los principales ingredientes de lo que luego se iba a denominar *cosmología de branas*.

En este contexto aparecieron los trabajos de Randall y Sundrum ([27] y [26]), donde se proponen los primeros modelos cosmológicos de mundos-brana como tales. En [27] se propone un *bulk* anti de Sitter de cinco dimensiones, AdS_5 , con simetría Z_2 y topología S^1 para la quinta dimensión, y con dos mundos-branas, cuya geometría intrínseca es Minkowski, en los puntos fijos de esta simetría. La motivación para esta construcción no sólo radicaba en los resultados de Horava y Witten, si no que a su vez se proponía una solución para el así llamado *problema de la jerarquía*, problema que consiste en una petición de principio que explique la discrepancia entre la escala de energía de Planck (10^{19} GeV), y las escalas de energía relevantes para las demás interacciones, como por ejemplo la electrodébil (100 GeV). No explicaremos aquí de qué manera se puede resolver este problema con la hipótesis de dimensiones extras, pero la idea básica es que la gravedad en dimensiones mayores tiene que “repartirse” en todas las dimensiones, mientras que las demás interacciones, las cuales suponemos confinadas en la brana, lo hacen en cuatro dimensiones, por lo que si bien las constantes de acoplamiento pueden ser comparables para el espacio entero, la constante “efectiva” cuadridimensional para la gravedad resultaría mucho menor. Aparte de [27], referimos también a [28], donde se utiliza un modelo más simple e ilustrativo para este mismo fin.

Pero el modelo del cual se desprenden la mayoría de los desarrollos en cosmología de branas es el del segundo trabajo de Randall y Sundrum [26], en el que se propone una única brana en un espacio-tiempo *ambiente* AdS_5 no acotado y con simetría Z_2 centrada en la brana. También en ese trabajo se supone que la geometría intrínseca de la brana es Minkowski, y también se hace necesario, como en [27], imponer la existencia de *tensión* en la brana, que es como una energía de vacío, análoga a la constante cosmológica, pero definida sólo en esta hipersuperficie. En [26] se obtuvo concretamente una solución estática, para una brana sin materia, donde la tensión resulta fijada por la constante cosmológica negativa del *bulk* anti de Sitter, a la que llamamos Λ_5 . Vamos aquí a considerar la versión “cosmológica” de este modelo (que suele denominarse $RS2$), con materia en la brana, además de la tensión, y tal que la geometría intrínseca de la misma es la de un universo FRW plano. En coordenadas gaussianas en un entorno de la brana, la

métrica toma la forma

$$ds^2 = -f(\tau, \eta)d\tau^2 + d\eta^2 + a(\tau, \eta)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.20)$$

Mediante la condición de empalme (1.17) en $\eta = 0$ podemos obtener una ecuación de movimiento. Cabe destacar que la forma de las condiciones de empalme (1.17) es la misma para espacio-tiempos de mayor dimensión con hipersuperficies singulares, como se puede ver a partir de expresiones análogas a (1.13, 1.14 y 1.15) para dimensiones arbitrarias [29]. Describimos el contenido de materia en la brana mediante el tensor S_{ij} , que por las simetrías cosmológicas puede escribirse como

$$S_i^j = \text{diag}[-\rho(\tau), p(\tau), p(\tau), p(\tau)]. \quad (1.21)$$

De esta manera, se puede mostrar que las dos ecuaciones independientes en (1.17) se pueden escribir para este caso como,

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa_5^2 \rho^2}{36} + \frac{\Lambda_5}{6} \quad (1.22)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{3p + 2\rho}{36} \kappa_5^2 \rho + \frac{\Lambda_5}{6} \quad (1.23)$$

donde notamos la constante de acoplamiento como κ_5 para destacar que la misma no tiene que estar relacionada con la correspondiente a la gravedad en cuatro dimensiones.

La tensión en la brana aparece en el tensor S_i^j como un término $-b\delta_j^i$, donde b es una constante que se denomina *tensión de brana* (*brane tension*). De esta manera escribimos $\rho = \rho_m + b$ y $p = p_m - b$, donde ρ_m y p_m son la densidad y la presión asociadas a la materia en la brana. Reemplazando en (1.22) podemos escribir,

$$H^2 = \frac{\kappa_5^2 b}{18} \rho_m \left(1 + \frac{\rho_m}{2b}\right) + \frac{\kappa_5^2 b^2}{36} + \frac{\Lambda_5}{6} \quad (1.24)$$

de donde se puede ver que esta expresión tiende a la ecuación de Friedmann para un universo plano ($k = 0$) en el límite $\rho_m \ll b$ si hacemos las identificaciones

$$48\pi G \equiv \kappa_5^2 b \quad (1.25)$$

$$12\Lambda_4 \equiv \kappa_5^2 b^2 + 6\Lambda_5 \quad (1.26)$$

De ahora en más tomamos estas identificaciones como definiciones para Λ_5 y κ_5 en función de las constantes “experimentales” G y Λ_4 , y la constante b , la cual mediante observaciones sólo se puede acotar. Resulta interesante destacar que para ρ_m lo suficientemente grande (para tiempos lo suficientemente tempranos en el marco de la teoría del Big Bang), esta expresión no

coincide con la de la cosmología estándar, por lo que en los primeros estadios del universo tendríamos una evolución diferente, pero también con una singularidad inicial.

De (1.24) podemos distinguir los ítems más importantes que debemos tener en cuenta para compatibilizar un modelo cosmológico de branas con la cosmología estándar. La abundancia relativa en el universo de los elementos primordiales (ver por ejemplo [30], y referencias allí citadas) nos sugiere la adecuación de la ecuación de Friedmann incluso para tiempos muy cercanos a la nucleosíntesis. Esto sugiere la cota $b \gg \rho_m(z_{nucl})$, donde z_{nucl} es el *redshift* correspondiente a la nucleosíntesis, lo que en unidades naturales de la física de partículas se puede escribir como $b > (1MeV)^4$. Obtenemos cotas drásticamente más restrictivas para b si consideramos cotas experimentales para desviaciones de la ley de gravitación universal a escalas lo suficientemente pequeñas, que se dan típicamente en los modelos de branas. No hablaremos del mecanismo que genera estas desviaciones, nos limitaremos a decir que está relacionado con el problema de la jerarquía, y que los experimentos sugieren que no existen desviaciones significativas de la ley de gravedad por lo menos hasta escalas submilimétricas [31], lo que implica $b > (1TeV)^4$. Tomando esta última cota, obtenemos mediante (1.25) una cota superior para κ_5 , mientras que de (1.26) vemos que Λ_5 tiene que ser necesariamente negativo y del mismo orden de magnitud que $8\pi Gb$, ya que este último término resulta al menos 33 órdenes de magnitud superior a la constante cosmológica Λ_4 compatible con las observaciones según el modelo de concordancia [74].

Por otra parte, la otra ecuación independiente en la condición (1.17) implica,

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_m \left(1 + \frac{2\rho_m}{b} \right) + 3p_m \left(1 + \frac{p_m}{b} \right) \right) + \frac{\Lambda_4}{3} \quad (1.27)$$

donde también se ve claramente la coincidencia la segunda ecuación de Friedmann en el límite $\rho_m \ll b$.

El modelo *RS2* es el modelo más simple de los que tienen como límite de bajas energías la cosmología y la gravedad estándar. No es el único con esta propiedades, ya que se pueden encontrar espacio-tiempos *bulk* con geometrías más generales, que admiten universos-brana de curvatura positiva o negativa (los otros dos tipos de universo FRW), y/o sin simetría Z_2 , por mencionar algunas posibles extensiones. Consideremos ahora el conjunto de los espacio-tiempos *bulk* vacíos con constante cosmológica que admiten una foliación de hipersuperficies espaciales con algún tipo de isotropía tridimensional (esférica, planar o hiperbólica). Se puede demostrar que éstas son las así llamadas variedades Schwarzschild - Anti de Sitter de cinco dimensiones [32], que son variedades asintóticamente AdS, y que se caracterizan mediante la constante cosmológica Λ_5 , un parámetro de masa M , y el de curvatura k .

La métrica se puede escribir como,

$$ds^2 = -Fdt^2 + F^{-1}dr^2 + r^2 g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.28)$$

donde $F \equiv k - 2M/r^2 - \Lambda_5 r^2/6$, y g_{ij} es la métrica para la 3-variedad de curvatura constante correspondiente al índice k . Vemos que para el caso $k = 1$ y $\Lambda_5 = 0$, la solución se reduce a la de Schwarzschild en cinco dimensiones, mientras que si $k = 0$ y $M = 0$, la métrica describe un espacio-tiempo AdS_5 . En la sección 3.3 consideramos distintas maneras de construir universos-brana con estos espacio-tiempos, y analizamos las ecuaciones de Friedmann correspondientes para los distintos casos. Cabe destacar la aparición de un fenómeno típico de los modelos de branas cuando se tiene “masa” en la variedad ambiente, que es la así llamada *radiación oscura*. Se trata de un término en las ecuaciones de Friedmann que evoluciona como si fuera radiación, pero que no corresponde a materia en la brana, si no que es un efecto netamente geométrico. También resulta interesante destacar que en modelos que no tienen simetría Z_2 centrada en la brana, aparece un término en las ecuaciones que induciría una etapa inflacionaria en los primeros estadios del universo. Estos fenómenos, que surgen, tal vez inesperadamente, a partir de construcciones inspiradas en ideas que no están relacionadas *a priori* con los mismos, constituyen aspectos relevantes a la hora de buscar rastros observacionales distintivos para esta familia de cosmologías.

Luego de esta breve introducción a las superficies singulares y a la cosmología de branas, trataremos ahora otro de los grandes temas que atraviesa esta tesis, que es los sistemas de Einstein-Vlasov.

1.2. Sistemas de Einstein-Vlasov

Un sistema de Einstein-Vlasov consiste en un conjunto o *ensemble* de partículas no colisionantes y autogravitantes (que generan en su conjunto curvatura espacio-temporal), las cuales se mueven siguiendo trayectorias geodésicas [33].

Tal modelo resulta pertinente en la medida que describe con buena aproximación ciertos sistemas astrofísicos en donde se tiene un conjunto de numerosas entidades gravitacionalmente relacionadas, y donde la estructura interna de cada una de ellas resulta irrelevante para la dinámica del sistema en su conjunto, como para poder ser pensadas como “partículas”, y donde el orden de magnitud del “camino libre medio” de estas entidades constituyentes es mayor al de las dimensiones del sistema, lo suficiente como para justificar la ausencia de colisiones entre las mismas.

Los sistemas de Einstein-Vlasov fueron utilizados extensamente para modelar plasmas, materia oscura, cúmulos globulares, cúmulos de galaxias, ciertos aspectos de la dinámica de galaxias e incluso el universo entero (ver por

ejemplo [35], o [36]). En cada caso cada “partícula” del sistema representa objetos totalmente diferentes; desde protones o átomos de hidrógeno, hasta estrellas enteras, galaxias o cúmulos de galaxias. Por otra parte, estos sistemas son también de interés puramente teórico, ya que representan uno de los modelos más sencillos de materia que no recurre a una ecuación de estado, si no que se fundamenta directamente en la Teoría Cinética Relativista, y que resulta físicamente apropiado para una pluralidad de situaciones. Por este motivo se lo ha utilizado como materia de prueba para encontrar pistas para problemas teóricos importantes, como ser la conjetura del censor cósmico (por ejemplo, [37]), o el rol de la materia oscura en la evolución del universo.

Tenemos una variedad (\mathcal{M}, g_{ab}) lorentziana, y orientable en el tiempo. Nuestro sistema es un *ensemble* de partículas idénticas no colisionantes, las cuales siguen trayectorias geodésicas. Escribimos una función $f(x^a, p^a)$, definida en la “mass-shell” del fibrado tangente de \mathcal{M} , que representa la densidad de partículas por unidad de volumen propio de la mass-shell. Esta función debe satisfacer una ecuación de Liouville, que en coordenadas (t, x^i) se expresa,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^i}{p^0} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \Gamma^i_{ab} p^a p^b \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0 \quad (1.29)$$

donde p^i son las componentes espaciales de p^a que coordinatizan la mass-shell. Ésta es la llamada *ecuación de Vlasov*, y denota simplemente que la función f permanece invariante ante el “flujo hamiltoniano” provocado por el movimiento geodésico de las partículas.

De la Teoría Cinética Relativista (ver, por ejemplo, [34]) podemos escribir el tensor de masa-energía

$$T^{ab} = - \int f(x, p^i) p^a p^b \sqrt{-g} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_0}. \quad (1.30)$$

Las ecuaciones de Einstein, junto con (1.29) y (1.30) forman un conjunto de ecuaciones integro-diferenciales que definen el sistema. En particular, asumiendo que f es de soporte compacto se puede ver que T^{ab} es autoconservado como consecuencia de la ecuación de Vlasov, lo que por las identidades de Bianchi es una necesidad dinámica. También se puede ver que T_{ab} cumple con las tres condiciones de energía más comunes: la débil, la fuerte y la dominante; lo que constituye una de los motivos por el cual decimos que este modelo *se comporta bien*. Análogamente, el vector flujo de partículas se escribe como,

$$N^a = - \int f(x, p^i) p^a \sqrt{-g} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_0} \quad (1.31)$$

que es siempre temporal futuro y también de divergencia nula, lo que implica conservación de la cantidad total de partículas.

El otro motivo, tal vez el más fundamental, por el cual decimos que este modelo tiene buenas propiedades matemáticas, es que el sistema de ecuaciones integro-diferenciales está bien puesto (well-posed) [39], lo que quiere decir que dando un dato inicial $(h_{ij}, K_{ij}, f(x^0 = 0, x^i, p^i))$ en una superficie de Cauchy S que satisfaga ciertos *constraints* dados por las mismas ecuaciones, existe y es única la solución en un entorno de S , y además el mapa entre el conjunto de datos y el conjunto de soluciones es continuo en cierta topología.

Pero el teorema central en [39] no brinda información acerca de la existencia global de soluciones para estos modelos, y por lo tanto tampoco acerca de la estructura causal de las soluciones, ni del colapso y su relación con la *conjetura del censor cósmico*. El estudio sistemático de este problema se viene dando desde hace un par de décadas, comenzando por los trabajos de G. Rein y A. Rendall (por ejemplo [40], para una revisión ver [41] y referencias allí citadas). Resultados sobre la existencia global sólo se han podido obtener para espacio-tiempos con determinadas simetrías, algunos de los cuales mencionaremos más adelante. Nos vamos a concentrar ahora en el tipo de simetría más simple para un espacio-tiempo asintóticamente plano: la simetría esférica.

1.2.1. Modelos con simetría esférica

En una 3-variedad riemanniana definimos simetría esférica como la existencia de un grupo de isometrías isomorfo a $SO(3)$. Con frecuencia se pide también en la definición que la topología de la variedad sea $\mathbb{R}^3 - B$, siendo B una bola cerrada, lo que está relacionado a la existencia de *coordenadas esféricas estándar* [8]. Cuando hablamos de espacio-tiempos, que son 4-variedades pseudoriemannianas, utilizamos la definición,

Definición: Decimos que una variedad lorentziana (M, g_{ab}) es esféricamente simétrica, si existe una foliación espacial donde cada superficie es esféricamente simétrica, y donde el *lapse* y el *shift* de la misma sobre cada superficie es invariante ante la acción del grupo de isometrías.

El elemento de línea en las así llamadas *coordenadas estándar* se escribe

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)} dt^2 + e^{2\beta(r,t)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.32)$$

Podemos ver que en estas coordenadas el tensor de masa-energía (1.30) resulta diagonal, por lo que de ahora en adelante escribiremos sus componentes como,

$$T_b^a = \text{diag}[-\rho(t, r), p(t, r), p_T(t, r), p_T(t, r)] \quad (1.33)$$

donde p es la presión radial y p_T la tangencial.

Para esta simetría en particular se demostró en primer lugar la existencia de un *criterio de continuación* para la evolución de un dato inicial [40]. Dando un dato inicial en $t = 0$, si la función $Q(t)$ definida por,

$$Q(t) \equiv \sup\{|p^i|/f(\tau, x^i, p^i) \neq 0 \quad , \quad 0 \leq \tau \leq t\} \quad (1.34)$$

es acotada en $[0, T)$, entonces podemos extender globalmente la solución. Esto está relacionado con el hecho de que si la función f es de soporte compacto en p^i , tanto ρ , como p y p_T resultan acotados. Este primer resultado es central en el estudio de las propiedades globales de la evolución de un dato inicial en simetría esférica. En particular, se puede demostrar con este criterio la existencia global de soluciones para el problema de Cauchy con datos iniciales *pequeños* [40], y que el espacio-tiempo resultante es geodésicamente completo y, por lo tanto, no se forman singularidades.

Criterios de continuidad como éste también pueden encontrarse para f con decaimiento apropiado en el límite $|p^i|$ grande [42], y para otros casos particulares no acotados [43]. Podemos mencionar que cuando se tiene un dato inicial que representa materia *saliente*, sin necesidad de que el mismo sea pequeño, también se puede obtener evolución global y un espacio-tiempo sin singularidades [44]. Otra situación en la que se demostró existencia global es para datos iniciales generales de soporte compacto ((h_{ij}, K_{ij}) no triviales sólo una región acotada de S) con la condición que a lo largo de la evolución no haya materia en un entorno del centro de simetría [45]. Resulta interesante este resultado porque sugiere que las singularidades, si se forman, “emanan” desde el centro, ya que, sin importar qué tanta materia haya concentrada en alguna región que no incluya el centro de simetría, si en este último no hay materia no se forman singularidades.

Este resultado de existencia global “fuera” del centro de simetría, fue obtenido en otro sistema coordenado, con las así llamadas *double null coordinates* [46], que resulta conveniente para analizar la estructura causal ya que es un sistema que sí puede cubrir el *desarrollo máximo de Cauchy* para estos datos iniciales. De esta manera se confirmó la idea de que las *primeras* singularidades emanan desde el centro. Por otra parte, en [47] se muestra que para modelos de materia que satisfagan ciertas hipótesis en simetría esférica, la formación de una *superficie atrapada* implica la versión débil de la *conjetura del censor cósmico*. La hipótesis mencionada es análoga a la idea de que las primeras singularidades “emanan” desde el centro, y es justamente lo que se probó en [46], mostrando de esta manera que *si un dato inicial arbitrario evoluciona siempre ya sea en un espacio-tiempo geodésicamente completo, o resulta en la formación de una superficie atrapada, o de una superficie marginalmente atrapada, entonces vale la versión débil de la conjetura del censor cósmico para materia de Vlasov en simetría esférica.*

Por otra parte, se sabe que se forman superficies atrapadas para ciertos datos iniciales ([37],[50]). Como así también se ha estudiado directamente para ciertos otros datos iniciales la formación de agujeros negros [51]. Aparte de esto, se ha investigado numéricamente para ciertas familias de datos iniciales la ocurrencia de *fenómenos críticos*, donde se busca distinguir un *threshold* en la concentración de materia para la formación de superficies atrapadas ([52],[53],[54]). Los distintos estudios resultan consistentes entre sí, ya que todos sugieren la validez de la versión débil de la conjetura del censor cósmico y que la materia de Vlasov es de *tipo I* [55], lo que quiere decir que existe un *gap* para la masa del agujero negro, esto es un valor mínimo, que se forma con la concentración *threshold* de materia.

Esta enumeración de propiedades de los sistemas de Einstein-Vlasov en simetría esférica no pretende ser en absoluto exhaustiva, si no más bien ilustrar la cantidad de investigación que se viene desarrollando en el tema, y las bondadosas propiedades del modelo. Ahora nos dedicaremos a presentar brevemente otra situación de mucha simetría, pero con características más complejas: la simetría cilíndrica.

1.2.2. Modelos con simetría cilíndrica

En el espacio euclídeo, la simetría cilíndrica resulta una idea bastante intuitiva. Hace referencia a una situación donde existe un eje de simetría, y a su vez existe simetría traslacional en la dirección paralela al mencionado eje. Esta idea no es tan sencilla de traducir al lenguaje de las variedades, aunque lo fundamental resulta claro: existen dos vectores de Killing ($\xi_{(\phi)}^a, \xi_{(z)}^a$) ortogonales y que conmutan (en particular definen una familia de 2-superficies tangentes), donde las órbitas del primero resultan curvas cerradas, mientras que las del segundo se extienden indefinidamente. Las sutilezas aparecen cuando uno quiere definir el eje (un lugar donde el vector $\xi_{(\phi)}^a$ no está definido) y cuando queremos implementar esta idea en una 4-variedad lorentziana para definir un *espacio-tiempo cilíndricamente simétrico* [56], ya que no hay una única manera de caracterizar a la familia de 2-superficies órbitas del grupo de isometrías en esta variedad. En este trabajo vamos a entender a la simetría cilíndrica como la así llamada *whole cylindrical symmetry* definida en [57]:

Definición: Decimos que un espacio-tiempo tiene *simetría cilíndrica completa* si además de los campos de Killing ($\xi_{(\phi)}^a, \xi_{(z)}^a$), existe simetría ante reflexiones en cualquier plano que contenga al eje y en cualquier plano perpendicular al mismo.

Se puede demostrar que esta condición implica en particular que los campos de Killing son ortogonales a una familia de 2-superficies [58]. Para este tipo de simetría cilíndrica, la métrica siempre se puede escribir en las así

llamadas *coordenadas estándar* [59],

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\psi)}(-dt^{*2} + dr^{*2}) + e^{-2\psi}dz^2 + \alpha^2 e^{2\psi}d\phi^2 \quad (1.35)$$

donde γ , ψ y α son funciones de r^* y t^* solamente. Teniendo en cuenta las ecuaciones de Einstein, se puede ver que si $T_{t^*}^{t^*} + T_{r^*}^{r^*} = 0$ en algún sistema estándar, esta igualdad se cumple también en cualquier otro sistema estándar, y que además existirían las así llamadas *coordenadas canónicas* (t, r) donde la métrica toma la forma

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\psi)}(-dt^2 + dr^2) + e^{-2\psi}dz^2 + r^2 e^{2\psi}d\phi^2. \quad (1.36)$$

Este último sistema es el que usaremos en el capítulo 4.2 para describir las regiones vacías a ambos lados de una cáscara de materia.

Lo interesante de la simetría cilíndrica es que, a pesar de su simplicidad, el campo gravitatorio tiene grados de libertad radiativos [60], lo que la diferencia fundamentalmente de la simetría esférica. A pesar de que representa una situación que no es física, resulta útil para ganar intuición acerca de procesos radiativos, y como primer paso para estudiar sistemas con simetría axial, siendo esta última verdaderamente relevante para el estudio de una pluralidad de situaciones astrofísicas.

Volviendo a los sistemas de Einstein-Vlasov, este tipo de simetría, al no representar situaciones físicas, ha sido muy poco estudiada en comparación con el caso esféricamente simétrico. Podemos por ejemplo mencionar que se pudo demostrar que, para un dato inicial *asintóticamente plano* en las direcciones perpendiculares al eje, si se forma una singularidad, la misma “emana” del eje de simetría [61], análogamente al caso con simetría esférica. Otro aspecto que se estudió, fue la existencia de soluciones estáticas [62].

En este trabajo de tesis, en el capítulo 4.2 se estudiará una situación dinámica muy idealizada, donde en el universo sólo existe una cáscara fina compuesta por materia de Vlasov que orbita exclusivamente en planos perpendiculares al eje de simetría. Tal idealización se hace con el fin de estudiar efectos de *backreaction* para el movimiento de la cáscara ante la interacción con modos radiativos del campo gravitatorio en el vacío. Parte del análisis que se hará en la mencionada sección tiene que ver con el concepto de *modo cuasinormal*.

1.3. Modos Cuasinormales

En mecánica clásica de medios continuos es común encontrar familias particulares de soluciones que resultan periódicas en el tiempo, las cuales suelen denominarse *modos normales*. Con frecuencia, estas soluciones aparecen naturalmente en sistemas de ecuaciones linealizados alrededor de una

solución estática. Imponiendo condiciones de borde, el sistema adquiere la forma de un problema de Sturm-Liouville, cuyos autovalores representan las frecuencias de estas soluciones periódicas, constituyendo un espectro de frecuencias que resulta típicamente discreto. El principio de funcionamiento de los instrumentos musicales tiene que ver con esto: si las frecuencias de los modos normales resultan predominantemente múltiplos de una frecuencia fundamental, el instrumento, ante una perturbación, vibra, transmite esta vibración al aire que lo circunda, y el sonido que llega a nuestros oídos se percibe como una nota musical bien definida, correspondiente a la frecuencia del modo fundamental o a algún *armónico* (frecuencia múltiplo de la fundamental) de la misma.

La noción de *modo cuasinormal* muchas veces surge de una consideración más realista del medio con el cual interactúa un sistema que exhibe modos normales. Se entienden como modos de *decaimiento* o *dispersión* de un sistema que está en interacción con un medio que le absorbe energía, y se caracterizan con frecuencias complejas, cuya parte imaginaria representa la *taza de decaimiento* de los modos vibrantes. Pero la noción abstracta de modo cuasinormal es más general, y tiene que ver con soluciones formales linealizadas de frecuencia compleja, definidas en un espacio donde existe una noción de *infinito*, que satisfacen una condición de *onda saliente* en la región de interés (lo que a grandes rasgos quiere decir que no “vienen” contribuciones desde el infinito hacia la mencionada región). Para los modos normales imponemos una condición de borde que involucra a los valores de la solución y/o sus derivadas en el borde mismo; en cambio para los modos cuasinormales imponemos que la solución en el borde pertenece al subespacio de soluciones *salientes*, lo que se interpreta como que no hay “influencia” externa a la región, y como que las soluciones representan procesos de dispersión que emanan exclusivamente de la región de interés.

Cabe destacar que en general los modos cuasinormales no representan soluciones físicas, ya que suelen diverger en el infinito, o en algunas de las dos direcciones (pasado o futuro) de la evolución temporal. Si bien ninguna solución física es un modo cuasinormal, estas frecuencias complejas aparecen en la evolución de datos arbitrarios, marcando oscilaciones y decaimientos característicos. El fenómeno de las oscilaciones amortiguadas que en efecto se obtienen al evolucionar un dato, se denomina *ringing cuasinormal*. Si el sistema admite una descomposición en modos (soluciones periódicas), y los mismos forman una *base completa* del espacio de soluciones, la evolución de un dato inicial resulta determinada por transformadas de Fourier, que son los coeficientes de ese dato en la base en cuestión. Las integrales intervinientes se hacen sobre frecuencias reales, pero se pueden pensar como integrales en el plano complejo haciendo extensiones analíticas de los integrandos. Te-

niendo en cuenta el teorema de los residuos, las frecuencias complejas de los modos cuasinormales resultan ser polos para las expresiones subintegrales, cuya contribución característica en el cálculo de la integral sobre el eje real es justamente lo que “genera” el *ringing* cuasinormal.

En Relatividad General, los modos cuasinormales aparecen en todo sistema astrofísico del cual “emanen” ondas gravitatorias³, por lo que en el contexto actual del área, en la cual existe mucha expectativa puesta en la posible próxima detección directa de ondas gravitacionales, resultan de particular relevancia. Los modos cuasinormales se pueden interpretar como el *sonido característico* [87] de objetos compactos, codificado en las ondas gravitatorias que de los mismos emanan. Su importancia radica en el hecho de que la forma del *ringing* cuasinormal suele depender exclusivamente de los parámetros del sistema que lo generó, por lo que contendría información precisa acerca del mismo.

Para todo sistema astrofísico en el cual existan *modos normales* de vibración de acuerdo a la mecánica Newtoniana, las versiones relativistas de estos modos, que deben dar cuenta del acoplamiento con el campo gravitatorio, tienen que ser necesariamente *modos cuasinormales*. Sin embargo, resulta más interesante desde el punto de vista teórico la existencia de modos cuasinormales que no tienen análogo Newtoniano, posiblemente importantes para estrellas de neutrones y agujeros negros, ya que los mismos están asociados a grados de libertad que son exclusivos del campo gravitatorio, cuyo origen se puede interpretar en la no-linealidad de las ecuaciones de Einstein, y que se pueden entender como una expresión de la interacción del campo consigo mismo.

³Para una reseña del concepto de modos cuasinormales en Relatividad General ver [87] y referencias allí citadas.

Capítulo 2

Einstein-Vlasov en simetría esférica

2.1. Configuración estática

Empezaremos la exposición del trabajo original de esta tesis considerando lo que probablemente sea la situación más simple con materia de Einstein - Vlasov que se pueda tener: *simetría esférica estática*. La métrica (1.32) se escribe en este caso

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.1)$$

Por su parte, el tensor de masa-energía es simplemente

$$T_a^b = \text{diag}[-\rho(r), p_r(r), p_t(r), p_t(r)]. \quad (2.2)$$

Las ecuaciones de Einstein entonces resultan,

$$2r\beta'(r) - 1 - 8\pi r^2 \rho(r) e^{2\beta(r)} = 0 \quad (2.3)$$

$$2r\alpha'(r) + 1 - 8\pi r^2 p_r(r) e^{2\beta(r)} = 0 \quad (2.4)$$

$$(\rho(r) + p_r(r))\alpha'(r) + p_r'(r) + 2(p_r(r) - p_t(r)) = 0 \quad (2.5)$$

donde las primeras dos ecuaciones pueden reescribirse como,

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.6)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p_r(r)}{r(r - 2m(r))} \quad (2.7)$$

con $e^{2\beta(r)} = \frac{r}{r - 2m(r)}$.

Como las partículas siguen trayectorias geodésicas, en esta simetría deben conservarse la energía y el momento angular a lo largo de estas trayectorias. Podemos escribir estas cantidades como sigue,

$$L^2 = r^4 \left[(p^\theta)^2 + \sin^2 \theta (p^\phi)^2 \right] \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} E &= e^{2\alpha(r)} p^t \\ &= e^{\alpha(r)} \sqrt{\mu^2 + e^{2\beta(r)} (p^r)^2 + r^2 [(p^\theta)^2 + \sin^2 \theta (p^\phi)^2]} \\ &= e^{\alpha(r)} \sqrt{\mu^2 + e^{2\beta(r)} (p^r)^2 + \frac{L^2}{r^2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

siendo L el módulo del momento angular.

Para escribir el tensor de masa-energía nos conviene hacer un cambio de variable $(p^\theta, p^\phi) \rightarrow (L, \chi)$, siendo $\chi \equiv \arctan(\sin(\theta)p^\phi/p^\theta)$. En virtud de las simetrías del problema, la ecuación (1.30) para este caso se escribe,

$$T_a{}^b(r) = \frac{e^{\beta(r)-\alpha(r)}}{r^2} \int f(r, p^r, L) p_a p^b \frac{L dL d\chi dp^r}{p^t} \quad (2.10)$$

con f tal que satisface la ecuación (1.29), que en este caso resulta

$$p^r \partial_r f - \Gamma_{ab}^j p^a p^b \partial_{p^j} f = 0. \quad (2.11)$$

Proponemos cierto ansatz para f tal que se satisface automáticamente la ecuación de Vlasov

$$f(r, p^r, L) = \Phi(E, L) \circ E(r, p^r, L). \quad (2.12)$$

Este tipo de ansatz ha sido utilizado extensamente en la literatura (ver por ejemplo la última sección de [48], y referencias allí citadas)¹ ya que nos permite construir familias concretas de soluciones de las ecuaciones de Einstein-Vlasov con un claro significado físico. Dando una forma específica para $\Phi(E, L)$, resulta posible resolver las integrales (2.10) y convertir el sistema integro-diferencial en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para $m(r)$ y $\alpha(r)$.

2.1.1. Sistemas con un espectro discreto de momentos angulares

En la literatura existen muchos modelos que dan formas particulares a $\Phi(E, L)$, como por ejemplo las así llamadas soluciones politrópicas ($\phi(E, L) = (E_0 - E)^k L^l$, con $E < E_0$), o también $\Phi(E, L) = \phi(E/E_0)(L_0^2 - L^2)^l$ con

¹Se puede demostrar que no todas las soluciones de la ecuación de Vlasov tienen la forma (2.12) [63], algo que sí ocurre en la versión Newtoniana de este sistema.

$E < E_0$ y $L < L_0$ utilizado, por ejemplo, en [49]. Vamos a proponer una distribución tal que haya un conjunto discreto de momentos angulares posibles, lo que nos va a resultar útil más adelante,

$$\Phi(E, L) = \sum_i \Phi^i(E) \Theta(E_0^i - E) \delta(L - L_i) \quad (2.13)$$

siendo $\Theta(x)$ la función de Heaviside, que expresa que en cada conjunto de partículas con el mismo módulo de momento angular L_i , existe un máximo para la energía E_0^i . En este capítulo daremos el nombre de *componentes* a cada uno de estos conjuntos. Lo expuesto en esta subsección son resultados propios, parte de los cuales están en [2] y en [3]. En particular, los teoremas de necesidad de existencia de una cota máxima para la energía y de compacidad de las cáscaras están referenciados en [3], pero sus demostraciones no fueron aún publicadas.

El tensor de masa-energía se expresa,

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \frac{4\pi e^{\beta(r)}}{r^3} \sum_i L_i \int_0^{p_{i(max)}^r} \Phi^i(E) \sqrt{\mu^2 r^2 + L_i^2 + e^{2\beta(r)} (p^r)^2 r^2} dp^r \\ p_r(r) &= \frac{4\pi e^{3\beta(r)}}{r} \sum_i L_i \int_0^{p_{i(max)}^r} \frac{\Phi^i(E) (p^r)^2}{\sqrt{\mu^2 r^2 + L_i^2 + e^{2\beta(r)} (p^r)^2 r^2}} dp^r \\ p_t(r) &= \frac{2\pi e^{\beta(r)}}{r^3} \sum_i L_i^3 \int_0^{p_{i(max)}^r} \frac{\Phi^i(E)}{\sqrt{\mu^2 r^2 + L_i^2 + e^{2\beta(r)} (p^r)^2 r^2}} dp^r \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde los $p_{i(max)}^r$ están dados por

$$p_{i(max)}^r = e^{-\beta(r)} \sqrt{E_0^i{}^2 e^{-2\alpha(r)} - \mu^2 - \frac{L_i^2}{r^2}}. \quad (2.15)$$

Para simplificar las expresiones definimos (análogamente a las h_m de Rein y Rendall en [48]),

$$h_m^i(u) = \int_u^{E_0^i} \Phi^i(E) (E^2 - u^2)^m dE \quad (2.16)$$

con $u \in [0, E_0^i]$ para cada i . Definimos también,

$$H_m^i(u) = u^{-(2m+4)} h_{m+3/2}^i(u) + u^{-(2m+2)} h_{m+1/2}^i(u) \quad (2.17)$$

Reemplazamos entonces en (2.14), con lo que obtenemos

$$\rho(r) = \frac{4\pi}{r^2} \sum_i L_i \left(\mu^2 + \frac{L_i^2}{r^2} \right) H_{-1}^i \left(e^{\alpha(r)} \sqrt{\mu^2 + \frac{L_i^2}{r^2}} \right) \quad (2.18)$$

$$p_r(r) = \frac{4\pi e^{-2\alpha(r)}}{r^2} \sum_i L_i h_{1/2}^i \left(e^{\alpha(r)} \sqrt{\mu^2 + \frac{L_i^2}{r^2}} \right). \quad (2.19)$$

Necesidad de un máximo para las energía de las partículas

Que exista una cota superior para la energía en cada componente no es una hipótesis arbitraria. Podemos demostrar que es consecuencia necesaria de suponer que la masa ADM del sistema es finita.

En primer lugar, mostramos que $\alpha(r)$ tiene que tener límite finito para $r \rightarrow \infty$. Llamamos M a la masa ADM del sistema. Para $r > 4M$ nos queda (teniendo en cuenta que $p_r(r) \leq \rho(r)$),

$$\frac{d\alpha}{dr} < \frac{m(r)}{r^2} + 4\pi r \rho(r) < \frac{M}{r^2} + \frac{1}{4M} 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.20)$$

entonces,

$$\alpha_\infty < \alpha(4M) + \int_{4M}^{\infty} \frac{M}{s^2} ds + \frac{1}{4M} \int_{4M}^{\infty} 4\pi s^2 \rho(s) ds < \infty \quad (2.21)$$

por lo que α tiene límite en el infinito α_∞ .

Supongamos ahora que no hay cotas E_0^i para las energías. La masa ADM se expresa,

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) dr \\ &= 16\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{e^{2\alpha(r)}} \sum_i \left[\int_{\sqrt{e^{2\alpha(r)}(\mu^2 + L_i^2/r^2)}}^\infty \frac{\Phi^i(E) r E^2}{\sqrt{r^2 E^2 - e^{2\alpha(r)}(L_i^2 + \mu^2 r^2)}} dE \right] dr \\ &\geq \frac{16\pi^2}{e^{2\alpha_\infty}} \sum_i L_i \int_{\mu e^{\alpha_\infty}}^\infty \Phi^i(E) E^2 \left[\int_{\frac{L_i}{\sqrt{E^2 e^{-2\alpha_\infty} - \mu^2}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{E^2 - \mu^2 e^{2\alpha(r)}}} dr \right] dE \quad (2.22) \end{aligned}$$

Las integrales (2.22) están evaluadas en la región $E \geq \sqrt{e^{2\alpha}(\mu^2 + \frac{L_i^2}{r^2})}$ del plano (E, r) . La última de estas integrales está evaluada en la subregión $E \geq \sqrt{e^{2\alpha_\infty}(\mu^2 + \frac{L_i^2}{r^2})}$, la que también se puede escribir $r \geq \frac{L_i}{\sqrt{E^2 e^{-2\alpha_\infty} - \mu^2}}$.

La integral,

$$\int_{\frac{L_i}{\sqrt{E^2 e^{-2\alpha_\infty} - \mu^2}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{E^2 - \mu^2 e^{2\alpha(r)}}} dr \quad (2.23)$$

diverge, ya que $E > \mu e^{\alpha_\infty}$ en esa subregión, por lo tanto para que M no diverja debemos tener $\Phi_i(E) = 0$ para todo i y todo $E > \mu e^{\alpha_\infty}$.

Compacidad del sistema

También podemos mostrar para una amplia familia de distribuciones que el sistema debe ser acotado, es decir, que existe un radio máximo. Este

resultado es análogo al teorema central en [48] pero para un conjunto discreto de momentos angulares.

Llamamos entonces E_0^i al supremo del soporte de $\Phi^i(E)$, se cumple $E_0^i \leq e^{\alpha_\infty}$. Tenemos que $h_m^i(u) = 0$ cuando $u \geq E_0^i$, lo que implica que el soporte de T_a^b es la unión de las regiones de positividad de las funciones

$$\epsilon_i(r) = E_0^{i2} - e^{2\alpha(r)} \left(\mu^2 + \frac{L_i^2}{r^2} \right). \quad (2.24)$$

Vemos que si se cumple $E_0^i < e^{\alpha_\infty}$ para todo i , entonces el sistema debe tener un radio máximo. De esta manera, para estudiar la posibilidad de que la distribución de partículas llegue al infinito suponemos

$$\blacksquare E_0 = \max\{E_0^i\} = \mu e^{\alpha_\infty}.$$

El comportamiento asintótico de la presión y la densidad está dado por cómo se comportan las funciones $h_m^i(u)$ cuando $u \rightarrow E_0$.

$$\blacksquare \text{Suponemos que las funciones } \Phi^i(E) \text{ admiten alrededor de } E = E_0^i \text{ (del lado } E < E_0^i) \text{ un desarrollo del tipo,}$$

$$\Phi^i(E) \approx 2c_i E (E_0^{i2} - E^2)^{k_i} + O((E_0^{i2} - E^2)^{k_i + \delta_i}) \quad (2.25)$$

$$\text{con } \delta_i > 0, k_i > -1 \text{ y al menos un } k_i \leq 1/2 \text{ con } i/E_0^i = E_0$$

Cuando $E \rightarrow E_0$, tenemos para aquellos i tales que $E_0^i = E_0$,

$$\Phi^i(E) \approx 2c_i E (E_0^2 - E^2)^{k_i} + O((E_0^2 - E^2)^{k_i + \delta_i}) \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h_m^i(u) &\approx \int_u^{E_0} [2c_i E (E_0^2 - E^2)^{k_i} + O((E_0^2 - E^2)^{k_i + \delta_i})] (E^2 - u^2)^m dE \\ &\approx c_i \gamma(k_i, m) (E_0^2 - u^2)^{k_i + m + 1} + O((E_0^2 - u^2)^{k_i + m + \delta_i + 1}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

con $\gamma(a, b) = \Gamma(a+1)\Gamma(b+1)/\Gamma(a+b+2)$. La densidad y la presión cuando $u \rightarrow E_0$ resultan,

$$\rho(r) \approx \frac{4\pi}{r^2} \sum_{i/E_0^i=E_0} L_i c_i \gamma(k_i, -1/2) \epsilon_i(r)^{k_i + 1/2} \quad (2.28)$$

$$p(r) \approx \frac{4\pi e^{-2\alpha_\infty}}{r^2} \sum_{i/E_0^i=E_0} L_i c_i \gamma(k_i, 1/2) \epsilon_i(r)^{k_i + 3/2} \quad (2.29)$$

por lo que las ecuaciones (2.6) y (2.7) se escriben,

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &\approx 16\pi^2 \sum_{i/E_0^i=E_0} c_i L_i \gamma(k_i, -1/2) \epsilon_i^{k_i+1/2} + O(\epsilon_i^{\min[k_i+\delta_i+1/2, k_i+3/2]}) \\ &\approx 16\pi^2 \sum_{i/E_0^i=E_0} a_i \epsilon_i^{k_i+1/2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dr} &\approx \frac{M}{r^2} + \frac{16\pi^2 e^{-2\alpha_\infty} \sum_{i/E_0^i=E_0} c_i L_i \gamma(k_i, 1/2) \epsilon_i^{k_i+3/2}}{r} + O(\epsilon_i^{k_i+\delta_i+3/2}/r) \\ &\approx \frac{M}{r^2} + \frac{16\pi^2 e^{-2\alpha_\infty} \sum_{i/E_0^i=E_0} b_i \epsilon_i^{k_i+3/2}}{r} \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde $a_i = c_i L_i \gamma(k_i, -1/2)$ y $b_i = c_i L_i \gamma(k_i, 1/2)$.

