

Propagación de fotones en Gravedad Cuántica.

Por: Lic. MARÍA FLORENCIA PARISI

Presentado ante la FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA
como parte de los requerimientos para la obtención del grado de
Doctora en Física de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

MARZO, 2007

©FaMAF-UNC 2007

Director: DR. CARLOS NICOLÁS KOZAMEH

RESUMEN

Algunos modelos que describen la interacción entre los campos gravitatorio y electromagnético cuánticos predicen una violación de la Invariancia Lorentz y una relación de dispersión diferente de la estándar, dando lugar a efectos sobre la propagación de la luz inducidos por Gravedad Cuántica que podrían ser medidos con la tecnología actual. Datos observacionales de radiación electromagnética proveniente de fuentes cosmológicas, sin embargo, establecen cotas muy restrictivas a estos modelos y parecen apoyar la conservación de la Invariancia Lorentz de la teoría.

La pregunta natural que surge entonces es si esta simetría se viola realmente en una Teoría Cuántica de la Gravedad. En esta Tesis reexaminamos la formulación de Gravedad Cuántica de Lazos y analizamos las suposiciones de partida del formalismo que, si bien podrían parecer naturales a primera vista, podrían no ser ciertas en la teoría final. En particular, se estudian las consecuencias sobre la propagación de los fotones de reemplazar, en la aproximación semiclásica, la suposición hecha en publicaciones anteriores de que el potencial de Maxwell y el campo eléctrico son variables conjugadas por la interpretación geométrica de que el tensor electromagnético es la curvatura de la conexión de Maxwell. Se analizan asimismo las ecuaciones efectivas de campo que resultan de esta hipótesis en la aproximación semiclásica, lo que permite estudiar la propagación tanto en un espacio-tiempo cuántico de fondo plano como en una geometría curva arbitraria, así como también los efectos de tener en cuenta la reacción en la métrica debido a la radiación. En particular, para un espacio plano la nueva elección de variables conjugadas resulta, contrariamente a lo predicho por los modelos anteriores en los que la formulación conduce a la ruptura de Invariancia Lorentz, en un formalismo que preserva esta simetría conciliando así las observaciones con la teoría.

Palabras Claves: Gravedad Cuántica de Lazos, Cuantización Canónica de campos, Fotones, Teoría de Einstein-Maxwell.

Números Pacs: 04.60.-m, 04.60.Ds, 04.60.Pp, 04.40.Nr, 11.10.Ef.

ABSTRACT

Some models that describe the interaction between the quantum gravitational and electromagnetic fields predict a violation of Lorentz Invariance and a non-standard dispersion relation, resulting in Quantum Gravity induced effects on the propagation of light that could be detected with the current technology. Observational data of electromagnetic radiation coming from cosmological sources, however, put sever bounds to these models and seem to support the Lorentz Invariance of the Theory.

The natural question arising is if this symmetry is really broken in a Quantum Theory of Gravity. In this Thesis we reexamine the Loop Quantum Gravity formalism and analyze the initial assumptions made in the formulation that, although may seem natural at first sight, might not be true in the final Theory. In particular, we study the consequences on the propagation of photons of replacing, in the semiclassical approximation, the assumption made in previous works that the Maxwell potential and the electric field are canonically conjugated variables, by the geometrical interpretation that the electromagnetic tensor is the curvature of the Maxwell connection. We analyze, likewise, the effective equations that result form this hypothesis in the semiclassical approximation, which allows us to study light propagation both on a flat quantum background spacetime and on a curved arbitrary geometry, including the case where backreaction effects on the metric are taken into account. In particular, for a flat background, the new choice of canonical variables result, contrary to the predictions of previews models where the formulation lead to Lorentz Invariance violation, in a formalism that preserves this symmetry concealing in this way observations with theory.

Key Words: Loop Quantum Gravity, Field Canonical Quantization, Photons, Einstein-Maxwell Theory.

Pacs Numbers: 04.60.-m, 04.60.Ds, 04.60.Pp, 04.40.Nr, 11.10.Ef.