Vemos que para que la masa ADM sea finita debe cumplirse $r \sum_{i/E_0^i=E_0} a_i \epsilon_i^{k_i+1/2} \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$. Como en ese límite $\epsilon_i \rightarrow 0$ para todo i podemos ver

$$r \sum_{i/E_0^i=E_0} b_i \epsilon_i^{k_i+3/2} = r \sum_{i/E_0^i=E_0} \frac{\gamma(k_i, 1/2)}{\gamma(k_i, -1/2)} a_i \epsilon_i^{k_i+3/2} \quad (2.32)$$

$$= r \sum_{i/E_0^i=E_0} \frac{1/2}{k_i + 3/2} a_i \epsilon_i^{k_i+3/2} \quad (2.33)$$

$$= r \sum_{i/E_0^i=E_0} \frac{\epsilon_i}{2k_i + 3} a_i \epsilon_i^{k_i+1/2}. \quad (2.34)$$

Como $k_i > -1$ para todo i , y como para r lo suficientemente grande todos los ϵ_i son menores que un dado real positivo K , tenemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \sum_{i/E_0^i=E_0} b_i \epsilon_i^{k_i+3/2} < \lim_{r \rightarrow \infty} K r \sum_{i/E_0^i=E_0} a_i \epsilon_i^{k_i+1/2} \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} r \sum_{i/E_0^i=E_0} b_i \epsilon_i^{k_i+3/2} = 0. \quad (2.36)$$

Esto implica que (2.31) toma la forma,

$$\frac{d\alpha}{dr} \approx \frac{M}{r^2} \Rightarrow e^{2\alpha} \approx e^{2\alpha_\infty} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (2.37)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \epsilon_i(r) &\approx E_0^2 - E_0^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\mu^2 + \frac{L_i^2}{r^2}\right) \approx \frac{2M\mu^2 E_0^2}{r} \\ &\Rightarrow r \sum_{i/E_0^i=E_0} a_i \epsilon_i^{k_i+1/2} \approx \sum_{i/E_0^i=E_0} \frac{a_i (2M\mu^2 E_0^2)^{k_i+1/2}}{r^{k_i-1/2}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

y como habíamos supuesto que existe algún i tal que $k_i > 1/2$ llegamos a la conclusión,

- \Rightarrow Si $k_i \leq 1/2$ para algún $i/E_0^i = E_0 \Rightarrow$ el sistema no puede llegar al infinito con masa ADM finita \Rightarrow debe ser acotada.

Consideramos ahora algunas formas concretas dentro de esta familia de *ansätze* para $\Phi(E, L)$.

Cáscaras con un único momento angular

La expresión (2.24) indica que si $\min\{L_i\} > 0$ debe existir un radio mínimo para el sistema, por lo que si la distribución cumple además con (2.25), entonces el sistema es una *thick shell* o *cáscara gruesa*. Planteamos en este apartado específicamente un sistema de Einstein-Vlasov cuyas partículas se mueven todas con el mismo módulo del momento angular. Para simplificar las ecuaciones proponemos el ansatz

- $\Phi(E, L) = QE\Theta(E_0 - E)\delta(L - L_0)$.

Este ansatz es un caso particular de la familia (2.25), por lo que debe existir un radio máximo al que llamaremos r_o ; y si además $L_0 \neq 0$ también debe existir un radio mínimo, al que llamaremos r_i . Las ecuaciones de Einstein se escriben,

$$\frac{dm}{dr} = \frac{Q_2 [2(L_0^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha} + r^2 E_0^2] \sqrt{r^2 E_0^2 - (L_0^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha}}}{r^3 e^{2\alpha}} \quad (2.39)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{m}{r(r-2m)} + \frac{Q_2 [r^2 E_0^2 - (L_0^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha}]^{3/2}}{e^{2\alpha} r^3 (r-2m)} \quad (2.40)$$

siendo $Q_2 = 16\pi^2 L_0 Q/3$.

El soporte de la cáscara son las raíces de la expresión

$$\xi(r) = r^2 E_0^2 - (L_0^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha(r)}. \quad (2.41)$$

Podemos ver cómo construir un dato para resolver las ecuaciones dando r_i arbitrariamente. Haciendo $Q_2 = 0$, confirmamos que la solución tiene que ser Schwarzschild dentro y fuera de la cáscara, como lo dicta el teorema de Birkhoff. Es claro que la regularidad en el origen implicaría $m(r_i) = 0$, pero vamos a relajar esa hipótesis para así incluir un eventual agujero negro en el origen de masa $M_i < r_i/2$. Escribimos entonces,

$$e^{2\alpha(r_i)} = \frac{r_i^2 E_0^2}{L_0^2 + \mu^2 r_i^2} \quad , \quad m(r_i) = M_i \quad (2.42)$$

donde además, para que r_i sea un borde interno, debe cumplirse

$$\xi'(r_i) > 0 \Rightarrow L_0^2 > \frac{\mu^2 M_i r_i^2}{r_i - 3M_i}. \quad (2.43)$$

En virtud de las ecuaciones podemos ver que $\alpha(r)$ y sus primeras dos derivadas deben ser continuas en r_i , pero no así la tercera derivada. Análogamente, también $m(r)$ y su primera derivada son continuas en r_i , pero no así su segunda derivada. Por lo tanto, para dar ejemplos numéricos concretos de soluciones del sistema (2.39, 2.40) utilizando métodos de integración tradicionales, tenemos que dar un dato $(m(r_0), \alpha(r_0))$ donde $r_i < r_0 < r_o$, ya que dando el dato en uno de los bordes, como resulta natural, tendríamos problemas por éstas discontinuidades.

Planteamos entonces un desarrollo en serie para $r > r_i$ alrededor de r_i en potencias de $\sqrt{r - r_i}$. La compatibilidad con (2.6,2.7) implica,

$$\begin{aligned} e^{2\alpha(r)} &= B_0 + B_1(r - r_i) + B_2(r - r_i)^2 + B_3(r - r_i)^5/2 + \tilde{\mathcal{R}}_B \\ m(r) &= M_i + M_2(r - r_i)^{3/2} + M_3(r - r_i)^{5/2} + \tilde{\mathcal{R}}_m \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde los coeficientes se expresan (eligiendo $e^{2\alpha(r_i)} = 1 - 2M_i/r_i$),

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 - \frac{2M_i}{r_i} \\ B_1 &= \frac{2M_i}{r_i^2} \\ B_2 &= -\frac{2M_i}{r_i^3} \\ M_2 &= \frac{2\sqrt{2}Q_2(L_0^2 + \mu^2 r_i^2)\sqrt{(r_i - 3M_i)L_0^2 - \mu^2 M_i r_i^2}}{r_i^4} \end{aligned} \quad (2.45)$$

y expresiones análogas para M_3 y B_3 . De esta manera, dando r_i , M_i , Q y L_0 podemos construir un dato inicial para r_0 muy cercano a r_i e integrar numéricamente. Vemos que según (2.45) es necesario $r_i > 3M_i$ como condición de integrabilidad, restricción que se suma a la del momento angular (2.43).

Para ilustrar lo anterior tomamos los parámetros $r_i = 7$, $M_i = 1$, $L_0 = 4$, $E_0 = 1$ y $Q_2 = 0,1$. Usando estos valores y (2.44), despreciando los términos $\tilde{\mathcal{R}}_B$ y $\tilde{\mathcal{R}}_m$, obtenemos $e^{2\alpha(7,0001)} = 0,7538\dots$, y $m(7,0001) = 1,0000\dots$ ², lo que utilizamos como dato para integrar numéricamente el sistema para $r > r_i$ utilizando un integrador de Runge-Kutta. Los resultados están representados en las figuras 2.1 y 2.2.

Cáscaras con dos momentos angulares

Análogamente al inciso anterior escribimos ahora

$$\blacksquare \Phi(E, L) = Q_1 E \Theta(E_0^1 - E) \delta(L - L_1) + Q_2 E \Theta(E_0^2 - E) \delta(L - L_2).$$

²los cálculos fueron realizados con 30 dígitos

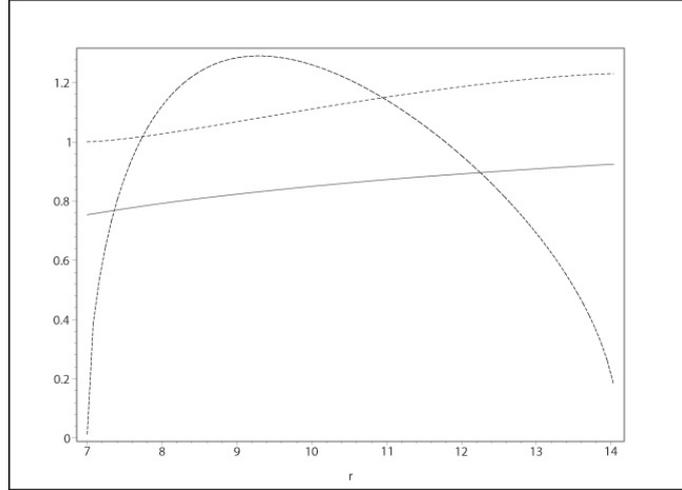


Figura 2.1: Gráfico de $e^{2\alpha(r)}$ (línea sólida), $m(r)$ (de puntos), and $30(dm/dr)$ (de barras), como funciones de r para $r_i = 7,0$, $M_1 = 1,0$, $L_0 = 4$, $E_0 = 1$ y $Q_2 = 0,1$. El límite superior del dominio en el gráfico es $r_o = 14,1098\dots$, con $e^{2\alpha(r_o)} = 0,9256\dots$ y $M_o = m(r_o) = 1,2306\dots$

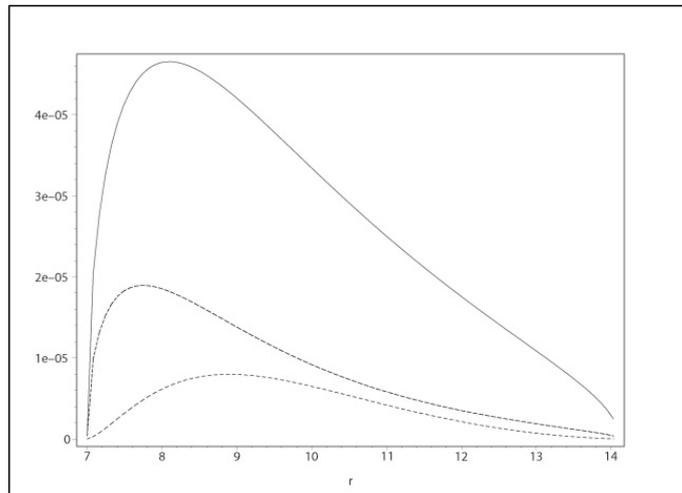


Figura 2.2: Gráfico de $\rho(r)$ (sólida, curva más alta), $4p_t(r)$ (de barras, curva del medio), y $40p_r(r)$ (de puntos, curva más baja), como funciones de r para $r_i = 7,0$, $M_i = 1,0$, $L_0 = 4$, $E_0 = 1$ y $Q_2 = 0,1$. El límite superior del dominio es $r_o = 14,1098\dots$, con $e^{2\alpha(r_o)} = 0,9256\dots$ y $M_o = m(r_o) = 1,2306\dots$

Las ecuaciones de Einstein toman la forma,

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dr} &= \frac{C_1 [2(L_1^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha} + r^2 E_1^2] \sqrt{r^2 E_1^2 - (L_1^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha}}}{r^3 e^{2\alpha}} \\ &\quad + \frac{C_2 [2(L_2^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha} + r^2 E_2^2] \sqrt{r^2 E_2^2 - (L_2^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha}}}{r^3 e^{2\alpha}} \\ \frac{d\alpha}{dr} &= \frac{m}{r(r-2m)} \\ &\quad + \frac{C_1 [r^2 E_1^2 - (L_1^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha}]^{3/2}}{e^{2\alpha} r^3 (r-2m)} + \frac{C_2 [r^2 E_2^2 - (L_2^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha}]^{3/2}}{e^{2\alpha} r^3 (r-2m)}\end{aligned}\tag{2.46}$$

donde $C_i = 16\pi^2 L_i Q_i / 3$, $i = 1, 2$.

Resulta necesario analizar por separado las contribuciones a la densidad y a la presión de cada uno de los conjuntos de partículas con distinto momento angular. Escribimos en particular las contribuciones para la densidad de cada componente como

$$\begin{aligned}\rho_1(r) &= \frac{C_1 [2(L_1^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha} + r^2 E_1^2] \sqrt{r^2 E_1^2 - (L_1^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha}}}{4\pi r^5 e^{2\alpha}} \\ \rho_2(r) &= \frac{C_2 [2(L_2^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha} + r^2 E_2^2] \sqrt{r^2 E_2^2 - (L_2^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha}}}{4\pi r^5 e^{2\alpha}}.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Definimos para este caso,

$$\xi_i(r) = r^2 E_i^2 - (L_i^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha(r)}\tag{2.48}$$

con $i = 1, 2$. Cada una de estas funciones define una “cáscara” por sí misma, donde viven las partículas con el momento angular correspondiente. Para que tenga sentido hablar de una *única* cáscara, debemos tener un región donde ambas funciones sean positivas. Los límites de la cáscara van estar dados por raíces de alguno de los ξ_i tales que en todo el rango comprendido entre éstas al menos una de las dos funciones sea positiva. En el caso de estar en un rango de r en el que sólo una de las ξ_i es positiva, interpretamos $C_j = 0$ con $j \neq i$, por lo que nos quedan las ecuaciones de una cáscara de partículas con un único momento angular. Vamos a considerar ahora particularmente cáscaras en las que ambas componentes (la determinada por ξ_1 y la determinada por ξ_2) tengan el mismo radio interno r_i . Esto quiere decir,

$$e^{2\alpha(r_i)} = \frac{r_i^2 E_1^2}{L_1^2 + \mu^2 r_i^2} = \frac{r_i^2 E_2^2}{L_2^2 + \mu^2 r_i^2}\tag{2.49}$$

Como en el caso anterior debemos tener,

$$\xi_i'(r_i) > 0 \Rightarrow L_i^2 > \frac{\mu^2 M_i r_i^2}{r_i - 3M_i}\tag{2.50}$$

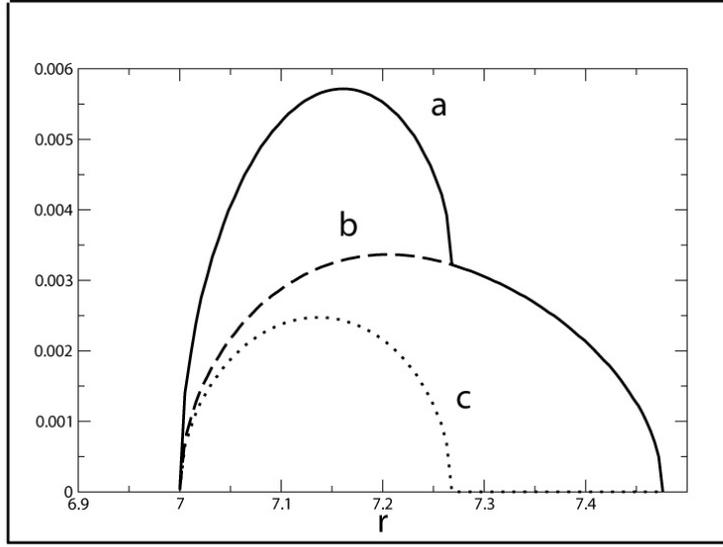


Figura 2.3: Gráfico de $\rho(r)$ (sólida), $\rho_1(r)$ (de puntos), y $\rho_2(r)$ (de barras), en función de r para $r_i = 7,0$, $M_1 = 1,0$, $L_1 = 5$, $L_2 = 6,5$, $E_1^2 = 1,51\dots$, $E_2^2 = 1,86\dots$, $C_1 = 5$ y $C_2 = 3$. El límite del dominio es $r_o = 7,4764\dots$, con $e^{2\alpha(r_o)} = 1,0606\dots$ y $M_2 = m(r_o) = 2,1338\dots$

Damos ahora un ejemplo. Utilizamos el mismo método de integración que para el caso con un único momento angular, teniendo en cuenta que los coeficientes de (2.44) toman formas más complejas que involucran los parámetros de ambas componentes. Tomamos $L_1 = 5$, $L_2 = 6,5$, $r_i = 7$, $C_1 = 5$, $C_2 = 3$ y $M_i = 1$. También fijamos por simplicidad $\alpha(r_i) = 0$, por lo que $E_1^2 = 1,510\dots$ y $E_2^2 = 1,862\dots$. Los resultados obtenidos indican que las partículas con $L_1 = 5$ están contenidas en la región $7,0 \leq r \leq 7,2682\dots$, mientras que para $L_2 = 6,5$ el rango correspondiente es $7,0 \leq r \leq 7,4764\dots$. El valor de la masa externa resulta $M_o = 2,1338\dots$. En la figura 2.3 mostramos la densidad total ρ , y la contribución a la densidad de cada componente ρ_1 y ρ_2 .

2.1.2. Cáscaras de Einstein

Las cáscaras de Einstein [64] son el caso especial de Einstein-Vlasov estático en simetría esférica donde las partículas siguen trayectorias netamente circulares. Se puede ver que la ecuación de geodésica para estas partículas implica,

$$L^2(r) = \frac{\mu r^3 \alpha'(r)}{1 - r\alpha'(r)} \quad (2.51)$$

por lo que la función de distribución f se puede escribir directamente como función de r , ya que r determina por completo el módulo de la 3-velocidad, que ya sabemos tangencial, de las partículas. La ecuación (1.30) se escribe,

$$T^{\mu\nu} = \mu \frac{n(r)}{2\pi} \int u^\mu u^\nu d\chi \quad (2.52)$$

donde $n(r)$ es proporcional al número de partículas por unidad de volumen propio. Resolviendo, nos queda,

$$T_t^t = -n(r) \left(\mu^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) = -\rho \quad (2.53)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = \frac{n(r)L^2}{2r^2} = p_t \quad (2.54)$$

con $T_r^r = p_r = 0$.

Las ecuaciones de Einstein (2.6,2.7) quedan de la forma,

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi n(r)(\mu^2 r^2 + L^2(r)) \\ \frac{d\alpha}{dr} &= \frac{m(r)}{r(r - 2m(r))} \end{aligned} \quad (2.55)$$

por lo que obtenemos,

$$L^2(r) = \frac{r^2 m(r)}{r - 3m(r)} \quad (2.56)$$

que muestra que $r > 3m(r)$ resulta una condición para que el sistema tenga sentido físico.

Vemos que dando una función, ya sea $n(r)$, $m(r)$ o $L(r)$, quedan todas las demás determinadas exactamente o a menos de constantes de integración.

2.2. Cáscara fina

Como se expuso en la introducción, tiene sentido imaginar materia confinada a una superficie. Modelando la materia de esta manera se consigue simplificar considerablemente las ecuaciones. En el contexto de esta tesis, este modelo nos va a servir para poder estudiar analíticamente soluciones dinámicas de las ecuaciones de Einstein. Lo escrito en esta sección se encuentra en [1].

Imaginemos que la materia está concentrada en todo momento (para toda foliación de superficies espaciales) en una esfera de cierto radio, siendo este radio no necesariamente constante. Siendo más precisos, se trata de una 3-superficie temporal singular orientable $\Sigma(x^\alpha) = 0$. Definiendo coordenadas (r, θ, ϕ) y un tiempo global T , podemos escribir la ecuación de la superficie

como $\Sigma(r-R(T)) = 0$. Llamamos región II a $r > R(T)$ y región I a $r < R(T)$. Fuera de la superficie tenemos vacío, por lo que al tener simetría esférica, por teorema de Birkhoff, la métrica es Schwarzschild en ambas regiones,

$$ds^2 = -F_{I,II} dt_{I,II}^2 + F_{I,II}^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.57)$$

con $F_{I,II} = 1 - 2M_{I,II}/r$. Escribimos $t_{I,II}$ ya que estas coordenadas no coinciden en la cáscara si la superficie es singular, como quedará explícito más adelante.

La métrica inducida en la superficie se puede escribir,

$$ds^2|_{\Sigma} = -d\tau^2 + R(\tau)^2 d\Omega^2 \quad (2.58)$$

siendo τ el tiempo propio de un observador que se mueve con la cáscara siguiendo trayectorias radiales ($\theta = cte, \phi = cte$).

Las ecuaciones de movimiento se obtienen mediante la condición de empalme (1.17), por lo que calculando la curvatura extrínseca en función de $R(\tau)$ y sus derivadas obtenemos,

$$K_{\tau(I,II)}^{\tau} = \frac{R^2 \ddot{R} + M_{I,II}}{R \sqrt{R(R\dot{R}^2 + R - 2M_{I,II})}} \quad (2.59)$$

$$K_{\theta(I,II)}^{\theta} = K_{\phi(I,II)}^{\phi} = \sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \frac{2M_{I,II}}{R}} \quad (2.60)$$

y la condición (1.17) se escribe

$$\begin{aligned} \frac{2}{R} \left[\sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \frac{2M_{II}}{R}} - \sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \frac{2M_I}{R}} \right] &= \kappa S_{\tau}^{\tau} \quad (2.61) \\ \frac{R^2 \ddot{R} + R\dot{R}^2 + R - M_{II}}{R \sqrt{R(R\dot{R}^2 + R - 2M_{II})}} - \frac{R^2 \ddot{R} + R\dot{R}^2 + R - M_I}{R \sqrt{R(R\dot{R}^2 + R - 2M_I)}} &= \kappa S_{\theta}^{\theta} \\ &= \kappa S_{\phi}^{\phi}. \quad (2.62) \end{aligned}$$

En virtud de la simetría del problema, se espera poder escribir $S_{\tau}^{\tau} = -\rho(R)$ y de ahí despejar $\dot{R}(\tau)$ en (2.61) como función de los parámetros $M_{I,II}$ y de $R(\tau)$, obteniendo así un “potencial efectivo” para el movimiento de la cáscara.

Ahora escribimos el tensor de masa-energía en la cáscara suponiendo que la misma está compuesta por partículas idénticas no colisionantes que se mueven en órbitas de momento angular constante (i.e. que siguen geodésicas de la métrica inducida). Tal sistema representa materia de Einstein-Vlasov confinada a una 3-superficie que representa la historia de la cáscara. Escribimos entonces una ecuación análoga a (1.30) para una variedad $2 + 1$,

$$S_i^j = -\mu \int f(x^a, u^a) u^i u^j \sqrt{-h} \frac{du^\theta du^\phi}{u_\tau} \quad (2.63)$$

siendo μ la masa propia de las partículas, u^a vectores velocidad en el fibrado tangente de Σ y h la métrica inducida en Σ .

Para valuar estas integrales, hacemos un cambio de variable $(u^\theta, u^\phi) \rightarrow (L, \chi)$ donde L es el módulo del momento angular por unidad de masa de una partícula con velocidad u^a y $\chi \equiv \arctan(\text{sen}(\theta)u^\phi/u^\theta)$. Por la simetría del problema podemos escribir en la integral $f(\tau, L)$. Como las partículas no colisionan, tiene que haber conservación del número de partículas con un dado momento angular L , lo que se escribe de manera análoga a (1.31)

$$\begin{aligned} N^\tau(\tau) &= \int f(x^a, u^a) \sqrt{-h} du^\theta du^\phi = \int f(\tau, L) \frac{L}{R(\tau)^2} dL d\chi \\ &= \frac{2\pi}{R(\tau)} \int f(\tau, L) L dL \\ n(L) &= \int_{\tau=\tau_0} N^\tau(\tau_0, L) R(\tau_0)^2 \text{sen}(\theta) d\theta d\phi = 8\pi^2 L f(\tau_0, L). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Vemos que f resulta función sólo de L , por lo que la ecuación de Vlasov (1.29) se cumple automáticamente.

El tensor S entonces se puede escribir,

$$S_j^i = \frac{\mu}{8\pi^2 R} \int \frac{n(L)}{\sqrt{L^2 + R^2}} u^i(L, \chi) u^j(L, \chi) dL d\chi \quad (2.65)$$

los vectores velocidad se escriben,

$$u^i(L, \chi) = \left[\sqrt{1 + \frac{L^2}{R^2}}, \cos(\chi) \frac{L}{R^2}, \frac{\text{sen}(\chi)}{\text{sen}(\theta)} \frac{L}{R^2} \right] \quad (2.66)$$

con lo que obtenemos

$$S_j^i(\tau) = \frac{\mu}{4\pi R(\tau)^3} \text{diag} \left[- \int n(L) \sqrt{L^2 + R(\tau)^2} dL, \int \frac{n(L)L^2}{2\sqrt{L^2 + R(\tau)^2}} dL, \int \frac{n(L)L^2}{2\sqrt{L^2 + R(\tau)^2}} dL \right]. \quad (2.67)$$

Podemos ver que,

$$-S_\tau^\tau - 2S_\theta^\theta = \frac{\mu}{4\pi R} \int \frac{n(L)}{\sqrt{L^2 + R(\tau)^2}} dL \quad (2.68)$$

por lo que $-S_\tau^\tau \geq 2S_\theta^\theta$. Definimos $\alpha \equiv S_\theta^\theta / (-S_\tau^\tau)$,

$$\alpha = \frac{1}{\int n(L) \sqrt{L^2 + R^2} dL} \int \frac{n(L)L^2}{2\sqrt{L^2 + R^2}} dL \quad (2.69)$$

que cumple $0 \leq \alpha \leq 1/2$, siendo $\alpha = 0$ en el caso del polvo ($n(L) = \delta(L)$), y $\alpha \approx 1/2$ en el límite ultrarrelativista ($L \rightarrow \infty$), lo que puede verse tomando $n(L)$ de soporte compacto con centro en $L_0 \gg R$.

De la ecuación (2.62) obtenemos la expresión,

$$\ddot{R} = -\frac{1}{2R} \left[1 + \dot{R}^2 - (4\alpha + 1) \sqrt{1 + \dot{R}^2 - \frac{2M_I}{R}} \sqrt{1 + \dot{R}^2 - \frac{2M_{II}}{R}} \right] \quad (2.70)$$

y teniendo en cuenta que para un dado $n(L)$ obtenemos $\alpha(R)$, (2.70) se puede ver como una ecuación diferencial ordinaria para $R(\tau)$.

Por otro lado, de (2.61) obtenemos lo que sería una integral primera para (2.70) como puede verificarse explícitamente

$$\frac{2}{R} \left[\sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \frac{2M_{II}}{R}} - \sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \frac{2M_I}{R}} \right] = -\frac{2\mu}{R^3} \int n(L) \sqrt{R^2 + L^2} dL. \quad (2.71)$$

Definiendo $f(R) \equiv \int n(L) \sqrt{R^2 + L^2} dL$, nos queda una expresión para \dot{R} con la forma de una ecuación de movimiento para una partícula moviéndose en un potencial unidimensional

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{R}^2 + V(R) &= 0 \\ V(R) &= \frac{1}{2} - \frac{M_{II} + M_I}{2R} - \frac{\mu^2 f(R)^2}{8R^4} - \frac{(M_{II} - M_I)^2 R^2}{2\mu^2 f(R)^2}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Esta expresión es una generalización de la ecuación (2.35) en [66] encontrada por Evans. En ese trabajo se desarrolla un análisis de casi el mismo sistema, pero con la restricción de que todas las partículas tienen el mismo módulo de momento angular. De todas formas, los posibles movimientos que se desprenden de la expresión (2.72) son cualitativamente los mismos que los analizados por Evans. Podemos en particular analizar el comportamiento asintótico de $V(R)$, que resulta,

$$\begin{aligned} R \rightarrow 0 &\Rightarrow f(R) \rightarrow N \langle L \rangle \\ &f'(R) \rightarrow 0 \\ &V(R) \rightarrow -\frac{\mu^2 N^2 \langle L \rangle^2}{8R^4} \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} R \rightarrow \infty &\Rightarrow f(R) \rightarrow RN \\ &f'(R) \rightarrow N \\ &V(R) \rightarrow \frac{\mu^2 N^2 - (M_{II} - M_I)^2}{2\mu^2 N^2} \end{aligned} \quad (2.74)$$

donde N es el número total de partículas y $\langle L \rangle$ el valor medio de L . La “energía de ligadura por partícula” es la cantidad $\frac{(M_{II}-M_I)^2-\mu^2 N^2}{\mu^2 N^2}$. Si esta cantidad es positiva, la cáscara puede expandirse indefinidamente; si es negativa, existe un punto de retorno donde la cáscara frenará su expansión y empezará a contraerse. Como veremos más adelante, también existen soluciones con un punto de retorno con $V'(R) < 0$, lo que representa un radio mínimo, y además, entre éstas, existen soluciones oscilantes.

2.2.1. Soluciones estáticas

Las soluciones estáticas serían aquellas que satisfacen $\ddot{R} = \dot{R} = 0$, por lo que (2.61,2.62) se escribirían

$$\frac{2}{R_0} \left[\sqrt{1 - \frac{2M_{II}}{R_0}} - \sqrt{1 - \frac{2M_I}{R_0}} \right] = -\frac{2\mu}{R_0^3} \int n(L) \sqrt{R_0^2 + L^2} dL \quad (2.75)$$

$$\frac{R_0 - M_{II}}{R_0 \sqrt{R_0(R_0 - 2M_{II})}} - \frac{R_0 - M_I}{R_0 \sqrt{R_0(R_0 - 2M_I)}} = \frac{2\mu}{R_0^3} \int \frac{n(L)L^2}{\sqrt{R_0^2 + L^2}} dL. \quad (2.76)$$

A partir de estas ecuaciones obtenemos R_0 en función de M_I , M_{II} , y de los parámetros que definen a $n(L)$.

Vamos a considerar dos ejemplos concretos y simples que nos van a ser útiles más adelante:

- $n(L) = N\delta(L - L_0)$

Este es el caso de las soluciones estáticas en [66]. Las ecuaciones de arriba nos permiten escribir N y L_0 como funciones de R_0 , M_I y M_{II} , como sigue

$$L_0^2 = \frac{(R_0 - \sqrt{R_0 - 2M_I}\sqrt{R_0 - 2M_{II}})R_0^2}{3\sqrt{R_0 - M_I}\sqrt{R_0 - 2M_{II}} - R_0} \quad (2.77)$$

$$N = \frac{(\sqrt{R_0 - 2M_I} - \sqrt{R_0 - 2M_{II}})}{2\mu\sqrt{R_0 - 2M_I}\sqrt{R_0 - 2M_{II}}} R_0 \sqrt{6\sqrt{R_0 - 2M_I}\sqrt{R_0 - 2M_{II}} - 2R_0}. \quad (2.78)$$

- $n(L) = N_1\delta(L - L_1) + N_2\delta(L - L_2)$

En este caso podemos despejar las cantidades N_1 y N_2 en función de los parámetros R_0 , M_I , M_{II} , L_1 y L_2 , como sigue,

$$N_1 = \frac{R_0^2(L_0^2 - L_1^2)\sqrt{R_0^2 + L_2^2}}{\mu(R_0^2 + L_0^2)(L_2^2 - L_1^2)} \left(\sqrt{1 - \frac{2M_I}{R_0}} - \sqrt{1 - \frac{2M_{II}}{R_0}} \right) \quad (2.79)$$

$$N_2 = \frac{R_0^2(L_2^2 - L_0^2)\sqrt{R_0^2 + L_2^2}}{\mu(R_0^2 + L_0^2)(L_2^2 - L_1^2)} \left(\sqrt{1 - \frac{2M_I}{R_0}} - \sqrt{1 - \frac{2M_{II}}{R_0}} \right) \quad (2.80)$$

siendo L_0 la expresión (2.77) entendida como una mera función de los parámetros M_I , M_{II} y R . Para que tengan sentido estas expresiones, L_0 tiene que tomar un valor entre L_1 y L_2 , de otra manera algún N_i no sería positivo, lo que no tiene sentido físico ya que representan la cantidad de partículas con momento angular L_i .

$$\blacksquare n(L) = \sum_{i=1}^n N_i \delta(L - L_i)$$

En este caso tenemos $2n + 3$ parámetros y sólo dos ecuaciones. Podemos sin embargo mostrar que tienen que existir (i, j) tales que $L_i < L_0$ y $L_j > L_0$. Suponemos que todos los L_i son distintos entre sí, y elegimos los índices de manera tal que $L_1 < L_2 < \dots < L_n$. De (2.75) y (2.76) para este caso obtenemos,

$$N \sqrt{L_0^2 + R_0^2} = \sum_{i=1}^n N_i \sqrt{L_i^2 + R_0^2} \quad (2.81)$$

$$\frac{NL_0^2}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i L_i^2}{\sqrt{R_0^2 + L_i^2}} \quad (2.82)$$

siendo N la expresión (2.78) entendida como función de M_I , M_{II} y R . Vemos que (2.81) implica,

$$\frac{NR_0^2}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i R_0^2}{\sqrt{R_0^2 + L_i^2}} \quad (2.83)$$

por lo que si suponemos $L_1 \geq L_0$, de (2.81) obtenemos,

$$N \sqrt{R_0^2 + L_0^2} < \sqrt{R_0^2 + L_0^2} \sum_{i=1}^n N_i \quad (2.84)$$

mientras que de (2.83) podemos escribir,

$$\frac{NR_0^2}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} > \frac{R_0^2 \sum_{i=1}^n N_i}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} \quad (2.85)$$

lo que es una contradicción, por lo tanto $L_0 > L_1$. Análogamente se puede demostrar que $L_n > L_0$.

2.3. Límite de cáscara delgada para familias de cáscaras gruesas de Einstein-Vlasov

Una objeción válida que se puede hacer a lo desarrollado arriba es que no existen, en principio, objetos puramente bidimensionales. Tal abstracción resulta válida si acaso existe un límite adecuado, formalmente bien establecido,

para una familia de objetos tridimensionales donde una de sus dimensiones características tiende a cero. El objetivo de esta sección es mostrar que existen familias de cáscaras gruesas de partículas no colisionantes que tienden precisamente a algunas de las cáscaras finas estáticas del apartado anterior. También podemos demostrar que existe un límite de cáscara fina para cáscaras de Einstein que define una forma particular para la distribución límite $n(L)$. En esta sección expondremos únicamente resultados propios, siendo este tipo de límite el tema central de [2], donde se encuentran publicados los desarrollos de las primeras dos subsecciones. La tercera subsección sobre cáscaras de Einstein se encuentra publicada en el anexo de [1].

2.3.1. Cáscara con un único momento angular

Volvamos a escribir las ecuaciones de Einstein para el ansatz que habíamos considerado

$$\frac{dm}{dr} = \frac{Q_2 [2(L_0^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha} + r^2 E_0^2] \xi^{1/2}(r)}{r^3 e^{2\alpha}} \quad (2.86)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{m}{r(r-2m)} + \frac{Q_2 \xi^{3/2}(r)}{e^{2\alpha} r^3 (r-2m)}. \quad (2.87)$$

Consideremos una cáscara con cierto radio interno r_i y parámetro de masa interno M_i . Sabemos que $\xi(r_i) = 0$ y $\xi'(r_i) > 0$, y que, por el teorema de compacidad, debe existir al menos una raíz en $r > r_i$ a la que llamamos r_ξ . Si tomamos el límite $Q \rightarrow \infty$ de manera tal que la masa ADM se mantenga finita, $d\alpha/dr$ puede diverger o no, según cómo se comporte $\xi(r)$. Podemos demostrar por el absurdo que tomando un límite de estas características resulta $r_\xi \rightarrow r_i$, por lo que el mismo representa un *límite de cáscara fina*. Escribimos,

$$e^{2\alpha(r)} = \frac{r^2 E_0^2 - \chi^2(r)}{L_0^2 + \mu^2 r^2} \quad (2.88)$$

donde $\chi(r) \equiv \sqrt{\xi(r)}$. Podemos despejar $m(r)$ de la ecuación (2.87) y reemplazar en (2.86) para obtener una expresión que sólo dependa de $\alpha(r)$ y de sus primeras dos derivadas. Reemplazando $\alpha(r)$ con la ecuación (2.88) y desarrollando a primer orden en $1/Q_2$ nos queda,

$$\chi(r) = \frac{(3L_0^2 - r^2)r^3 L_0^2}{3Q_2(L_0^2 + r^2)(3L_0^2 + r^2)} + O(Q_2^{-2}) \quad (2.89)$$

y si a su vez reemplazamos esta expresión en (2.88), y de ahí en (2.86), y en (2.87) despejada para $m(r)$, nos queda respectivamente,

$$\frac{dm}{dr} = \frac{(3L_0^2 - r^2)L_0^2}{(3L_0^2 + r^2)^2} + \frac{1}{Q_2^2} \phi_1(r) + O(Q_2^{-3}) \quad (2.90)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{(3L_0^2 - r^2)L_0^2}{(3L_0^2 + r^2)^2} + \frac{1}{Q_2^2} \phi_2(r) + O(Q_2^{-3}) \quad (2.91)$$

siendo $\phi_1(r) \neq \phi_2(r)$. Por lo tanto, si suponemos que en el límite $Q \rightarrow \infty$ tenemos $\xi(r) > 0$ en un semientorno $r > r_i$, llegamos a una contradicción en la forma funcional que tomaría dm/dr en ese entorno, con lo que concluimos que $r_\xi \rightarrow r_i$.

Ahora que podemos definir en qué consiste el límite de cáscara fina en términos de un parámetro del sistema que podemos controlar ($Q \rightarrow \infty$), resulta posible analizar sus propiedades. La clave está en tener en cuenta las condiciones de borde para la cáscara (en r_i y en $r_o = r_\xi$). Por un lado, $\xi(r_i) = \xi(r_o) = 0$ implica

$$e^{2\alpha(r_i)} = \frac{r_i^2 E_0^2}{L_0^2 + \mu^2 r_i^2} ; \quad e^{2\alpha(r_o)} = \frac{r_o^2 E_0^2}{L_0^2 + \mu^2 r_o^2}. \quad (2.92)$$

A su vez, de la ecuación (2.87) tenemos,

$$\left. \frac{d\alpha}{dr} \right|_{r=r_i} = \frac{M_i}{r_i(r_i - 2M_i)} ; \quad \left. \frac{d\alpha}{dr} \right|_{r=r_o} = \frac{M_o}{r_o(r_o - 2M_o)} \quad (2.93)$$

siendo $M_o = m(r_o)$ el parámetro de masa para la variedad Schwarzschild que tenemos fuera de la cáscara ($r > r_o$). Escribimos entonces

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_o} \frac{d^2\alpha}{dr^2} dr &= \left. \frac{d\alpha}{dr} \right|_{r=r_o} - \left. \frac{d\alpha}{dr} \right|_{r=r_i} = \frac{M_o}{r_o(r_o - 2M_o)} - \frac{M_i}{r_i(r_i - 2M_i)} \\ \int_{r_i}^{r_o} \frac{dm}{dr} dr &= M_o - M_i. \end{aligned} \quad (2.94)$$

De aquí vemos que en el límite $r_o \rightarrow r_i$ las funciones subintegrales de (2.94) deben tender a distribuciones del tipo delta de Dirac por un factor que depende únicamente de los parámetros r_i , M_o y M_i . Manipulando (2.86) y (2.87) podemos escribir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r - 2m} \frac{dm}{dr} &= \frac{r(E^2 r^2 + 2B(L_0^2 + r^2))}{\left[r(2E^2 + (r^2 + L_0^2)B) \frac{dB}{dr} + 2(4E^2 r^2 + (2L_0^2 - r^2)B) \right]} \frac{d^2 B}{dr^2} \\ &+ \frac{4(E^2 r^2 + 2B(L_0^2 + r^2)) \left[r(r - 2m) \frac{dB}{dr} - mB \right]}{r(r - 2m) \left[r(2E^2 + (r^2 + L_0^2)B) \frac{dB}{dr} + 2(4E^2 r^2 + (2L_0^2 - r^2)B) \right]} \end{aligned} \quad (2.95)$$

donde $B(r) = e^{2\alpha(r)}$. En el límite $r_o \rightarrow r_i$, las condiciones (2.92), junto con la positividad de $d\alpha/dr$, implican que $B(r) \approx R^2 E_0^2 / (L_0^2 + \mu^2 R^2) \equiv B_0$, siendo R algún número tal que $r_i < R < r_o$. Podemos escribir entonces,

$$\lim_{r_o \rightarrow r_i} \int_{r_i}^{r_o} \frac{1}{R - 2m(r)} \frac{dm}{dr} dr = \lim_{r_o \rightarrow r_i} \int_{r_i}^{r_o} \frac{R(L_0^2 + R^2)}{R(R^2 + L_0^2)} \frac{dB}{dr} + 2(R^2 + 2L_0^2)B_0 \frac{d^2B}{dr^2} dr \quad (2.96)$$

por lo que resolviendo las integrales tomando R constante, y haciendo luego $r_i = r_o = R$, nos queda

$$\frac{\sqrt{R - 2M_i}}{\sqrt{R - 2M_o}} = \frac{(R - 2M_i)(R^3 + 2RL_0^2 - 3M_oL_0^2 - M_oR^2)}{(R - 2M_o)(R^3 + 2RL_0^2 - 3M_iL_0^2 - M_iR^2)}. \quad (2.97)$$

Despejando L_0^2 obtenemos finalmente,

$$L_0^2 = \frac{R^2(R - \sqrt{R - 2M_i}\sqrt{R - 2M_o})}{3\sqrt{R - 2M_i}\sqrt{R - 2M_o} - R} \quad (2.98)$$

que es exactamente la expresión (2.77) para el caso de una cáscara fina estática.

Podemos ilustrar la existencia de este límite con un ejemplo numérico. En la figura 2.4 se encuentran detallados los parámetros del ejemplo. Se observa que aunque hay una diferencia del 30% entre la masa de un lado de la cáscara y la del otro, el grosor de la misma es de menos del 0,3% de su radio. Podemos ver la adecuación aproximada de los parámetros de esta cáscara con los de una cáscara fina. Para ello, despejamos M_o de (2.98),

$$M_o = \frac{R [2(R - 3M_i)R^2L_0^2 + (4R - 9M_i)L_0^4 - M_iR^4]}{(R - 2M_i)(R^2 + 3L_0^2)^2}. \quad (2.99)$$

y reemplazamos los valores de R , M_i y L_0 con los de este ejemplo. Obtenemos $M_o \approx 1,2997$, lo que está en muy buen acuerdo con nuestra integración numérica.

2.3.2. Cáscaras de dos momentos angulares

Volvamos a escribir las ecuaciones de Einstein para este caso,

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= \frac{C_1 [2(L_1^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha} + r^2 E_1^2] \xi_1^{1/2}(r)}{r^3 e^{2\alpha}} + \\ &+ \frac{C_2 [2(L_2^2 + \mu^2 r^2)e^{2\alpha} + r^2 E_2^2] \xi_2^{1/2}(r)}{r^3 e^{2\alpha}} \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{m}{r(r - 2m)} + \frac{C_1 \xi_1^{3/2}(r)}{e^{2\alpha} r^3 (r - 2m)} + \frac{C_2 \xi_2^{3/2}(r)}{e^{2\alpha} r^3 (r - 2m)} \quad (2.101)$$

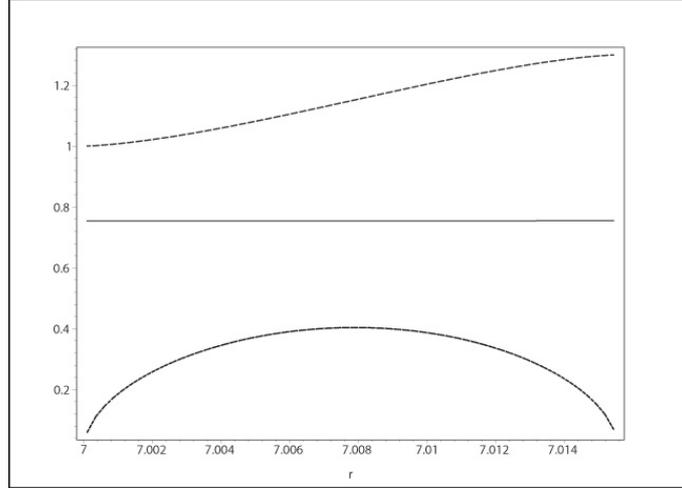


Figura 2.4: Gráfico de $m(r)$ (de puntos, curva más alta), $e^{2\alpha(r)}$ (sólida, curva del medio), y 10ρ (de barras, curva más baja), como funciones de r para $r_i = 7,0$, $M_i = 1,0$, $L_0 = 4$, $E_0 = 1$ y $Q_2 = 800$. El límite del dominio es $r_o = 7,0155\dots$, donde $e^{2\alpha(r_o)} = 0,7546\dots$ y $M_o = m(r_o) = 1,2999\dots$

donde $\xi_i(r) = r^2 E_i^2 - (L_i^2 + \mu^2 r^2) e^{2\alpha}$ con $i = 1, 2$.

Para el caso de dos momentos angulares es más complicado encontrar un procedimiento general, análogo al anterior, para demostrar la existencia de un límite de cáscara fina y dilucidar sus propiedades. La complicación radica en el hecho de tener dos funciones, ξ_1 y ξ_2 , cuyos soportes suponemos que se intersectan, pero que no son en general iguales. Para tomar un límite, digamos C_1 y C_2 tendiendo a infinito, tenemos que especificar cómo se relacionan los soportes de estas funciones para que el límite tenga sentido. No vamos a abordar en esta tesis este problema en general, pero sí vamos a construir ejemplos numéricos de cáscaras de dos componentes que efectivamente tienden a una cáscara fina, cuyos parámetros son consistentes con los que obtuvimos mediante el formalismo de superficies singulares.

En primer lugar escribimos,

$$M_o - M_i = \Delta M = \Delta m_1 + \Delta m_2 \quad (2.102)$$

donde,

$$\Delta m_1 = \int 4\pi r^2 \rho_1 dr \quad , \quad \Delta m_2 = \int 4\pi r^2 \rho_2 dr \quad (2.103)$$

con las funciones ρ_1 y ρ_2 definidas en (2.47). Proponemos un radio interior común r_i para cada componente. Teniendo en cuenta que la elección de parámetros debe ser coherente con (2.49) y (2.50), podemos construir un ejemplo numérico con C_1 y C_2 lo suficientemente grandes como para que el grosor de la cáscara resulte varios órdenes de magnitud menor al radio de

la misma. La manera de comparar la distribución gruesa resultante con una cáscara fina estática de dos componentes, va a ser calculando $\Delta m_2/\Delta m_1$ para la primera, y el cociente de las contribuciones de cada componente en $-S_\tau^\tau$ para la segunda. Como se puede ver a partir de (2.75) con $n(L) = N_1\delta(L - L_1) + N_2\delta(L - L_2)$, tenemos

$$\begin{aligned}\sigma &= -S_\tau^\tau = \sigma_1 + \sigma_2 \\ &= \frac{\mu}{4\pi R_0^3} \left[N_1 \sqrt{R_0^2 + L_1^2} + N_2 \sqrt{R_0^2 + L_2^2} \right].\end{aligned}\quad (2.104)$$

Utilizando las ecuaciones (2.79) y (2.80), la relación que vamos a corroborar se escribe,

$$\frac{\Delta m_2}{\Delta m_1} \approx \frac{\sigma_1(R_0)}{\sigma_2(R_0)} = \frac{(\tilde{L}_0^2 - L_1^2)(R_0^2 + L_2^2)}{(L_2^2 - \tilde{L}_0^2)(R_0^2 + L_1^2)}\quad (2.105)$$

donde \tilde{L}_0 es la expresión (2.77) entendida como función de M_I , M_{II} y R_0 .

Tomamos, como en el ejemplo anterior de dos componentes, $L_1 = 5$, $L_2 = 6,5$, $r_i = 7$, $M_i = 1$ y $\alpha(r_i) = 0$, pero esta vez elegimos $C_1 = 800$, $C_2 = 240$. La figura 2.5 representa las funciones $\rho(r)$, $\rho_1(r)$ y $\rho_2(r)$ para estos parámetros. Podemos ver que la cáscara se extiende sólo en la región $7,0 \leq r \leq 7,020\dots$, por lo que su grosor es de menos del 0,4% de su radio. Por otro lado, la masa se incrementa por un factor cercano a 2, ya que $M_o = 2,022\dots$

Integrando, obtenemos para este ejemplo $\Delta m_1 = 0,4545\dots$ y $\Delta m_2 = 0,5708\dots$. Reemplazando $R_0 = 7$ en (2.105) y en (2.77), resulta $\tilde{L}_0 = 5,8079\dots$ y $\tilde{L}_0 = 5,8386\dots$ respectivamente. La discrepancia es del orden del cociente entre el grosor y el radio, lo que consideramos una buena concordancia.

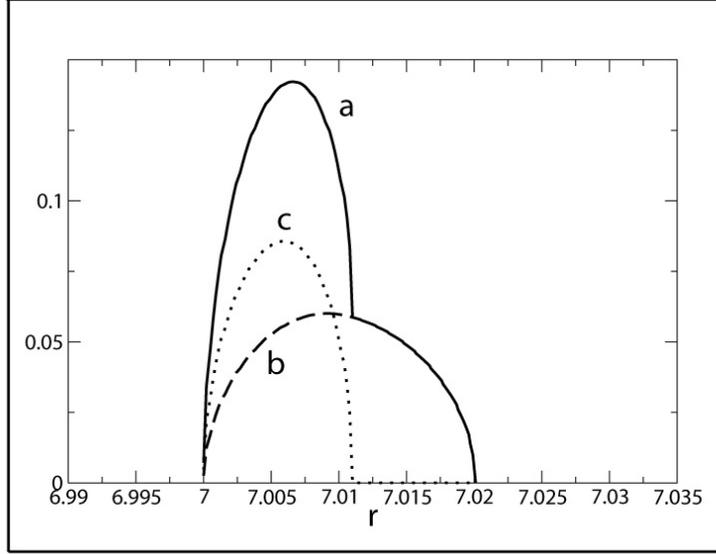


Figura 2.5: Gráfico de $\rho(r)$ (sólida), $\rho_1(r)$ (de puntos), y $\rho_2(r)$ (de barras), como funciones de r para $r_i = 7,0$, $M_1 = 1,0$, $L_1 = 5$, $L_2 = 6,5$, $E_1^2 = 1,51\dots$, $E_2^2 = 1,86\dots$ y $C_1 = 800$, $C_2 = 240$. El límite del dominio es $r_o = 7,020\dots$, con $e^{2\alpha(r_o)} = 1,0026\dots$ y $M_o = m(r_o) = 2,022\dots$

2.3.3. Cáscaras de Einstein

Las ecuaciones de Einstein para este caso son,

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dr} &= 4\pi n(r)(\mu^2 r^2 + L^2(r)) \\ \frac{d\alpha}{dr} &= \frac{m(r)}{r(r - 2m(r))}\end{aligned}$$

donde $L^2 = \mu^2 r^2 m(r)/(r - 3m(r))$.

Consideramos cáscaras de soporte compacto y llamamos, como en los casos anteriores, r_i al radio interno, y r_o al externo. La idea es hacer tender $r_o \rightarrow r_i$ manteniendo $M_o = m(r_o)$ y $M_i = m(r_i)$ constantes. En primer lugar, escribamos la derivada de $L^2(r)$,

$$\frac{dL^2}{dr} = \frac{\mu r^3}{(r - 3m)^2} \frac{dm}{dr} + \frac{\mu r m(r - 6m)}{(r - 3m)^2} \quad (2.106)$$

en la cual nos va a ser útil notar que si dm/dr es lo suficientemente grande, dL^2/dr resulta positivo en toda la región. En el límite de cáscara delgada dm/dr debe tender a infinito, por lo que podemos considerar $dL^2/dr > 0$. De esta manera, para cáscaras lo suficientemente finas podemos escribir

$$\frac{r_i^2 M_i}{r_i - 3M_i} \leq L^2 \leq \frac{r_o^2 M_o}{r_o - 3M_o}. \quad (2.107)$$

Consideremos ahora la función $\tilde{n}(r)$ definida como la cantidad total de partículas entre r y $r + dr$

$$4\pi\rho r^2 \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1/2} = \tilde{n}(r) \sqrt{\mu^2 + \frac{L^2}{r^2}}. \quad (2.108)$$

Como asumimos $dL^2/dr > 0$, podemos escribir,

$$\hat{n}(L^2) = \tilde{n}(r) \frac{dr}{dL^2} \quad (2.109)$$

donde $\hat{n}(L^2)$ ahora representa el número de partículas con momentos angulares entre L^2 y $L^2 + dL^2$. Por otro lado, consideremos,

$$m(r) = \frac{L^2 r}{3L^2 + r^2} \quad (2.110)$$

y derivemos esta expresión con respecto a L^2 para así escribir,

$$\frac{dm}{dL^2} = \frac{r^3}{(3L^2 + r^2)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{dr}{dL^2}\right) \quad (2.111)$$

donde tuvimos en cuenta el hecho de que $dr/dL^2 \rightarrow 0$ en el límite $r_o \rightarrow r_i$. De (2.108) y (2.111), y tomando el límite $r_i \rightarrow r_o \rightarrow R_0$, podemos finalmente escribir,

$$\hat{n}(L^2) = \frac{R_0^4}{\mu(3L^2 + R_0^2)^{3/2}(L^2 + R_0^2)} \quad (2.112)$$

donde L^2 está restringido al rango

$$\frac{R_0^2 M_I}{R_0 - 3M_I} \leq L^2 \leq \frac{R_0^2 M_{II}}{R_0 - 3M_{II}}. \quad (2.113)$$

Demostramos entonces que, si el límite existe, el mismo corresponde a una cáscara fina con una distribución de momentos angulares dada por (2.112).

2.4. Estabilidad de las cáscaras finas

Vimos en la sección 2.2 que existen soluciones de las ecuaciones de Einstein que representan cáscaras dinámicas con distribuciones arbitrarias para el momento angular de sus partículas. Cabe la pregunta si estas soluciones resultan “robustas” ante perturbaciones, lo que nos hablaría de su relevancia para la física. Lo expuesto en esta sección son resultados propios, y constituyen el tema central de [1].

El primer análisis de estabilidad que vamos a considerar corresponde a la posibilidad de que haya “evaporación” de partículas que constituyen la cáscara. En segunda instancia, trataremos la inestabilidad ante separación de componentes para una cáscara con dos momentos angulares.

2.4.1. Estabilidad de las órbitas de partículas individuales

Pensemos en el movimiento de las partículas dentro de la cáscara fina. Si trazamos las trayectoria que las mismas describen, que son geodésicas de la métrica inducida, se puede ver que en general no siguen geodésicas de la métrica ambiente según ninguna de las dos conexiones inducidas en la cáscara por la métrica de las regiones (I, II) respectivamente. Hablamos de inestabilidad en este contexto si existen geodésicas de la métrica ambiente que partan de un punto de la cáscara y cuya tangente en ese punto sea la 4-velocidad de alguna partícula constituyente. La partícula cuya 4-velocidad sea esa, bajo la hipótesis de que no hay *fuerza* alguna más que la gravedad, no tendría *a priori* motivos para no seguir esa geodésica, lo que implicaría la “evaporación” de dicha partícula.

Para analizar este fenómeno consideramos un sistema coordinado gaussiano alrededor de la cáscara, y llamamos η a la coordenada normal a la misma. El posible apartamiento con respecto a la cáscara de las partículas con momento angular L se puede describir calculando la “aceleración” $d^2\eta/d\sigma^2$ que tendrían, siendo σ el tiempo propio de las mismas, si éstas siguieran geodésicas de la métrica ambiente. Tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{d\sigma^2}|_{(I,II)} &= -\Gamma_{ij}^\eta u^i u^j & (2.114) \\ &= -\frac{M_{I,II} + R^2\ddot{R}}{R\sqrt{R(R\dot{R}^2 + R - 2M_{I,II})}} + L^2 \frac{R\dot{R}^2 + R - 3M_{I,II} - R^2\ddot{R}}{R^3\sqrt{R(R\dot{R}^2 + R - 2M_{I,II})}}, \end{aligned}$$

donde (i, j) son índices coordinados de la cáscara.

Habría estabilidad sólo si a lo largo de las trayectorias de las partículas se cumple $d^2\eta/d\sigma^2|_I > 0$ y $d^2\eta/d\sigma^2|_{II} < 0$. Pero, a partir de (2.114), podemos ver que eso puede no ser así: si por ejemplo $\ddot{R} < 0$ y $R > 3M_{II}$, tendríamos para L lo suficientemente grande $d^2\eta/d\sigma^2|_{II} > 0$, lo que implicaría la existencia de un L_p tal que toda partícula con $L > L_p$ debería salir de la cáscara y meterse en la región II . Podemos también observar a partir de estas expresiones que si \ddot{R} es lo suficientemente positivo (negativo), las partículas resultan estables ante evaporación *hacia* el lado II (I) independientemente de su momento angular.

Las expresiones para $d^2\eta/d\sigma^2|_{I,II}$ pueden colocarse como funciones de R y de L reemplazando \dot{R} y \ddot{R} por medio de (2.72) y (2.70). Ésto nos definiría, para un dado $n(L)$, regiones de estabilidad e inestabilidad en el plano (R, L) . La cáscara resulta estable ante evaporación de partículas siempre que para un dado $R_0 = R(\tau_0)$ el soporte de $n(L)$ se encuentre completamente contenido en la región de estabilidad para ese R_0 . Se puede mostrar que ambas condiciones de estabilidad son compatibles en el sentido de que no pueden

cumplirse al mismo tiempo $d^2\eta/d\sigma^2|_I < 0$ y $d^2\eta/d\sigma^2|_{II} > 0$. Se da una inestabilidad o la otra, no las dos simultáneamente. En general, considerando la evolución $R(\tau)$ para una cáscara dada, la misma va a devenir en algún momento a una situación en la que las partículas fuera de cierto rango de momentos angulares deban abandonar la cáscara, resultando en un “engrosamiento” de la misma en el caso de $n(L)$ continuo, o en una “división” de la cáscara en dos o más cáscaras si pensamos en una distribución discreta para los momentos angulares. Para esta última posibilidad (separación de componentes de distinto momento angular cuando se tiene una distribución discreta) conviene hacer un análisis de estabilidad directo, planteando una separación infinitesimal para las distintas componentes, como vamos a realizar en la siguiente subsección.

2.4.2. Estabilidad ante fragmentación de la cáscara

Consideremos una separación infinitesimal de cierto conjunto de partículas, definido como aquellas partículas cuyo momento angular se encuentra en un dado rango $L_a \leq L \leq L_b$, con respecto al resto de la cáscara.

Cáscara con dos momentos angulares

$$\blacksquare n(L) = N_1\delta(L - L_1) + N_2\delta(L - L_2)$$

En este caso vamos a considerar una separación entre las N_1 partículas con L_1 y las N_2 partículas con L_2 , como ilustra la figura 2.6. Escribimos nuevamente la ecuación (2.70),

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = -\frac{1}{2R} \left[1 + \dot{R}^2 - (4\alpha + 1) \sqrt{1 - \frac{2M_I}{R} + \dot{R}^2} \sqrt{1 - \frac{2M_{II}}{R} + \dot{R}^2} \right]$$

donde, para este caso

$$\alpha = \frac{1}{2(N_1\sqrt{R^2 + L_1^2} + N_2\sqrt{R^2 + L_2^2})} \left[\frac{N_1L_1^2}{\sqrt{R^2 + L_1^2}} + \frac{N_2L_2^2}{\sqrt{R^2 + L_2^2}} \right]. \quad (2.115)$$

Una separación de las componentes implicaría un espacio-tiempo donde existen dos cáscaras, cada una de un único momento angular (con parámetros (N_1, L_1) y (N_2, L_2) respectivamente), que coinciden como subvariedades hasta el instante de separación. Entre las cáscaras que se separan habría una nueva región de vacío en simetría esférica, por lo tanto Schwarzschild, a cuyo parámetro de masa llamaremos M_{int} . La idea es calcular las aceleraciones que tomarían estas cáscaras una con respecto a la otra. *Si el signo de esta aceleración es opuesto al de la separación, consideramos estable al sistema;*

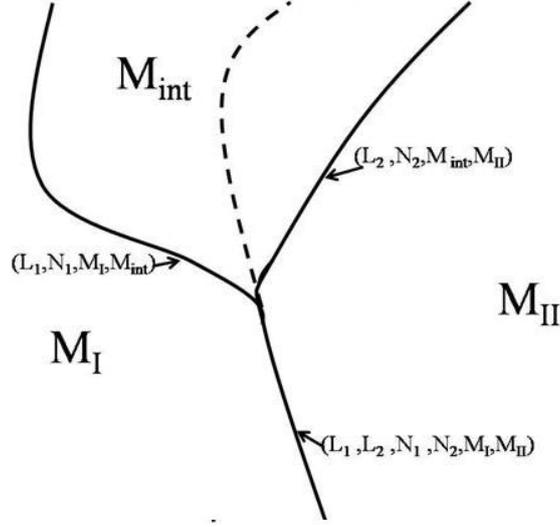


Figura 2.6: Esquema ilustrativo de las funciones $R(\tau)$, $R_1(\tau)$ y $R_2(\tau)$ en una situación de *splitting* o separación de componentes.

caso contrario, una perturbación de este tipo provocaría el desmembramiento de la cáscara.

Suponemos sin pérdida de generalidad que la cáscara de parámetros (N_2, L_2) es la que se aparta hacia la región *II*. La ecuación (2.70) se escribe para esta cáscara,

$$\frac{d^2 R_2}{d\tau_2^2} = -\frac{1}{2R_2} \left[1 + \dot{R}_2^2 - (4\alpha_2 + 1) \sqrt{1 - \frac{2M_{int}}{R_2} + \dot{R}_2^2} \sqrt{1 - \frac{2M_{II}}{R_2} + \dot{R}_2^2} \right] \quad (2.116)$$

donde

$$\alpha_2 = \frac{L_2^2}{2(R_2^2 + L_2^2)}. \quad (2.117)$$

Análogamente, escribimos para la cáscara con (N_1, L_1) ,

$$\frac{d^2 R_1}{d\tau_1^2} = -\frac{1}{2R_1} \left[1 + \dot{R}_1^2 - (4\alpha_1 + 1) \sqrt{1 - \frac{2M_I}{R_2} + \dot{R}_1^2} \sqrt{1 - \frac{2M_{int}}{R_1} + \dot{R}_1^2} \right] \quad (2.118)$$

con

$$\alpha_1 = \frac{L_1^2}{2(R_1^2 + L_1^2)}. \quad (2.119)$$

Llamamos τ_0 al momento de la separación, y sincronizamos τ_2 y τ_1 con τ en ese momento. Tomamos como condición de suavidad en el punto de bifurcación $\dot{R}(\tau_0) = \dot{R}_1(\tau_0) = \dot{R}_2(\tau_0)$, que resulta equivalente a pedir que los espacios tangentes de cada superficie coincidan en ese punto. Esta condición

nos va permitir calcular M_{int} de manera unívoca por medio de las ecuaciones (2.71) aplicadas a ambas cáscaras. Por otra parte, se puede demostrar, también mediante (2.71), que

$$d^2 R_1/d\tau_1^2(\tau_0) < d^2 R/d\tau^2(\tau_0) < d^2 R_2/d\tau_2^2(\tau_0)$$

ó

$$d^2 R_2/d\tau_2^2(\tau_0) < d^2 R/d\tau^2(\tau_0) < d^2 R_1/d\tau_1^2(\tau_0).$$

Teniendo esto en cuenta, podríamos pensar que la condición de estabilidad sería,

$$d^2 R_2/d\tau_2^2(\tau_0) < d^2 R/d\tau^2(\tau_0) \quad (2.120)$$

pero ésto no es una conclusión lógica, ya que se trata de derivadas con respecto a tiempos diferentes. Sin embargo, podemos mostrar que (2.120) es en efecto la condición correcta. Podemos mostrar esto calculando las derivadas con respecto a un mismo tiempo, como ser la coordenada t_{II} . En primer lugar, para la cáscara original tenemos,

$$\left(\frac{d\tau}{dt_{II}}\right)^2 = \frac{(R(\tau) - 2M_{II})^2}{R(\tau)^2 - 2R(\tau)M_{II} + R(\tau)^2 \left(\frac{dR(\tau)}{d\tau}\right)^2} \quad (2.121)$$

mientras que derivando $R(t_{II})$ nos queda

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R(t_{II})}{dt_{II}^2} &= \frac{R}{R - 2M_{II}} \left(\frac{d\tau}{dt_{II}}\right)^4 \frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2} \\ &+ \frac{M_{II}}{R^3(R - 2M_{II})} \left[R - 2M_{II} + R \left(\frac{d\tau}{dt_{II}}\right)^2 \right] \left[2R - 4M_{II} + R \left(\frac{d\tau}{dt_{II}}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Podemos realizar el mismo procedimiento para τ_2 y así obtener las mismas fórmulas (2.121) y (2.122), pero estando reemplazados τ por τ_2 y $R(\tau)$ por $R_2(\tau_2)$. Las condiciones en la intersección implican que $d\tau/dt_{II}(\tau_0) = d\tau_2/dt_{II}(\tau_0)$, por lo tanto, como se puede ver en (2.122), la condición $d^2 R_2/d\tau_2^2(\tau_0) < d^2 R/d\tau^2(\tau_0)$ se cumple si y sólo si $d^2 R_2/dt_{II}^2(\tau_0) < d^2 R/dt_{II}^2(\tau_0)$, lo que demuestra que (2.120) es la condición de estabilidad correcta.

La condición crítica es $d^2 R_1/d\tau_1^2(\tau_0) = d^2 R/d\tau^2(\tau_0) = d^2 R_2/d\tau_2^2(\tau_0)$. Manipulando las expresiones (2.116), (2.118) y (2.71) obtenemos

$$\frac{(3L_2^2 + R^2)}{(R^2 + L_2^2)} \sqrt{1 - \frac{2M_{II}}{R} + \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2} = \frac{(3L_1^2 + R^2)}{(R^2 + L_1^2)} \sqrt{1 - \frac{2M_I}{R} + \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2}. \quad (2.123)$$

Los lados de esta ecuación son monótonos crecientes con respecto a L_2 y L_1 respectivamente. Reemplazando \dot{R} mediante la ecuación (2.72) y dando,

por ejemplo, los parámetros (R, L_1, M_I, M_{II}) , obtenemos mediante (2.123) un máximo para L_2 . Análogamente, dando L_2 en vez de L_1 esta ecuación nos define un mínimo para L_1 . En particular, queda explícito que si $L_2 < L_1$ la cáscara resulta estable. Notamos que, calculando $R(\tau)$, podemos escribir estas cotas como $L_{1min}(\tau)$ y $L_{2max}(\tau)$. También de aquí podemos ver que si $L_2 = L_1 = L_0$ (cáscara de un único momento angular, como las de [66]), las cotas que se desprenden de acá cumplen siempre $L_{1min}(\tau) < L_0 < L_{2max}(\tau)$, lo que significa que *toda cáscara fina cuyas partículas tienen todas el mismo módulo del momento angular, es estable ante separación de sus constituyentes a lo largo de toda su evolución*.

Otro resultado interesante se obtiene tomando el límite $R \rightarrow \infty$. Las cotas para L_1 y L_2 se escriben en ese caso

$$L_{2max}^2 = \frac{M_{II} - M_I}{2(1 + \dot{R}^2)} R + L_1^2 + \frac{M_{II}(M_{II} - M_I)}{(1 + \dot{R}^2)^2} + \mathcal{O}(R^{-1}) \quad (2.124)$$

$$L_{1min}^2 = -\frac{M_{II} - M_I}{2(1 + \dot{R}^2)} R + L_2^2 - \frac{M_{II}(M_{II} - M_I)}{(1 + \dot{R}^2)^2} + \mathcal{O}(R^{-1}) \quad (2.125)$$

Como \dot{R} es finito en el límite $R \rightarrow \infty$, esto implica que toda cáscara con (L_1, L_2) dado se vuelve estable para R lo suficientemente grande.

En general, dando una configuración inicial $R(\tau_0)$ que resulte inicialmente estable al satisfacer las cotas impuestas por (2.123), puede ocurrir, dependiendo de los parámetros de la cáscara, que en algún tiempo posterior τ_1 las condiciones de estabilidad dejen de satisfacerse. Vamos a comprobar explícitamente que esto ocurre con un par de ejemplos.

Ejemplo 1: $M_I = 0,45$, $M_{II} = 1$, $\mu = 0,5$, $L_1 = 2,8$, $L_2 = 3,7$, $N_1 = 0,3119$, y $N_2 = 0,8044$

Estos son parámetros que permiten tener un movimiento periódico, como el que se observa en la figura 2.7 que representa a $R(\tau)$. En la figura 2.8 se ilustran las derivadas segundas de $R(\tau)$, y los lados derechos de (2.116) y de (2.118) respectivamente, tomando $R_2 = R_1 = R$, y $\dot{R}_2 = \dot{R}_1 = \dot{R}$.

Ejemplo 2: $M_I = 0,6295$, $M_{II} = 1$, $\mu = 0,5$, $L_1 = 10$, $L_2 = 11$, $N_1 = 0,2$, and $N_2 = 0,3$

Estos parámetros corresponden a una cáscara capaz de tener movimiento no acotado. La figura 2.9 que representa a $R(\tau)$ ilustra esa situación en los alrededores del punto de retorno $R = 8$. Las figuras 2.10 y 2.11 muestran las mismas funciones que la figura 2.8 para estos parámetros. Vemos que en este caso hay dos puntos críticos que definen regiones de estabilidad y de inestabilidad ante separación de las componentes.

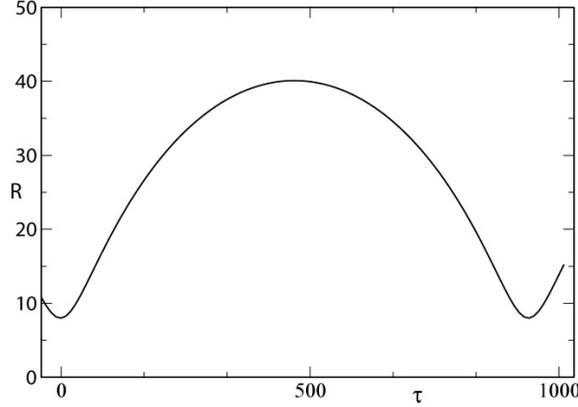


Figura 2.7: $R(\tau)$ como función de τ para $M_I = 0,45$, $M_{II} = 1$, $\mu = 0,5$, $L_1 = 2,8$, $L_2 = 3,7$, $N_1 = 0,3119$, y $N_2 = 0,8044$. El movimiento es periódico y acotado.

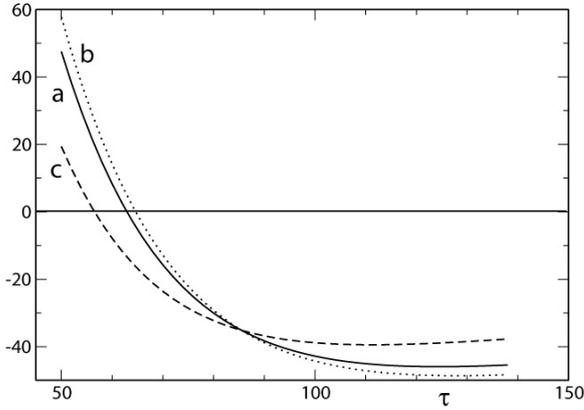


Figura 2.8: La curva a (línea sólida) corresponde a la aceleración $d^2R/d\tau^2$ de la cáscara; la curva b (línea de puntos) corresponde a $d^2R_2/d\tau_2^2$, calculada como el lado derecho de (2.116) en una situación de separación de las componentes; y la curva c (línea de barras) corresponde a $d^2R_1/d\tau_1^2$, calculada análogamente a partir de (2.118). Únicamente está representada la región donde el sistema se vuelve crítico ante separación de componentes. El valor crítico de τ corresponde al de la intersección de las curvas. A la derecha de este punto tenemos $d^2R_2/d\tau_2^2 < d^2R/d\tau^2 < d^2R_1/d\tau_1^2$, y la cáscara es estable. Tenemos la situación opuesta del lado izquierdo. Una unidad vertical de este gráfico corresponde a 10^{-5} .

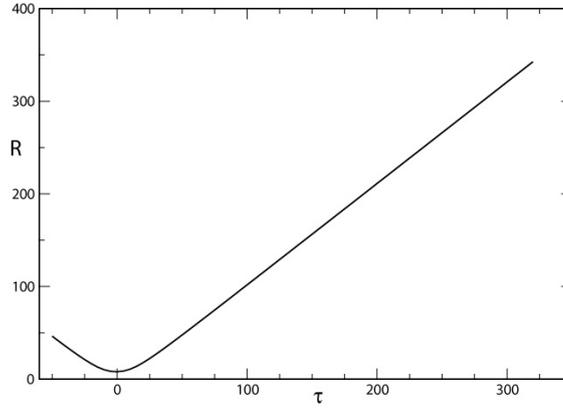


Figura 2.9: $R(\tau)$ como función de τ para $M_I = 0,6295$, $M_{II} = 1$, $\mu = 0,5$, $L_1 = 10, L_2 = 11$, $N_1 = 0,2$, y $N_2 = 0,3$. Existe un punto de retorno en $R = 8$, donde la cáscara rebota para volver a expandirse indefinidamente.

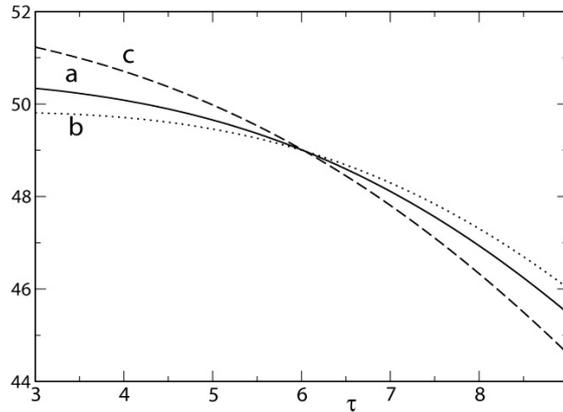


Figura 2.10: La curva a (línea sólida) corresponde a la aceleración $d^2R/d\tau^2$ de la cáscara; la curva b (línea de puntos) corresponde a $d^2R_2/d\tau_2^2$, calculada como el lado derecho de (2.116) en una situación de separación de las componentes; y la curva c (línea de barras) corresponde a $d^2R_1/d\tau_1^2$, calculada análogamente a partir de (2.118). Representamos únicamente la región cercana al punto crítico en $\tau \simeq 6,03\dots$. El valor crítico de τ corresponde al del punto de intersección de las tres curvas. A la izquierda de este punto tenemos $d^2R_2/d\tau_2^2 < d^2R/d\tau^2 < d^2R_1/d\tau_1^2$, por lo que la cáscara es estable. La situación opuesta ocurre del lado derecho (hasta llegar al punto crítico posterior, representado en la figura 2.11). La unidad vertical de este gráfico corresponde a 10^{-3} .

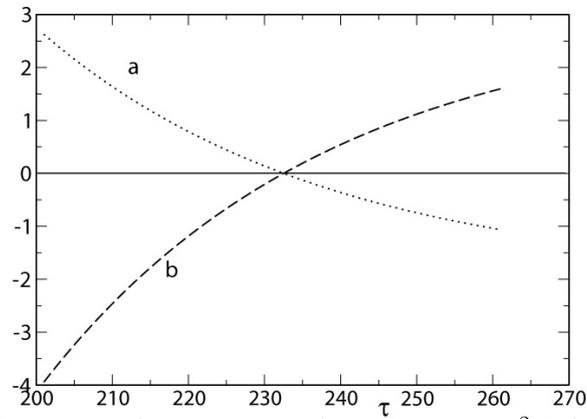


Figura 2.11: La curva a (línea de puntos) corresponde a $d^2 R_2/d\tau_2^2 - d^2 R/d\tau^2$, y la curva b (línea de barras), a $d^2 R_1/d\tau_1^2 - d^2 R/d\tau^2$, calculadas como en la figura 2.10. Representamos únicamente la región cercana al punto crítico en $\tau \simeq 232,5$. El valor crítico de τ corresponde al del punto de intersección de las tres curvas. A la derecha de este punto tenemos $d^2 R_2/d\tau_2^2 < d^2 R/d\tau^2 < d^2 R_1/d\tau_1^2$, por lo que la cáscara es estable. La situación opuesta ocurre del lado izquierdo (hasta llegar al punto crítico anterior, representado en la figura 2.10). La unidad vertical de este gráfico corresponde a 10^{-7} .

Capítulo 3

Superficies singulares isótropas en dimensiones arbitrarias

Las inestabilidades que encontramos para cáscaras finas dinámicas, tanto la posible evaporación de partículas como la separación o “splitting” de constituyentes de la cáscara, no tienen *a priori* por qué ser fenómenos particulares de la simetría esférica y/o de los sistemas de Vlasov. En este capítulo mostraremos que se pueden construir soluciones de las ecuaciones de Einstein que representan superficies singulares que se separan en varias superficies, también para variedades de dimensión arbitraria, con simetrías algo más generales, y con contenido de materia más general.

Como mencionamos en la introducción, una de las motivaciones de interés actual para investigar superficies singulares es el desarrollo de la cosmología de branas. Extendiendo los análisis de estabilidad hechos en la sección 2.4 para escenarios típicos dentro de esta familia de cosmologías, podemos contribuir en la discusión acerca de las propiedades matemáticas de estos modelos, construir posibles variaciones, y tal vez decir algo sobre su robustez matemática. Dentro de la extensa literatura dedicada a la cosmología de branas (ver por ejemplo [21] y referencias allí citadas), no encontramos análisis análogos a los realizados en la sección 2.4, por lo que nos pareció relevante investigar hasta qué punto pueden éstos extenderse a universos-brana. También resulta de particular interés dilucidar en qué medida la falta de unicidad en la evolución de un dato inicial correspondiente a una superficie singular se extiende a modelos de materia y simetrías distintos a los del capítulo anterior. Investigar si existe esta falta de unicidad en otros contextos nos ayuda a ganar intuición para analizar de manera general el problema del valor inicial con fuentes concentradas, que es lo que trataremos específicamente en el capítulo 5.

3.1. Superficies singulares en espacio-tiempos de $D = n + 2$ dimensiones con simetría esférica

Vamos ahora a considerar una superficie orientable Σ *embedded* en un espacio-tiempo vacío de D dimensiones con simetría esférica. Decimos que un espacio-tiempo de $n + 2$ dimensiones es esféricamente simétrico si existe un grupo de isometrías isomorfas al grupo $SO(n + 1)$ y un *slicing* espacial invariante ante la acción del grupo [8]. Definiendo coordenadas ortogonales (x_0, x_1) en el espacio de las órbitas, la métrica se escribe,

$$ds^2 = -f(x_0, x_1)dx_0^2 + h(x_0, x_1)dx_1^2 + r(x_0, x_1)^2 d\Omega_n^2 \quad (3.1)$$

donde $d\Omega_n$ es el elemento de línea para una n -esfera de radio unitario.

Por otra parte, en un entorno de la superficie Σ siempre se pueden definir coordenadas gaussianas (τ, η) . En este sistema la métrica se expresa,

$$ds^2 = -f(\tau, \eta)d\tau^2 + d\eta^2 + r(\tau, \eta)^2 d\Omega_n^2 \quad (3.2)$$

donde $f(\tau, 0) = 1$. La curvatura extrínseca en estas coordenadas se escribe,

$$K_j^i = \text{diag} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}, \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}, \dots, \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \right] \quad (3.3)$$

siendo la métrica inducida,

$$ds_{\Sigma}^2 = -d\tau^2 + R(\tau)^2 d\Omega_n^2 \quad (3.4)$$

con $R(\tau) \equiv r(\tau, 0)$.

Puede demostrarse que las condiciones de empalme de Israel-Darmois (1.17, 1.18 y 1.19) mantienen la misma forma en espacio-tiempos de dimensiones arbitrarias, con superficies singulares de codimensión uno. Para poder extraer información de las mismas, es conveniente calcular la curvatura extrínseca en términos de parámetros característicos de Σ y su variedad ambiente. En un espacio-tiempo vacío con simetría esférica vale el teorema de Birkhoff, que nos asegura que en cada región vacía (de un lado y del otro de la superficie Σ) existen coordenadas (t, r) donde la métrica se expresa,

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_n^2 \quad (3.5)$$

siendo $F(r) = 1 - 2M/r^{n-1}$. En este caso M , como cuando $n = 2$, representa la masa newtoniana efectiva “dentro” de la órbita de menor radio. Como no estamos interesados en analizar situaciones de colapso, vamos a suponer en general $R(\tau)^{n-1} > 2M$.

La curvatura extrínseca (3.3) puede entonces escribirse,

$$K_j^i = \text{sign} \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \right) \text{diag} \left[\frac{F'(R) + \ddot{R}}{2\sqrt{\dot{R}^2 + F(R)}}, \frac{\sqrt{\dot{R}^2 + F(R)}}{R}, \dots, \frac{\sqrt{\dot{R}^2 + F(R)}}{R} \right] \quad (3.6)$$

por lo que dando M y especificando si η crece o decrece con r , podemos escribir la curvatura extrínseca como función de $R(\tau)$ y sus primeras dos derivadas.

Por otra parte, como vimos en la introducción, el tensor de masa-energía para una superficie singular se escribe,

$$T_{ab} = \delta(\Sigma) S_{ab} \quad (3.7)$$

donde S es un tensor definido en Σ . En virtud de la simetría del problema, el tensor S puede escribirse,

$$S_j^i = \text{diag}[-\rho(\tau), p(\tau), \dots, p(\tau)] \quad (3.8)$$

lo que resulta equivalente al tensor de masa-energía de un fluido perfecto de n dimensiones, donde las líneas de flujo coinciden con las trayectorias de los observadores comóviles para con la superficie. Explícitamente,

$$S^{ij} = p h^{ij} + (\rho + p) u^i u^j \quad (3.9)$$

donde $u^a = (\partial/\partial\tau)^a$. Si ρ y p resultan funciones de $R(\tau)$, la ecuación (1.19) se escribe

$$\frac{d\rho}{dR} + \frac{n(\rho + p)}{R} = 0. \quad (3.10)$$

De esta ecuación podemos resolver $p(R)$ dando $\rho(R)$ y viceversa. En particular, si hubiera una ecuación de estado $f(\rho, p) = 0$, quedarían ambas funciones determinadas.

Para escribir las ecuaciones de movimiento resultantes, vamos a analizar por separado varias estructuras diferentes para el espacio-tiempo ambiente. En primera instancia, proponemos dos regiones interiores Schwarzschild idénticas, donde Σ es el borde de las mismas, pegadas con simetría Z_2 centrada en la superficie. Esta construcción es típica de modelos de branas, como mencionamos en la introducción, y está inspirada en resultados en teoría de cuerdas (ver, por ejemplo, [23]). En segunda instancia, relajamos la simetría Z_2 , por lo que las masas de las regiones Schwarzschild a ambos lados de la cáscara son diferentes. Consideramos dos posibilidades dentro de los modelos sin simetría Z_2 : por un lado analizamos el caso en el que ambas regiones vacías son *interiores*, y por el otro el caso en el que una es *interior* y la otra *exterior*. Esto último es equivalente a considerar el espacio-tiempo ambiente

como una variedad con simetría esférica *estándar*, en el sentido de que r resulta una coordenada global para el espacio de las órbitas, constituyendo una generalización para dimensiones arbitrarias de las variedades tratadas en las secciones 2.2 y 2.4.

3.1.1. Simetría Z_2 centrada en la superficie

En este caso r siempre decrece al alejarnos de Σ , lo que implica que decrece con η hacia el lado $\eta > 0$, y crece con η simétricamente hacia la dirección opuesta $\eta < 0$. Los parámetros M de cada lado son idénticos, y las condiciones de empalme (1.17) se escriben,

$$-\frac{2n}{R}\sqrt{\dot{R}^2 + F} = -\kappa\rho \quad (3.11)$$

$$-\frac{F' + 2\ddot{R}}{\sqrt{\dot{R}^2 + F}} - \frac{2(n-1)}{R}\sqrt{\dot{R}^2 + F} = \kappa p \quad (3.12)$$

De la primera de estas ecuaciones obtenemos la ecuación de movimiento,

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 + V_1(R) = 0 \quad , \quad V_1(R) \equiv \frac{1}{2} - \frac{M}{R^{n-1}} - \frac{\kappa^2 \rho^2 R^2}{8n^2} \quad (3.13)$$

que nos permite, dando $\rho(R)$, describir los posibles movimientos de la cáscara de manera análoga a los de una partícula en un potencial unidimensional. Por otra parte, de la segunda podemos escribir,

$$\ddot{R} = -\frac{n(\alpha+1)-1}{R} \left(1 + \dot{R}^2 - \frac{2M}{R^{n-1}} \right) - \frac{(n-1)M}{R^n} \quad (3.14)$$

donde, como en la sección 2.2, $\alpha \equiv p/\rho$.

3.1.2. Sin simetría Z_2

Para el caso en el que ambas regiones vacías son interiores, r decrece hacia ambos lados de la superficie y los parámetros M son diferentes. Si en cambio tenemos que el espacio-tiempo ambiente admite r como coordenada global, una región vacía debe ser exterior y la otra interior, lo que implica que r crece con η (o decrece) en ambos sentidos, y el parámetro M de la región exterior tiene que ser mayor que el de la región interior¹. Elegimos $\nabla^a \eta$ apuntando hacia la región de mayor M , y vamos a denotar con el índice I a la región $\eta < 0$, y con el índice II a la región $\eta > 0$ ($M_{II} > M_I$). Las

¹Esto es consecuencia de suponer $\rho > 0$, como se puede ver en (3.15).

condiciones de empalme (1.17) se escriben,

$$\frac{n}{R} \left(\pm \sqrt{\dot{R}^2 + 1 - F_{II}} - \sqrt{\dot{R}^2 + 1 - F_I} \right) = -\kappa\rho \quad (3.15)$$

$$\pm \frac{F'_{II} + 2\ddot{R}}{2\sqrt{\dot{R}^2 + F_{II}}} - \frac{F'_I + 2\ddot{R}}{2\sqrt{\dot{R}^2 + F_I}} + \frac{n-1}{R} \left(\pm \sqrt{\dot{R}^2 + F_{II}} - \sqrt{\dot{R}^2 + F_I} \right) = \kappa p \quad (3.16)$$

donde $F_i = 1 - 2M_i/R^{n-1}$, y el signo \pm es $+$ cuando la región II es externa y $-$ cuando es interna.