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer al Dr. Carlos Kozameh, quien posibilitó realizar mi anhelo de investigar en Relatividad General. Fueron sus estímulos e ideas los que posibilitaron la realización de esta tesis.

También quisiera agradecer a mis padres y a mi hermano, por su incondicional apoyo, y por haber incentivado siempre mi amor a la ciencia haciendo lo imposible para que yo pudiese estar donde estoy.

Este trabajo tampoco hubiese sido posible sin las becas de postgrado otorgadas por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la U.N.C, SeCyT-UNC, y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET.

Agradezco también a la FaMAF, por haberme permitido utilizar dicho lugar de trabajo para la elaboración de esta tesis, y en particular al grupo de Relatividad y Gravitación, por permitirme disfrutar de las charlas de grupo y dejarme así, adentrarme en su manera de pensar sobre física, así como por la valiosísima ayuda brindada durante mi formación como investigadora.

Finalmente, quisiera agradecer profundamente a mis amigos, por el constante apoyo durante toda la carrera.

Índice general

Introducción	vii
1. Fundamentos de Gravedad Cuántica	1
§1. Introducción	1
§2. Problemas que dificultan la Unificación	2
§3. Enfoques de GC	5
§3.1. Teorías de Cuerdas, Supercuerdas y Teoría M	5
§3.2. Gravedad Canónica	8
§3.3. Otros enfoques	10
§4. Generalidades de Gravedad Cuántica de Lazos	10
2. Gravedad Cuántica de Lazos y Propagación de Luz	13
§1. Introducción	13
§2. Teoría de Einstein-Maxwell y LQG	13
§2.1. Descripción clásica	14
§2.2. Cuantización	15
§3. Análisis Semiclásico	17
§4. Estados semiclásicos	18
§4.1. Estados Weave	20
§4.2. Estados Coherentes	22
§5. Regularización del operador Hamiltoniano	25
§6. El Hamiltoniano efectivo	30
3. Efectos debidos a Gravedad Cuántica en la propagación de la luz	35
§1. Introducción	35
§2. Efectos Medibles Debido a Gravedad Cuántica	36
§2.1. Retardo temporal	38
§2.2. Rotación del vector de polarización	39
§3. Ecuaciones Fenomenológicas Para la Propagación de la Luz	41
§3.1. Análisis en un sistema localmente Lorentz	42
§3.2. Ondas Planas	43

4. Invariancia Lorentz y la Aproximación Semiclásica de LQG	47
§1. Introducción	47
§2. Interacción entre los Campos Electromagnético y Gravitatorio	48
§3. El Hamiltoniano efectivo y las ecuaciones de campo	52
§3.1. La aproximación lineal	52
§3.2. Generalización a todo orden	54
§3.3. Extensión a casos más generales	58
5. LQG y Propagación de fotones en espacio curvo	65
§1. Introducción	65
§2. El Hamiltoniano efectivo de interacción en la aproximación semiclásica	66
§3. Las ecuaciones de campo	69
§4. Propagación de luz en un espacio FRW cuántico	71
§4.1. Soluciones en ondas planas	73
6. Invariancia Lorentz y efectos de Reacción de Radiación	79
§1. Introducción	79
§2. Propagación de fotones en presencia de reacción de radiación	80
§2.1. La métrica clásica	81
§2.2. El estado semiclásico	84
§3. Las ecuaciones de campo: propagación de fotones con backreaction .	85
7. Resumen y comentarios finales	89
Bibliografía	96

Introducción

Hoy en día, uno de los problemas más profundos en física teórica es armonizar la teoría de Relatividad General (RG), que describe la gravitación y que se aplica a un amplio rango de condiciones físicas, entre ellas estructuras en gran escala como estrellas y galaxias, con la mecánica cuántica, que describe las otras tres fuerzas fundamentales que actúan a escala microscópica. Ambas teorías han demostrado ser sumamente exitosas. En particular, la teoría cuántica, que nos permite entender las reacciones químicas y muchos otros fenómenos, ha conducido a aplicaciones de uso cotidiano en nuestras vidas, tales como transistores y lasers.