La ecuación de movimiento sale de la primera igualdad y se escribe,

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 + V_2(R) = 0 \quad , \quad V_2(R) \equiv \frac{1}{2} - \frac{M_I + M_{II}}{2R^{n-1}} - \frac{n^2(M_{II} - M_I)^2}{2\kappa^2\rho^2R^{2n}} - \frac{\kappa^2\rho^2R^2}{8n^2} \quad (3.17)$$

constituyendo una generalización para dimensiones arbitrarias y para cualquier modelo de materia de la ecuación (2.72). Vemos que, como cuando tenemos simetría Z_2 , dando $\rho(R)$ la ecuación de movimiento es como la de una partícula en el potencial unidimensional $V_2(R)$. De todas formas, para obtener (3.17) hubo que tomar cuadrados en (3.15), por lo que existen soluciones espúreas (soluciones de (3.17) que no son soluciones de (3.15)). La condición para que una solución no sea espúrea se escribe,

$$\pm(n^2(F_I - F_{II}) - \kappa^2\rho^2R^2) > 0 \quad (3.18)$$

por lo que para un dado conjunto $(n, \kappa, R_0, \rho(R_0), M_I, M_{II})$ sólo una de las dos situaciones (región II interna o externa) es posible. De esta manera, dar estos parámetros constituye una forma de caracterizar la región II . Podemos ver que no hay inconsistencia en esta caracterización, ya que los puntos críticos $n^2(F_I - F_{II}) - \kappa^2\rho^2R^2 = 0$, si los hay, se encuentran siempre en una región prohibida $V_2(R) > 0^2$, lo que implica que a lo largo de la evolución de un dato inicial que no resulte en colapso, el lado izquierdo de (3.18) no cambia de signo. Podemos sintetizar esta disyuntiva escribiendo,

$$\pm\sqrt{\dot{R}^2 + F_{II}} = -\frac{\kappa\rho R}{2n} + \frac{n(F_I - F_{II})}{2\kappa\rho R} \quad (3.19)$$

donde el signo \pm queda determinado por el lado derecho de esta expresión. Análogamente, de la segunda ecuación escribimos,

$$\ddot{R} = -\frac{n-1}{2R} \left[1 + \dot{R}^2 \mp \left(\frac{2n}{n-1}\alpha + 1 \right) \sqrt{1 + \dot{R}^2 - \frac{2M_I}{R^{n-1}}} \sqrt{1 + \dot{R}^2 - \frac{2M_{II}}{R^{n-1}}} \right] \quad (3.20)$$

²No consideramos situaciones de colapso ($F_{I,II} < 0$). En ese caso existe un punto crítico $R_c > 0$, y como r resulta una coordenada temporal, $\partial r/\partial\eta$ puede cambiar de signo arbitrariamente.

que es una generalización de (2.70).

3.1.3. Modelos de materia y ecuaciones de movimiento

Las regiones permitidas para cada caso ($R/V_i(R) \leq 0$) dependen fundamentalmente de la forma de $\rho(R)$. Una condición físicamente razonable que se le puede imponer al “contenido energético” (ρ y p) de las cáscaras es que cumpla con la *condición de energía dominante*, que consiste en pedir que el vector flujo de energía $-T_b^a u^b$ sea siempre temporal y apunte hacia el futuro, para cualquier observador con velocidad u^a . Esto es equivalente en este contexto a pedir $-1 \leq \alpha \leq 1$. La ecuación (3.10) implicaría,

$$-2n \leq \frac{d(\ln(\rho))}{d(\ln(R))} \leq 0 \quad (3.21)$$

por lo que dando el valor de la densidad de energía a cierto radio $\rho(R_0)$, podemos escribir las desigualdades

$$R > R_0 \quad \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{2n} \leq \rho(R) \leq \rho_0 \quad (3.22)$$

$$R < R_0 \quad \rho_0 \leq \rho(R) \leq \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{2n}. \quad (3.23)$$

En esta subsección vamos a analizar el comportamiento asintótico de $V(R)$ para los distintos tipos de espacio-tiempo ambiente, y vamos a comentar sobre la estructura de las regiones permitidas para algunos modelos de materia concretos. Para R lo suficientemente grande, vamos a denotar a la potencia dominante en $\rho(R)$ como $-k$, y escribir $\rho \approx C/R^k$, donde, por la condición de energía dominante, $0 \leq k \leq 2n$.

Simetría Z_2 centrada en la superficie

Podemos ver de la expresión (3.13) que si $R \rightarrow 0$, entonces $V_1(R) \rightarrow -\infty$. Esto quiere decir que siempre existen soluciones “colapsantes” para (3.13), independientemente de la naturaleza de ρ y p . Pero lo que nos interesa en este capítulo, ya que no vamos a considerar situaciones de colapso, es el otro extremo asintótico $R \rightarrow \infty$. Las posibilidades para este límite son múltiples según la potencia $-k$ que domine en $\rho(R)$:

- $0 \leq k < 1 \Rightarrow V_1(R) \approx -\frac{\kappa^2 \rho^2 R^2}{8n^2} \propto -R^{2(1-k)}$: siempre hay soluciones no acotadas para $R(\tau)$ dando un dato inicial $R(\tau_0)$ lo suficientemente grande.
- $k = 1 \Rightarrow V_1(R) \approx \frac{1}{2} - \frac{\kappa^2 \rho^2 R^2}{8n^2} \rightarrow \frac{4n^2 - \kappa^2 C^2}{8n^2}$: hay soluciones no acotadas si (sólo si) $\kappa C > 2n$ ($\kappa C \geq 2n$).

- $1 \leq k \leq 2n \Rightarrow V_1(R) \rightarrow \frac{1}{2}$: existe una cota superior para $R(\tau)$ dada por la raíz más grande $V_1(R_{max}) = 0$.

Sin simetría Z_2

Para tomar límites asintóticos para $V_2(R)$ tenemos que tener en cuenta que la desigualdad (3.18) nos indica que si $\rho^2 R^{n+1} \rightarrow 0$ la región II resulta exterior, mientras que si $\rho^2 R^{n+1} \rightarrow \infty$ la misma resulta interior. Observamos, análogamente al caso anterior, que de (3.17) resulta $V_2(R) \rightarrow -\infty$ cuando $R \rightarrow 0$. También en este caso siempre tenemos soluciones de colapso para la ecuación (3.17) independientemente de ρ y p , pero con la diferencia que no siempre son éstas soluciones de (3.15) si caracterizamos *a priori* a la región II . Para el otro extremo asintótico $R \rightarrow \infty$, el que nos incumbe, vamos a separar los distintos casos según el valor de k . Por un lado, si $k < (n+1)/2$, la región II para R lo suficientemente grande sería interior, y los posibles límites son:

- $0 \leq k < 1 \Rightarrow V_2(R) \approx -\frac{\kappa^2 \rho^2 R^2}{8n^2} \propto -R^{2(1-k)}$: siempre hay soluciones no acotadas para $R(\tau)$ dando un dato inicial $R(\tau_0)$ lo suficientemente grande.
- $k = 1 \Rightarrow V_2(R) \approx \frac{1}{2} - \frac{\kappa^2 \rho^2 R^2}{8n^2} \rightarrow \frac{4n^2 - \kappa^2 C^2}{8n^2}$: hay soluciones no acotadas si (sólo si) $\kappa C > 2n$ ($\kappa C \geq 2n$).
- $1 < k < (n+1)/2 \Rightarrow V_2(R) \rightarrow \frac{1}{2}$: existe una cota superior para $R(\tau)$ dada por la raíz más grande $V_2(R_{max}) = 0$.

En el caso $k = (n+1)/2$, el signo de $2n^2(M_{II} - M_I) - \kappa^2 C^2$ determinaría a la región II . Sin importar cuál sea este signo, tenemos que $V_2(R) \rightarrow \frac{1}{2}$, y por tanto siempre hay una cota superior para el radio. Cabe destacar que en todos los casos donde debe existir una cota superior, el caracter de la región II no está necesariamente determinado por k , ya que puede no tener sentido tomar el límite $R \rightarrow \infty$ en (3.18). Con esto en mente, consideramos ahora $k > (n+1)/2$, que son casos donde la región II para R lo suficientemente grande sería exterior, si es que ese R no se encuentra en una zona prohibida por la ecuación de movimiento. Los posibles límites son:

- $(n+1)/2 < k < n \Rightarrow V_2(R) \rightarrow \frac{1}{2}$: existe una cota superior para $R(\tau)$ dada por la raíz más grande $V_2(R_{max}) = 0$.
- $k = n \Rightarrow V_2(R) \approx \frac{1}{2} - \frac{n^2(M_{II} - M_I)^2}{2\kappa^2 \rho^2 R^{2n}} \rightarrow \frac{\kappa^2 C^2 - n^2(M_{II} - M_I)^2}{2\kappa^2 C^2}$: hay soluciones no acotadas si (sólo si) $M_{II} - M_I > \kappa C/n$ ($M_{II} - M_I \geq \kappa C/n$).

- $n < k \leq 2n \Rightarrow V_2(R) \approx -\frac{n^2(M_{II}-M_I)^2}{2\kappa^2\rho^2R^{2n}} \propto -R^{2(k-n)}$: siempre hay soluciones para $R(\tau)$ no acotadas dando un dato inicial $R(\tau_0)$ lo suficientemente grande.

Fluido con ecuación de estado $p = \omega\rho$

Vamos a analizar cómo sería el comportamiento asintótico de las funciones $V_i(R)$ para $R \rightarrow \infty$ cuando imponemos una ecuación de estado $p = \omega\rho$. Dentro de esta familia de modelos están incluidos el “fluido constante cosmológica” o tensión ($\omega = -1$), el polvo ($\omega = 0$), y el fluido de fotones ($\omega = 1/n$). La ecuación (3.10) implica,

$$\rho(R) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{n(1+\omega)} \quad (3.24)$$

donde vemos que, para estos modelos, $k = n(1 + \omega)$ y $C = \rho_0 R_0^{n(1+\omega)}$.

En el caso con simetría Z_2 tenemos

$$V_1(R) = \frac{1}{2} - \frac{M}{R^{n-1}} - \frac{\kappa^2 C^2}{8n^2 R^{2(n(1+\omega)-1)}}. \quad (3.25)$$

Para los casos particulares que destacamos arriba tenemos los siguientes comportamientos asintóticos:

- Fluido constante cosmológica: $\omega = -1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow V_1(R) \rightarrow -\frac{\kappa^2 C^2 R^2}{8n^2}$. Siempre hay soluciones no acotadas, y para ciertos parámetros ($n, M, \kappa C$) puede no haber regiones prohibidas.
- Polvo: $\omega = 0 \Rightarrow k = n \Rightarrow V_1(R) \rightarrow \frac{1}{2}$. Existe una cota superior para $R(\tau)$ y, como $V_1(R)$ resulta monótonica con R , todas las soluciones colapsan.
- Fluido de fotones: $\omega = 1/n \Rightarrow k = n + 1 \Rightarrow V_1(R) \rightarrow \frac{1}{2}$. Cualitativamente idéntico al caso anterior.

Por otra parte, sin simetría Z_2 tenemos

$$V_2(R) = \frac{1}{2} - \frac{M_I + M_{II}}{2R^{n-1}} - \frac{n^2(M_{II} - M_I)^2 R^{2n\omega}}{2\kappa^2 C^2} - \frac{\kappa^2 C^2}{8n^2 R^{2(n(1+\omega)-1)}}. \quad (3.26)$$

La expresión cuyo signo determina el carácter de II (3.18) se escribe,

$$2n^2(M_{II} - M_I)R^{n(1+2\omega)-1} - \kappa^2 C^2 \quad (3.27)$$

que es una función de R monótona creciente si $\omega > -(n-1)/2n$, constante si $\omega = -(n-1)/2n$, y decreciente si $\omega < -(n-1)/2n$. Por lo tanto, para $\omega \neq -(n-1)/2n$, (3.27) tiene una única raíz.

Particularizando para los casos que mencionamos arriba, tenemos:

- Fluido constante cosmológica: $\omega = -1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow V_2(R) \approx -\frac{\kappa^2 C^2 R^2}{8n^2}$. Siempre hay soluciones no acotadas, y para éstas la región II tiene que ser interior. Para ciertos parámetros $(n, M, \kappa C)$ puede no haber regiones prohibidas.
- Polvo: $\omega = 0 \Rightarrow k = n \Rightarrow V_2(R) \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{n^2(M_{II} - M_I)^2}{2\kappa^2 C^2}$. Existen soluciones no acotadas si y sólo si $M_{II} - M_I \geq \kappa C/n$, y para éstas la región II resulta exterior. Como $V_2(R)$ es monótonica con R , todas las soluciones que no se expanden indefinidamente colapsan.
- Fluido de fotones: $\omega = 1/n \Rightarrow k = n + 1 \Rightarrow V_2(R) \approx -\frac{n^2(M_{II} - M_I)^2 R^2}{2\kappa^2 C^2}$. Siempre hay soluciones no acotadas donde la región II es exterior. También en este caso, para ciertos parámetros $(n, M_{II}, M_I, \kappa C)$ puede no haber regiones prohibidas.

Materia de Vlasov

En este apartado vamos específicamente a generalizar la sección (2.2) para materia de Vlasov en $n + 1$ dimensiones. Las ecuaciones (1.30) y (1.31) se escriben para este caso

$$S^{ij} = -\mu \int f(x, p) \sqrt{-h} u^i u^j \frac{dp^1 \dots dp^n}{p_0}, \quad N^i = \int f(x, p) \sqrt{-h} u^i \frac{dp^1 \dots dp^n}{p_0}. \quad (3.28)$$

Análogamente a como hicimos para $n = 2$, para evaluar estas integrales nos conviene realizar un cambio de variable $(p^{\theta_1}, \dots, p^{\theta_n}) \rightarrow (L, \chi_1, \dots, \chi_{n-1})$, donde L es el módulo del momento angular por unidad de masa para una partícula con velocidad u^a , y donde

$$\chi_i \equiv \arctan \left(\frac{\sqrt{\sum_{k=i+1}^n \left(\prod_{l=i}^{k-1} \sin^2(\theta_l) \right) (u^{\theta_k})^2}}{u^{\theta_i}} \right). \quad (3.29)$$

Por la simetría del problema, podemos escribir de ahora en más $f(x^i, p^i) = f(\tau, L)$. Como las partículas no colisionan, tenemos que tener conservación

de la distribución en L del número de partículas. Escribimos,

$$\begin{aligned} N^\tau(\tau) &\equiv \int N^\tau(\tau, L) dL = \int f(\tau, L) \frac{L^{n-1}}{R(\tau)^n} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \text{sen}^{n-1-i}(\chi_i) d\chi_i \right) dL \\ &\Rightarrow N^\tau(\tau, L) = \frac{S_{n-1}}{R^n(\tau)} f(\tau, L) L^{n-1} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$n(L) \equiv \int N^\tau(\tau_0, L) R(\tau_0)^n \left(\prod_{i=1}^n \text{sen}^{n-i}(\theta_i) d\theta_i \right) = S_n S_{n-1} L^{n-1} f(L) \quad (3.31)$$

donde S_n es la superficie de una n -esfera de radio unitario. Queda explícito que f resulta ser sólo función de L , por lo que se cumple automáticamente la ecuación de Vlasov (1.29). Ahora podemos calcular las componentes del tensor S como integrales que involucran a la función $n(L)$

$$\rho(R) = \frac{\mu}{S_n R^{n+1}} \int n(L) \sqrt{R^2 + L^2} dL \quad , \quad p(R) = \frac{\mu}{n S_n R^{n+1}} \int \frac{n(L) L^2}{\sqrt{R^2 + L^2}} dL. \quad (3.32)$$

De aquí podemos ver que $0 \leq \alpha(R) < 1/n$. En particular, en el límite $R \rightarrow \infty$ resulta $\alpha \rightarrow 0$, lo que implica $k = 0$, por lo que el comportamiento asintótico de las funciones $V_i(R)$ es el mismo que para el caso de una cáscara de polvo.

Definiendo, como en el caso $n = 2$, $f(R) \equiv \int n(L) \sqrt{R^2 + L^2} dL$, el potencial para el caso con simetría Z_2 se expresa,

$$V_1(R) = \frac{1}{2} - \frac{M}{R^{n-1}} - \frac{C_n^2 f(R)^2}{8n^2 R^{2n}} \quad (3.33)$$

donde $C_n \equiv \kappa\mu/S_n$. Si suponemos $n(L)$ de soporte compacto, las asíntotas son,

$$R \rightarrow 0 \quad V_1(R) \rightarrow -\frac{C_n^2 N^2 \langle L \rangle^2}{8n^2 R^{2n}} \quad (3.34)$$

$$R \rightarrow \infty \quad V_1(R) \rightarrow \frac{1}{2} \quad (3.35)$$

donde $\langle L \rangle$ es la media del módulo del momento angular, y N es el número total de partículas. Podemos ver que $V_1(R)$ es monótona, por lo que todas las soluciones que no se expanden indefinidamente colapsan.

Para el caso con simetría esférica estándar tenemos,

$$V_2(R) = \frac{1}{2} - \frac{M_I + M_{II}}{2R^{n-1}} - \frac{n^2(M_{II} - M_I)^2 R^2}{2C_n^2 f(R)^2} - \frac{C_n^2 f(R)^2}{8n^2 R^{2n}} \quad (3.36)$$

que es una generalización en dimensiones arbitrarias de la expresión (2.72). Las asíntotas son, también suponiendo $n(L)$ de soporte compacto,

$$R \rightarrow 0 \quad V_2(R) \rightarrow -\frac{C_n^2 N^2 \langle L \rangle^2}{8n^2 R^{2n}} \quad (3.37)$$

$$R \rightarrow \infty \quad V_2(R) \rightarrow \frac{C_n^2 N^2 - n^2 (M_{II} - M_I)^2}{2C_n^2 N^2} \quad (3.38)$$

donde vemos que la condición para que haya movimiento no acotado en R es $(M_{II} - M_I) \geq C_n N/n$. Analizando las derivadas de (3.36) se puede demostrar que *soluciones estáticas u oscilantes existen sólo si $n = 2$* , que es precisamente el caso analizado en las secciones 2.2 y 2.4. También podemos ver que si no hay colapso, la condición (3.19) para las cáscaras de materia de Vlasov implica que la región II debe ser exterior.

3.2. Estabilidad ante separación de componentes no interactuantes en simetría esférica

Supongamos ahora que tenemos una superficie singular cuyo contenido de materia puede separarse en dos partes no interactuantes, tales que cada una de ellas es esféricamente simétrica. Podemos escribir,

$$S^{ij} = (p_1 + p_2)h^{ij} + (\rho_1 + \rho_2 + p_1 + p_2)u^i u^j \quad (3.39)$$

donde la conservación de la energía (1.19) vale por separado para cada componente, por lo que tenemos

$$\frac{d\rho_i}{dR} + \frac{n(\rho_i + p_i)}{R} = 0. \quad (3.40)$$

Vamos a proponer una separación infinitesimal para estas componentes, y calcular la aceleración relativa que tendrían las componentes separadas, de manera análoga a lo que hicimos en la sección 2.4. Para el caso con simetría Z_2 propondremos una separación diferente a la realizada en aquella sección, ya que queremos que la simetría Z_2 se conserve para poder interpretar este proceso en el contexto de cosmología de branas. Vamos a construir para ello una fragmentación en tres partes, donde una permanece en el centro de simetría, y las otras dos se despegan simétricamente del centro.

3.2.1. Separación en tres partes con simetría Z_2

Para este caso propondremos una fragmentación como la ilustrada en la figura 3.1. Llamamos M al parámetro de masa del espacio-tiempo antes de la separación, y M' al correspondiente a las regiones entre las cáscaras

“salientes” y el centro de simetría. Vamos a reescribir (3.39) con la notación $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ y $p = p_0 + \tilde{p}$, donde ρ_0 y p_0 son la densidad y la presión correspondientes a la superficie que permanece en el centro de simetría. Siendo más precisos, la componente $\tilde{\rho}$ tiene que ser en realidad dos componentes no interactuantes idénticas para que la construcción pueda hacerse de manera análoga a lo realizado en la sección (2.4).

Vamos a imponer continuidad en las velocidades (\dot{R}) de cada parte al momento de fragmentación, lo que equivale a imponer suavidad de cada superficie como *embeddings* en la variedad ambiente. Podemos escribir esta condición como $\dot{R}(\tau = \tau_0) = \dot{R}_0(\tau_0) = \dot{\tilde{R}}(\tilde{\tau} = \tau_0)$, donde τ es el tiempo propio de la superficie “central” (tanto antes como después de la separación) y $\tilde{\tau}$ es el tiempo propio de las cáscaras “salientes”. Utilizando las ecuaciones (3.13) y (3.17) para la superficie resultante central y para una de las salientes respectivamente, podemos mostrar que la imagen es consistente, lo que quiere decir que la densidad de materia de cada una de las superficies “salientes” tiene que ser precisamente $\tilde{\rho}/2$, y que el parámetro M' queda unívocamente determinado por los demás parámetros de la construcción. Podemos escribir las aceleraciones que tendrían cada cáscara al momento de la separación por medio de las ecuaciones (3.14) y (3.20),

$$\begin{aligned}\ddot{R}(\tau_0) &= -\frac{n-1}{2R_0} \left[1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \left(\frac{2n}{n-1} \tilde{\alpha} + 1 \right) \sqrt{1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \frac{2M}{R_0^{n-1}}} \sqrt{1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \frac{2M'}{R_0^{n-1}}} \right] \\ \ddot{R}_0(\tau_0) &= -\frac{n(\alpha_0 + 1) - 1}{R_0} \left(1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \frac{2M'}{R_0^{n-1}} \right) - \frac{(n-1)M'}{R_0^n},\end{aligned}\quad (3.41)$$

donde $\alpha_0 \equiv \rho_0/p_0$ y $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\rho}/\tilde{p}$.

Como en la sección 2.4, la inestabilidad tiene lugar cuando *el signo la aceleración relativa es el mismo que el de la separación relativa*, de otra manera la configuración resultaría estable. Como en el desplazamiento tenemos $R_0(\tau_0) > \tilde{R}(\tau_0)$, la estabilidad se daría cuando $d^2 R_0(\tau_0)/dt^2 < d^2 \tilde{R}(\tau_0)/dt^2$, tomando las derivadas en alguna coordenada temporal definida en las dos cáscaras. Resulta natural elegir la coordenada temporal estándar de las regiones M' colindantes al centro de simetría luego de la fragmentación, a la que llamamos \tilde{t} . Las expresiones de arriba son derivadas en tiempos propios diferentes, por lo que tenemos que expresarlas en términos de derivadas en \tilde{t} . Podemos ver que se cumple,

$$\left(\frac{d\tau}{d\tilde{t}} \right)^2 = \frac{\tilde{F}^2}{\tilde{F} + \dot{R}_0^2} \quad (3.42)$$

donde $\tilde{F} \equiv 1 - \frac{2M'}{R_0^{n-1}}$, y que podemos escribir una expresión análoga para $\tilde{\tau}$.

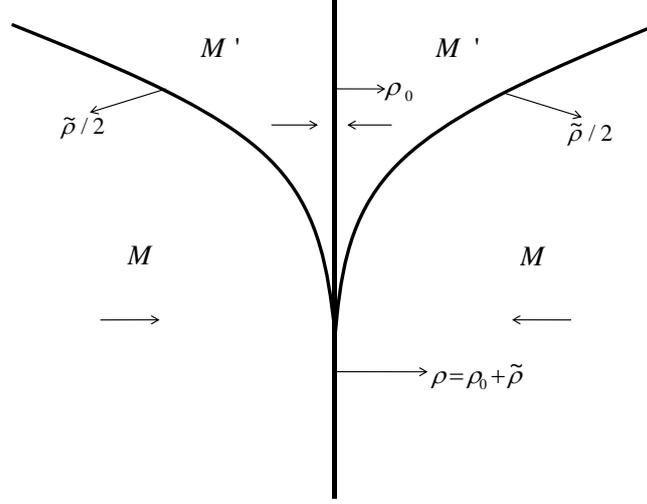


Figura 3.1: Representación esquemática de un *splitting* en tres partes que preserva simetría Z_2 . Las flechas sueltas indican la dirección de $\nabla^a r$ en cada región.

La derivada $d^2 R_0/d\tilde{t}^2$ al momento de la separación se escribe,

$$\frac{d^2 R_0(\tau_0)}{d\tilde{t}^2} = \frac{1}{\tilde{F}} \left(\frac{d\tau}{d\tilde{t}} \right)^4 \ddot{R}_0(\tau_0) + \frac{\tilde{F}'}{2\tilde{F}} \left(\tilde{F} - \left(\frac{d\tau}{d\tilde{t}} \right)^2 \right) \left(2\tilde{F} - \left(\frac{d\tau}{d\tilde{t}} \right)^2 \right) \quad (3.43)$$

y también puede escribirse una expresión análoga para $d^2 \tilde{R}(\tau_0)/d\tilde{t}^2$. De estas expresiones se desprende, por continuidad de \tilde{R} , que la condición de estabilidad es equivalente a

$$\ddot{\tilde{R}}(\tau_0) - \ddot{R}_0(\tau_0) > 0. \quad (3.44)$$

Manipulando esta última desigualdad por medio de las componentes temporales de las condiciones de empalme (3.11) y (3.15), obtenemos la condición,

$$(2n\tilde{\alpha} + n - 1)(\rho_0 + \tilde{\rho}) + (2n\alpha_0 + n - 1)\rho_0 > 0 \quad (3.45)$$

que también puede ser escrita de la forma,

$$2n(\rho_0 + \rho_0) + 2(n\tilde{\alpha} - 1)\rho_0 + (2n\tilde{\alpha} + n - 1)\tilde{\rho} > 0 \quad (3.46)$$

donde en particular vemos que si $\tilde{\alpha} \geq 1/n$ la configuración resulta estable.

Como vimos en la sección 1.1.3, en el contexto de cosmología de branas necesitamos que haya *tensión* en la superficie para poder reobtener las ecuaciones de Friedmann en el límite de bajas energías. Vamos a considerar que existe tensión en la superficie que constituye el centro de simetría, lo que es equivalente a tener un “fluido constante cosmológica” donde

$\rho_T = -p_T = cte \equiv b$. Escribimos entonces $\rho_0 = b + \rho_m$, $p_0 = -b + \rho_m$, definimos $\alpha_m \equiv p_m/\rho_m$, e imponemos que $0 \leq \alpha_m \leq 1/n$ y $0 \leq \tilde{\alpha} \leq 1/n$, siendo estas últimas desigualdades siempre satisfechas por toda materia constituida por partículas. En este caso, en el régimen de bajas energías (que en el contexto de cosmología de branas tiene lugar desde la nucleosíntesis por lo menos), tenemos $b \gg \rho_m$ y $b \gg \tilde{\rho}$, por lo que $\ddot{R}(\tau_0) - \ddot{R}_0(\tau_0) < 0$, lo que significa que *estas superficies resultan típicamente inestables ante la separación de componentes no interactuantes*. Como también mencionamos en la introducción, falta un ingrediente importante para que esta superficie singular represente una cosmología: necesitamos que exista una constante cosmológica para el espacio-tiempo ambiente. Queda por analizar si esta inestabilidad también tiene lugar si el “bulk” es vacío con constante cosmológica, y si la brana posee simetría planar o hiperbólica en vez de esférica. Esto último es el tema de la siguiente sección.

3.2.2. Separación en dos partes sin simetría Z_2

En esta subsección generalizamos el proceso de separación de componentes analizado en la sección 2.4 para modelos de materia más generales y dimensiones arbitrarias. La estructura del espacio-tiempo para este tipo de construcción es diferente según sea la región II exterior o interior, como ilustra la figura 3.2 en donde se distinguen tres casos. Las tres posibilidades son,

- A : región II exterior y $\nabla^a r$ en la región intermedia apunta hacia la región II .
- B : región II interior y $\nabla^a r$ en la región intermedia apunta hacia la región II .
- C : región II interior y $\nabla^a r$ en la región intermedia apunta hacia la región I .

Distinguiamos con el índice 2 a la cáscara resultante que separa la región intermedia de la región II . Cabe destacar que para cualquier caso concreto, los signos de $2n^2(M_{II} - M_I) - \kappa^2 \rho^2(R_0)R_0^{n+1}$, $2n^2(M_{int} - M_I) - \kappa^2 \rho_1^2(R_0)R_0^{n+1}$ y $2n^2(M_{II} - M_{int}) - \kappa^2 \rho_2^2(R_0)R_0^{n+1}$ son los que determinan la estructura.

Región II exterior

Consideramos en primera instancia la situación A , donde la región II es exterior. Para ese caso tenemos que $R_2(\tau_0)$ es infinitesimalmente mayor que $R_1(\tau_0)$. Como en las situaciones analizadas previamente, vamos a imponer continuidad para las velocidades de las cáscaras: $\dot{R}(\tau_0) = \dot{R}_1(\tau_1 = \tau_0) =$

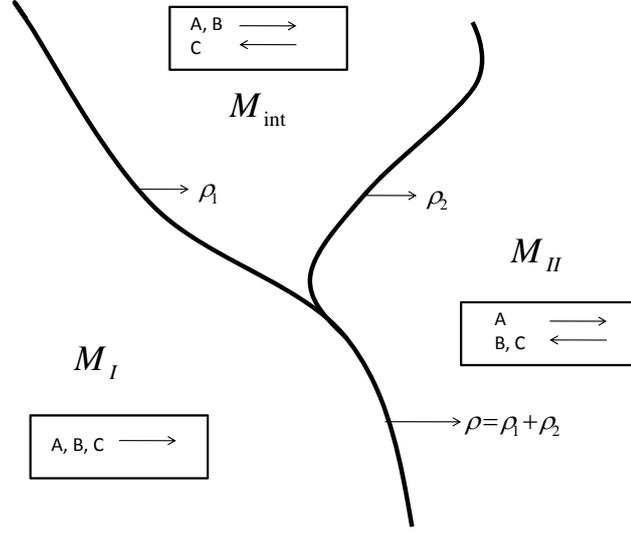


Figura 3.2: Representación esquemática de un splitting general en dos partes. Las flechas sueltas representan las posibles direcciones de $\nabla^a r$ en cada región. Se distinguen en el gráfico tres casos (que llamamos A, B y C) con distintas combinaciones para las orientaciones

$\dot{R}_2(\tau_2 = \tau_0)$, donde τ_i es el tiempo propio de la cáscara i . Mediante la expresión (3.17) aplicada a cualquiera de las dos cáscaras resultantes, podemos despejar el parámetro M_{int} , que a su vez resulta unívocamente definido, por lo que la construcción es consistente. Las aceleraciones de cada cáscara al momento de la separación están dadas por,

$$\begin{aligned} \ddot{R}_1(\tau_0) &= -\frac{n-1}{2R_0} \left[1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \left(\frac{2n}{n-1} \alpha_1 + 1 \right) \sqrt{1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \frac{2M_I}{R_0^{n-1}}} \sqrt{1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \frac{2M_{int}}{R_0^{n-1}}} \right] \\ \ddot{R}_2(\tau_0) &= -\frac{n-1}{2R_0} \left[1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \left(\frac{2n}{n-1} \alpha_2 + 1 \right) \sqrt{1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \frac{2M_{int}}{R_0^{n-1}}} \sqrt{1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \frac{2M_{II}}{R_0^{n-1}}} \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde $\alpha_i \equiv p_i/\rho_i$.

Análogamente al caso anterior, tenemos que comparar estas aceleraciones utilizando una misma coordenada temporal para las derivadas. Como en este caso tenemos $R_2(\tau_0) > R_1(\tau_0)$, la condición de estabilidad debe ser $d^2 R_2(\tau_0)/dt^2 < d^2 R_1(\tau_0)/dt^2$. Una opción natural para la coordenada t sería la coordenada temporal estándar de la región Schwarzschild entre las cáscaras que se separan, t_{int} . Las relaciones entre $d^2 R_i(\tau_0)/dt^2$ y $d\tau_i/dt_{int}$ se escriben reemplazando en las expresiones (3.42, 3.43) $R_0(\tau)$ por $R_i(\tau_i)$ y (\tilde{F}, \tilde{t}) por

(F_{int}, t_{int}) , por lo que la condición de estabilidad resulta simplemente

$$\ddot{R}_2(\tau_0) - \ddot{R}_1(\tau_0) < 0. \quad (3.48)$$

Manipulando esta expresión utilizando las condiciones de empalme (3.15, 3.16), obtenemos que la desigualdad anterior es equivalente a,

$$\kappa^2(\rho_1 + \rho_2)^2 R^{n+1}(n(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) - 1) - 2n^3(M_{II} - M_I)(\alpha_2 - \alpha_1) > 0. \quad (3.49)$$

donde en particular podemos destacar que *si los fluidos son idénticos* ($\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$) *y* $\alpha > -(n-1)/2n$, *entonces la configuración es siempre estable*. Tenemos también el resultado, tal vez inesperado, de que si ambas componentes son idénticas con $\alpha < -(n-1)/2n$, el sistema es inestable. Esto implicaría que si tenemos un campo material con α de estas características, y tiene sentido separar el tensor de masa-energía en dos partes no interactuantes de igual α , entonces la configuración resultaría siempre inestable. También podemos ver que si $\alpha_i \geq 0$, lo que se cumple para los campos materiales más comunes, la inestabilidad tiene lugar sólo si $\alpha_2 - \alpha_1$ es lo suficientemente grande.

Región II interior

Procediendo análogamente, escribimos las aceleraciones de las cáscaras al momento de la separación para los casos *B* y *C*:

$$\begin{aligned} \ddot{R}_1(\tau_0) &= -\frac{n-1}{2R_0} \left[1 + \dot{R}^2(\tau_0) \mp \left(\frac{2n}{n-1} \alpha_1 + 1 \right) \sqrt{1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \frac{2M_I}{R_0^{n-1}}} \sqrt{1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \frac{2M_{int}}{R_0^{n-1}}} \right] \\ \ddot{R}_2(\tau_0) &= -\frac{n-1}{2R_0} \left[1 + \dot{R}^2(\tau_0) \pm \left(\frac{2n}{n-1} \alpha_2 + 1 \right) \sqrt{1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \frac{2M_{int}}{R_0^{n-1}}} \sqrt{1 + \dot{R}^2(\tau_0) - \frac{2M_{II}}{R_0^{n-1}}} \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde \pm es $+$ para el caso *B* y $-$ para el caso *C*. El desplazamiento infinitesimal es $R_2(\tau_0) > R_1(\tau_0)$ para el caso *B*, y $R_2(\tau_0) < R_1(\tau_0)$ para el caso *C*. Siguiendo un razonamiento análogo a el de los casos anteriores, las condiciones de estabilidad para cada caso resultan

$$\pm(\ddot{R}_2(\tau_0) - \ddot{R}_1(\tau_0)) < 0 \quad (3.51)$$

Utilizando el signo correspondiente en (3.50), y utilizando las ecuaciones (3.15, 3.16) correspondientes a cada cáscara resultante, obtenemos que para ambos casos las condiciones de estabilidad se escriben,

$$\beta \equiv \kappa^2(\rho_1 + \rho_2)^2 R^{n+1}(n(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) - 1) - 2n^3(M_{II} - M_I)(\alpha_2 - \alpha_1) > 0. \quad (3.52)$$

lo que idéntico a la condición (3.49). *La condición de estabilidad en términos de $(\rho_1, \rho_2, \alpha_1, \alpha_2, M_I, M_{II}, R)$ se escribe de la misma manera para cualquiera de los casos (A, B, C).* De esta manera, lo que comentamos para el caso A es en realidad válido para todo tipo de *splitting* de dos partes no interactuantes. Ahora consideraremos algunos modelos de materia específicos.

Fluidos con ecuación de estado $p_i = \omega_i \rho_i$

Consideramos ahora que las componentes no interactuantes son dos fluidos con ecuaciones de estado $p_i = \omega_i \rho_i$, con $\omega_2 > \omega_1$. En este caso, (3.49) toma la forma,

$$(C_1 R^{-n(1+\omega_1)} + C_2 R^{-n(1+\omega_2)})^2 R^{n+1} (n(\omega_1 + \omega_2 + 1) - 1) - 2n^3 (M_{II} - M_I)(\omega_2 - \omega_1) > 0 \quad (3.53)$$

donde vemos que si $\omega_1 > -(n-1)/2n$, entonces *la cáscara resulta inestable para R lo suficientemente grande.*

Como mencionamos en la sección anterior, cuando R es grande, el fluido con ω_1 domina $\rho(R)$, y el comportamiento asintótico en el límite $R \rightarrow \infty$ queda determinado por $k = n(1 + \omega_1)$, por lo que existirían soluciones no acotadas si, por ejemplo, $\omega_1 \geq 0$. De esta manera estamos demostrando que con estos modelos de materia también podemos construir superficies que son soluciones de las ecuaciones de Einstein, pero que resultan inestables ante separación de componentes. Mostraremos mediante un ejemplo concreto que además existen configuraciones que son inicialmente estables y que, como consecuencia de su evolución, se vuelven inestables. Son éstos los casos que hacen posible la construcción de soluciones que representan una superficie que se separa en varias superficies, como lo ilustrado en la figura 3.2.

- **Ejemplo 1:** $n = 2$, $\kappa = 8\pi$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0,001$, $C_1 = 0,01$, $C_2 = 0,02$, $M_I = 1$, $M_{II} = 2$

En este ejemplo $V_2(R)$ es tal que no existen regiones prohibidas, por lo que si el sistema está inicialmente expandiéndose lo hará indefinidamente. Como $n < k < 2n$, para estos parámetros la región II tiene que ser exterior. Pero, como se ilustra en la figura 3.3, en $R \approx 35,27$ tenemos un punto crítico a partir del cual ($R > 35,27$) la cáscara resulta inestable. En ese punto podemos construir un *splitting* tipo A, calculando M_{int} por continuidad de \dot{R} .

Materia de Vlasov

Ahora vamos específicamente a generalizar lo que realizamos en la sección 2.4. La materia de Vlasov queda caracterizada por la función $n(L)$, y puede

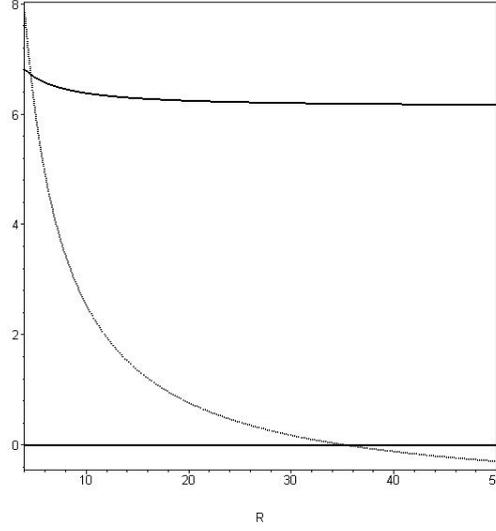


Figura 3.3: La curva sólida representa a \dot{R}^2 en función de R para la cáscara de dos fluidos no interactuantes con parámetros $n = 2$, $\kappa = 8\pi$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0,001$, $C_1 = 0,01$, $C_2 = 0,02$, $M_I = 1$ y $M_{II} = 2$. La curva de puntos representa a 1000β . El punto crítico está en $R \approx 35,27$, a partir del cual la cáscara resulta inestable.

separarse en dos partes no interactuantes que preserven la simetría esférica simplemente escribiendo $n(L) = n_1(L) + n_2(L)$. Esto es equivalente a separar el conjunto total de partículas en dos *ensembles* cuyos tensores de masa-energía correspondientes resultan esféricamente simétricos. Para cada parte escribimos,

$$\alpha_i = \frac{1}{\int n_i(L) \sqrt{R^2 + L^2} dL} \int \frac{n_i(L) L^2}{n \sqrt{R^2 + L^2}} \quad (3.54)$$

donde vemos que $0 \leq \alpha_i < 1/n$.

Mencionamos que para materia “normal” la inestabilidad aparece cuando $\alpha_2 - \alpha_1$ es lo suficientemente grande. Esta diferencia podría realizarse si, por ejemplo, $n_2(L)$ comprendiera aquellas partículas con L mayor a cierto valor, como vamos a ilustrar con el siguiente caso particular.

Analizamos tal vez el caso más simple que puede exhibir inestabilidad, como en la sección 2.4, que es el de una cáscara de dos componentes con $n_i(L) = N_i \delta(L - L_i)$. La condición (3.49) se escribe,

$$C_n^2 f(R)^2 [(n+1)L_1^2 L_2^2 + nR^2(L_1^2 + L_2^2) + (n-1)R^4] - 2n^2 R^{n+3} (M_{II} - M_I)(L_2^2 - L_1^2) > 0 \quad (3.55)$$

de donde vemos que en el límite $R \rightarrow \infty$:

- $n = 2$, la cáscara es estable (recuperamos lo obtenido en la sección 2.4),

- $n = 3$, la cáscara es estable si y sólo si $\kappa^2 \mu^2 N^2 - 36\pi^4 (M_{II} - M_I)(L_2^2 - L_1^2) \geq 0$,
- $n > 3$, la cáscara es inestable.

Como mencionamos en la sección anterior, existen cáscaras con movimiento no acotado si $M_{II} - M_I \geq C_n N/n$. Entonces una cáscara cuyos parámetros satisfagan esta desigualdad con $n > 3$, o $n = 3$ y que a su vez satisfaga $\kappa^2 \mu^2 N^2 < 36\pi^4 (M_{II} - M_I)(L_2^2 - L_1^2)$, sería solución de las ecuaciones de Einstein y a la vez inestable ante separación de componentes. Daremos también para este modelo un ejemplo en el que la cáscara es inicialmente estable, pero como resultado de su evolución se vuelve inestable, lo que permite construir una solución que representa una superficie que se fragmenta en dos superficies.

- **Ejemplo 2:** $n = 3$, $\kappa = 1$, $M_I = 1$, $M_{II} = 3$, $\mu N_1 = 30$, $\mu N_2 = 23$, $L_1 = 2$, $L_2 = 2,1$

En este ejemplo la región II debe ser exterior. $V_2(R)$ también es tal que no hay regiones prohibidas, como se ilustra en la figura 3.4, por lo que si el sistema está inicialmente expandiéndose lo hará indefinidamente. Encontramos un punto crítico para la expresión (3.49) en $R \approx 27,98$, por lo que para $R > 27,98$ tenemos inestabilidad. En ese punto podemos construir un *splitting* tipo A , donde las partículas con $L_2 = 2,1$ se desprenden de aquellas con $L_1 = 2$ como se ilustra en la figura 3.5.

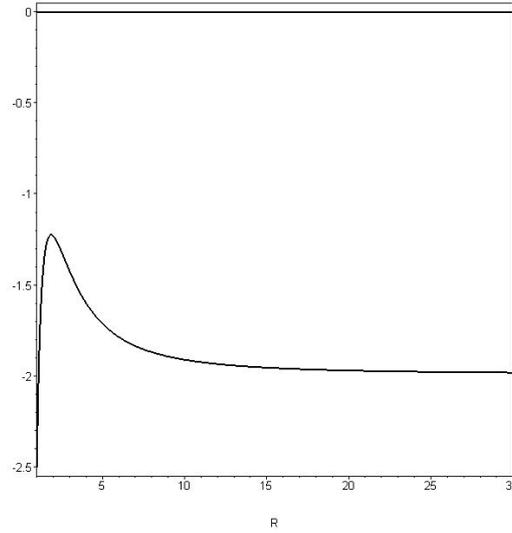


Figura 3.4: $V_2(R)$ para $n = 3$, $\kappa = 1$, $M_I = 1$, $M_{II} = 3$, $\mu N_1 = 30$, $\mu N_2 = 23$, $L_1 = 2$, $L_2 = 2,1$. En este caso no existen regiones prohibidas, y la curva está muy cerca de su asíntota ya en $R \approx 20$.