Por otro lado, en las décadas que siguieron a los descubrimientos de Einstein, se han registrado numerosas confirmaciones experimentales de RG. Sin embargo, aún resta la posibilidad de que no sea correcta a escalas muy pequeñas o bajo el régimen de campos gravitacionales muy intensos. En particular, es seguro que la teoría falla en las condiciones que se cree existieron inmediatamente después del big-bang, donde los efectos debidos a gravedad cuántica debieron ser importantes. De hecho, una de las mayores motivaciones para desarrollar una Teoría Cuántica de la Gravedad viene, precisamente, de cosmología y agujeros negros. Tal como demuestran los teoremas de singularidades y la consecuente falla de RG, una comprensión fundamental del universo temprano y las etapas finales de la evolución de un agujero negro, requiere una teoría que englobe a las anteriores.

Otra motivación importante es la unificación. El acoplamiento de la gravedad a todas las otras formas de energía hace necesario que la misma se implemente también dentro de un marco cuántico.

A lo largo de los años ha habido numerosos intentos de crear una teoría cuántica de la gravedad, que han conducido a varios formalismos tales como:

- Teoría de Cuerdas/Supercuerdas/Teorías M
- Supergravedad
- Ecuación de Wheeler-deWitt
- Gravedad Cuántica de Lazos

- Gravedad Cuántica Euclidea
- Geometrías no conmutativas
- Teorías Twistor
- Gravedad Discreta Lorentziana
- Gravedad Inducida de Sakharov
- Cálculo de Regge
- Métrica acústica y otros modelos análogos de gravedad

Si bien ha habido un progreso considerable en la cuantización de la gravedad, no existe aún un consenso general en la comunidad científica sobre la forma final que tendrá la Teoría Cuántica de la Relatividad General. Sin embargo, el estado de las investigaciones deja claro que no es posible formular una teoría completa sin un cambio fundamental en la manera en que estamos acostumbrados a pensar sobre el espacio-tiempo. Todos los formalismos propuestos sugieren que la unidades de longitud y tiempo de Planck definen una escala mínima y, ciertamente, se puede llegar a la misma conclusión usando argumentos bastante generales que se basan en el principio de incertidumbre de Heisenberg aplicado al campo métrico de RG.

La falta de acuerdo que hemos mencionado se debe, principalmente, a dos factores. Por un lado, es extremadamente difícil hacer predicciones concretas en estas teorías. Por otro, hasta hace muy poco, no existían datos experimentales que pudieran considerarse como evidencia directa o indirecta de efectos cuánticos. Esto último debido a que los apartamientos de los valores clásicos de RG predichos por las teorías vigentes son apreciables a energías cercanas a la energía de Planck ($\simeq 10^{19}$ GeV), varios órdenes de magnitud por encima de lo accesible en laboratorios, aún en los aceleradores de partículas más potentes.

Sin embargo, esta situación ha cambiado radicalmente en los últimos años. Hoy en día, gracias a los recientes desarrollos tecnológicos, podemos usar el universo mismo como laboratorio para probar las teorías propuestas:

- Existen aceleradores naturales en galaxias distantes que producen partículas con energías mucho mayores que las que estamos en condiciones de producir aún en los aceleradores más grandes construidos por el hombre. Algunos de estos rayos cósmicos de “ultra-energías” han sido observados llegando a nuestra atmósfera.

- Podemos detectar luz y partículas que han viajado por miles de millones de años luz a través del universo. Durante todo ese tiempo, efectos muy pequeños debidos a Gravedad Cuántica se amplifican por efecto acumulativo hasta el punto de ser detectables por instrumentos muy sensibles.

Los objetos más útiles cuando se trata de observar efectos de Gravedad Cuántica son las Explosiones de Rayos Gamma (GRB por sus siglas en inglés). Descubiertos accidentalmente en los 60s, estos “flashes” de luz de alta energía son considerados como testigos de los rincones más lejanos del universo y de los tiempos más antiguos. Cada GRB libera una energía extremadamente grande, y los satélites actuales detectan un promedio de dos por día.

Existen varios trabajos, que comenzaron con Amelino-Camelia y colaboradores que predicen que hay, en efecto, consecuencias observables debido a efectos de Gravedad Cuántica, causados por la dispersión de fotones por la estructura discreta del espacio-tiempo. Si bien los efectos predichos son muy pequeños, Amelino-Camelia *et al.* [1] destacaron que, de existir, serían detectables en experimentos que involucren rayos cósmicos y GRBs ya que, al recorrer distancias cosmológicas, los efectos cuánticos sobre la luz proveniente de estas fuentes se amplifican y son medibles.

Por otro lado, trabajos posteriores desarrollados por Rodolfo Gambini y Jorge Pullin obtuvieron resultados similares partiendo de un formalismo diferente [2]. Más precisamente, algunos modelos basados en la formulación de Gravedad Cuántica de lazos (LQG por sus siglas en inglés) que describen la interacción entre los campos de Maxwell y gravitacional predicen un rompimiento de la invariancia Lorentz a un nivel lineal en la aproximación semiclásica. Un aspecto común en estos modelos es una relación de dispersión distinta de la standard que muestra que el espacio-tiempo se comporta como un medio dispersivo con un índice de refracción dependiente de la frecuencia.

Existen dos efectos predichos que en principio podrían ser medidos con la tecnología actual. Uno de ellos es la dependencia de la velocidad de los fotones con su energía E , siendo el término correctivo del orden de E/E_p (con E_p la energía de Planck); fotones más energéticos viajarían más lento que los menos energéticos y habría, por lo tanto, un pequeño retardo temporal entre ellos al momento de llegar al observador. Para que esta diferencia de tiempos sea medible es necesario que la fuente se encuentre muy distante y que emita fotones de energías extremadamente altas, de ahí que los GRBs sean los candidatos naturales.

El segundo efecto predicho es una dependencia adicional de las velocidades de los fotones con su helicidad (violando paridad, además de la invariancia Lorentz):

fotones con helicidad positiva viajarían más lento que aquellos con helicidad negativa y, en consecuencia, la dirección de polarización de radiación electromagnética linealmente polarizada (consistente en la combinación de fotones con helicidad positiva y negativa) puede rotar un ángulo de hasta 2π después de recorrer una distancia (pequeña comparada con distancias cosmológicas) dependiente de la energía. El efecto neto en un paquete de onda inicialmente polarizado en forma lineal, con un espectro continuo de energías (proveniente, por ejemplo, de una fuente cosmológica que emita radiación de sincrotron) sería una pérdida total de la polarización al llegar al observador.

Sin embargo, observaciones recientes establecen límites muy severos a estos modelos y ponen en duda su validez, ya que son consistentes con la invariancia Lorentz. Esta falta de evidencia observacional lleva a cuestionarse si necesariamente la invariancia se romperá en la teoría de Gravedad Cuántica. Responder a esta pregunta es el objetivo principal de esta tesis.

Para enfrentar el desafío que presenta la Gravedad Cuántica debemos estar abiertos a nuevos principios e ideas ya que, si bien se espera que algunas propiedades de la teoría clásica se mantengan cuando se promueven los campos a operadores cuánticos, es posible que algunos de los aspectos que parecen más intuitivos deban abandonarse. Dado que la evidencia observacional parece apoyar la invariancia Lorentz, reexaminamos en esta tesis los modelos canónicos y analizamos las suposiciones que se introducen ab initio en la construcción que, aunque parezcan naturales a primera vista, puedan ser falsas en la teoría final. Más precisamente, hacemos una revisión del Hamiltoniano efectivo que describe la interacción entre los campos gravitatorio y electromagnético en la aproximación semiclásica, y probamos que es posible preservar la invariancia en los modelos existentes si tenemos en cuenta las propiedades geométricas del campo de Maxwell, i. e., que el operador asociado al campo electromagnético es la curvatura de la conexión de Maxwell cuántica.