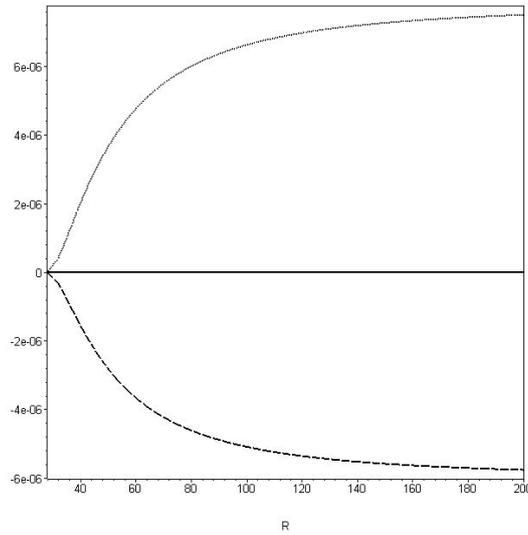


Figura 3.5: La curva de puntos representa $V_2(R; \rho_1, M_I, M_{int}) - V_2(R; \rho, M_I, M_{II})$, mientras que la de rayas representa $V_2(R; \rho, M_I, M_{II}) - V_2(R; \rho_2, M_{int}, M_{II})$. Se puede construir una solución que exhiba un *splitting* como el de la figura 2.6, donde la separación ocurriría en $R \approx 27,98$, punto a partir del cual la cáscara con $L_2 = 2,1$ empezaría a expandirse más rápido que la cáscara con $L_1 = 2$.

3.3. Branas en bulk *Schwarzschild* – *AdS*₅

Como mencionamos en la sección 1.1.3, las teorías de cuerdas promueven escenarios donde todos los campos y partículas del modelo estándar se encuentran confinados en una superficie temporal de cuatro dimensiones, y donde las dimensiones extras están todas compactificadas, con la posible excepción de una de ellas. De aquí surgió la idea de los universo-branas, como una alternativa a la compactificación con la que, de paso, se podía resolver el problema de la jerarquía [27], entre otras propiedades interesantes. También en la introducción vimos que los modelos de branas requieren típicamente de una constante cosmológica en el *bulk* para que haya un límite de bajas energías que coincida con la gravedad y cosmología estándar efectivas dentro de la brana. En particular, vimos que la constante de gravitación universal G y la constante cosmológica Λ_4 efectivas en la superficie cuadridimensional resultan funciones de la tensión en la brana b , la constante cosmológica en el bulk Λ_5 , y la constante de acoplamiento κ ; por lo que si b es del orden de magnitud necesario como para que al tiempo de la nucleosíntesis valga el límite de bajas energías, necesitamos que $-\Lambda_5 \sim Gb$ para evitar una discrepancia de al menos 33 órdenes de magnitud con respecto a la constante cosmológica observada en el marco del modelo estándar Λ -CDM.

Vamos a considerar específicamente que la superficie es un *embedding* en un espacio-tiempo Schwarzschild-Anti de Sitter de cinco dimensiones. Como comentamos en la introducción, este es el espacio-tiempo vacío con constante cosmológica más general donde existe un slicing espacial con isotropía tridimensional, específicamente esférica, planar o hiperbólica [32]. La métrica puede escribirse,

$$ds^2 = -F dt^2 + F^{-1} dr^2 + r^2 \left[\frac{d\chi^2}{1 - k\chi^2} + \chi^2 d\Omega^2 \right] \quad (3.56)$$

donde $F = k - \frac{2M}{r^2} + \frac{r^2}{\ell^2}$, k es el índice de curvatura $(-1, 0, 1)$ y $\ell^2 \equiv -6/\Lambda_5$.

La brana es una superficie cuya geometría intrínseca es la de un universo FRW. Para cualquiera de los tres índices de curvatura posibles, la brana queda descrita por una función $\Sigma(r, t) = r - R(t) = 0$ en el espacio de las órbitas del grupo de isometrías correspondiente. En este sentido el sistema es totalmente análogo a los de las secciones anteriores, donde consideramos superficies esféricas en un espacio-tiempo esférico vacío. También en este caso, para encontrar ecuaciones de movimiento tenemos que escribir la curvatura extrínseca y utilizar las condiciones de empalme (1.17). Los lados derechos de las condiciones (1.18) y (1.19) siguen siendo idénticamente cero, ya que suponemos una única constante cosmológica Λ_5 para ambos lados de la brana.

Podemos ver que para este caso la curvatura extrínseca también se calcula mediante la expresión (3.6), por lo que la dependencia de la misma con el índice de curvatura y Λ_5 queda contenida en $F(R) = k - 2M/R^2 + R^2/\ell^2$. También la ecuación de conservación tiene la misma forma que (3.10) particularizada para $n = 3$.

3.3.1. Ecuaciones de Friedmann

Simetría Z_2 centrada en la superficie

Las condiciones de empalme toman la misma forma que (3.11) y (3.12) con $F(R) = k - 2M/R^2 + R^2/\ell^2$. De allí se desprende el potencial efectivo

$$V_1(R) = \frac{k}{2} - \frac{M}{R^2} + \frac{R^2}{2\ell^2} - \frac{\kappa^2 \rho^2 R^2}{72}. \quad (3.57)$$

La ecuación de movimiento puede expresarse como una ecuación de Friedmann de la siguiente forma,

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{\kappa^2 \rho^2}{36} + \frac{2M}{R^4} - \frac{1}{\ell^2} - \frac{k}{R^2} \quad (3.58)$$

que es una expresión que, reemplazando $\rho = b + \rho_m$, nos permite explicitar el límite con la cosmología estándar

$$H^2 = \frac{\kappa^2 b}{18} \rho_m \left(1 + \frac{\rho_m}{2b} \right) - \frac{k}{R^2} + \frac{2M}{R^4} + \frac{\kappa^2 b^2}{36} - \frac{1}{\ell^2}. \quad (3.59)$$

Definiendo como en la introducción $48\pi G \equiv \kappa^2 b$ y $12\Lambda_4 \equiv \kappa^2 b^2 + 6\Lambda_5$, escribimos,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m \left(1 + \frac{\rho_m}{2b} \right) - \frac{k}{R^2} + \frac{2M}{R^4} + \frac{\Lambda_4}{3}. \quad (3.60)$$

donde distinguimos, además de un término cuadrático, un término de curvatura, otro de “radiación oscura”, y otro de constante cosmológica. De aquí podemos recuperar en particular el modelo de una brana de Randall y Sundrum [26] haciendo $M = k = 0$ (el espacio-tiempo ambiente es simplemente AdS_5), pero en coordenadas no gaussianas.

Por otra parte, la otra componente independiente de las condiciones de empalme (3.12) arroja la relación

$$\ddot{R} = -\frac{3\alpha + 2}{36} \kappa^2 \rho^2 R - \frac{2M}{R^3} - \frac{R}{\ell^2}. \quad (3.61)$$

Reemplazando con las constantes que definimos más arriba, podemos reescribir esta expresión como,

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_m \left(1 + \frac{2\rho_m}{b} \right) + 3p_m \left(1 + \frac{\rho_m}{b} \right) \right) + \frac{\Lambda_4}{3} - \frac{2M}{R^4} \quad (3.62)$$

donde también queda explícita la coincidencia con las ecuaciones de Friedmann estándar en el límite $b \gg \rho_m$.

Sin simetría Z_2

Este modelo de universo-brana fue analizado en trabajos anteriores como [72] o [73]. En este caso, las condiciones de empalme están dadas por (3.15) y (3.16). El potencial efectivo resulta

$$V_2(R) = \frac{k}{2} - \frac{M_I + M_{II}}{2R^2} + \frac{R^2}{2\ell^2} - \frac{9(M_{II} - M_I)^2}{2\kappa^2\rho^2 R^6} - \frac{\kappa^2\rho^2 R^2}{72}. \quad (3.63)$$

Escribiendo esta expresión como una ecuación de Friedmann tenemos,

$$H^2 = \frac{\kappa^2\rho^2}{36} + \frac{9(M_{II} - M_I)^2}{\kappa^2\rho^2 R^8} + \frac{M_I + M_{II}}{R^4} - \frac{1}{\ell^2} - \frac{k}{R^2} \quad (3.64)$$

y, teniendo en cuenta las definiciones que dimos anteriormente, dejamos explícito el límite con la cosmología estándar al escribir,

$$H^2 = \frac{\mathcal{C}}{(\rho_m/b + 1)^2 R^8} + \frac{8\pi G}{3}\rho_m \left(1 + \frac{\rho_m}{2b}\right) - \frac{k}{R^2} + \frac{M_I + M_{II}}{R^4} + \frac{\Lambda_4}{3} \quad (3.65)$$

donde $\mathcal{C} = 3(M_{II} - M_I)^2/16\pi Gb$. Como podemos ver, en este caso aparece un término más para la ecuación de Hubble que para cuando tenemos simetría Z_2 . Es un término que en el límite $\rho_m \ll b$ va como R^{-8} , mientras que en el límite $\rho_m \gg b$ tiende a una constante (suponiendo un universo dominado por la radiación), lo que implica que sería responsable de un proceso inflacionario en los primeros estadios del universo. Por otra parte, este término tiene que ser despreciable por lo menos desde la nucleosíntesis para que haya coincidencia con la cosmología estándar. Por esto, y por su rápido decaimiento, resultaría absolutamente “invisible” salvo en estadios muy tempranos, como en lo que se cree que sería la época de la inflación. Sin embargo, como se demuestra en [73], la expansión inflacionaria que este término podría generar cae muy por debajo de la magnitud necesaria para resolver los problemas de la cosmología estándar. Cabe destacar que en este contexto, la región II tiene que ser interior, ya que, teniendo en cuenta los órdenes de magnitud de los parámetros, el lado derecho de (3.19) resulta negativo, salvo para épocas muy tempranas dentro del “horizonte” del *bulk*³.

Por otra parte, de (3.16) podemos escribir,

$$\ddot{R} = -\frac{1}{R} \left[k + \frac{2R^2}{\ell^2} + \dot{R}^2 + (3\alpha + 1) \sqrt{\dot{R}^2 + F_I} \sqrt{\dot{R}^2 + F_{II}} \right] \quad (3.66)$$

expresión que, luego de reemplazar las expresiones que involucran a \dot{R} mediante la ecuación de movimiento, puede escribirse

$$\ddot{R} = -\frac{3\alpha + 2}{36}\kappa^2\rho^2 R - \frac{M_I + M_{II}}{R^3} - \frac{R}{\ell^2} + \frac{27\alpha(M_{II} - M_I)^2}{\kappa^2\rho^2 R^7}. \quad (3.67)$$

³La singularidad inicial en este contexto sería una singularidad de agujero blanco para el *bulk*

Finalmente, hacemos explícito el límite $\rho_m \ll b$ escribiendo

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_m \left(1 + \frac{2\rho_m}{b} \right) + 3p_m \left(1 + \frac{\rho_m}{b} \right) \right) + \frac{\Lambda_4}{3} - \frac{M_I + M_{II}}{R^4} - \frac{3(1 - p_m/b)\mathcal{C}}{(1 + \rho_m/b)^3 R^8}. \quad (3.68)$$

3.3.2. Inestabilidad ante separación de componentes no interactuantes

Simetría Z_2

Consideramos ahora una separación de componentes como la que se ilustra en la figura 3.1 para este caso particular. Un razonamiento totalmente análogo al de la subsección 3.2.1 nos lleva a escribir la condición de estabilidad también como $\ddot{R} - \ddot{R}_0 > 0$. Escribiendo por un lado la expresión (3.67) con los parámetros (M, M') y las funciones $(\tilde{\alpha}, \tilde{\rho}/2)$; y por el otro la expresión (3.61) con parámetro M' y funciones (α_0, ρ_0) ; obtenemos como criterio de estabilidad,

$$(3\alpha_0 + 1)\rho_0 + (3\tilde{\alpha} + 1)(\tilde{\rho} + \rho_0) > 0 \quad (3.69)$$

que es la misma expresión que para un *bulk* Schwarzschild con $n = 3$. Como vimos en la sección anterior, en el extremo $b \gg \rho_m$, la condición de estabilidad es equivalente a $(3\tilde{\alpha} - 1) \geq 0$, por lo que *si $\tilde{\alpha} < 1/3$ la configuración resulta inestable*. De aquí podemos decir que *esta familia de modelos de universo-brana resulta típicamente inestable ante separación de componentes no interactuantes*. Las componentes de menor $\tilde{\alpha}$, como por ejemplo una componente de polvo sin interacción con el resto del universo, son las mas propensas a “escapar” de la brana. Esta inestabilidad señala la posibilidad de construir soluciones completas que exhiban esta separación, como ilustraremos en la siguiente subsección.

Sin simetría Z_2

En el caso de tener una separación como la ilustrada en la figura 3.2, la condición de estabilidad sería $\pm(\ddot{R}_2 - \ddot{R}_1) < 0$. Escribimos la expresión (3.66) con parámetros (M_{int}, M_{II}) y con las funciones (α_2, ρ_2) , y a esto le restamos la misma expresión con parámetros (M_I, M_{int}) y funciones (α_1, ρ_1) . La condición de estabilidad se escribe finalmente,

$$54(M_{II} - M_I)(\alpha_2 - \alpha_1) - \kappa^2 \rho^2 R^4 (3(\alpha_1 + \alpha_2) + 2) < 0 \quad (3.70)$$

que es justamente la expresión (3.49) con $n = 3$. En el contexto de cosmología de branas, tenemos que suponer que existe una tensión b en la superficie original de dos componentes, y también en una de las superficies resultantes

de la separación infinitesimal. Escribimos sin pérdida de generalidad $\rho_1 = \rho_m + b$, por lo que si $b \gg \rho_m$, $\alpha_1 \approx -1$, por lo que en ese límite tenemos

$$\kappa^2 b^2 R^4 (3\alpha_2 - 1) - 54(M_{II} - M_I)(\alpha_2 + 1) > 0 \quad (3.71)$$

. Si suponemos $0 \leq \alpha_2 \leq 1/3$, tenemos que *también esta familia de universos-branas resultan típicamente inestables*. Como el orden de magnitud de $(M_{II} - M_I)/R^4$ tiene que ser, por cotas observacionales, mucho menor que el de $\kappa^2 b^2$ desde al menos la nucleosíntesis, la condición de estabilidad sería equivalente simplemente a $\alpha_2 \geq 1/3$, como en el *splitting* con simetría Z_2 . También como en ese caso, resultaría posible construir soluciones completas que representen superficies que se separan en varias partes.

3.3.3. Universos-branas que se dividen en varios fragmentos

Vamos a construir un ejemplo inspirado en parámetros cosmológicos actualmente conocidos, de acuerdo a una serie de observaciones recientes interpretadas en el marco del modelo Λ -CDM. De esta manera, ilustraremos cómo pueden ser tenidas en cuenta estas inestabilidades a la hora de construir modelos compatibles con las observaciones. Daremos un ejemplo que ilustre un *splitting* con simetría Z_2 , pero teniendo en cuenta que otro ejemplo con parámetros semejantes y el mismo modelo de materia, pero a la manera de la figura 3.2, también es posible. En nuestro universo idealizado tenemos únicamente materia en forma de polvo y radiación, en proporciones idénticas en principio a las de nuestro universo. Escribimos entonces,

$$\rho_m = \rho_c(\Omega_c + \Omega_b)(1+z)^3 + \epsilon_0^\gamma(1+z)^4 \quad (3.72)$$

donde $\rho_c \equiv 3H_0^2/8\pi G$, Ω_c y Ω_b son las proporciones de materia oscura y bariónica respectivamente en el universo actual, y ϵ_0^γ es la densidad de radiación en la época actual. Vamos a suponer por simplicidad $k = M = 0$, por lo que no hay originalmente radiación oscura. Este escenario es una versión con materia en la brana del modelo de Randall y Sundrum en [26]. La ecuación de Friedmann (3.60) puede escribirse,

$$H^2 = H_0^2 \left[\left((\Omega_c + \Omega_b)(1+z)^3 + \frac{\epsilon_0^\gamma}{\rho_c}(1+z)^4 \right) \left(1 + \frac{\epsilon_0^\gamma(1+z)^4}{2b} \right) + \Omega_\Lambda \right] \quad (3.73)$$

donde reemplazamos ρ_m en el término cuadrático por la componente de radiación, que es la que tiene preponderancia antes de la nucleosíntesis. En estadios bien posteriores a la igualdad materia-radiación, la ecuación toma la simple forma, coincidente con la del modelo estándar *Lambda*-CDM,

$$H^2 = H_0^2((\Omega_c + \Omega_b)(1+z)^3 + \Omega_\Lambda) \quad (3.74)$$

donde queda explícita la relación $\Omega_c + \Omega_b + \Omega_\Lambda = 1$.

Vamos a proponer una fragmentación en la época actual ($z = 0$) en la que la materia oscura se despega del resto formando dos superficies Z_2 -simétricas, a la manera de la figura 3.1. No esperamos que una construcción semejante tenga algún grado de realidad, si no que queremos dar un ejemplo con cierto grado de representatividad para con modelos de interés actual que ilustre la multiplicidad de evoluciones que puede tener un mismo dato inicial cuando existe inestabilidad ante separación de componentes. La ecuación de Friedmann que tendría la cáscara de polvo resultante está dada por (3.64), la cual se puede escribir para este caso como,

$$\tilde{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \tilde{\epsilon}_{dr} \left(1 + \frac{2b\tilde{\epsilon}_{dr}}{\tilde{\rho}^2} \right) + \frac{\pi G}{3b} \tilde{\rho}^2 + \frac{\Lambda_4 - 4\pi Gb}{3} \quad (3.75)$$

donde $8\pi G\tilde{\epsilon}_{dr}/3 \equiv M'/R^4$ representa la densidad efectiva asociada al término de radiación oscura. Para esta cáscara tendríamos $\tilde{\rho} = \rho_c \Omega_c (1 + \tilde{z})^3$, siendo $\tilde{z} \equiv R_0/\tilde{R} - 1$. Como al momento de la separación tenemos $\tilde{\rho} \ll b$, despreciamos el término cuadrático en $\tilde{\rho}$ y escribimos,

$$\tilde{H}^2 = H_0^2 \left[\tilde{\Omega}_{dr} (1 + \tilde{z})^4 \left(1 + \frac{2b\tilde{\Omega}_{dr}}{\rho_c \Omega_c^2 (1 + \tilde{z})^2} \right) + \Omega_\Lambda - \frac{b}{2\rho_c} \right] \quad (3.76)$$

donde $\tilde{\Omega}_{dr} \equiv \tilde{\epsilon}_{dr}(R_0)/\rho_c$. Toda la información que necesitamos para calcular las ecuaciones de Friedmann para cada superficie está contenida en $\tilde{\Omega}_{dr}$, parámetro que podemos encontrar planteando continuidad de H al momento de separación. Igualando (3.74) con (3.76), y despreciando términos cuadráticos en ρ_c/b obtenemos,

$$\tilde{\Omega}_{dr}^2 \approx \frac{\Omega_c^2}{4} \left(\frac{\rho_c}{b} (2\Omega_b + \Omega_c) + 1 \right) \quad (3.77)$$

por lo que (3.76) se puede escribir

$$\tilde{H}^2 = H_0^2 \left[\left(\frac{b}{2\rho_c} + \frac{\Omega_c}{2} + \Omega_b \right) (1 + \tilde{z})^2 + \frac{\Omega_c}{2} (1 + \tilde{z})^4 + \Omega_\Lambda - \frac{b}{2\rho_c} \right]. \quad (3.78)$$

Finalmente, despreciando términos en los paréntesis obtenemos,

$$\tilde{H}^2 = H_0^2 \left[1 + \frac{b}{\rho_c} \tilde{z} \left(1 + \frac{\tilde{z}}{2} \right) \right] \quad (3.79)$$

donde se observa claramente que para $\tilde{z} \approx -\rho_c/b$, $\dot{\tilde{H}}^2$ se hace 0, lo que implica un casi inmediato “rebote” de la cáscara de materia oscura luego de la separación: \tilde{R} comienza a decrecer y, como ocurre con las cáscaras de polvo en simetría esférica, eventualmente forma un horizonte de eventos

y colapsa en un tiempo propio finito. Los términos que despreciamos para escribir (3.79) se hacen relevantes sólo muy cerca del colapso, por lo que esta ecuación es una excelente aproximación a lo largo de la mayoría de la evolución de la cáscara.

Por otra parte, la ecuación de movimiento para la brana central resultante es (3.60) con parámetro M' , por lo que teniendo en cuenta la continuidad de H escribimos,

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_b(1+z)^3 + \Omega_c(1+z)^4 + \Omega_\Lambda] \quad (3.80)$$

donde $z < 0$. De esta manera, la dinámica de la superficie central queda descrita por (3.74) para $z > 0$, y por (3.80) para $z < 0$. Resulta interesante destacar que el efecto que tendría la “desaparición” de la componente de materia oscura en la dinámica de la brana central es el de “convertirse” en radiación oscura, ya que este término efectivo en la ecuación de evolución correspondería inicialmente a una radiación con la misma densidad efectiva que la que tenía la materia oscura al salir de la brana.

En la figura 3.6 ilustramos H/H_0 en función de z para la superficie central, con parámetros cosmológicos que resultan el *best fit* del cruce de datos obtenidos por mediciones del CMB, supernovas de alto red-shift, y BAO [74] ($\Omega_b = 0,045, \Omega_c = 0,227, \Omega_\Lambda = 0,728$); y con $b/\rho_c = 10^{35}$, que es un valor que aproxima muy bien (3.73) a las ecuaciones de Friedmann estándar desde antes que la nucleosíntesis. Notamos la discontinuidad de la derivada de $H(z)$ al momento de la separación.

Resulta interesante destacar que la razón por la cual no ilustramos \tilde{H} es el hecho de que toma valores muy grandes apenas ocurre la separación, dado que \tilde{H} exhibe una discontinuidad muy fuerte. Como mencionamos antes, colapsa muy rápidamente dejando un universo brana moviéndose en un *bulk* con agujeros negros. Esto contrasta fuertemente con los ejemplos que dimos en la sección anterior, donde la separación se hacía con \ddot{R} continuo, por darse justo al momento en el cual se cumple la condición crítica. En nuestro ejemplo de universo-brana esta condición se cumplió en estadios muy tempranos, para z mucho mayor al de la nucleosíntesis, lo que implica que la evolución de las componentes ha sido inestable, y cada vez más inestable, a lo largo de casi toda su evolución. Un *splitting* suave en este contexto sólo podría darse en el universo muy temprano; escenario que resulta abierto a la especulación acerca de las consecuencias que podría tener que haya habido materia que “se fue” del universo-brana central hacia la dimensión extra, dejando radiación oscura remanente.

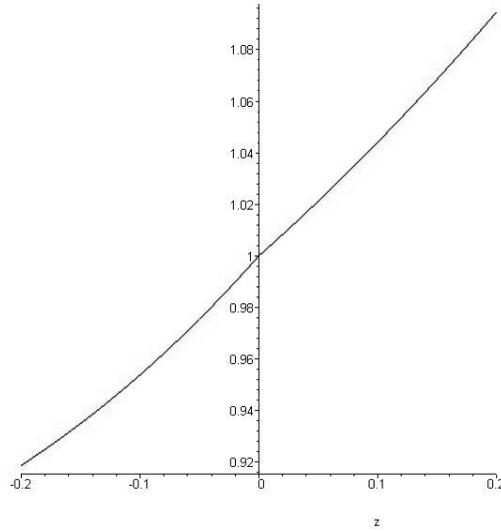


Figura 3.6: Curva que representa H/H_0 en función de z para la brana central, imponiendo una separación entre la materia oscura y el resto de la materia en $z = 0$. Se observa una discontinuidad en la derivada de H en ese punto, donde la dinámica cambia como si la materia oscura se convirtiera en energía oscura.

3.3.4. Comentarios finales

Otra manera de interpretar estas inestabilidades sería sugerir que en el universo-brana debe actuar alguna fuerza que ligue las distintas componentes supuestas no interactuantes para evitar el *splitting*. Podríamos considerar por ejemplo un campo escalar en el *bulk* además de una constante cosmológica, lo que además es un escenario bastante estudiado en la literatura [21], principalmente porque puede hacerse consistente con la inflación. Tal vez el acoplamiento con este campo, o con otros que pudiera haber en el *bulk*, pueda ser el origen de la interacción que “previene” el *splitting*. Otra situación a tener en cuenta sería considerar gravedad de Lovelock [75] en el *bulk*, que es una extensión de la Relatividad General para espacio-tiempos de dimensiones arbitrarias que admite ecuaciones de campo que no son lineales con respecto al tensor de curvatura. Todos estos escenarios son posibles líneas futuras de investigación. En cualquier caso, la posibilidad de un *splitting* entre componentes no-interactuantes resulta un argumento que puede favorecer o desfavorecer a los diversos modelos. Resulta una herramienta nueva que habla de la estabilidad de ciertas configuraciones, y como tal, en el marco de una teoría dada, define un criterio de plausibilidad a tener en cuenta.

Pero tal vez antes que considerar el *splitting* entre componentes definidas artificialmente, tendríamos que considerar una situación “mejor definida”, como ser una extensión del primer análisis en la sección 2.4, en la que *partículas*

individuales se “evaporan” de la brana, proponiendo que una de las componentes del universo sea materia de Vlasov. En el contexto cosmológico, la noción de *partícula* puede tener más sentido físico que la de “componente no interactuante”. Podemos intuir, por analogía con los resultados en la sección 2.4, que existen geodésicas de la métrica ambiente que “salen” de la cáscara, y que habría una “velocidad mínima” para que las partículas no se evaporen. Las partículas correspondientes a las *velocidades tangenciales* más “bajas” en el *ensemble* de partículas, esto es, aquellas partículas que están “más en reposo” con respecto a los observadores isotrópicos, “caerían” hacia los *bulks* con agujeros negros. Pero debemos tener en cuenta que, en relación con el hecho de que las regiones del *bulk* son ambas *interiores*, en este escenario puede ocurrir que ambas condiciones de inestabilidad (las correspondientes a cada lado de la brana) se cumplan simultáneamente. Esto es, pueden haber dos geodésicas distintas para una dada 4-velocidad inicial tangente a la brana⁴, cada una “yendo” hacia regiones opuestas del *bulk*⁵. Esta ambigüedad requiere de una interpretación diferente a la de la sección 2.4.

En relación a esto, debemos mencionar que el problema de las geodésicas en modelos de branas fue considerado por Anderson y Tavakol en [76], en donde se expone una interesante discusión sobre las implicancias teóricas que tiene imponer la existencia de dos clases distintas de líneas de mundo para las partículas en caída libre: geodésicas del *bulk* por un lado, y geodésicas de la métrica inducida en la brana por el otro. Esta es una suposición que se suele hacer, muchas veces implícitamente, en la literatura de cosmología de branas, y que resulta en conflicto directo con el principio de equivalencia, que es uno de los principios fundacionales de la Relatividad General. De esta manera, ante la ambigüedad de tener dos geodésicas del *bulk* posibles para la misma 4-velocidad inicial, en [76] se considera la conexión “promedio” (se promedian las curvaturas extrínsecas) en la brana, lo que favorece a los modelos con simetría Z_2 , ya que en ellos, en este sentido, las “geodésicas” del *bulk* coinciden con las de la métrica inducida. Resulta discutible esta consideración, ya que en una teoría no-lineal como la Relatividad no tiene sentido por lo general “sumar” contribuciones. De todas maneras, es un tema para reflexionar, y lo apuntamos como otra posible línea de investigación a futuro.

Por otra parte, tampoco hemos demostrado que las soluciones de *splitting* sean “robustas” ante perturbaciones que se “salgan” del alto grado de simetría de estos modelos. Como comentaremos en el último capítulo, no

⁴Claramente con simetría Z_2 o no hay ninguna o hay dos, con excepción de un conjunto de situaciones de medida nula, cuando $d^2\eta/d\sigma^2 = 0$.

⁵En la sección 2.4, como no podía darse el caso de dos soluciones para una dada 4-velocidad inicial, decíamos que la partícula permanecía en la cáscara si no había geodésica, y que se *evaporaba* si la había.

vemos *a priori* argumento alguno que nos indique que en una situación menos idealizada, que siempre va a tener grados de libertad radiativos, tales soluciones no se puedan construir. Podemos establecer analogías con ciertos sistemas de ecuaciones que tienen soluciones que representan ondas de choque (*shock waves*), que son a su vez superficies singulares en el sentido general que tratamos en la introducción, para las cuales se ha demostrado la falta de unicidad [77] en la evolución de un dato inicial que contenga *shocks*.

La no existencia de modos radiativos en estos casos es, tal vez, el principal “defecto” que tienen estas simetrías. En el próximo capítulo vamos a volver a las cuatro dimensiones usuales, pero vamos a tratar la simetría más simple que a su vez permite ondas gravitatorias en el vacío, simetría que en sí es bastante menos representativa de la naturaleza que las de este capítulo, pero que resulta conveniente como primer paso hacia el análisis de los modos radiativos: la simetría cilíndrica.

Capítulo 4

Cáscaras finas en simetría cilíndrica

4.1. Ecuaciones de campo y condiciones de empalme

Análogamente al caso de la cáscara fina en simetría esférica, podemos escribir la variedad de estudio como $M = M^- \cup \Sigma \cup M^+$, donde M^- y M^+ son variedades cilíndricamente simétricas con borde, los cuales están identificados con la 3-variedad Σ , que a su vez representa la historia de una distribución cilíndrica de materia. Llamamos $M^-(M^+)$ a la región de vacío interior (exterior) al cilindro.

Como vimos en la introducción, existen varias maneras de definir simetría cilíndrica, y en nuestro caso vamos a adoptar *whole cylindrical symmetry*. En el vacío, y también si hay sólo radiación, existen las así llamadas *coordenadas cilíndricas canónicas* (t, r, z, ϕ) (ver la subsección 1.2.2), donde la métrica toma la forma [59]

$$ds_{\pm}^2 = e^{2\gamma_{\pm} - 2\psi_{\pm}} (dr^2 - dt_{\pm}^2) + e^{2\psi_{\pm}} dz^2 + e^{-2\psi_{\pm}} r^2 d\phi^2. \quad (4.1)$$

En esta expresión dejamos explícito que las coordenadas canónicas t no tienen que coincidir en la superficie, como así tampoco las funciones γ . En cambio, la función ψ y las coordenadas (r, z, ϕ) sí resultan continuas en la superficie en virtud de sus interpretaciones geométricas: los módulos de los campos de Killing ξ_z y ξ_{ϕ} se escriben en términos de ψ y r , mientras que (z, ϕ) coordinatizan las órbitas del grupo de simetría.

Para cada región de vacío M_{\pm} , las ecuaciones de campo de Einstein se escriben

$$\psi_{,rr} + \frac{1}{r}\psi_{,r} - \psi_{,tt} = 0 \quad (4.2)$$

$$\gamma_{,t} = 2r\psi_{,r}\psi_{,t} \quad , \quad \gamma_{,r} = r [(\psi_{,r})^2 + (\psi_{,t})^2]. \quad (4.3)$$

Notamos en particular que la ecuación (4.2) es justamente la condición de integrabilidad de las ecuaciones (4.3). De aquí podemos interpretar $\psi(t, r)$ como el análogo relativista del potencial newtoniano para este problema. Las soluciones dependientes del tiempo de (4.2) representan ondas gravitacionales [60]. Las condiciones de borde para este sistema serían por un lado la suavidad de la geometría en el eje de simetría $r = 0$, lo que implica $\gamma(t, 0) = 0$ y $\psi(t, 0)$ finito, y por el otro algún decaimiento asintótico apropiado para el límite $r \rightarrow \infty$.

Si la superficie Σ es una superficie singular como las descritas en la sección 1.1, requerimos continuidad de la métrica en Σ , y discontinuidad de la curvatura extrínseca K^{ij} de acuerdo a (1.17). La métrica inducida en Σ se escribe,

$$ds_{\Sigma}^2 = -d\tau^2 + e^{2\psi_{\Sigma}} dz^2 + e^{-2\psi_{\Sigma}} R^2 d\phi^2 \quad (4.4)$$

donde $\psi_{\Sigma}(\tau) = \psi_+(R(\tau), t_+(\tau)) = \psi_-(R(\tau), t_-(\tau))$. La evolución de la cáscara está caracterizada por $R(\tau)$, que es la coordenada radial r de la cáscara al tiempo τ , que a su vez está definido como el tiempo propio de un observador comóvil con Σ (con coordenadas z y ϕ constantes).

Escribimos el tensor de masa-energía efectivo en la superficie en las coordenadas (τ, ϕ, z) como

$$S_j^i = \text{diag}[-\rho, p, p_z]. \quad (4.5)$$

Ahora podemos escribir las condiciones de empalme en términos de saltos de las derivadas de las funciones de la métrica ψ y γ , y de las derivadas de (t, r) con respecto a (τ, η) . Definimos en primer lugar

$$X^{\pm} \equiv \frac{\partial t_{\pm}}{\partial \tau} = +\sqrt{e^{-2(\gamma_{\pm} - \psi_{\Sigma})} + \dot{R}^2}. \quad (4.6)$$

Teniendo en cuenta que la ortogonalidad de $(\partial/\partial r)^a$ con $(\partial/\partial t)^a$ implica,

$$\left. \frac{\partial r}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \text{sgn} \left(\left. \frac{\partial r}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \right) X^{\pm} \quad , \quad \left. \frac{\partial t_{\pm}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \text{sgn} \left(\left. \frac{\partial r}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \right) \dot{R} \quad (4.7)$$

las condiciones de empalme finalmente se escriben,

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] = -4\pi(\rho + p_z - p) \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{R} [X] = -8\pi\rho \quad (4.9)$$

$$\left[\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} + \text{sgn} \left(\left. \frac{\partial r}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \right) e^{2(\gamma - \psi)} (X\ddot{R} - \dot{R}\dot{X}) \right] = 8\pi p \quad (4.10)$$

donde, como antes, $[A] \equiv A^+|_{\eta=0} - A^-|_{\eta=0}$. De acuerdo con la noción de simetría cilíndrica *estándar*, $\partial r/\partial \eta|_{\eta=0}$ debe tener el mismo signo hacia ambos lados ya que r es una coordenada global, por lo que de ahora en más

tomamos por convención r creciente con η . Las derivadas en las condiciones de empalme por lo tanto se escriben

$$A_{,\eta}^{\pm}|_{\eta=0} = A_{,r}^{\pm}|_{\eta=0}X^{\pm} + A_{,t}^{\pm}|_{\eta=0}\dot{R}. \quad (4.11)$$

Por otra parte, la ecuación (1.19) se escribe,

$$\dot{\rho} + \frac{(\rho + p)\dot{R}}{R} = \dot{\psi}_{\Sigma}(p - p_z) \quad (4.12)$$

de donde se puede ver que en el caso de un fluido *isotrópico*, la ecuación coincide con la ley de conservación para un fluido unidimensional en un anillo de radio R .

4.2. Cáscara fina de partículas contrarrotantes

Vamos a considerar una cáscara fina de partículas contrarrotantes, como la analizada por Apostolatos y Thorne en [12]¹. Se puede argumentar que, en algún sentido, son éstos los sistemas más simples con materia físicamente razonable que exhiben acoplamiento con los modos radiativos del campo gravitatorio en un sentido preciso. Lo discutido en esta sección se encuentra publicado en los trabajos [4] y [6].

Se trata de una superficie singular cuyo contenido de materia consiste en un *ensemble* de partículas no interactuantes, un sistema de Einstein-Vlasov, donde las mismas siguen exclusivamente trayectorias con z constante dentro de la superficie, con momento angular por unidad de masa propia J , y donde se tiene la misma cantidad de partículas moviéndose en cada sentido $(\partial/\partial\phi)^i$ y $(-\partial/\partial\phi)^i$, respetando de esta manera la *whole cylindrical symmetry*.

Este sistema fue analizado en [12] en el contexto de la conjetura del censor cósmico (imposibilidad de formación de singularidades desnudas en el colapso gravitatorio), y, en particular, en relación a la así llamada conjetura de “hoop”, que consiste en suponer que la formación de agujeros negros se da únicamente en el colapso de objetos lo suficientemente compactos en todas sus dimensiones. Esta conjetura despertó a principio de los 90’ un renovado interés, ya que se habían obtenido resultados [78] que sugerían la formación de singularidades desnudas ante el colapso de objetos lo suficientemente “alargados” en una dirección. Justamente, el punto central de [12] es la conclusión de que si las partículas constituyentes poseen algo de momento angular ($J \neq 0$), es decir presión tangencial, se hace imposible el colapso; lo que contrasta con el caso del polvo $J = 0$ ([79],[80]), donde el mismo es inevitable. Sin embargo, el análisis que hacen para la dinámica general de la cáscara requiere de las hipótesis de que las mismas parten de condiciones

¹En la literatura se denomina frecuentemente a este sistema *Apostolatos-Thorne shell*.

iniciales llamadas “momentarily static radiation free” (MSRF) (se especificará más adelante su significado) y de que, además, la cáscara debe tender asintóticamente para tiempos lo suficientemente grandes a otra configuración del tipo MSRF. Esta última suposición no quedó demostrada, y de hecho ha sido más recientemente cuestionada en los trabajos [86] y [88].

Consideramos por lo tanto que aún no se ha hecho un análisis general de la dinámica de este tipo de cáscara, lo que nos motiva a decir que los resultados que vamos a exponer en esta sección resultan relevantes. Expondremos básicamente tres aspectos no analizados previamente en la literatura. En primera instancia, encontramos una familia de soluciones donde el espacio-tiempo en el interior de la cáscara resulta plano. Dentro de esta familia existen soluciones periódicas, lo que denota una interacción interesante con los modos radiativos del campo gravitatorio del exterior de la cáscara. En segunda instancia, analizamos el problema linearizado alrededor de una configuración estática. Encontramos que el movimiento de la cáscara admite modos de frecuencia arbitraria, contrariamente a la intuición newtoniana que nos sugiere la existencia de una frecuencia característica para pequeñas oscilaciones de la cáscara, independiente de los modos del campo gravitatorio. Esto denota una interacción compleja entre la cáscara y los modos radiativos del campo. Finalmente, estudiamos para las ecuaciones linearizadas el problema del valor característico, la estabilidad de las configuraciones estáticas, y la existencia de *modos cuasinormales* y *ringing cuasinormal* ante la acción de un pulso proveniente del infinito. Pudimos encontrar una base completa para describir este problema, con la cual demostramos que en general este sistema exhibe *ringing cuasinormal*, y que, a nivel linearizado, las soluciones estáticas para la *Apostolatos-Thorne shell* resultan todas estables.

4.2.1. Ecuaciones de movimiento

Las componentes del tensor de masa-energía para este modelo se deducen tanto en [12] como en [84]. Podemos ver que las condiciones de empalme (4.8) y (4.9) se pueden escribir para este caso como,

$$\psi_{,\eta}^+ - \psi_{,\eta}^- = -\frac{2\lambda}{\sqrt{R^2 + e^{2\psi_\Sigma} J^2}} \quad (4.13)$$

$$X^+ - X^- = -\frac{4\lambda\sqrt{R^2 + e^{2\psi_\Sigma} J^2}}{R} \quad (4.14)$$

donde las constantes λ y J son, respectivamente, la masa propia del cilindro por unidad de longitud de Killing y el momento angular por unidad de masa propia de las partículas. Reemplazando en (4.10) con las otras dos ecuaciones

de empalme, obtenemos la ecuación de movimiento,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\tau^2} = & \dot{R}\dot{\psi}_\Sigma - R \left[(\dot{\psi}_\Sigma)^2 + (\dot{\psi}_{,n}^-)^2 \right] \\ & + \frac{R^2 \psi_{,n}^- X^-}{R^2 + e^{2\psi_\Sigma} J^2} - \frac{\lambda R^2 X^-}{(R^2 + e^{2\psi_\Sigma} J^2)^{3/2}} + \frac{J^2 e^{2\psi_\Sigma} X^- X^+}{R(R^2 + e^{2\psi_\Sigma} J^2)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

que expresa el acoplamiento entre el campo y el movimiento de la cáscara.

Las ecuaciones (4.13, 4.14, 4.15), junto con (4.2, 4.3) determinan la evolución de la cáscara y del campo gravitatorio al cual está acoplada. Las funciones $R(\tau)$, $\psi^\pm(t_\pm, r)$, y $\gamma^\pm(t_\pm, r)$, satisfacen un sistema complejo de ecuaciones diferenciales ordinarias y a derivadas parciales, que deben satisfacer condiciones de empalme para $\psi_{,\eta}^\pm$ y γ_\pm en $(t = t_\pm(\tau), r = R(\tau))$ acopladas al movimiento de la cáscara. Es por esta complejidad que en [12], si bien se estudiaron propiedades mas o menos generales del movimiento, no se obtuvieron soluciones dinámicas explícitas. También fue esta complejidad la que llevó a que en [84], además de la introducción de una segunda cáscara por otras razones técnicas, se utilice una aproximación que conlleva un desacoplamiento efectivo de (4.15), evitando de esta manera tratar el problema de condiciones de borde dinámicas para la ecuación de onda (4.2). En este trabajo, en cambio, empezaremos por considerar en la siguiente subsección algunas soluciones analíticas dinámicas.

4.2.2. Un conjunto particular de soluciones

Una solución completa del problema debería dar cuenta de la evolución de datos iniciales arbitrarios que satisfagan los *constraints* que imponen las ecuaciones de campo. Claramente éste es un problema muy complejo. Sin embargo, podemos plantear una restricción para el conjunto de soluciones que, sin que las soluciones que la cumplen dejen de exhibir el acoplamiento de la cáscara con los modos radiativos del campo gravitatorio, permite simplificar considerablemente el sistema de ecuaciones haciendo posible un análisis completo de su evolución y del significado físico de la misma.

Soluciones estáticas

Vamos a considerar primero las soluciones estáticas donde la cáscara tiene un radio constante R_0 . Se puede ver que, asumiendo regularidad en el origen, las ecuaciones de onda para la región interior implican $\gamma_- = 0$ y $\psi_- = cte$. Vamos a elegir sin pérdida de generalidad $\psi_- = 0$, lo que en particular implica $\psi_\Sigma = 0$. De esta manera, el campo exterior nos queda,

$$\psi^+(r) = -\kappa \ln(r/R_0) \quad , \quad \gamma^+(r) = \gamma_0 + \kappa^2 \ln(r/R_0) \quad (4.16)$$

con

$$X^+(r) = e^{-\gamma_0} \quad , \quad X^- = 1. \quad (4.17)$$

Como $\dot{R}_0 = 0$, $\dot{\psi}_\Sigma = 0$, y $\psi_{,\eta}^- = 0$, tenemos,

$$\kappa = 2 \frac{J^2}{R_0^2} \quad , \quad \gamma_0 = 2 \ln [(R_0^2 + 2J^2)/R_0^2] \quad (4.18)$$

y,

$$\lambda = \frac{J^2 R_0 \sqrt{J^2 + R_0^2}}{(2J^2 + R_0^2)^2} \quad (4.19)$$

Esta última ecuación en particular implica que toda solución estática debe cumplir $\lambda \leq 0,15879\dots$, (ver [84]).

Soluciones dinámicas con un interior plano

El resultado anterior indica que, al menos para el caso estático, existen soluciones donde la región interior a la cáscara es plana. Como vimos en los capítulos anteriores, en el caso de una shell de materia con simetría esférica existen soluciones donde el radio de la cáscara cambia con el tiempo mientras la región interior permanece plana. Para ello la hipótesis de simetría esférica es crucial, ya que implica que no existen modos radiativos para el campo gravitatorio y que en particular vale el teorema de Birkhoff: en una región vacía con simetría esférica la métrica siempre es Schwarzschild; por lo que si el centro de simetría es regular y está en una región vacía, la métrica allí debe ser Minkowski. No existe un teorema análogo en el caso de la simetría cilíndrica, y de hecho uno no esperaría que en una situación dinámica general el interior permanezca plano, ya que los modos gravitatorios radiativos correspondientes a un ψ^+ no estático penetrarían la región interior, porque de otra manera las condiciones de empalme no podrían ser satisfechas. De todas formas, dado que las soluciones estáticas poseen un interior plano, es interesante explorar hasta qué punto, si hubiera alguno, puede esta condición ser generalizada para soluciones dinámicas. Asumimos entonces $\gamma^- = 0$, $\psi^- = 0$, lo que a su vez implica $\psi_\Sigma = 0$, $\psi_{,\eta}^- = 0$, y $X^- = \sqrt{1 + (\dot{R})^2}$. En la cáscara tenemos

$$X^+ = \sqrt{1 + (\dot{R})^2} - \frac{2\lambda}{\sqrt{R^2 + J^2}}. \quad (4.20)$$

Usando esta ecuación, y el hecho que $\dot{\psi}_\Sigma = 0$, encontramos

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} = \frac{(1 + (\dot{R})^2)J^2}{R(R^2 + J^2)} - \frac{\sqrt{1 + (\dot{R})^2}(R^2 + 2J^2)^2 \lambda}{R^2(R^2 + J^2)^{3/2}}. \quad (4.21)$$

La primera característica inesperada que podemos distinguir en esta ecuación es que no contiene información alguna sobre ψ , si no que es una ecuación

autónoma, completamente desacoplada de los modos gravitatorios. Igualmente inesperado a primera vista, es que admite una primera integral sencilla, dada por,

$$C = -\frac{\lambda}{2} \ln(R^2 + J^2) + 2 \frac{\lambda J^2}{R^2} - \frac{\sqrt{R^2 + J^2}}{R} \sqrt{\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + 1} \quad (4.22)$$

donde C es una constante. Esto puede ser escrito también de la forma

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + 1 - \frac{[4\lambda J^2 - \lambda R^2 \ln(R^2 + J^2) - 2CR^2]^2}{4R^2(R^2 + J^2)} = 0. \quad (4.23)$$

Por lo tanto, el movimiento de la cáscara sería totalmente análogo al de una partícula de masa unidad moviéndose en una dimensión en el potencial,

$$V(R) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{[4\lambda J^2 - \lambda R^2 \ln(R^2 + J^2) - 2CR^2]^2}{4R^2(R^2 + J^2)} \right] \quad (4.24)$$

con energía total cero. Notar que C no es esta “energía” y que, por lo tanto, la forma de $V(R)$ va a ser diferente para soluciones diferentes. Cabe destacar que (4.23) implica que si existen elecciones apropiadas para los parámetros tales que el potencial $V(R)$ posea un mínimo negativo, la cáscara podría moverse periódicamente.

La forma relativamente compleja de $V(R)$ con respecto a sus parámetros hace difícil un análisis general de los movimientos posibles basados en (4.23). De todas formas podemos en particular notar el comportamiento asintótico de $V(R)$,

$$V(R) = -(\lambda \ln(R) + C)^2/2 + \mathcal{O}(R^0) \quad , \quad R \rightarrow \infty \quad (4.25)$$

y

$$V(R) = -2\lambda^2 R^{-2} + \mathcal{O}(R^0) \quad , \quad R \rightarrow 0 \quad (4.26)$$

que implica la existencia de movimientos no acotados en el espacio para R lo suficientemente grande, y de colapso para R lo suficientemente chico. Por otra parte, la ecuación

$$4\lambda J^2 - \lambda R^2 \ln(R^2 + J^2) - 2CR^2 = 0 \quad (4.27)$$

tiene una raíz real R_m para cualesquier J , C y $\lambda > 0$ reales. Tenemos que $V(R_m) = 1/2$, que es el máximo valor posible para $V(R)$, lo que implica que las regiones de colapso y movimiento no acotado se encuentran separadas por al menos una región “prohibida”. Dependiendo de los parámetros, $V(R)$ puede llegar a tener dos regiones disjuntas “prohibidas” donde $V(R) > 0$, y es en esos casos donde resultan posibles movimientos periódicos entre estas

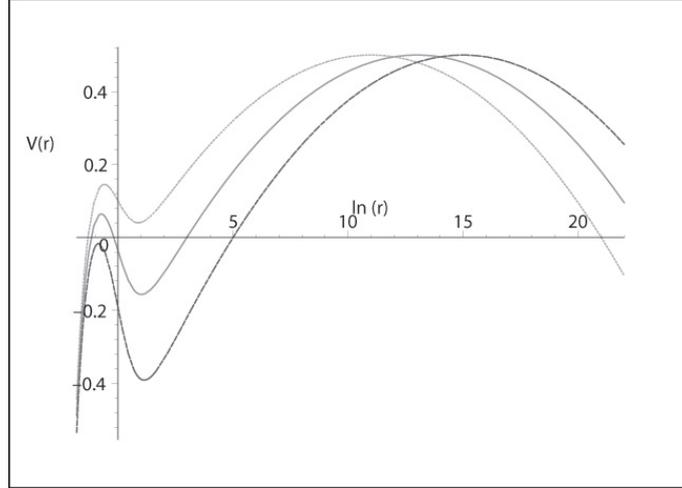


Figura 4.1: Imágen de $V(R)$ como función de $\ln(R)$. Tomamos $J = 1$ y $\lambda = 0,1$ en todos los casos. La curva sólida, con $C = -1,3$, contiene una región donde son posibles los movimientos periódicos. No hay movimientos periódicos posibles tanto para la curva punteada ($C = -1,1$) como para la curva de rayas ($C = -1,5$). En todos los casos tenemos una región de colapso para R lo suficientemente chico, y una región de movimiento no acotado para R lo suficientemente grande.

dos regiones. La figura 4.1 ilustra algunos ejemplos explícitos de estos casos, los cuales serán estudiados con detalle más adelante.

Es importante notar que la ecuación de evolución (4.21) posee la siguiente propiedad de escala: introduciendo la función $\tilde{R}(\eta)$,

$$\tilde{R}(\eta) \equiv \frac{1}{J}R(J\eta) \quad (4.28)$$

tenemos que,

$$\frac{d^2 \tilde{R}}{d\eta^2} + \frac{\sqrt{\left(\frac{d\tilde{R}}{d\eta}\right)^2 + 1} (\tilde{R}^2 + 2)^2 \lambda}{(\tilde{R}^2 + 1)^{3/2} \tilde{R}^2} - \frac{\left(\frac{d\tilde{R}}{d\eta}\right)^2 + 1}{\tilde{R} (\tilde{R}^2 + 1)} = 0 \quad (4.29)$$

por lo tanto, los movimientos posibles quedan determinados por el parámetro adimensional λ a menos de una transformación de escala.

Compatibilidad con las ecuaciones de campo

Hasta ahora sólo hemos considerado la ecuación (4.21). El conjunto completo de ecuaciones de campo incluye también ψ , γ y las condiciones de empalme, y no hay *a priori* garantía de que haya soluciones de (4.21) compatibles con las otras ecuaciones además de las soluciones estáticas. En par-

ticalar, la condición $\psi_\Sigma = 0$ implica,

$$\psi_{,r}^+(R(\tau), t^+(\tau))\dot{R} + \psi_{,t}^+(R(\tau), t^+(\tau))X^+ = 0 \quad (4.30)$$

lo cual, junto con (4.11) y (4.20), determina $\psi_{,r}^+(R(\tau), t^+(\tau))$ y $\psi_{,t}^+(R(\tau), t^+(\tau))$ en función de $R(\tau)$. Luego de algunas simplificaciones, usando también (4.23,) encontramos

$$\begin{aligned} \psi_{,r}^+(R(\tau), t^+(\tau)) &= -\frac{\lambda[4\lambda J^2 + 8\lambda R^2 + \lambda R^2 \ln(R^2 + J^2) + 2CR^2]}{R(R^2 + J^2)[1 + 4\lambda^2 \ln(R^2 + J^2) + 8\lambda C + 16\lambda^2]} \\ \psi_{,t}^+(R(\tau), t^+(\tau)) &= \frac{2\lambda\dot{R}}{\sqrt{R^2 + J^2}[1 + 4\lambda^2 \ln(R^2 + J^2) + 8\lambda C + 16\lambda^2]}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Análogamente, de (4.20) obtenemos

$$\gamma^+(R(\tau), t^+(\tau)) = -\frac{1}{2} \ln[1 + 4\lambda^2 \ln(R^2 + J^2) + 8\lambda C + 16\lambda^2]. \quad (4.32)$$

A partir de esta expresión podemos calcular,

$$\frac{d\gamma^+}{d\tau} = \gamma_{,r}^+\dot{R} + \gamma_{,t}^+X^+ \quad (4.33)$$

donde comprobamos que si se reemplaza (4.3) en el lado derecho, y luego se utiliza (4.31), obtenemos la misma expresión que la que obtendríamos resolviendo el lado izquierdo por medio de (4.32). Concluimos que la hipótesis de un interior plano es compatible con la dinámica de γ en la cáscara.

En principio, tenemos ya lo que se necesita para calcular ψ (y luego γ) en la región externa. Suponiendo que $R(\tau)$ satisface ciertas condiciones apropiadas que vamos a explicitar luego, podemos ver que si imponemos $\psi_\Sigma = 0$, considerando $R(\tau)$ como una función dada, obtenemos para ψ una ecuación de onda con una condición de borde bien definida. Para analizar este problema observamos que en (4.2) podemos considerar r como la coordenada “tiempo” y t como una coordenada “espacial”, como se ilustra en la figura 4.2. Podemos pensar esta situación como un problema de Cauchy donde se analiza la “evolución” en r para un dato inicial ($\psi_\Sigma = 0, \psi_{,r}$) en la superficie unidimensional \mathcal{S} , que representa la historia de la cáscara en el plano (r, t_+) , más precisamente,

$$t_+ = \eta \quad , \quad r = R(\tau(\eta)) \quad (4.34)$$

donde η es un parámetro, y $\tau(t_+)$ se obtiene invirtiendo (4.20). El problema está “bien puesto” sólo si \mathcal{S} es una superficie de Cauchy, lo que requiere que el vector tangente a \mathcal{S} sea “espacial” en este contexto, o sea que $(dt/d\eta)^2 - (dr/d\eta)^2 > 0$, lo que se escribe como

$$(X^+)^2 > (\dot{R})^2. \quad (4.35)$$

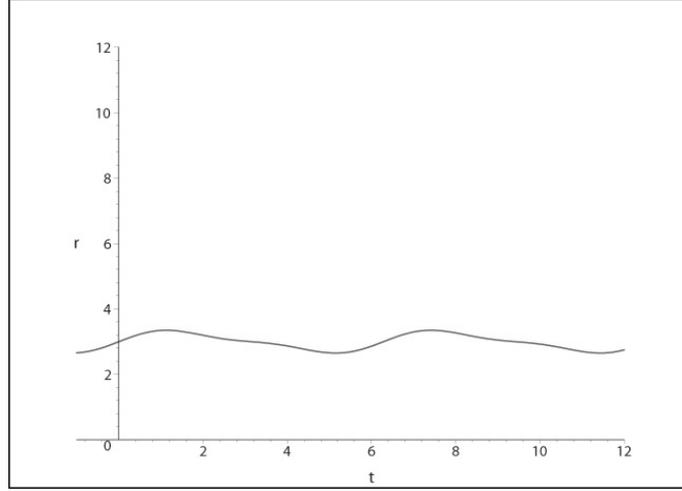


Figura 4.2: Resolvemos $\psi_+(t, r)$ dando un “dato inicial” ($\psi|_{\mathcal{S}} = 0, \psi_{,r}|_{\mathcal{S}}$) en la curva ($r = R(\tau), t = t_+(\tau)$), representada por la curva gruesa en la figura (en este caso ilustramos una solución oscilante). Evolucionamos $\psi_+(t, r)$ hacia la región “sobre” la curva.

Vemos que según (4.6) esta relación se satisface siempre. Pero además es también necesario que el dato $\psi_{,r}(R(\tau))$ no sea singular, y es ésta la condición que puede fallar, como se puede ver en (4.31), ya que el factor $[1 + 4\lambda^2 \ln(R^2 + J^2) + 8\lambda C + 16\lambda^2]$ en los denominadores de (4.31) puede volverse cero para algún $R \neq 0$. Observemos que si resolvemos (4.27) para $\ln(R_m^2 + J^2)$ obtenemos

$$1 + 4\lambda^2 \ln(R_m^2 + J^2) + 8\lambda C + 16\lambda^2 = 1 + 16 \frac{(R_m^2 + J^2) \lambda^2}{R_m^2}. \quad (4.36)$$

Como el lado izquierdo es una función monótona creciente de R , el factor en cuestión es siempre positivo para $R > R_m$, por lo tanto este problema no aparece para las soluciones no acotadas. Para esos casos entonces el problema de Cauchy resulta *well-posed*, por lo que ψ^+ resulta unívocamente definido en el “dominio de dependencia” de \mathcal{S} .

Por otra parte, movimientos periódicos son sólo posibles si el potencial tiene, aparte del de $R = R_m$, otro máximo, digamos en $R = R_p$, con $V(R_p) > 0$. Para este máximo debemos tener,

$$\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_p} = - \left. \frac{F_1 F_2}{4R^3 (R^2 + J^2)^2} \right|_{R=R_p} = 0 \quad (4.37)$$

donde,

$$F_1 = \lambda R^2 \ln(R^2 + J^2) + 2CR^2 - 4\lambda J^2 \quad (4.38)$$

y

$$F_2 = R^2 \lambda \ln(R^2 + J^2) J^2 + 2 \lambda (2 J^4 + R^4) + 2 R^2 J^2 (C + 4 \lambda). \quad (4.39)$$

El primer factor en (4.37), F_1 , se hace cero para $R = R_m$. Podemos comprobar que este es el único cero de este factor teniendo en cuenta que,

$$\left. \frac{dF_1}{dR} \right|_{R=R_m} = 2 \frac{\lambda (R_m^2 + 2 J^2)^2}{R_m (R_m^2 + J^2)} > 0 \quad (4.40)$$

lo que implica que F_1 puede tener una única raíz en $R > 0$. Por lo tanto, cualquier extremo de $V(R)$ distinto del de $R = R_m$ debe venir de una raíz del segundo factor F_2 . Se puede demostrar que F_2 puede no tener raíces, tener una sola o tener dos, dependiendo de los parámetros; y que cada raíz R_p debe cumplir $R_p < R_m$. Si F_2 no tiene raíces o tiene una sola, $V(R)$ tiene sólo un máximo (en R_m , la eventual raíz de F_2 representaría un punto silla) y no existen soluciones periódicas. Si F_2 tiene dos raíces, $V(R)$ tiene dos máximos, y un mínimo entre estos máximos (un máximo y un mínimo en las raíces de F_2 y otro máximo en R_m). En este último caso podemos tener soluciones periódicas sólo si además $V > 0$ en el primer máximo y $V < 0$ en el mínimo, lo que depende no trivialmente de los parámetros del problema. Podemos obtener de todas formas un resultado útil como vemos a continuación. En toda raíz R_p de F_2 tenemos,

$$\ln(R_p^2 + J^2) = -2 \frac{2 J^4 + R_p^4 + 4 R_p^2 J^2}{R_p^2 J^2} - 2 \frac{C}{\lambda} \quad (4.41)$$

por lo que nos queda

$$V(R_p) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda^2 (R_p^2 + 2 J^2)^4}{J^4 R_p^2 (R_p^2 + J^2)} \right). \quad (4.42)$$

Si $V(R_p)$ es un máximo positivo podemos escribir,

$$\lambda^2 = \frac{\eta J^4 R_p^2 (R_p^2 + J^2)}{(R_p^2 + 2 J^2)^4} \quad (4.43)$$

con $0 \leq \eta < 1$. Reemplazando en el factor crítico de los denominadores de (4.31) podemos escribir

$$1 + 4 \lambda^2 \ln(R_p^2 + J^2) + 8 C \lambda + 16 \lambda^2 = 1 - 8 \frac{J^2 (R_p^2 + J^2) (R_p^4 + 2 R_p^2 J^2 + 2 J^4) \eta}{(R_p^2 + 2 J^2)^4}. \quad (4.44)$$

Vemos que el lado derecho de (4.44) es una función lineal de η que resulta igual a 1 para $\eta = 0$ e igual a $R_p^8 / (R_p^2 + J^2)^4$ para $\eta = 1$. Como el lado

izquierdo de (4.44) es una función monótona creciente de R , resulta positiva para cualquier máximo positivo de $V(R)$; y teniendo en cuenta también que las soluciones oscilantes se dan siempre en $R > R_p$ (luego del primer máximo positivo), concluimos que las condiciones de borde (4.31) están bien definidas y son finitas para cualquier movimiento periódico que sea solución de (4.23), y por lo tanto las mismas son compatibles con el sistema de ecuaciones completo.

Como indicamos anteriormente, existen también soluciones colapsantes de (4.23). En esos casos encontramos que $\psi^+_{,r}(R(\tau), t^+(\tau))$ puede resultar singular para algún $R \neq 0$ finito. Podemos comprobar que además estas singularidades ocurren a un τ y t^\pm finitos. Como las soluciones son simétricas ante inversión temporal, tendríamos en definitiva singularidades para cierto τ finito tanto en el pasado como en el futuro, lo que implica que éstas soluciones sólo pueden extenderse por causalidad a una región acotada en r . No las analizaremos ya que, por esto último, no parecen físicamente relevantes.

4.2.3. Soluciones linearizadas

Como discutimos anteriormente, el sistema en cuestión es un conjunto de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales y ordinarias acopladas, con condiciones de empalme. Tenemos por un lado las ecuaciones de campo (4.2) y (4.3), siendo esta última no lineal; y por el otro las condiciones de empalme (4.13), (4.14) y (4.15) que son no lineales en $(\psi_\Sigma, \gamma_\Sigma^\pm, R, \psi_{,\eta}, \dot{\psi}_\Sigma)$. Es un sistema complejo que, si bien ha sido anteriormente analizado en varios trabajos, hasta el momento no se ha logrado una caracterización completa del conjunto de soluciones. Por ello proponemos analizar las ecuaciones a nivel linearizado, suponiendo que tenemos una situación “cercana” en algún sentido a un solución estática. Un análisis de este tipo daría cuenta del comportamiento de las configuraciones estáticas ante pequeñas perturbaciones, y en particular de su estabilidad, como veremos a continuación.

Escribimos para cada variable dinámica,

$$\begin{aligned} R(\tau) &= R_0 + \epsilon \xi(\tau) \\ \psi^-(t_-, r) &= \epsilon \chi_1(t_-, r) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \psi^+(t_+, r) &= -\kappa \ln(r/R_0) + \epsilon \chi_2(t_+, r) \\ \gamma^-(t_-, r) &= \epsilon \gamma_1^-(t_-, r) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\gamma^+(t_+, r) = \gamma_0 + \kappa^2 \ln(r/R_0) + \epsilon \gamma_1^+(t_+, r) \quad (4.47)$$

con χ_i soluciones de las ecuaciones,

$$\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t_-^2} - \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial r} = 0 \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t_+^2} - \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_2}{\partial r} = 0 \quad (4.49)$$

siendo estas últimas expresiones válidas a todo orden de aproximación. La idea es expandir todas las ecuaciones de campo y las condiciones de empalme a primer orden en ϵ . En particular, las ecuaciones de campo (4.3) a este orden se escribirían,

$$\gamma_{,t} = -2\epsilon \kappa \chi_{,t} \quad , \quad \gamma_{,r} = \frac{\kappa^2}{r} - 2\epsilon \kappa \chi_{,r} \quad (4.50)$$

siendo $\chi = \chi_1$ o $\chi = \chi_2$ según corresponda; de esta manera escribimos

$$\begin{aligned} \gamma^-(t_-, r) &= \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \gamma^+(t_+, r) &= \gamma_0 + \kappa^2 \ln(r/R_0) - 2\epsilon \kappa \chi_2(t_+, r) + c_\gamma^+ \end{aligned} \quad (4.51)$$

Por otra parte, expandiendo las expresiones para X^\pm obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dt_-}{d\tau} &= 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \frac{dt_+}{d\tau} &= e^{-\gamma_0} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (4.52)$$

La forma explícita de los términos de orden ϵ no resulta necesaria, ya que genera correcciones de orden ϵ^2 , para obtener una relación entre las coordenadas temporales que nos permita evaluar las distintas variables en la cáscara. Eligiendo apropiadamente las constantes de integración escribimos,

$$\begin{aligned} t_-(\tau) &= \tau + \mathcal{O}(\epsilon) \\ t_+(\tau) &= e^{-\gamma_0} \tau + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.53)$$

que son las expresiones que vamos a utilizar para evaluar las variables intervinientes en las condiciones de empalme.

Ahora expandimos a primer orden en ϵ las condiciones (4.13), (4.14) y la condición de continuidad de ψ en Σ . Obtenemos $c_\gamma^+ = 0$ y dos ecuaciones para χ_1 , χ_2 , sus derivadas con respecto a r en $r = R_0$, y $\xi(\tau)$, que pueden

escribirse como,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{2J^4 (6R_0^2 J^2 + 4J^4 + 3R_0^4)}{(R_0^2 + J^2) (2J^2 + R_0^2)^2 R_0^4} \xi(\tau) \\
&\quad - \frac{2R_0 J^4}{(R_0^2 + J^2) (2J^2 + R_0^2)^2} \chi_1(\tau, R_0) - \left. \frac{\partial \chi_1(\tau, r)}{\partial r} \right|_{r=R_0} \\
&\quad - \frac{2J^2 (4J^2 + R_0^2)}{(2J^2 + R_0^2)^2 R_0} \chi_2(e^{-\gamma_0 \tau}, R_0) + \left. \frac{R_0^4}{(2J^2 + R_0^2)^2} \frac{\partial \chi_2(e^{-\gamma_0 \tau}, r)}{\partial r} \right|_{r=R_0}, \\
0 &= \frac{2J^2}{R_0^3} \xi(\tau) + \chi_1(\tau, R_0) - \chi_2(e^{-\gamma_0 \tau}, R_0)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

mientras que la ecuación de movimiento para $\xi(\tau)$ (4.15) a primer orden en ϵ resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\tau^2} \xi(\tau) &= - \frac{J^2 (4J^6 + 6R_0^2 J^4 + 5J^2 R_0^4 + 2R_0^6)}{(2J^2 + R_0^2)^2 (R_0^2 + J^2)^2 R_0^2} \xi(\tau) \\
&\quad + \frac{J^2 R_0^3 (3J^2 + 2R_0^2)}{(2J^2 + R_0^2)^2 (R_0^2 + J^2)^2} \chi_1(\tau, R_0) + \frac{R_0^2}{R_0^2 + J^2} \left. \frac{\partial \chi_1(\tau, r)}{\partial r} \right|_{r=R_0} \\
&\quad + \frac{(4J^2 + R_0^2) R_0 J^2}{(R_0^2 + J^2) (2J^2 + R_0^2)^2} \chi_2(e^{-\gamma_0 \tau}, R_0).
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Soluciones linearizadas con un interior plano

Consideramos ahora el caso particular de una perturbación de la solución estática tal que el interior permanezca plano, lo que implica que $\chi_1 = \psi_\Sigma = 0$. La ecuación (4.55) se escribe,

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = - \frac{[2R_0^4 - (R_0^2 + 2J^2)J^2]J^2}{R_0^2(R_0^2 + J^2)^2(R_0^2 + 2J^2)} \xi \tag{4.56}$$

por lo que las soluciones para este caso tienen que tener la forma,

$$\xi(\tau) = \xi_0 e^{i\Omega_0 \tau} \tag{4.57}$$

donde se entiende que ξ_0 es complejo y que se toma la parte real del lado derecho, mientras que Ω_0 está definido como

$$\Omega_0^2 \equiv \frac{[2R_0^4 - (R_0^2 + 2J^2)J^2]J^2}{R_0^2(R_0^2 + J^2)^2(R_0^2 + 2J^2)}. \tag{4.58}$$

Buscamos ahora soluciones de χ_2 que exhiban la misma periodicidad que $R(\tau)$, algo que resulta necesario para que se cumplan las condiciones de

empalme a nivel linearizado. Teniendo en cuenta (4.48), la solución general periódica para ψ es de la forma,

$$\psi^+(t^+, r) = -\frac{2J^2}{R_0^2} \ln\left(\frac{r}{R_0}\right) + (A_2 J_0(\Omega_2 r) + B_2 Y_0(\Omega_2 r)) e^{i\Omega_2 t^+} \quad (4.59)$$

donde A_2 y B_2 son constantes, J_0 , e Y_0 son funciones de Bessel, y

$$\Omega_2 = \frac{(R_0^2 + 2J^2)^2}{R_0^4} \Omega_0. \quad (4.60)$$

Las condiciones de empalme en la superficie y la condición $\psi_\Sigma = 0$, a primer orden en ξ_0 , implican

$$\begin{aligned} A_2 &= -\pi J^2 \left[\frac{J^2(4J^2 R_0^2 + 4J^4 - R_0^4)}{(R_0^2 + J^2)R_0^7} Y_0(\Omega_2 R_0) + \frac{\Omega_0(R_0^2 + 2J^2)^2}{R_0^6} Y_1(\Omega_2 R_0) \right] \xi_0 \\ B_2 &= \pi J^2 \left[\frac{J^2(4J^2 R_0^2 + 4J^4 - R_0^4)}{(R_0^2 + J^2)R_0^7} J_0(\Omega_2 R_0) + \frac{\Omega_0(R_0^2 + 2J^2)^2}{R_0^6} J_1(\Omega_2 R_0) \right] \xi_0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

En resumen, vemos que dando valores apropiados para R_0 y J podemos encontrar una solución, a nivel linearizado, donde tanto el movimiento de la cáscara como los modos radiativos de los campos son periódicos con frecuencia angular Ω_0 (tomando τ como coordenada temporal global). Para este tipo de solución el período es función únicamente de R_0 y J , lo que se corresponde con la idea de una “perturbación” del equilibrio, a la manera newtoniana, donde el apartamiento con respecto al mismo se encuentra dado por un parámetro ξ_0 que se supone “pequeño” en algún sentido. Finalmente, destacamos que en el límite $J^2 \ll R_0^2$ tenemos,

$$\Omega_0^2 \simeq \frac{2J^2}{R_0^4} \quad (4.62)$$

que es justamente el valor de la frecuencia de pequeñas oscilaciones para el análogo newtoniano de este sistema. A primera vista puede parecer que Ω_0 debería ser la frecuencia *natural* de oscilación de la cáscara, y que el efecto del acoplamiento con los modos de radiación gravitatoria debería introducir, a nivel linearizado, sólo un pequeño apartamiento, por ejemplo un amortiguamiento, con respecto al comportamiento newtoniano. Sin embargo, como mostraremos en la próxima sección, esto es sólo un caso especial que resulta de la hipótesis arbitraria de que el interior es plano, ya que el comportamiento del sistema es en general muy diferente a éste.

Soluciones linearizadas periódicas con un interior regular

Consideremos ahora la situación más general donde el interior es vacío pero no necesariamente plano. Vamos a buscar en este apartado soluciones periódicas linearizadas, como las que encontramos antes, pero para una situación general, con la idea de encontrar una base de *modos* para el campo gravitatorio. Teniendo en cuenta la regularidad en el eje $r = 0$, las soluciones periódicas de χ_1 se pueden escribir como

$$\psi^-(t^-, r) = A_1 J_0(\Omega_- r) e^{i\Omega_- t^-}. \quad (4.63)$$

La continuidad de ψ en la cáscara nos indica que $R(\tau)$ y $\psi^+(t^+, r)$ tienen que tener la misma periodicidad que $\psi^-(t^-, r)$, por lo que si escribimos,

$$R(\tau) = R_0 + \xi_0 e^{i\Omega \tau} \quad (4.64)$$

y también,

$$\psi^+(t^+, r) = -\frac{2J^2}{R_0^2} \ln\left(\frac{r}{R_0}\right) + (A_2 J_0(\Omega_2 r) + B_2 Y_0(\Omega_2 r)) e^{i\Omega_2 t^+} \quad (4.65)$$

que son las expresiones periódicas más generales para una función de una variable y para una solución arbitraria de (4.48) respectivamente, la continuidad de ψ implica $\Omega = \Omega_-$ y

$$\Omega_2 = \frac{(R_0^2 + 2J^2)^2}{R_0^4} \Omega = e^{\gamma_0} \Omega. \quad (4.66)$$

Reemplazando ahora en (4.13), (4.14), y (4.15), y expandiendo a primer orden, encontramos un conjunto de tres ecuaciones lineales independientes para A_1 , A_2 , B_2 , y ξ_0 . Resulta conveniente para tratar estas ecuaciones introducir un parámetro α definido mediante la expresión,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{R_0^2(R_0^2 + 2J^2)(R_0^2 + J^2)^2 \Omega^2 + J^2(2J^4 - 2R_0^4 + R_0^2 J^2)}{\Omega^2 R_0^2 + 1} \alpha \\ &= \frac{R_0^2(R_0^2 + 2J^2)(R_0^2 + J^2)^2 (\Omega^2 - \Omega_0^2)}{\Omega^2 R_0^2 + 1} \alpha \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde Ω_0^2 está dado por (4.58).

Podemos entonces expresar las cuatro constantes que caracterizan la solución linearizada en términos de α , Ω , R_0 y J . Encontramos en particular que ξ_0 se expresa

$$\xi_0 = \frac{(R_0(R_0^2 + 2J^2)(R_0^2 + J^2)\Omega J_1(\Omega R_0) - J^2(2J^2 + 3R_0^2)J_0(\Omega R_0)) R_0^3}{\Omega^2 R_0^2 + 1} \alpha. \quad (4.68)$$

De la misma manera, A_2 y B_2 se expresan como

$$\begin{aligned}
A_2 &= - \left[\left[\Omega (R_0^2 + 2J^2)^2 \left(R_0^2 (R_0^2 + J^2)^2 \Omega^2 - J^2 (J^2 + 2R_0^2) \right) Y_1 (\Omega_2 R_0) \right. \right. \\
&\quad + 2J^2 Y_0 (\Omega_2 R_0) R_0 (R_0^2 + J^2) \left. \left. \left((4J^4 + 6R_0^2 J^2 + R_0^4) \Omega^2 - 2J^2 \right) \right] J_0 (\Omega R_0) \right. \\
&\quad - \left[Y_0 (\Omega_2 R_0) \left((R_0^2 + 2J^2)^2 \left(R_0^2 (R_0^2 + J^2)^2 \Omega^2 - J^4 \right) - 2J^2 R_0^6 \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - 2J^2 R_0 \Omega (R_0^2 + J^2) (R_0^2 + 2J^2)^2 Y_1 (\Omega_2 R_0) \right] \Omega J_1 (\Omega R_0) \right] \frac{\pi (R_0^2 + 2J^2) \alpha}{2R_0^3 (R_0^2 \Omega^2 + 1)} \\
\\
B_2 &= - \left[\left(-2J^2 Y_0 (\Omega_2 R_0) R_0 (R_0^2 + J^2) \left((4J^4 + 6R_0^2 J^2 + R_0^4) \Omega^2 - 2J^2 \right) \right. \right. \\
&\quad - \Omega (R_0^2 + 2J^2)^2 \left(R_0^2 (R_0^2 + J^2)^2 \Omega^2 - J^2 (J^2 + 2R_0^2) \right) Y_1 (\Omega_2 R_0) \left. \right) J_0 (\Omega R_0) \\
&\quad + J_1 (\Omega R_0) \Omega \left(Y_0 (\Omega_2 R_0) \left((R_0^2 + 2J^2)^2 \left(R_0^2 (R_0^2 + J^2)^2 \Omega^2 - J^4 \right) - 2J^2 R_0^6 \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - 2J^2 R_0 \Omega (R_0^2 + J^2) (R_0^2 + 2J^2)^2 Y_1 (\Omega_2 R_0) \right) \right] \frac{\pi (R_0^2 + 2J^2) \alpha}{2 (R_0^2 \Omega^2 + 1) R_0^3}.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

La única razón para explicitar estas expresiones engorrosas es la de ilustrar que para cualquier conjunto (R_0, J, Ω) , los coeficientes A_1 , A_2 , B_2 y ξ_0 quedan determinados a menos de un factor común α , y que son siempre finitos, por lo que siempre existe una solución linearizada. Tomando (R_0, J) como dato, enfatizamos la existencia de una solución no trivial periódica de las ecuaciones linearizadas *para todo* valor de Ω . Así encontramos que, al menos perturbativamente, no podemos asignar una frecuencia particular a los movimientos “cercaños” a soluciones estáticas, como ocurre en la dinámica newtoniana. El período del movimiento resulta *a priori* arbitrario, y depende directamente de la configuración para el campo que se elija. Desde un punto de vista físico, esto puede ser entendido mediante la observación de que mientras el radio de la cáscara cambia, el cambio en la parte estática del campo (los términos con $\ln(r)$) es del mismo orden de magnitud que la amplitud de los modos radiantes asociados a este movimiento. De esta manera, a medida que la cáscara se aleja de su configuración estática, el movimiento es conducido en similar medida tanto por la parte estática como por la parte dinámica del campo gravitatorio. Es por esto que podemos decir que el acoplamiento entre la cáscara y el campo gravitatorio es, en algún sentido, *lo más fuerte posible*. Esta peculiaridad indica que la dinámica de este sistema no puede ser aproximada mediante la newtoniana más correcciones post-newtonianas, como sí sucede en otros modelos más realistas con materia confinada a una región acotada.

Habíamos analizado anteriormente el caso especial donde el campo en el interior de la cáscara es nulo. Allí encontramos que eso es sólo posible

para un valor particular de Ω , el cual corresponde en este contexto a la solución particular con $A_1 = 0$. De hecho es sencillo demostrar que si tomamos $\Omega = \Omega_0$, las expresiones para A_2 y B_2 se reducen precisamente a las del apartado anterior. Existen también otros tipos de soluciones particulares que exhiben comportamientos muy diferentes y curiosos, como las que tratamos a continuación.

Antiresonancias

El radio físico de la cáscara está dado por $R_0(\tau)e^{-\psi_\Sigma(\tau)}$. Para perturbaciones alrededor de una solución estática a orden lineal tenemos

$$R_0(\tau)e^{-\psi_\Sigma(\tau)} = R_0 + (\xi_0 - A_1 R_0 J_0(\Omega R_0)) e^{i\Omega\tau}. \quad (4.70)$$

Usando (4.67) y (4.68) podemos escribir

$$\begin{aligned} \xi_0 - A_1 R_0 J_0(\Omega R_0) &= [R_0^3 \Omega J_1(\Omega R_0) - (J^2 + R_0^2 \Omega^2 (R_0^2 + J^2)) J_0(\Omega R_0)] \\ &\times \frac{R_0 (R_0^2 + 2J^2) (R_0^2 + J^2) \alpha}{R_0^2 \Omega^2 + 1}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

A partir de esta expresión vemos que para ciertos valores de Ω el radio físico de la cáscara permanece constante a primer orden. A este fenómeno lo denominamos *antiresonancia*, que se da para todo Ω solución de la ecuación

$$R_0^3 \Omega J_1(\Omega R_0) - (J^2 + R_0^2 \Omega^2 (R_0^2 + J^2)) J_0(\Omega R_0) = 0. \quad (4.72)$$

Es fácil comprobar que (4.72) tiene una secuencia infinita de soluciones. Resulta curioso que, para estas frecuencias, el acoplamiento entre el movimiento de la cáscara con el campo interior y el exterior a la misma se compensa exactamente a primer orden, de manera tal que la cáscara permanece esencialmente quieta, mientras que el campo oscila con ciertas frecuencias.

4.2.4. El problema del valor inicial para el sistema linealizado

Un problema importante relacionado con el sistema que estamos analizando es el siguiente. Supongamos que tenemos un dato inicial que difiere levemente del dato que corresponde a una solución estática. En ese caso esperamos que la evolución correspondiente a este dato permanezca cerca de la solución estática, esto es, esperamos que la solución estática sea estable, y que, por lo tanto, un tratamiento linealizado sería adecuado. En este punto notamos que una superposición lineal arbitraria de las soluciones periódicas linealizadas va a ser también una solución del problema linealizado, aunque

ya no periódica. Podemos escribir estas superposiciones en general como,

$$\begin{aligned}
\psi^+(t^+, r) &= -\kappa \ln(r/R_0) + \int_0^\infty [a_2(\Omega_+)J_0(\Omega_+r) + b_2(\Omega_+)Y_0(\Omega_+r)] e^{i\Omega_+t^+} d\Omega_+ \\
\gamma^+(t^+, r) &= \gamma_0 + \kappa^2 \ln(r/R_0) - 2\kappa \int_0^\infty [a_2(\Omega_+)J_0(\Omega_+r) + b_2(\Omega_+)Y_0(\Omega_+r)] e^{i\Omega_+t^+} d\Omega_+ \\
\psi^-(t^-, r) &= \int_0^\infty a_1(\Omega_-)J_0(\Omega_-r) e^{i\Omega_-t^-} d\Omega_- \\
\gamma_- &= 0 \\
R(\tau) &= R_0 + \int_0^\infty \xi(\Omega) e^{i\Omega\tau} d\Omega
\end{aligned} \tag{4.73}$$

donde los coeficientes a_1 , a_2 , b_2 , y ξ son funciones complejas de sus argumentos, y se entiende que tomamos las partes reales de los lados derechos de (4.73). Como cada valor de Ω es independiente de los otros, podemos usar los resultados del inciso anterior para resolver a_2 , b_2 , ξ y a_1 en términos de diferentes α para cada Ω . Por lo tanto, podemos elegir una función compleja arbitraria $\alpha(\Omega)$ que determina junto con los parámetros (R_0, J) todos los coeficientes de (4.73). En particular, considerando el comportamiento asintótico para r grande de las funciones de Bessel J_0 e Y_0 , podemos ver que, con un decaimiento apropiado para $\alpha(\Omega)$ en el límite $\Omega \rightarrow \infty$, podemos controlar el decaimiento correspondiente para $r \rightarrow \infty$ de ψ^+ y γ^+ , ya que la dependencia con Ω de a_2 y b_2 está relacionada linealmente con la de α . Como las expresiones para ψ^+ y γ^+ tienen la forma de transformadas de Fourier-Bessel, las partes radiativas deberían decaer para $|t|$ grande. De acuerdo a este argumento, estas expresiones representarían una evolución tal que para tiempos grandes negativos t la cáscara es estacionaria, resulta luego perturbada por radiación gravitatoria entrante, que luego eventualmente rebota y se aleja, dejando la cáscara nuevamente en un estado estacionario para t grande positivo.

De todas maneras no resulta claro cómo podemos utilizar el conjunto de soluciones periódicas para resolver el *problema del valor inicial* para nuestro sistema. En primer lugar, si por ejemplo damos como dato $\psi^+(0, r)$, como el rango de valores para r no es $0 \leq r < \infty$, y no podemos imponer condiciones de borde *a priori* en $r = R_0$, pareciera que no habría un procedimiento bien definido para invertir (4.73) y calcular, por ejemplo, a_2 y b_2 . De todas maneras, como α , a_2 y b_2 son funciones complejas, tenemos en realidad *dos* funciones reales arbitrarias de Ω_+ disponibles para la construcción de $\psi^+(0, r)$ y $\psi^+_{,t}(0, r)$, por lo que parece factible hacer que las superposiciones de modos satisfagan datos iniciales arbitrarios. Debemos notar que, sin embargo, si damos $\alpha(\Omega)$, no sólo a_2 y b_2 quedan establecidos, si no también a_1 , por lo que el dato *dentro* de la cáscara quedaría también determinado, cuando el mismo en principio debe ser, por causalidad, independiente del da-

to *fuera* de la misma. La respuesta a esta aparente incompatibilidad está en que la expresión para $\psi^+(0, r)$ en el lado derecho de (4.73) es sobrecompleta, ya que $\psi^+(0, r)$ está definida en el dominio $R_0 \leq r < \infty$. Para hacer las antitransformadas pertinentes necesitamos dar también la función a transformar en el rango $0 < r < R_0$, lo que puede hacerse de manera arbitraria sin alterar la expresión para $\psi^+(0, r)$. Dicho de otra manera: como la expresión en (4.73) define a $\psi^+(0, r)$ también en la región $0 < r < R_0$, tiene que haber un conjunto infinito de pares de funciones a_2 y b_2 que reproducen el dato en $R_0 \leq r < \infty$ (un par por cada función definida en el dominio $0 \leq r < R_0$ compatible con las condiciones de borde). Por lo tanto, habría en principio espacio para datos arbitrarios $\psi^-(0, r)$ en $0 < r < R_0$. Aunque esto parece pausable, no tenemos una prueba de que haya en efecto “espacio suficiente” para cualquier dato definido a ambos lados de la cáscara. La dificultad para probar esto radica en la falta de una formulación autoadjunta para el problema del valor inicial con bordes dinámicos, que es lo que la dinámica de nuestro sistema plantea.

Un ejemplo

Para ilustrar lo considerado en esta sección, incluimos como ejemplo el caso de un pulso que viene desde el infinito, del cual vamos a calcular su interacción con la cáscara, y su eventual rebote luego de esta interacción. Tomamos $R_0 = 4$, $J = 1$, lo que implica $\lambda = 0,0509\dots$ y $\Omega_0 = 0,0770\dots$. También tomamos,

$$\alpha(\Omega) = 2 \frac{R_0^3 (\Omega^2 R_0^2 + 1) Q e^{-4(\Omega-2)^2}}{(R_0^2 + 2J^2) \pi} \quad (4.74)$$

con $Q = 10^{-5}$. Reemplazando en (4.73) obtenemos expresiones explícitas para las variables dinámicas del problema, a partir de las cuales podemos obtener la evolución del sistema. Elegimos τ , t^- y t^+ de manera tal que $\tau = 0$ corresponde a $t^+ = t^- = 0$ en la cáscara. La solución para este $\alpha(\Omega)$ está ilustrada en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5. En la figura 4.3 tenemos un gráfico de $R(\tau) - R_0$, que muestra una región de pulso entrante, para $\tau < 0$, y una región de pulso saliente para $\tau > 0$. La cáscara se encuentra esencialmente en equilibrio tanto para $\tau \ll -10$ como para $\tau \gg 10$. La figura 4.4 ilustra $\psi^-(t^-, r)$ en la región ($0 \leq r \leq R_0 = 4, -10 \leq t^- \leq 10$). Observamos la propagación de un pulso entrante, una zona intermedia de interferencia formada por ondas entrantes y salientes, y el eventual decaimiento del pulso mientras se propaga hacia afuera. En la figura 4.5 tenemos un gráfico de $\psi^+(t^+, r)$ en la región ($R_0 = 4 \leq r \leq 15, -20 \leq t^+ \leq 20$). Podemos ver la propagación del pulso entrante a través de la cáscara, una región cerca de

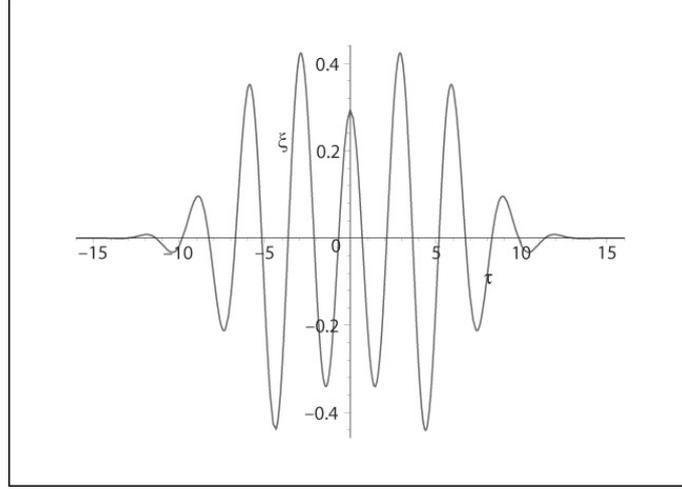


Figura 4.3: Gráfico de $\xi(\tau) = R(\tau) - R_0$ en la región $-10 \leq \tau \leq 10$. La región $\tau < 0$ se encuentra dominada por el pulso entrante, mientras que para $\tau > 0$ se encuentra dominada por el pulso saliente que resulta del rebote del pulso en el eje de simetría. La cáscara está esencialmente en su radio de equilibrio R_0 tanto para $\tau \ll -10$ como para $\tau \gg 10$.

$t^+ = 0$ donde el pulso se encuentra esencialmente del otro lado de la cáscara, y su rebote y propagación saliente en $t^+ > 0$.

Para cerrar esta sección nos preguntamos cuál es la relación entre esta construcción, los datos iniciales que la misma implica, y los datos iniciales “momentarily static radiation free” definidos en [12] (ver también [86] para un análisis diferente sobre la evolución de este tipo dato). Un dato MSRF consiste en tomar $\psi_{,t}(0, r) = \psi_{,tt}(0, r) = \dot{R}(0) = 0$, lo que implica que $\psi(0, r)$ y $\gamma(0, r)$ tienen las formas que corresponde a una configuración estática, pero con las excepciones de que λ es una constante independiente, y que κ y γ_0 resultan funciones de λ , R y J . Para evaluar cómo evolucionaría un dato de estas características cerca de la superficie de Cauchy, escribimos para un entorno de la misma ($t_+ = t_- = \tau = 0$) las expresiones,

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= R_1 + R_2 \tau^2/2 + \dots \\
 \psi^-(t^-, r) &= P_1(r) t_-^2 + \dots \\
 \gamma^-(t^-, r) &= G_1(r) t_-^2 + \dots \\
 \psi^+(t^+, r) &= -\kappa \ln(r/R_1) + P_2(r) t_+^2 + \dots \\
 \gamma^+(t^+, r) &= \kappa^2 \ln(r/R_1) + \gamma_0 + G_2(r) t_+^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

donde P_1 , P_2 , G_1 , y G_2 son algunas funciones de r que se determinan mediante las ecuaciones de evolución, mientras que los puntos representan términos de mayor orden (en τ y t^\pm). Reemplazando estas expresiones en las ecuacio-

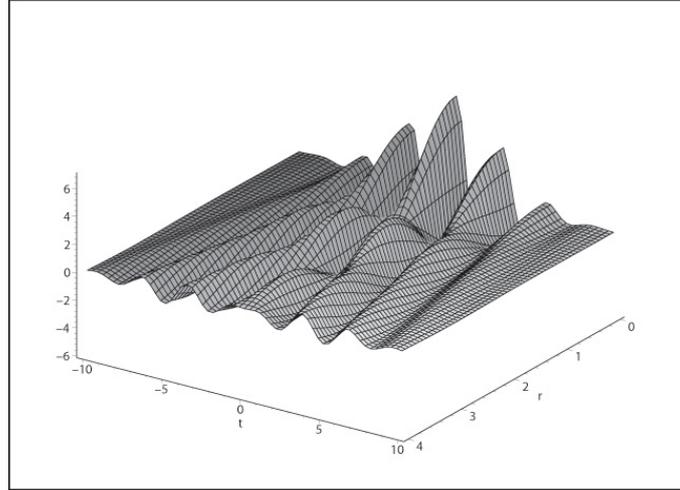


Figura 4.4: Gráfico de $\psi^-(t, r)$ en la región $0 \leq r \leq R_0 = 4$, $-10 \leq t^- \leq 10$. Se observa la propagación del pulso entrante, una zona intermedia de interferencia formada por la superposición de ondas entrantes y salientes, y el eventual decaimiento del pulso mientras se propaga hacia afuera

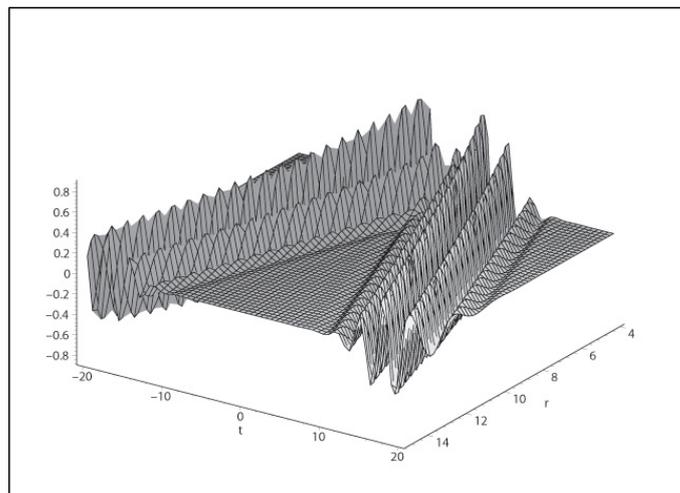


Figura 4.5: Gráfico de $\psi^+(t, r)$ en la región $4 \leq r \leq 15$, $-20 \leq t^+ \leq 20$. Se observa la propagación del pulso entrante hacia la cáscara, una zona alrededor de $t^+ = 0$ donde la mayoría del pulso atravesó la cáscara, y el rebote y propagación del pulso hacia afuera de la cáscara en $t^+ > 0$.

nes generales de movimiento encontramos

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{2\lambda R_1^2}{R_1 \sqrt{R_1^2 + J^2} - 4\lambda (R_1^2 + J^2)} \\ \gamma_0 &= -\ln \left(\frac{R_1 - 4\lambda \sqrt{R_1^2 + J^2}}{R_1} \right) \\ R_2 &= -\frac{(2J^2 + R_1^2)^2 \lambda - J^2 \sqrt{R_1^2 + J^2} R_1}{(R_1^2 + J^2)^{3/2} R_1^2}.\end{aligned}\quad (4.76)$$

Hasta este punto, las expresiones aquí obtenidas valen para cualquier dato inicial MSRF. Ahora vamos a suponer que el dato está “próximo” en algún sentido a un dato correspondiente a una solución estática. Como mencionamos anteriormente, dando parámetros $\lambda \leq 0,15879$ y J , existen una o dos soluciones R_0 para la ecuación (4.19). Suponemos que R_1 está muy cerca de una de estas raíces, por lo que escribimos

$$R_1 = R_0 + \epsilon\xi. \quad (4.77)$$

Reemplazando (4.19) y (4.77) en (4.76), y expandiendo a primer orden en ϵ , obtenemos

$$\begin{aligned}\kappa &= 2 \frac{J^2}{R_0^2} + 2 \frac{J^4 (R_0^4 - 4J^2 R_0^2 - 4J^4)}{R_0^7 (R_0^2 + J^2)} \epsilon\xi + \mathcal{O}(\epsilon^\epsilon) \\ \gamma_0 &= -4 \ln(R_0) + 2 \ln(2J^2 + R_0^2) - 4 \frac{J^4}{R_0^5} \epsilon\xi + \mathcal{O}(\epsilon^\epsilon) \\ R_2 &= \frac{J^2 (-2R_0^4 + J^2 R_0^2 + 2J^4)}{(2J^2 + R_0^2) (R_0^2 + J^2)^2 R_0^2} \epsilon\xi + \mathcal{O}(\epsilon^\epsilon).\end{aligned}\quad (4.78)$$

De esta manera, a este orden podemos escribir,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{d\tau^2}|_{\tau=0} &= -\Omega_0^2 \xi \\ \psi^+(0, r) &= \psi_0^+(r) - \left(2 \frac{J^4 (R_0^4 - 4J^2 R_0^2 - 4J^4)}{R_0^7 (R_0^2 + J^2)} \ln(r/R_0) + 2 \frac{J^2}{R_0^3} \right) \epsilon\xi \\ \gamma^+(0, r) &= \gamma_0^+(r) + \left(4 \frac{J^6 (R_0^4 - 4J^2 R_0^2 - 4J^4)}{R_0^9 (R_0^2 + J^2)} \ln(r/R_0) \right) \epsilon\xi\end{aligned}\quad (4.79)$$

donde Ω_0 está definido por (4.58), es decir (4.79) coincide con (4.56), y donde $\psi_0^+(r)$ y $\gamma_0^+(r)$ son los correspondientes a la solución estática con $R = R_0$.

De la expresión (4.80) vemos que una perturbación de este tipo, a la que vamos a denominar *perturbación MSRF*, resulta en general no acotada en r

para ϵ no nulo. Incluso en el caso especial $R_0^2 = 2(1 + \sqrt{2})\mathcal{J}^2$, donde la perturbación resulta acotada, tenemos que la misma no es de soporte compacto ni decae para $r \rightarrow \infty$, por lo que, en particular, no puede ser expresada como superposición de modos de la forma (4.73). Concluimos que una *perturbación MSRF* no es susceptible de ser analizada como una perturbación propiamente dicha, ya que no es acotada en el espacio. En este contexto podemos comentar sobre el trabajo [86], donde se realiza un análisis de la evolución para este tipo de dato inicial, llegándose a la conclusión de que, en ciertos casos, el sistema no puede devenir en un estado estacionario como la intuición newtoniana sugeriría, por lo que ciertas configuraciones MSRF deben ser inestables. En particular, algunas de estas configuraciones inestables estarían “arbitrariamente cerca” de las configuraciones estáticas, en el sentido de que corresponden a un ϵ arbitrariamente pequeño. Esto puede parecer contradictorio con nuestros resultados, pero, en realidad, el argumento que sugiere que las cáscaras estáticas son típicamente estables ante perturbaciones lineales no entra en contradicción con el análisis de [86] ya que se tratan de dos tipos de “perturbaciones” excluyentes; un dato MSRF distinto al dato estático nunca puede ser tomado como una “perturbación” en el sentido estricto, por lo que una *perturbación MSRF* bien podría no evolucionar hacia una configuración estática.

Aunque hemos argumentado acerca de la estabilidad de las soluciones estáticas, como no demostramos la completitud de los modos en (4.73), nuestro razonamiento no resulta concluyente. En la siguiente subsección vamos a analizar el problema por medio de otra base de soluciones, que luego nos va a permitir analizar la estabilidad de las cáscaras estáticas (siempre a nivel linearizado) en un sentido preciso.

4.2.5. El problema del valor característico

Vamos ahora a describir el conjunto de soluciones linearizadas periódicas con una base diferente, para tratar el así llamado *problema del valor característico*. Consideramos una solución de la forma,

$$\psi_{in}(t_+, r) = F e^{i\Omega_2 t_+} \left[J_0(|\Omega_2|r) + i \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|} Y_0(|\Omega_2|r) \right] \quad (4.81)$$

donde F es una constante. En el límite $r \rightarrow \infty$, esta solución tiende a,

$$\psi_{in}(t_+, r) \simeq F \sqrt{\frac{1}{\pi r |\Omega_2|}} \left(1 - i \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|} \right) e^{i\Omega_2(t_+ + r)} \quad (4.82)$$

lo que representa una onda entrante. Análogamente definimos,

$$\psi_{out}(t_+, r) = G e^{i\Omega_2 t_+} \left[J_0(|\Omega_2|r) - i \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|} Y_0(|\Omega_2|r) \right] \quad (4.83)$$

que tiene por límite asintótico $r \rightarrow \infty$ la expresión,

$$\psi_{out}(t_+, r) \simeq G \sqrt{\frac{1}{\pi r |\Omega_2|}} \left(1 + i \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|} \right) e^{i\Omega_2(t_+ - r)} \quad (4.84)$$

que representa una onda saliente. Es fácil ver que estos dos tipos de soluciones forman una base que coincide con la que consideramos anteriormente. Escribimos la suma,

$$\psi_{in}(t_+, r) + \psi_{out}(t_+, r) = \left[(F + G) J_0(|\Omega_2| r) + i \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|} (F - G) Y_0(|\Omega_2| r) \right] e^{i\Omega_2 t_+} \quad (4.85)$$

y vemos que claramente se puede asimilar a una solución (4.65) para $\psi^+(t_+, r)$ donde

$$\begin{aligned} A_2 &= F + G \\ B_2 &= i \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|} (F - G). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Reescribimos entonces la expresión (4.65) de la forma

$$\psi^+(t_+, r) = -\kappa \ln \left(\frac{r}{R_0} \right) + \psi_{in}(t_+, r) + \psi_{out}(t_+, r). \quad (4.87)$$

Análogamente, podemos escribir γ^+ como

$$\gamma^+(t_+, r) = \gamma_0 + \kappa^2 \ln \left(\frac{r}{R_0} \right) - 2\kappa (\psi_{in}(t_+, r) + \psi_{out}(t_+, r)) + c_\gamma^+. \quad (4.88)$$

Utilizamos las mismas soluciones (4.63) para la región interior, y para el movimiento de la cáscara (4.64). Como con la base anterior, las condiciones de empalme linearizadas junto con la continuidad de ψ en la cáscara, implican $c_\gamma^+ = 0$ y tres relaciones para los cuatro coeficientes característicos A_1 , F , G y ξ_0 . Reemplazando (4.86) en las expresiones (4.67), (4.68) y (4.69), podemos escribir,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{H_1}{D} F \\ G &= \frac{H_2}{D} F \\ \xi_0 &= \frac{H_3}{D} F \end{aligned} \quad (4.89)$$

donde las H_i son funciones acotadas y regulares de (Ω, R_0, J) , mientras D

se expresa

$$\begin{aligned}
D = & - [2 (R_0^2 + J^2) J^2 R_0 ((4 J^4 + 6 R_0^2 J^2 + R_0^4) \Omega^2 - 2 J^2) J_0 (|\Omega| R_0) \\
& - (R_0^2 (2 J^2 + R_0^2)^2 (R_0^2 + J^2)^2 \Omega^2 - J^2 (2 R_0^6 + J^2 (2 J^2 + R_0^2)^2)) \Omega J_1 (|\Omega| R_0)] \\
& (|\Omega| J_0 (|\Omega_2| R_0) - i \Omega Y_0 (|\Omega_2| R_0)) \\
& - \left[(R_0^2 (R_0^2 + J^2)^2 \Omega^2 - J^2 (2 R_0^2 + J^2)) J_0 (|\Omega| R_0) \right. \\
& \left. + 2 J^2 \Omega R_0 (R_0^2 + J^2) J_1 (|\Omega| R_0) \right] \Omega (2 J^2 + R_0^2)^2 \\
& (\Omega J_1 (|\Omega_2| R_0) - i |\Omega| Y_1 (|\Omega_2| R_0)). \tag{4.90}
\end{aligned}$$

A pesar de su apariencia complicada, no es difícil mostrar que D no tiene raíces para Ω real. Para toda raíz de D , la parte imaginaria de la siguiente expresión debe anularse,

$$\frac{|\Omega| J_0 (|\Omega_2| R_0) - i \Omega Y_0 (|\Omega_2| R_0)}{\Omega J_1 (|\Omega_2| R_0) - i |\Omega| Y_1 (|\Omega_2| R_0)} \tag{4.91}$$

lo que es equivalente a la anulación de,

$$-\frac{J_0 (|\Omega_2| R_0) Y_1 (|\Omega_2| R_0) - J_1 (|\Omega_2| R_0) Y_0 (|\Omega_2| R_0)}{J_1 (|\Omega_2| R_0)^2 + Y_1 (|\Omega_2| R_0)^2} = \frac{2}{\pi R_0 |\Omega_2| (J_1 (|\Omega_2| R_0)^2 + Y_1 (|\Omega_2| R_0)^2)} \tag{4.92}$$

que es una expresión que claramente no tiene raíces para Ω real. Este resultado es muy importante ya que implica que si F es una función regular de Ω , las soluciones obtenidas usando (4.89) están bien definidas para todo Ω real. De esta manera, podemos escribir soluciones más generales tomando combinaciones lineales arbitrarias de los modos caracterizadas por $F(\Omega)$. Explícitamente, podemos escribir,

$$\psi_{in}(t_+, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) e^{i\Omega_2 t_+} \left[J_0 (|\Omega_2| r) + i \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|} Y_0 (|\Omega_2| r) \right] d\Omega \tag{4.93}$$

donde $F(\Omega)$ es una función compleja arbitraria, la cual asumimos de cuadrado integrable. El resto de las variables dinámicas se escriben (4.89)

$$\begin{aligned}
\psi_-(t_-, r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_1}{D} F(\Omega) e^{i\Omega t_-} J_0 (|\Omega| r) d\Omega \\
\psi_{out}(t_+, r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_2}{D} F(\Omega) e^{i\Omega_2 t_+} \left[J_0 (|\Omega_2| r) - i \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|} Y_0 (|\Omega_2| r) \right] d\Omega \\
\xi(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_3}{D} F(\Omega) e^{i\Omega \tau} d\Omega. \tag{4.94}
\end{aligned}$$

El motivo por el cual consideramos este conjunto de soluciones en particular es el de poder analizar el *problema del valor característico*, que consiste

a grandes rasgos en caracterizar la evolución del sistema ante la acción de un pulso entrante de forma arbitraria proveniente del infinito. La imagen que tenemos es la siguiente, en una región grande del espacio-tiempo que incluye al eje de simetría y a la cáscara, tenemos una configuración estática. En otras palabras, a un tiempo dado $\tau = t^+ = t^- = 0$, tenemos en $r < R_s$ una configuración estática, con $R_s \gg R_0$, siendo R_0 el radio de la cáscara estática. Por otra parte, para $r > R_s$ existe una región donde $\psi_{in}(t^+, r)$ es distinto de cero, lo que representa un pulso entrante que viene del infinito nulo pasado. Para decir esto de manera más precisa, recordemos que en el límite $r \rightarrow \infty$, una solución de la ecuación de onda que representa una onda entrante tiene la forma,

$$\psi_{in}(t_+, r) \simeq \frac{1}{\sqrt{r}} f(t_+ + r) \quad (4.95)$$

donde $f(u)$ es una función de soporte esencialmente compacto². Comparando esta expresión con la forma asintótica para r grande de (4.93) podemos escribir,

$$\frac{1}{\sqrt{r}} f(t_+ + r) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) \sqrt{\frac{1}{\pi r |\Omega_2|}} \left(1 - i \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|} \right) e^{i\Omega_2(t_+ + r)} d\Omega \quad (4.96)$$

lo que resulta convenientemente invertible

$$F(\Omega) = \frac{|\Omega_2|^{3/2}}{2\sqrt{\pi}(|\Omega_2| - i\Omega_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\Omega_2 u} du. \quad (4.97)$$

De esta manera, encontramos una relación uno a uno entre $F(\Omega)$ y el conjunto de datos característicos dados para $r \rightarrow \infty$, $t^+ \rightarrow -\infty$. En este sentido probamos el siguiente resultado: *el conjunto de modos dado por las expresiones (4.89), (4.93) y (4.94) es completo para el problema del valor característico, y, en particular, (4.93) y (4.94) determinan la evolución de las correspondientes variables dinámicas para datos característicos arbitrarios provenientes del infinito.*

Con este resultado podemos discutir ahora la estabilidad de las soluciones estáticas, y la presencia de modos cuasinormales y *ringing* cuasinormal asociado.

4.2.6. Estabilidad de las soluciones estáticas

Decimos que una configuración es estable si ante pequeñas perturbaciones el sistema tiende a la misma configuración sin perturbar. Podemos en este

²Para algunas aplicaciones basta con que sea de cuadrado integrable

contexto analizar, a nivel linearizado, el comportamiento de la cáscara ante un pulso arbitrario proveniente del infinito. Cada uno de estos pulsos está unívocamente caracterizado por una función $F(\Omega)$. Concentrándonos en la expresión para $\xi(\tau)$ tenemos,

$$H_3 = \frac{4i\Omega^2 R_0^7}{\pi} \left(\frac{J^2 (2J^2 + 3R_0^2)}{\Omega R_0 (2J^2 + R_0^2)} J_0(|\Omega| R_0) - (R_0^2 + J^2) J_1(|\Omega| R_0) \right) \quad (4.98)$$

donde, usando (4.90), podemos ver que para Ω lo suficientemente grande podemos escribir,

$$\left| \frac{H_3}{D} \right| \sim \left| \frac{2\sqrt{2}R_0^{7/2} \cos(\Omega R_0 + \pi/4)}{\sqrt{\pi} (2J^2 + R_0^2) (R_0^2 + J^2)} \right| \frac{1}{|\Omega|^{3/2}} \quad (4.99)$$

mas términos de orden $|\Omega|^{-5/2}$. Por lo tanto, teniendo en cuenta (4.94) y las hipótesis que asumimos para $F(\Omega)$, $\xi(\tau)$ es una transformada de Fourier de una función de cuadrado integrable para todo (R_0, J) , por lo que $\xi(\tau) \rightarrow 0$ para $\tau \rightarrow \infty$, lo que implica que *todas las configuraciones estáticas resultan estables*. Explícitamente, mostramos que todo pulso gravitacional finito proveniente del infinito puede ser descrito por una función apropiada $F(\Omega)$, y que existe una correspondencia uno a uno entre esta función y la forma del pulso para r grande. Mostramos también que existe una única evolución para cada $F(\Omega)$. Esta evolución es tal que las variables dinámicas están dadas esencialmente por transformadas de Fourier o de Fourier-Bessel de funciones de cuadrado integrable y, por lo tanto, son ellas mismas también funciones de cuadrado integrable, por lo que deben tender a 0 en el límite $|\tau| \rightarrow \infty$. Esto es equivalente a decir que toda solución estática perturbada eventualmente va a volver a la configuración estática original, y por lo tanto son, en este sentido, *todas estables*.

Vimos que para un cáscara con parámetros (λ, J) dados puede haber una, dos o ninguna solución estática. Se ha sugerido en algunos trabajos ([84] y [4]) que cuando se tienen dos soluciones estáticas ($\lambda < 0,15879..$), una de ellas es estable y la otra inestable. En el presente análisis no encontramos diferencia cualitativa alguna entre soluciones estáticas, independientemente de los parámetros que las caracterizan. Parece haber, de todas maneras, una diferencia más sutil entre las soluciones cuando las analizamos en detalle. Esta diferencia tiene que ver con la presencia de *modos cuasinormales*, que es lo que consideramos en la siguiente subsección.

4.2.7. Modos cuasinormales

Como vimos en la introducción, los modos cuasinormales (QNM) aparecen en sistemas acoplados a un campo que admite una descomposición en

ondas salientes y entrantes. Son soluciones no triviales donde la componente de onda entrante se anula, y que típicamente representan una situación en la que el sistema emite energía hacia el infinito en forma de ondas “monocromáticas” salientes. Esto requiere típicamente de un valor complejo para la frecuencia angular ω , lo que implica que, en general, las correspondientes amplitudes de onda saliente y otras amplitudes relacionadas resultan no acotadas en el espacio-tiempo, por lo que no son soluciones físicamente razonables. En nuestro caso particular, vimos que las funciones que caracterizan el sistema, distintas de $F(\Omega)$, se escriben mediante expresiones de la forma $H_i F/D$, por lo que los posibles QNM (soluciones no triviales con $F = 0$) pueden darse únicamente para valores de Ω tales que $D = 0$. Vimos anteriormente que D no se anula para valores *reales* de Ω , lo que fue clave para mostrar la completitud de los modos y la estabilidad de las soluciones estáticas, pero bien podría anularse en ciertos puntos del plano complejo si hacemos una extensión analítica. Como ξ , ψ^- y ψ_{out} están dadas por transformadas de Fourier o de Fourier-Bessel (4.94) de expresiones que pueden contener polos complejos, podrían existir contribuciones características de estos polos en el cálculo de la integral sobre el eje real. Estas contribuciones son justamente las amplitudes de *ringing quasinormal* (QNR) asociadas a los QNM.

Por lo tanto, para encontrar los QNM tenemos que encontrar raíces complejas de D , tarea que puede parecer sencilla, pero dada la complejidad de la expresión (4.90), que involucra funciones de Bessel de distinto tipo y con distintos argumentos, estos polos sólo se pueden encontrar numéricamente, y aún un cálculo numérico preciso de estas raíces resulta una tarea algorítmicamente compleja. En este trabajo sólo haremos un cálculo no muy fino de las raíces más cercanas al eje real, ya que éstas serían las que corresponden al QNR más visible.

Para este cálculo volvemos a la expresión (4.90) y definimos $x \equiv J/R_0$ y $\Sigma \equiv \Omega R_0$. La ecuación $D = 0$ puede ser escrita de la forma

$$\begin{aligned}
0 = & \left[2 (1 + x^2) x^2 (\Sigma^2 (4x^4 + 6x^2 + 1) - 2x^2) J_0(|\Sigma|) \right. \\
& \left. - \Sigma \left(\Sigma^2 (2x^2 + 1)^2 (1 + x^2)^2 - x^2 (4x^4 + 2 + x^2 + 4x^6) \right) J_1(|\Sigma|) \right] \\
& \left(-|\Sigma| J_0 \left(|\Sigma| (2x^2 + 1)^2 \right) + i \Sigma Y_0 \left(|\Sigma| (2x^2 + 1)^2 \right) \right) \\
& - \left(\Sigma J_1 \left(|\Sigma| (2x^2 + 1)^2 \right) - i |\Sigma| Y_1 \left(|\Sigma| (2x^2 + 1)^2 \right) \right) \\
& \left[\left(\Sigma^2 (1 + x^2)^2 - x^2 (x^2 + 2) \right) J_0(|\Sigma|) + 2 \Sigma x^2 (1 + x^2) J_1(|\Sigma|) \right] \Sigma (2x^2 + 1)^2.
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Como estamos buscando ceros cerca del eje real, para la extensión analítica podemos reemplazar $|\Sigma| = \Sigma$ si buscamos en la región $\Re(\Omega) > 0$, y $|\Sigma| = -\Sigma$

si lo hacemos en la región $\Re(\Omega) < 0$. En cualquier caso, la expresión de arriba implica que las frecuencias de los QNM deben satisfacer la invariancia de escala,

$$\Omega_{QNM} = \frac{1}{R_0} Q \left(\frac{J}{R_0} \right) \quad (4.101)$$

donde Q es alguna función compleja, que puede no ser única, de argumento real.

Para encontrar estas raíces utilizamos dos procedimientos diferentes. En el primer procedimiento, reemplazamos en primer lugar $|\Sigma|$ por $\pm\Sigma$ según corresponda, luego despejamos la mayor potencia de Σ (Σ^3), que para $\Re(\Sigma) > 0$ se escribe,

$$\begin{aligned} \Sigma^3 = & \left[(2(1+x^2) \left((4x^4 + 6x^2 + 1)\Sigma^2 - 2x^2 \right) J_0(\Sigma) - J_1(\Sigma)\Sigma(4x^4 + 2 + x^2 + 4x^6)) \right. \\ & \left. \left(J_0(\Sigma(2x^2 + 1)^2) - iY_0(\Sigma(2x^2 + 1)^2) \right) \right. \\ & - (2J_1(\Sigma)\Sigma(1+x^2) - J_0(\Sigma)(x^2 + 2)) \\ & \left. \left(iY_1(\Sigma(2x^2 + 1)^2) - J_1(\Sigma(2x^2 + 1)^2) \right) \Sigma(2x^2 + 1)^2 \right] x^2 \quad (4.102) \\ & \left[\left(\left(iY_1(\Sigma(2x^2 + 1)^2) - J_1(\Sigma(2x^2 + 1)^2) \right) J_0(\Sigma) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(J_0(\Sigma(2x^2 + 1)^2) - iY_0(\Sigma(2x^2 + 1)^2) \right) J_1(\Sigma) \right) (2x^2 + 1)^2 (1+x^2)^2 \right]^{-1} \end{aligned}$$

y resolvemos esta ecuación mediante un esquema iterativo como sigue. Ingresamos un valor para Σ en el lado derecho de (4.102), sacamos una raíz cúbica (la más cercana al eje real) del número obtenido, y luego la ingresamos nuevamente en lado derecho para así obtener un “mejor” valor para Σ . Comprobamos que este procedimiento converge para valores de x lo suficientemente pequeños, $x < \sim 0,5$, pero deja de converger para valores mayores de x . Para $x > \sim 0,5$ utilizamos otro método más directo pero menos preciso, en donde consideramos nuevamente (4.100), fijamos un valor para x , y graficamos la parte real y la imaginaria de (4.100), como funciones de $\Re(\Sigma)$ para algún $\Im(\Sigma)$ fijo. De esta manera visualizamos las posibles raíces comunes de las curvas y ajustamos, por prueba y error, los mejores valores para $\Re(\Sigma)$ e $\Im(\Sigma)$. Encontramos mediante este método que hay raíces de D por lo menos en el rango $0 < x < \sim 2$, y posiblemente haya para valores mayores de x . Encontramos raíces tanto para $\Re(\Sigma) > 0$ como para $\Re(\Sigma) < 0$, algunas de las cuales se muestran en el Cuadro 4.1.

Lo primero que notamos es que todos estos ceros tienen parte imaginaria positiva, que es lo que uno esperaría teniendo en cuenta los argumentos de estabilidad expuestos en la subsección anterior. Sin embargo, al ser $D(\Sigma)$ una función real definida en $\mathbb{R} - 0$ y analítica en su dominio, su extensión al plano complejo debe ser tal que si $\Sigma_0 \in \mathbb{C}$ es una raíz con $\Re(\Sigma_0) \neq 0$,

x	$\Re(\Sigma) > 0$	$\Re(\Sigma) < 0$
0.10	0.1396+ 0.00004i	- 0.1408+ 0.00015i
0.20	0.2685+ 0.00101i	- 0.2760+ 0.0035i
0.30	0.3772+ 0.00575i	- 0.3939+ 0.01775i
0.40	0.4612+ 0.01722i	- 0.4840+ 0.0479i
0.50	0.5202+ 0.0366i	- 0.5410+ 0.0910i
0.60	0.5570+ 0.0628i	- 0.5676+ 0.13998i
0.70	0.5750+ 0.0938i	- 0.5704+ 0.1887i
0.80	0.5780+ 0.127i	- 0.5552+ 0.2337i
0.90	0.5704+ 0.16125i	- 0.5305+ 0.273i
1.00	0.5535+ 0.1943i	- 0.4970+ 0.307i
1.20	0.5010+ 0.2542i	- 0.4200+ 0.3588i
1.40	0.4350+ 0.3033i	- 0.3330+ 0.395i
1.60	0.3590+ 0.342i	-0.2350+ 0.4201i
1.80,	0.2736+ 0.37175i	- 0.0960+ 0.4378i
2.00	0.1708+ 0.3947i	- -

Cuadro 4.1: *Los ceros de D.*

entonces $\bar{\Sigma}_0$ también debe serlo. Esto implica que para cada una de estas raíces existe un “modo inestable” con parte imaginaria negativa, pero que posiblemente no cumpla ningún rol en las integrales (4.94), ya que, como veremos más adelante, no encontramos evidencia alguna de los mismos en ninguna de las integraciones que realizamos.

En relación a esto, recientemente en un trabajo de Nakao y Kurita [88] se analizó este mismo sistema, planteando también una aproximación linealizada alrededor de una solución estática. El análisis realizado allí es diferente al nuestro, pero resulta interesante destacar que, en este otro análisis, los modos que cumplen con una *condición de onda saliente* (que es lo que define los QNM) pueden tener sólo ciertos valores de z para un x dado, donde z es asimilable con $-\Sigma$, algunos de los cuales se encuentran codificados en la expresión (4.69) $f(z) = 0$ de ese trabajo. Observamos que si $\Re(z) > 0$, $f(z) = h(z)D(z)$, por lo que las raíces con parte real positiva de D deben ser también raíces de f . De hecho, hay una razonable coincidencia entre los datos de la columna izquierda del Cuadro 4.1 y las así llamadas “soluciones de primera clase” expuestas en la Figura 2 de [88] en el rango $x \leq 2$ ($y \leq 2$ en la notación de ellos). Llama la atención esta coincidencia, ya que hay una diferencia de signo entre la definición de ω en [88] y la de Ω en nuestro trabajo (las partes temporales de los modos evolucionan con $e^{-i\omega\tau}$), por lo que uno esperaría que nuestras raíces aparezcan en todo caso con el signo opuesto. Más allá de esta incongruencia, existe de todas formas una diferencia funda-

mental en la interpretación de estos modos, ya que en [88] se argumenta que la existencia de raíces con $\Im(\omega) = -\Im(\Omega) > 0$ implican la inestabilidad de la configuración estática. Como mencionamos arriba, esto no tiene que ser necesariamente así, y no se demuestra que haya relación entre estos modos y la evolución del sistema ante una perturbación arbitraria. Si bien no tenemos una demostración de lo contrario, que la evolución de datos característicos arbitrarios no muestre signos de inestabilidad alguna es un indicio de que tales modos inestables no influirían en las integrales (4.94).

Volviendo a nuestras raíces en particular, los ceros con $\Re(\Sigma) > 0$ y con $\Re(\Sigma) < 0$ aparecen sin relación entre ellos, con partes imaginarias diferentes y $|\Re(\Sigma)|$ también distintos. $\Im(\Sigma)$ crece con x , y los modos resultan fuertemente amortiguados para $x \gtrsim 1$. Desafortunadamente, la estructura analítica en el plano complejo Ω de los integrandos en (4.94) es muy complicada, por lo que la relación precisa entre estas raíces y la evolución de las variables dinámicas es difícil de establecer de forma general. Para ganar intuición sobre el fenómeno de QNR en nuestro sistema, hemos integrado numéricamente $\xi(\tau)$, para ciertas funciones concretas y simples $F(\Omega)$. En estos ejemplos se observa la existencia de QNR con parámetros próximos a los correspondientes a las raíces de D aquí obtenidas.

Dos ejemplos

Los ejemplos que vamos a considerar corresponden a un $F(\Omega)$ de la forma,

$$F(\Omega_2) = \frac{|\Omega_2|^{3/2}}{(|\Omega_2| - i\Omega_2)} \exp(-\Omega^2/6) \quad (4.103)$$

lo que corresponde a un pulso entrante que para $r \rightarrow \infty$ queda caracterizado por

$$f(t_+ + r) = \sqrt{6} \exp(-\frac{3}{2}|t_+ + r|^2). \quad (4.104)$$

En primer lugar tomamos $R_0 = 0,25$ y $J = 0,125$. Esto corresponde a $x = 0,5$ y, por lo tanto, está dentro del rango considerado “estable” en [84]. La variable $\xi(\tau)$ se encuentra representada en la figura 4.6. Podemos ver en ella la forma característica de un QNR, que es una oscilación amortiguada. Como suele ocurrir en este tipo de fenómenos, la forma característica a la que hicimos referencia se expresa con mayor claridad si graficamos, como en la figura 4.7, $\alpha = \ln|\xi(\tau)|$ como función de τ (curva gruesa). También mostramos en la misma figura el *fit* aproximado $\ln(|\cos(\omega_r\tau + \varphi)|) - \omega_i\tau + q$, donde $\omega_r = 2,08$, $\varphi = 0,01$, $\omega_i = 0,16$ y $q = 4,28$; aunque en la figura, para mayor claridad, tomamos $q = 2$ para evitar la superposición de las dos curvas. Estos parámetros están en buen acuerdo con los correspondientes al QNM con $\Re(\Omega) > 0$ para $x = 0,5$ ilustrado en el cuadro 4.1.

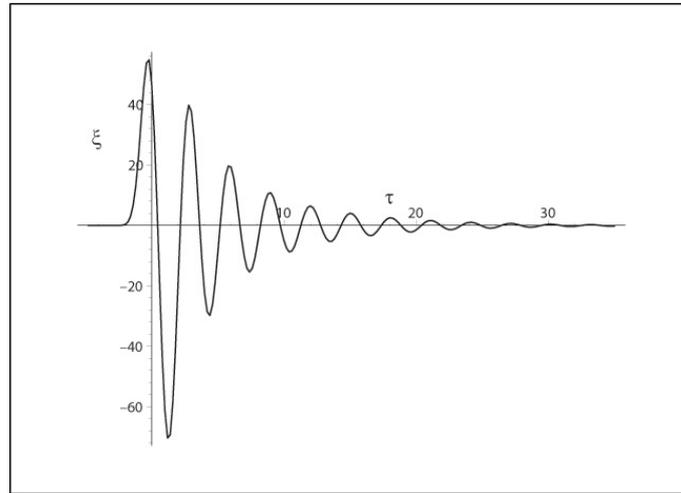


Figura 4.6: $\xi(\tau)$ como función de τ para un pulso entrante de la forma (4.104), con $R_0 = 0,25$ y $J = 0,125$

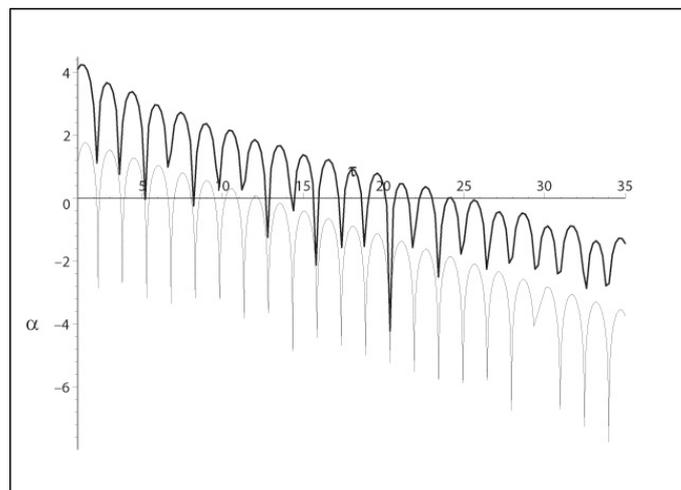


Figura 4.7: $\alpha = \ln |\xi(\tau)|$ para un pulso entrante de la forma (4.104), con $R_0 = 0,25$ y $J = 0,125$ (curva gruesa). La curva fina es el fit $\ln(|\cos(2,08\tau + 0,01)|) - 0,16\tau + 4,28$. Notar que esta última curva fue desplazada hacia abajo en 2.5 unidades para evitar la superposición.

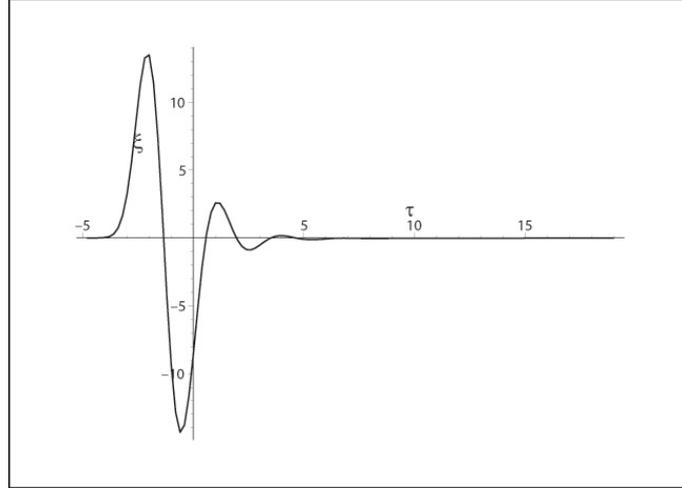


Figura 4.8: $\xi(\tau)$ como función de τ para un pulso entrante de la foma (4.104), con $R_0 = 0,25$ y $J = 0,25$, lo que implica $x = 1,0$. Es remarcable el fuerte amortiguamiento de las oscilaciones luego de la llegada del pulso entrante.

Como segundo ejemplo tomamos $R_0 = 0,25$ y $J = 0,25$. Esto corresponde a $x = 1,0$ y, por lo tanto, está fuera del rango considerado “estable” en [84]. El $\xi(\tau)$ resultante está ilustrado en la figura 4.8. Nuevamente vemos una forma característica de QNR, pero en este caso, a diferencia del anterior, se trata de un oscilación sobreamortiguada. Este resultado también está en buen acuerdo con el hecho de que el QNM para $x = 1,0$, que podemos ver en el Cuadro 4.1, corresponde a una oscilación fuertemente amortiguada. Remarcamos nuevamente que la estructura analítica de los integrandos en (4.94) está lejos de ser simple, y que, aunque las principales frecuencias de los QNM pueden ser establecidas con relativa exactitud, su efecto en las amplitudes resultantes no es fácil de establecer. De todas maneras, las integrales en (4.93) y (4.94) se toman en el eje real, por lo que son en sí independientes de la extensión analítica de los integrandos al plano complejo, donde se encuentran los polos correspondientes a los QNM.

En la próxima subsección analizamos el problema linearizado mediante un enfoque diferente, ya que planteamos el problema de valores iniciales sin hacer expansión en modos. Es posible formular los datos iniciales e implementar un esquema para resolver numéricamente la evolución de las ecuaciones (4.48), (4.49) y (4.50), con las condiciones de empalme (4.54) y (4.55).

4.2.8. Integración numérica de perturbaciones arbitrarias

En esta subsección, en lugar de realizar una descomposición en *modos* para encontrar soluciones para el sistema linearizado, implementamos un esque-

ma numérico sencillo que nos permite resolver la evolución de un dato inicial $(\chi_1(0, r), \chi_2(0, r), (\partial\chi_1(\tau, r)/\partial\tau)|_{\tau=0}, (\partial\chi_2(\tau, r)/\partial\tau)|_{\tau=0}, \xi(0), (d\xi(\tau)/d\tau)|_{\tau=0})$.

En primer lugar, elegimos una única coordenada temporal para ambas regiones M^\pm , concretamente τ , el tiempo propio de la cáscara, cuya relación con t_\pm a orden linealizado está dada por (4.53). Teniendo esto en cuenta, en lugar de $\chi_2(t_+, r)$ vamos a introducir una nueva función $\chi_3(\tau, r)$ definida por,

$$\chi_3(\tau, r) = \chi_2(e^{-\gamma_0\tau}, r) \quad (4.105)$$

que debe satisfacer la ecuación

$$-\frac{(2J^2 + R_0^2)^4}{R_0^8} \frac{\partial^2 \chi_3(\tau, r)}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \chi_3(\tau, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_3(\tau, r)}{\partial r} = 0. \quad (4.106)$$

De esta manera todas las variables dinámicas evolucionan directamente en términos de τ , y no necesitamos dos mallas separadas para $r < R_0$ y $r > R_0$ respectivamente.

Podemos ahora comprobar que el sistema (4.48), (4.54), (4.55), y (4.106), reemplazando apropiadamente χ_2 por χ_3 donde corresponda, puede ser utilizado para formular y resolver numéricamente un problema de valores iniciales. Para algún $\tau = \tau_0$, damos valores arbitrarios $\xi(\tau_0)$, $(d\xi(\tau)/d\tau)|_{\tau=\tau_0}$; $\chi_1(\tau_0, r)$, $(\partial\chi_1(\tau, r)/\partial\tau)|_{\tau=\tau_0}$, en el intervalo $0 \leq r \leq R_0$; y $\chi_3(\tau_0, r)$, $(\partial\chi_3(\tau, r)/\partial\tau)|_{\tau=\tau_0}$, en el intervalo $r \geq R_0$; sujetos al *constraint* $\chi_1(\tau, 0) = 0$ y a las condiciones de empalme (4.54, 4.55).

El procedimiento de integración consiste en un método de diferencias finitas para actualizar χ_1 en $0 \leq r < R_0$, y χ_3 en $R_0 < r \leq r_o$, donde $r_o \gg R_0$ es un borde exterior elegido apropiadamente. Los valores de ξ son actualizados mediante un simple esquema *leapfrog* para la ecuación (4.55). Una vez que se realizan estas actualizaciones, utilizamos las condiciones de empalme (4.54) para actualizar χ_1 y χ_3 en $r = R_0$. La integración se realiza desde $\tau = 0$ hasta $\tau \sim r_o/2$, de manera tal que la elección de alguna condición de borde en $r = r_o$ resulta irrelevante.

Un primer ejemplo de los resultados de esta integración numérica para $\xi(\tau)$ está ilustrado por las figuras 4.9 y 4.10. El dato inicial utilizado fue

$$\begin{aligned} \chi_3(0, r) &= e^{-50(r-1)^2} ; \quad \frac{\partial \chi_3}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = -\frac{100R_0^4(r-1)}{(2J^2 + R_0^2)^2} e^{-50(r-1)^2} \\ \chi_1(0, r) &= 0 ; \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \\ \xi(0) &= 0 ; \quad \frac{d\xi}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \end{aligned} \quad (4.107)$$

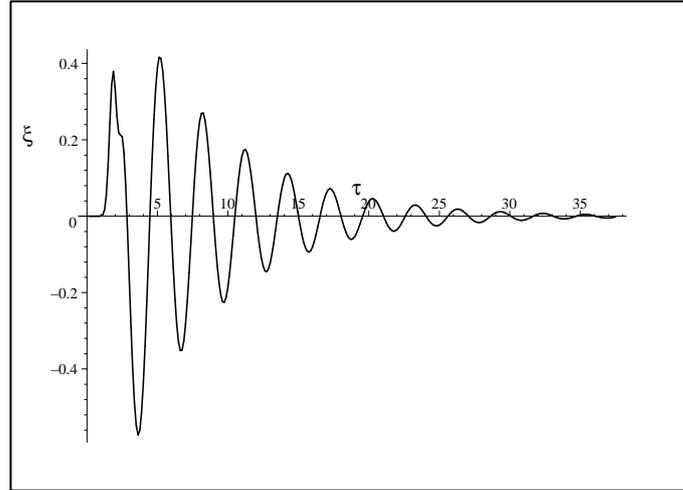


Figura 4.9: $\xi(\tau)$ como función de τ para un dato inicial de la forma (4.107), con $R_0 = 0,25$ y $J = 0,125$, por lo que $x = 0,5$.

con $R_0 = 0,25$ y $J = 0,125$, lo que corresponde a $x = 0,5$. En la figura 4.9 graficamos la evolución de $\xi(\tau)$. Este dibujo corresponde claramente a una evolución dominada por QNR, aunque un análisis más detallado muestre una pequeña contribución no oscilante para τ lo suficientemente grande. En la figura 4.10 ilustramos $\ln(|\xi(\tau)|)$ (curva gruesa) en la región dominada por el modo amortiguado. La curva fina corresponde al *fit* $\ln(|\cos(2,18\tau - 1,4)|) - 0,147\tau$, aunque el gráfico del mismo fue desplazado hacia abajo para mayor claridad. Podemos ver nuevamente la clara señal de una oscilación amortiguada, con frecuencia y decaimiento muy similares a los de la figura 4.7, lo cual implica cierta robustez para el presente análisis ya que ambos resultados fueron obtenidos utilizando métodos y formas de pulso entrante totalmente diferentes. Es posible que la concordancia entre la integración numérica directa y la descomposición en modos mejore con la implementación de un método numérico más elaborado que el aquí desarrollado. De todas maneras, no fue nuestro propósito optimizar el procedimiento numérico completo, si no más bien mostrar que incluso con una implementación sencilla podemos aproximadamente resolver el problema de Cauchy para la dinámica de perturbaciones alrededor de una solución estática, y así obtener resultados que concuerdan muy bien con los de la expansión en modos.

Como segundo ejemplo, consideramos nuevamente un dato inicial de la forma (4.107), pero tomando $R_0 = 0,25$ y $J = 0,25$ ($x = 1$), lo que se ilustra en la figura 4.11. En este caso, y en consonancia con nuestro análisis sobre los QNM, obtenemos oscilaciones fuertemente amortiguadas, de forma muy similar a lo ilustrado en la figura 4.8 para los mismos valores de R_0 y J , pero siendo esta curva el resultado de una integración completamente diferente a

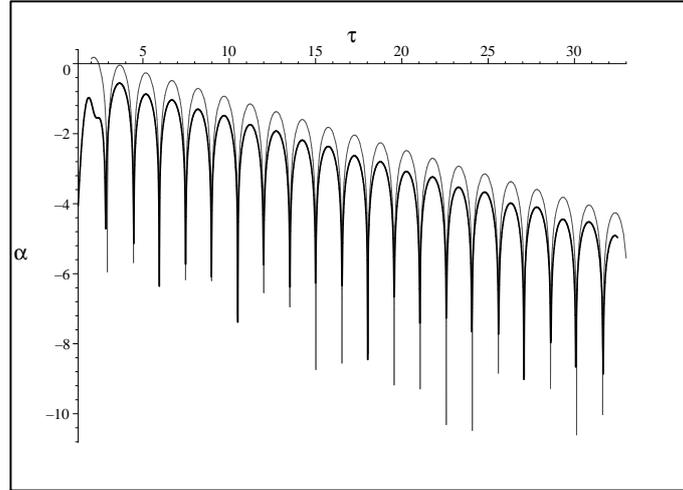


Figura 4.10: $\alpha = \ln |\xi(\tau)|$ para un dato inicial de la forma (4.107), con $R_0 = 0,25$ y $J = 0,125$ (curva gruesa). La curva fina es el fit aproximado $\ln(|\cos(2,08\tau - 1,4)|) - 0,147\tau$. Notar que el gráfico de este fit está desplazado hacia abajo 0,5 unidades, para evitar la superposición de las curvas

la de aquella figura.

4.2.9. Comentarios finales

En esta sección presentamos un análisis de la dinámica de una cáscara fina autogravitante compuesta por partículas contrarrotantes. Obtuvimos varios resultados nuevos y, en cierto sentido, inesperados. En primer lugar, demostramos la existencia de una familia de soluciones donde el interior de la cáscara permanece plano a lo largo de toda la evolución. Para esta familia, la ecuación de movimiento de la cáscara se desacopla de los modos radiativos. Encontramos una integral primera de esta ecuación y mostramos que la misma resulta equivalente a la de una partícula moviéndose en un potencial unidimensional independiente del tiempo, con cierta energía determinada. La ecuación de movimiento admite soluciones de colapso, periódicas, y no acotadas, según la elección de parámetros. Mostramos que en particular las soluciones periódicas y las no acotadas son consistentes con las ecuaciones de campo, por lo que representan auténticas soluciones del sistema completo.

En segundo lugar, analizamos la dinámica del sistema linealizado alrededor de una solución estática. El primer resultado inesperado fue el de encontrar soluciones periódicas no triviales del sistema linealizado de frecuencia arbitraria. La frecuencia correspondiente a las pequeñas oscilaciones newtonianas es meramente el límite newtoniano de la familia de soluciones con interior plano. Llegamos a la conclusión de que el sistema no posee una

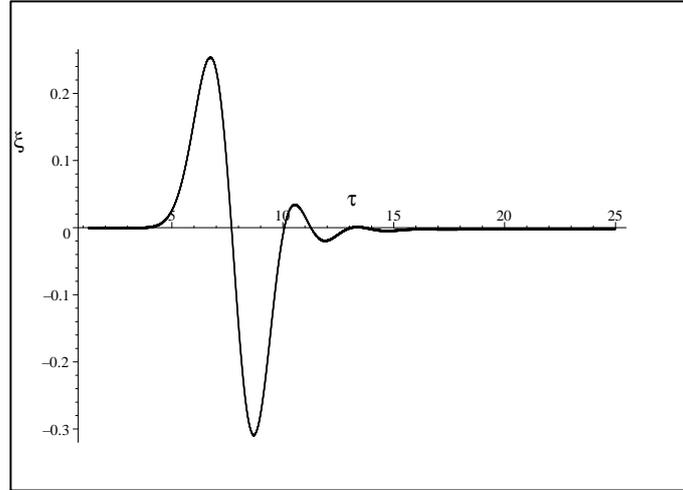


Figura 4.11: $\xi(\tau)$ como función de τ para un dato inicial de la forma (4.107), con $R_0 = 0,25$ y $J = 0,25$, por lo que $x = 1,0$. Resulta destacable el fuerte amortiguamiento de las oscilaciones luego de la llegada del pulso.

frecuencia “natural” de oscilación, la cual pueda verse levemente alterada y/o amortiguada por el acoplamiento con los modos raditativos, si no que, por lo contrario, tenemos un sistema donde este acoplamiento es “lo más fuerte posible”, y es determinante para la dinámica de la cáscara. Encontramos también en particular una familia infinita de “antiresonancias”, donde la cáscara permanece estática (a primer orden) mientras que el campo a ambos lados oscila. Vimos que posiblemente la familia de soluciones periódicas que encontramos sea completa y nos permita resolver el problema del valor inicial para el sistema linealizado, pero no encontramos una forma de invertir las expresiones (4.73).

En tercer lugar, describimos el problema en términos de otra base que nos permite distinguir entre componentes “entrantes” y “salientes” para ψ^+ , y de esta manera plantear el problema del valor característico. Encontramos que para este problema la base de soluciones periódicas resulta completa, y que además, en particular, todas las soluciones estáticas son estables ante perturbaciones acotadas en el espacio-tiempo, lo que no coincide con lo sugerido en [84], ni con el análisis hecho en [88], pero que a su vez no contradice el resultado de inestabilidad ante *perturbaciones MSRF* que se sugiere en [86]. Mostramos mediante ejemplos concretos que existe *ringing* cuasinormal para este sistema, y que los QNM correspondientes son raíces de la expresión (4.90).

Por último, desarrollamos otro método, en términos de perturbaciones de forma arbitraria, mediante el cual pudimos resolver problemas de valores iniciales. Desarrollamos una implementación numérica y la utilizamos pa-

ra estudiar la evolución de algunos casos concretos. Pudimos reobtener los mismos rasgos cualitativos para la evolución que con el método anterior (estabilidad y *ringing* cuasinormal), además de una muy buena concordancia para con las frecuencias y tasas de decaimiento del QNR.

Capítulo 5

El problema del valor inicial con superficies singulares

En los capítulos anteriores observamos que es posible construir diferentes soluciones de las ecuaciones de Einstein con superficies singulares, que representan la historia de objetos bidimensionales, o n dimensionales en espacio-tiempos de $n + 2$ dimensiones. En el capítulo 2 en particular, tratamos dos aspectos que nos brindan información acerca del grado de *representatividad* física de estos modelos, para el caso en el que la materia en la superficie es materia de Vlasov: uno de ellos es la estabilidad ante la separación o *evaporación* de sus constituyentes; y el otro es la posibilidad de que sean configuraciones que representen un límite para familias de sistemas tridimensionales en el espacio. Podemos ver que todos los casos analizados en la sección 2.3, los cuales resultan efectivamente límites de familias de soluciones “gruesas” estáticas, cumplen a su vez con el requisito de estabilidad ante separación de componentes. En primer lugar, la cáscara estática de un único momento angular resulta siempre estable ante separación de componentes, como comentamos al final de la sección 2.4. En segundo lugar, el ejemplo de cáscara de pequeño grosor de dos componentes se corresponde con una cáscara fina estática cuyos componentes cumplen con la condición (3.55). Análogamente, la cáscara fina estática con $n(L)$ dado por (2.112), que corresponde al límite de cáscara delgada de familias de cáscaras de Einstein, resulta estable ante evaporación de partículas, ya que el soporte de $n(L)$ está enteramente contenido en el *rango estable* de momentos angulares. De acuerdo a esta observación, todas estas superficies singulares resultan “físicas” en ambos sentidos, lo que nos permite conjeturar lo siguiente: *tal vez todas las cáscaras que resultan estables ante separación de componentes sean límites, en algún sentido, de familias de soluciones con fuentes regulares.*

Vimos que, cuando alguna de las condiciones de estabilidad no se cum-

ple, es posible construir soluciones que representen una cáscara que se divide en fragmentos, o que pierde partículas por evaporación. Como ilustran los ejemplos en las secciones 2.4 y 3.2, existen soluciones que representan procesos de *splitting* que se dan en el punto donde el sistema *compuesto* se vuelve inestable ante la separación de sus componentes. Esta construcción se logra encontrando primero los parámetros de la región (o regiones) del espacio-tiempo que se formaría entre las cáscaras resultantes, imponiendo que los espacios tangentes a las cáscaras en el punto de separación coincidan para que así todas las superficies estén bien definidas como *embeddings*¹; y luego resolviendo desde ahí las ecuaciones de movimiento de cada cáscara por separado. En cada uno de estos casos existen al menos dos evoluciones posibles para un mismo dato inicial: una con *splitting* y otra sin el mismo.

Es de esperarse entonces que para un dato inicial correspondiente a alguna de las configuraciones estables *la evolución sea unívoca*. Como mencionamos en la introducción, los sistemas de Einstein-Vlasov son *well-posed*, por lo que si la unicidad que se tiene para fuentes regulares se perdiera al tomar un *límite de cáscara fina* en familias de soluciones regulares, tendríamos un problema en la definición de este límite. Nuestra interpretación del origen de la pérdida de unicidad es que al colapsar algunos de los grados de libertad del sistema, aparecen “soluciones espúreas”, que no están “cerca” de ninguna solución con fuentes regulares, y que son permitidas por la “pérdida de información” que implica el paso a una configuración con una dimensión menos. Si es correcta esta interpretación, que se basa en la hipótesis que *las shells que no admiten splitting son siempre límites de familias de soluciones con fuentes regulares*, las cáscaras inestables no serían representativas de situaciones físicas, no sólo por razones análogas a las que explican el hecho de que las lapiceras nunca quedan en equilibrio paradas de punta, si no también porque no servirían como *idealizaciones* de configuraciones suaves.

En lo que respecta al capítulo 2, podríamos argumentar también que el uso de una función de distribución f para el *ensemble* de partículas que no es regular, si no que a su vez está *concentrada* en superficies $L = cte.$ en el espacio de las fases, podría romper con las buenas propiedades que poseen los sistemas de Einstein-Vlasov, y por ello invalidar la *unicidad* que uno esperaría para los mismos [89]. Pero en el capítulo 3 vimos que las inestabilidades pueden darse para cualquier par de componentes no interactuantes que uno pueda definir en la superficie. Por otra parte, la expresión 3.49 implicaría igualmente inestabilidad si tomáramos $n(L)$ suave, pero con picos bien marcados en L_1 y L_2 , y eligiéramos las dos componentes no interactuantes separando el *ensemble* en dos partes: por un lado las partículas con $L > L_0$,

¹Lo que es equivalente a considerar continuidad de la métrica y del vector normal a las superficies.

y por el otro las con $L < L_0$, siendo $L_1 < L_0 < L_2$.

Entonces vemos que el *problema de Cauchy* para un dato que represente una superficie singular no sería *well-posed*, salvo tal vez para situaciones que satisfagan ciertos criterios de estabilidad. En particular, para sistemas de Einstein-Vlasov en simetría esférica con distribuciones arbitrarias $n(L)$, la inestabilidad por *evaporación* tendría típicamente lugar en algún momento de la evolución, cuando el soporte de $n(L)$ deje de estar en el *intervalo estable de momentos angulares*, intervalo que se puede encontrar como función de R y de los parámetros de la cáscara. Teniendo en mente esta situación, vemos que la ambigüedad en la evolución puede ser peor si combinamos los análisis de estabilidad ante *evaporación* de partículas con los de *separación de componentes*. Se puede mostrar que en el caso de tener una distribución discreta de momentos angulares, *el criterio de inestabilidad ante separación de componentes es siempre más restrictivo que el de la evaporación de las partículas individuales* [1]. Pero cuando se tiene una distribución continua, resulta ambigüo elegir qué componentes van a *separarse*, y uno esperaría que las condiciones de evaporación para las partículas cuyos L están en los extremos del soporte de $n(L)$, sean las primeras condiciones de estabilidad que eventualmente dejen de cumplirse. La expectativa es que estas partículas paulatinamente conformen, desde el momento que se hacen susceptibles a la *evaporación*, una *atmósfera* alrededor de la *shell*. Pero si bien éste es el escenario que nos resulta intuitivamente más realista, formalmente también pueden existir soluciones que plantean un *splitting* entre dos componentes definidas arbitrariamente, como por ejemplo eligiendo un L_0 perteneciente al soporte de $n(L)$ que divida en dos al *ensemble* ($n(L) = n_1(L)\Theta(L_0 - L) + n_2(L)\Theta(L - L_0)$), siendo estas últimas, las de evaporación, y la de la cáscara entera sin desmembramientos, *todas soluciones posibles correspondientes a un mismo dato inicial*.

Pero como mencionamos en los comentarios finales del capítulo 3, puede existir una analogía entre una situación con superficies singulares en Relatividad General y la formación de *shocks* para ciertos modelos de materia [85]. En el epílogo del trabajo de Christodoulou sobre *shocks* en fluidos ideales [77], se menciona que luego de la formación de shocks, la cual se puede dar a partir de datos iniciales suaves, *la unicidad en la evolución se rompe*. Pero de todas formas, resulta posible recuperarla con una condición para la *entropía*, que impone una flecha de tiempo, y que permite distinguir la evolución *física* de entre las evoluciones matemáticamente posibles ¿Se podrá afirmar algo como esto en este contexto? Los *splittings* que ilustramos en las secciones 2.4, 3.2 y 3.3 sugieren que éstas son soluciones “más físicas” que las soluciones sin *splitting* para estos casos, ya que las superficies que evolucionan *enteras* son inestables, y, por lo general, cada vez más inestables, ante cual-

quier perturbación que pudiera, por casualidad, separar infinitesimalmente sus componentes. Lo mismo podríamos decir, y tal vez con más razón ya que la naturaleza de las posibles *perturbaciones* parece ser más clara, cuando consideramos la estabilidad ante *evaporación* para materia de Vlasov con una distribución continua $n(L)$ en simetría esférica. Como ocurre con un gas confinado en un recipiente que de pronto se abre, podemos intuir que, sea cual sea la definición precisa de *entropía* que tomemos para estos sistemas, la misma ha de ser máxima para aquella solución donde las partículas del *ensemble* ocupen el mayor volumen en el espacio de las fases que puedan ocupar, por lo que el escenario de la *formación de una atmósfera* parece ser el físicamente pausable.

Por otra parte, sería interesante buscar soluciones tipo *splitting* en situaciones con simetría cilíndrica. Tratar de construir soluciones análogas a las de la sección 2.4 para materia de Vlasov en esta simetría es otra posible dirección para futuras investigaciones, que resultaría interesante para establecer comparaciones, y ganar intuición acerca de la injerencia que podrían tener los grados de libertad radiativos en estos procesos. La dificultad de una construcción análoga para simetría cilíndrica está justamente en la no existencia de un teorema de Birkhoff, por lo que no podemos caracterizar el espacio-tiempo que se formaría entre las componentes que se separan con un conjunto finito de parámetros: *tendríamos que dilucidar el problema de los valores iniciales para estas configuraciones*, o imponer condiciones *ad hoc* que nos permitan obtener soluciones particulares. Además, particularmente para el caso del modelo de materia que consideramos en la sección 4.2, *partículas contrarrotantes* moviéndose en planos perpendiculares al eje de simetría con el mismo módulo del momento angular, no tenemos criterio alguno que nos permita seleccionar dos *ensembles* distinguibles dinámicamente, y tal que cada uno *preserve* la simetría del sistema. La *Apostolatos-Thorne shell* resultaría estable ante separación de sus constituyentes por la misma razón por la que también lo es una cáscara fina de un único momento angular en simetría esférica: *cualquier perturbación que preserve la simetría afectaría a todas las partículas por igual*. Por lo tanto para construir *splittings* análogos a los de la sección 2.4 en simetría cilíndrica, tendríamos que proponer una distribución $n(J)$ para las partículas en el espacio de momentos angulares.

De todas formas, sin necesidad de hablar de *splitting*, como vimos en la sección 4.2, no resulta obvia la existencia de una formulación de valores iniciales siquiera para el problema *linearizado* alrededor de una *Apostolatos-Thorne shell* estática. Pero en definitiva, el motivo por el cual existe esa dificultad es en esencia independiente del modelo de materia en la cáscara, ya que radica en el hecho que el *moving boundary problem* que representa no parece admitir una formulación autoadjunta. De todas maneras, el *tamaño*

de la base de soluciones periódicas, y la unicidad para el *problema del valor característico* en la aproximación linealizada, son en definitiva argumentos a favor de la unicidad para el problema de los valores iniciales asociado a una *Apostolatos-Thorne shell*. Comparando con los resultados de la sección 2.3 sobre situaciones esféricas análogas, es posible que las cáscaras estáticas cilíndricas que analizamos en la sección 4.2 sean límite de configuraciones tridimensionales, algo que sería interesante de investigar ya que sería otro *test* para la conjetura que establecimos en el primer párrafo de este capítulo. Por otra parte, en la literatura existen procedimientos numéricos para integrar shells de polvo ($J = 0$) en simetría cilíndrica ([80],[90]), que resultan estables y que arrojan resultados físicamente consistentes. Esto puede tomarse como otro argumento a favor de la *well-posedness* de la *Apostolatos-Thorne shell*.

En definitiva es posible que ignorando todo tipo de *evaporación* o *splitting*, las condiciones de empalme de Israel-Darmois junto con las ecuaciones de Einstein en el vacío, o con algún campo que “se comporte bien”, admitan una formulación de valores iniciales. Por ejemplo, en la literatura de cosmología de branas existe mucho trabajo que evidencia una buena formulación de valores iniciales para perturbaciones arbitrarias en el *bulk* ([91],[92],[21]), alrededor de soluciones como las de la sección 3.3, y de otras análogas que incluyen un campo escalar en el *bulk*. Resulta probable que *el problema de Cauchy para datos con superficies singulares pueda ser well-posed bajo la restricción de que la cáscara no intercambia materia con el ambiente*. Precisamente, en el contexto de cosmología de branas hay indicios de esto no sólo a nivel perturbativo [93], aunque la simetría Z_2 parece ser fundamental para que el problema sea tratable, ya que convierte las condiciones de empalme en *condiciones de Neumann* dinámicas (el valor de ciertas derivadas de la métrica en la brana resulta función de la masa-energía en la misma). La hipótesis del no intercambio de materia-energía se puede interpretar como un *vínculo* que restringe el espacio de configuraciones, y que convierte a la dinámica de la *shell* en un *moving boundary problem*. De todas maneras, uno puede objetar este tipo de vínculos, ya que resultan *teleológicos* en algún sentido: la información de que la cáscara va a evolucionar como un *sistema cerrado* con respecto al ambiente, no está contenida en un dato inicial si no que es impuesta *a posteriori*.

¿Cómo caracterizar entonces una formulación de valores iniciales con superficies singulares? Vamos a ilustrar la forma que tendrían los datos iniciales en cierta superficie espacial, dado que el espacio-tiempo contiene una superficie singular temporal Σ . Si tenemos un *embedding* en el espacio-tiempo, en un entorno del mismo siempre se pueden definir coordenadas gaussianas. En esas coordenadas, la métrica toma la forma,

$$ds^2 = -f(\tau, \eta, x^i)d\tau^2 + d\eta^2 + 2h_i(\tau, \eta, x^i)d\tau dx^i + {}^2g_{ij}(\tau, \eta, x^i)dx^i dx^j \quad (5.1)$$

donde los índices (i, j) toman valores en $1, 2$, $f(\tau, 0, x^i) = 1$ y $h_i(\tau, 0, x^i) = 0$, siendo τ el *tiempo propio* de la cáscara². Por simplicidad, vamos a tomar como parte de una superficie de Cauchy S a la superficie $\tau = 0$, la cual está típicamente definida sólo en un entorno de Σ , hasta donde las geodésicas normales que parten de la subsuperficie $\tau = 0$ en Σ empiezan a intersectarse. Un dato inicial consistiría en un par (h_{ab}, F_{ab}) sobre S , donde h_{ab} se corresponde con la métrica inducida en S , y F_{ab} es un tensor simétrico que se corresponde con la curvatura extrínseca de S . A partir de lo que sabemos de superficies singulares, podemos afirmar que h_{ab} tiene que ser continuo en $\eta = 0$, mientras que F_{ab} , que involucra primeras derivadas de la métrica, podría tener discontinuidades allí. Podemos ver que en la superficie se cumple $F_{\eta}^{\eta}|_{\eta=0} = 0$, $F_{\eta}^i|_{\eta=0} = K_{\tau}^i|_{\tau=0}$ y $F_j^i|_{\eta=0} = \Gamma_{\tau j}^i|_{(\eta=0, \tau=0)}$. Este par de tensores tiene que satisfacer *constraints* dados por las expresiones (1.13) y (1.14), que para este caso pueden escribirse como,

$$\frac{1}{2}(F^2 - F_{ab}F^{ab} + {}^3R) = -\kappa S_{\tau}^{\tau} \delta(\eta) \quad (5.2)$$

$$F_{,a} - F_{a;b}^b = -\kappa S_a^{\tau} \delta(\eta) \quad (5.3)$$

donde 3R es el escalar de Ricci para la métrica h_{ab} . Podemos inferir de la expresión (5.2) que 3R debe contener una delta de Dirac, ya que los F_b^a tienen a lo sumo una discontinuidad en $\eta = 0$. Por otra parte, la expresión (1.15) se escribe en este caso como,

$$S_{\mu\nu} e_a^{\mu} e_b^{\nu} \delta(\eta) = {}^3G_{ab} + \left[\frac{\partial}{\partial \chi} (F_{ab} - h_{ab} F) + F F_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} F^2 - \frac{1}{2} h_{ab} F^{cd} F_{cd} \right] \quad (5.4)$$

donde χ es la coordenada normal a S , que en $\eta = 0$ coincide con τ . El lado izquierdo de esta ecuación es nulo si e_a o e_b es $\partial/\partial\eta$, por lo que la $\delta(\eta)$ sólo juega un papel para las componentes denotadas con los índices (i, j) . Para esas componentes, la delta de Dirac en el lado derecho debe estar contenida en ${}^3G_{ij}$, ya que F_j^i y su derivada en τ tienen como mucho discontinuidades en $\eta = 0$. Resulta interesante observar que las condiciones de empalme (1.17) están repartidas aquí en las tres expresiones (5.2), (5.3) y (5.4). Las componentes diagonales de la curvatura extrínseca tienen que aparecer en las componentes diagonales de ${}^3G_{ij}$, y en 3R , así como las extradiagonales K_j^i tienen que aparecer en las extradiagonales de ${}^3G_{ij}$.

Vemos que, así planteado, el movimiento de la *shell* es un problema de propagación de singularidades [85], análogo en algún sentido al de la propagación de *shocks*. Resulta difícil a partir de estas expresiones ver dónde

²La existencia de un tiempo de estas características (global y ortogonal a hipersuperficies en Σ) no se da en cualquier variedad $2 + 1$, y es lo que define a las así llamadas *superficies sincronas* [94].

puede encontrarse la información, si la hubiera, acerca de un posible *splitting* en algún momento de la evolución de la cáscara. Basándonos en lo expuesto en esta tesis, podemos intuir que en todo caso *esa información está en los grados de libertad de la materia confinada en la shell*. En el momento de la separación, si la hubiera, las condiciones (1.18) y (1.19) serían no triviales, ya que, desde las perspectiva de una de las superficies resultantes, alrededor de la cual definimos las coordenadas gaussianas, tendríamos materia “saliendo” de la misma. Siguiendo de esta manera a una de las cáscaras resultantes, tenemos que la materia “saliente” estaría *concentrada* en una hipersuperficie, mientras que el tensor de masa-energía S_{ν}^{μ} resultaría discontinuo en el punto de bifurcación, por lo que la expresión,

$$S_{\alpha;\beta}^{\beta} = [T_{\mu\nu}n^{\mu}e_{\alpha}^{\nu}] \quad (5.5)$$

puede entenderse como una ecuación entre distribuciones, donde de un lado tenemos derivadas temporales de S_{ν}^{μ} que divergen por la discontinuidad mencionada, y del otro tenemos materia concentrada.

Para concluir con observaciones algo más precisas, interpretamos ahora en este contexto las soluciones tipo *splitting* que tratamos en esta tesis. Vimos que la ecuación de movimiento para la cáscara en simetría esférica se obtiene a partir de la condición de empalme (1.17), la cual, al escribir las curvaturas extrínsecas en términos de parámetros y de una función $R(\tau)$ que define la superficie, se expresa finalmente mediante las ecuaciones (3.15,3.16). El hecho de caracterizar la evolución de una dada superficie mediante una única función es lo que nos permitió encontrar una amplia variedad de soluciones. Observamos que los *splittings* de las secciones 2.4 y 3.2 *tienen que ver con una discontinuidad para \ddot{R} al momento de la separación*; a diferencia del de la sección 3.3 (un *splitting* que no es suave), donde la discontinuidad está directamente en \ddot{R} . En este contexto, el tensor F en una superficie $\tau = cte.$ toma la forma,

$$F_{\nu}^{\mu} = \text{diag} \left[0, \frac{1}{f^{1/2}r} \frac{\partial r}{\partial \tau}, \frac{1}{f^{1/2}r} \frac{\partial r}{\partial \tau} \right] \quad (5.6)$$

por lo que en la ecuación (5.4) va a aparecer \ddot{R} . De esta manera, para *splittings* suaves, la discontinuidad se vislumbra si derivamos (5.4) con respecto a τ , y damos para las derivadas de las componentes S_{ν}^{μ} la información pertinente para el *splitting*, compatible con (5.5). De acá podemos ver que, aunque S_{ν}^{μ} sea discontinuo, \ddot{R} no tiene que serlo ya que la delta de Dirac del lado derecho de (5.4) está en ${}^3G_{ij}$. Pero podría serlo de todas formas, y es en ese caso cuando decimos que el *splitting* no es suave, como ocurre en el ejemplo de la sección 3.3. En esas situaciones tendríamos que \ddot{R} contribuye con una delta en la derivada en τ del lado derecho de (5.4), por lo que el salto de \ddot{R} resulta relacionado con el salto en S_{ν}^{μ} en el momento de la separación.

Lo expuesto en este capítulo no intentó abarcar toda la complejidad que conlleva el *problema de los valores iniciales* para datos con superficies singulares. Nuestra intención era sobre todo la de ilustrar cómo el conocimiento de familias de soluciones exactas o linealizadas nos brinda una intuición clara sobre el problema, al punto que nos permite conjeturar algunas de sus propiedades. En particular, no parece en principio haber nada especial con la simetría esférica en relación a la posibilidad de construir soluciones de *splitting*, más allá de la conveniencia técnica de disponer del teorema de Birkhoff, ya que la clave parece estar en la construcción de soluciones que tengan sentido como distribuciones para la ecuación (5.5), lo que a su vez dependería fuertemente del modelo de materia en la *shell*.

Bibliografía

- [1] Gleiser R J, Ramirez M A, *Class. Quant. Grav* **26**, 045006 (2009).
- [2] Gleiser R J, Ramirez M A, *Class. Quant. Grav.* **27**, 065008 (2010).
- [3] Gleiser R J, Ramirez M A, *Int. J. Mod. Phys. D* **20**: 661-674 (2011).
- [4] Gleiser R J, Ramirez M A, *Phys. Rev. D* **85**, 044026 (2012).
- [5] Ramirez M A, *Splitting brane-worlds* [en preparación] (2012).
- [6] Gleiser R J, Ramirez M A, *Perturbative evolution of the static configurations, quasinormal modes and quasinormal ringing in the Apostolatos - Thorne cylindrical shell model* [arXiv:gr-qc/1206.5861], enviado a *Class. Quant. Grav.* (2012).
- [7] Misner C, Thorne K S, Wheeler J A, “Gravitation”, *W. H. Freeman* (1973).
- [8] Choquet-Bruhat Y, “General Relativity and the Einstein Equations”, *Oxford University Press* (2009).
- [9] Geroch R, Traschen J, *Phys. Rev. D* **36**, 1017 (1987).
- [10] Israel W, *Nuov. Cim. B* **44**, 1 (1966).
- [11] Barrabes C, Israel W, Letelier P S, *Phys. Lett. A* **160**, 41-44 (1991).
- [12] Apostolatos T A, Thorne K S, *Phys. Rev. D* **46**, 2435 (1992).
- [13] Pereira P R C T, Wang A, *Phys. Rev. D* **62**, 124001 (2000), *Phys. Rev. D* **67**, 129902(E) (2003).
- [14] Seriu M, *Phys. Rev. D* **69**, 124030 (2004).
- [15] Henon M, *Astronom. and Astrophys.* **24**, 229 (1973).
- [16] Gott J R, *Astrophys. J.* **201**, 296-310 (1975).

-
- [17] Yangurazova L R, Bisnovaty-Kogan G S, *Astroph. and Space Sci.* **100**, 319-328 (1984).
- [18] Berezin V A, Kuzmin V A, Tkavech I I, *Phys. Rev. D* **36**, 10 2919 (1987).
- [19] Ansoldi S, Guendelman E, Shilon S, *Proceedings of BH2: Dynamics and Thermodynamics of Black Holes and Naked Singularities* - Politecnico di Milano, Italia (2007).
- [20] Barrabes C, Hogan P A, "Singular Null Hypersurfaces in General Relativity", *World Scientific* (2003).
- [21] Maartens R, Koyama K, "Brane-World Gravity" *Living Rev. Rel.* **13**, 5 (2010) <http://www.livingreviews.org/lrr-2010-5>.
- [22] Polchinski J, "String Theory. Vol 2: Superstring theory and Beyond", *Cambridge University Press* (1998).
- [23] Horava P, Witten E, *Nucl. Phys. B* **460**, 506-524 (1996).
- [24] Witten E, *Nucl. Phys. B* **471**, 135 (1996).
- [25] Lukas A, Ovrut B A, Stelle K S, Waldram D, *Phys. Rev. D* **59**, 086001 (1999).
- [26] Randall L, Sundrum R, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690-4693 (1999).
- [27] Randall L, Sundrum R, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370-3373 (1999).
- [28] Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G, *Phys. Lett. B* **429**, 263-272 (1998).
- [29] Shiromizu T, Maeda K, Sasaki M, *Phys. Rev. D* **62** 024012, 1-6 (2000).
- [30] Mukhanov V, "Physical Foundations of Cosmology", *Cambridge University Press* (2005).
- [31] Long J C, Chan H W, Churnside A B, Gulbis E A, Varney M C M, Price J C, *Nature* **421**, 922-925 (2003).
- [32] Bowcock P, Charmousis C, Gregory R, *Class. Quant. Grav.* **17**, 4745-4763 (2000).
- [33] Para un review reciente sobre los sistemas de Einstein-Vlasov, ver, por ejemplo [34].

- [34] Andréasson H, “The Einstein-Vlasov system/ Kinetic theory” *Living Rev. Rel.* **14**, 4 (2011) <http://www.livingreviews.org/lrr-2011-4>, y referencias allí citadas.
- [35] Binney J, Tremaine S, “Galactic Dynamics”, *Princeton University Press* (1987).
- [36] Börner G, “The Early Universe. Facts and Fiction”, *Springer* (1993).
- [37] Rendall A D, *Class. Quant. Grav.* **9**, L99-L104 (1992).
- [38] Hamity V H, “Relativistic spherically symmetric thin-shelled ensembles of collisionless particles in the presence of a central body”, *Proceedings of SILARG III*, Universidad Nacional Autónoma de México, México (1982).
- [39] Choquet-Bruhat Y, *Ann. Inst. Fourier* **21**, 181-201 (1971).
- [40] Rein G, Rendall A D, *Comm. Math. Phys.* **150**,561-583 (1992).
- [41] Rendall A D, *The Einstein-Vlasov system* [arXiv:gr-qc/0208082].
- [42] Andreasson H, *Ann. Henri Poincare* **11**, 781-803 (2010)
- [43] Andreasson H, Rein G, *Math. Proc. Camb. Phyl. Soc.* **149**, 173-188 (2010).
- [44] Andreasson H, Kunze, Rein G, *Commun. Part. Diff. Eq.* **33**, 656-668 (2008).
- [45] Rein G, Rendall A D, Schaeffer J, *Commun. Math. Phys.* **168**, 467-478 (1995).
- [46] Dafermos M, Rendall A D, *Ann. Henri Poincare* **6**, 1137-1155 (2005).
- [47] Dafermos M, *Class. Quan. Grav.* **22**, 2221-2232 (2005).
- [48] Rein G, Rendall A D, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **128**, 363-380 (2000)
- [49] Andreasson H, Rein G, *Class. Quant. Grav.* **24**,1809 (2007).
- [50] Andreasson H, Rein G, *J. Hyperbol. Differ. Equations* **7**, 707-731 (2010).
- [51] Andreasson H, Kunze, Rein G, *Math. Ann.* **en imprenta**, (2011).
- [52] Rein G, Rendall A D, Schaeffer J, *Phys. Rev. D* **58**, 044007 (1998).
- [53] Andreasson H, Rein G, *Class. Quant. Grav.* **23** 3659-3677 (2006).

- [54] Olabarrieta I, Choptuik M W, *Phys. Rev. D* **65**, 024007 (2001).
- [55] Gundlach C, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 1-49 (1998).
- [56] Carot J, Senovilla J M M, Vera R, *Class. Quant. Grav.* **16**, 3025-3034 (1999).
- [57] Melvin M A, *Phys. Rev.* **139**, B225-B243 (1965).
- [58] Carter B, *Commun. Math. Phys.* **17**, 233-238 (1970).
- [59] Thorne K S, *Phys. Rev.* **138**, B 251- B 266 (1965).
- [60] Einstein A, Rosen N, *J. Franklin Inst.* **223**, 43 (1937).
- [61] Fjällborg M, *Comm. Partial Diff. Eq.* **31**, 1381-1405 (2006).
- [62] Fjällborg M, *Class. Quant. Grav.* **24**, 2253-2270 (2007).
- [63] Schaeffer J, *Comm. Math. Phys.* **204**, 313-327 (1999).
- [64] Einstein A, *Ann. Math.* **40**, 922 (1939). Ver también, e.g., Bondi H, *Gen. Rel. Grav.* **2**, 321 (1971), Magli G *Class. Quantum Grav.* **14**, 1937 (1997), Gair J *Class. Quantum Grav.* **18**, 4897 (2001), para trabajos más recientes sobre el modelo de Einstein y más referencias.
- [65] Berezin V, Okhrimenko M, *Class. Quantum Grav.* **18**, 2195 (2001).
- [66] Evans A E, *Gen. Rel. Grav.* **8**, 155 (1977).
- [67] Barkov M V, Belinski V A, Bisnovatyi-Kogan G S, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **95**, 371, (2002).
- [68] Ver, por ejemplo, Lobo F S N, Crawford P, *Class. Quantum Grav.* **22**, 4869 (2005), y referencias allí citadas.
- [69] Andreasson H, *On static shells and the Buchdahl inequality for the spherically symmetric Einstein-Vlasov system*, [arXiv:gr-qc/0605151v1].
- [70] Comer G L and Katz J, *Class. Quant. Grav.* **10**, 1751 (1993).
- [71] Andreasson H, *Commun. Math. Phys.* **274**, 409-425 (2007).
- [72] Stoyca H, Tye S-H H, Wasserman I, *Phys Lett. B* **482**, 205-212 (2000).
- [73] Davis A-C, Davis S C, Perkins W B, Vernon I R, *Phys. Lett. B* **504**, 254 (2001)
- [74] Komatsu E, *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192**, 18 (2011).

- [75] Lovelock D, *J. Math. Phys.* **12**, 498 (1971).
- [76] Anderson E, Tavakol R, *JCAP* **0510**, 017 (2005).
- [77] Christodoulou D, “The formation of shocks in 3-dimensional fluids”, *European Mathematical Society* (2007).
- [78] Shapiro S L, Teukolsky S A, *Phys. Rev Lett.* **66**, 994 (1991).
- [79] Thorne K S, *Commun. Astrophys. Space Sci.* **2**, 191 (1970).
- [80] Echeverria F, *Phys. Rev. D* **47**, 2271–2282 (1993).
- [81] Goncalves S M C V, *Phys. Rev. D* **65**, 084045 (2002).
- [82] Wang A, *Phys. Rev. D* **72**, 108501 (2005).
- [83] Gleiser R J, *Phys. Rev. D* **65**, 068501 (2002).
- [84] Hamity V H, Cécere M A, Barraco D E, *Gen. Relativ. Gravit.* **41**, 2657 (2009).
- [85] Agradecemos a O. Reula por discusiones útiles en este punto.
- [86] Nakao K I, Ida D, Kurita Y, *Phys. Rev. D* **77**, 044021 (2008).
- [87] Nollert H P, *Class. Quant. Grav.* **16**, R159-R216 (1999).
- [88] Nakao K I, Kurita Y, *Dynamical instability in a relativistic cylindrical shell composed of counter rotating particles* [arXiv:gr-qc/1112.4252] (2011).
- [89] Agradecemos a R. Geroch por discusiones útiles en este punto.
- [90] Nakao K I, Harada T, Kurita Y, Morisawa Y, *Prog. Theor. Phys.* **117**, 75-102 (2007); **122**, 521-541 (2009).
- [91] Ichiki K, Nakamura K, *Phys. Rev. D* **70**, 064017 (2004).
- [92] Kodama H, Ishibashi A, Seto O, *Phys. Rev. D* **62**, 064022 (2000).
- [93] Anderson E, Tavakol R, *PDE system approach to large extra dimensions* [arXiv:gr-qc/0309063] (2003).
- [94] Musgrave P, Lake K, *Class. Quant. Grav.* **13**, 1885-1900 (1996).