La revisión que acabamos de mencionar corresponde a la propagación de radiación electromagnética en un background cuántico plano y no tiene en cuenta los términos de reacción de radiación en la métrica; es decir, se probó que al ignorar tales términos la discretización del espacio de Minkowski no rompe la invariancia Lorentz. Una pregunta que surge naturalmente es si la invariancia se verá afectada si consideramos un background curvo arbitrario, o si consideramos efectos debido a la reacción de radiación. Es también objetivo de esta tesis responder esta pregunta dentro del marco de la formulación canónica de gravedad. Para ello se extendió el formalismo utilizado para incluir espacios curvos y se obtuvieron

las ecuaciones para el campo electromagnético en la aproximación semiclásica de Gravedad Cuántica de Lazos. Bajo las mismas suposiciones hechas anteriormente, es decir, que el campo electromagnético está dado por la curvatura de la conexión de Maxwell, estas ecuaciones ya no conservan la invariancia. La generalización a espacios curvos descripta puede asimismo aplicarse al caso que tiene en cuenta los efectos debidos a reacción de radiación en la métrica. Para ello se calculó el primer término perturbativo no trivial correspondiente al acoplamiento de los campos en la teoría de Einstein-Maxwell, para luego construir los estados semiclásicos asociados y obtener así las ecuaciones modificadas de Maxwell en presencia de este “backreaction”.

Organización de la Tesis

El Capítulo 1 es una introducción al campo de la Gravedad Cuántica (GC). En él planteamos el problema de la cuantización de la Gravedad, junto con la dificultades que se presentan cuando se trata de fundir la teoría de la Relatividad General con la mecánica cuántica. Asimismo hacemos una breve descripción de los distintos modelos propuestos en la literatura, haciendo especial énfasis en el formalismo de Gravedad Cuántica de Lazos (LQG) ya que las investigaciones que dieron lugar a esta tesis se desarrollaron dentro de este marco.

En el Capítulo 2 nos concentramos en el formalismo de LQG acoplado al campo electromagnético, sobre el cual se basan los capítulos subsiguientes. Introducimos las principales ideas detrás del programa de cuantización canónica en las variables de Ashtekar y describimos el proceso de regularización del vínculo Hamiltoniano para la teoría de Einstein-Maxwell. Construimos además en este capítulo la aproximación semiclásica del formalismo desarrollado. Para ello describimos el espacio de estados semiclásicos y el Hamiltoniano efectivo correspondiente se define como el valor de expectación del vínculo Hamiltoniano regularizado en estos estados.

En el Capítulo 3 veremos que las ecuaciones semiclásicas de campo derivadas del Hamiltoniano efectivo y obtenidas en trabajos previos permiten predecir efectos medibles en la propagación de la luz en un espacio tiempo de fondo plano inducidos por Gravedad Cuántica, si se considera que el campo eléctrico es el momento canónicamente conjugado al potencial de Maxwell. Analizamos además los efectos que podrían surgir de la cuantización del campo gravitatorio en términos puramente fenomenológicos mediante la propuesta de ecuaciones efectivas y estudiamos la factibilidad de observación de los mismos y sus implicancias.

Dada la falta de evidencia observacional de estos efectos, hacemos una revisión en el Capítulo 4 del Hamiltoniano efectivo de interacción entre los campos electromagnético y gravitatorio. En particular, reemplazamos la suposición de que el potencial vector y el campo eléctrico son variables canónicamente conjugadas por una diferente: que el campo de Maxwell es la curvatura del potencial. Si asumimos esto, las ecuaciones de campo que se derivan resultan invariantes Lorentz. Si bien los cálculos se hacen inicialmente a nivel lineal, resulta fácil extender los resultados a todo orden en el parámetro perturbativo, así como a casos más generales de interacción.

Hasta ahora todos los cálculos descriptos se desarrollaron considerando una métrica de fondo plana. En el capítulo 5 estudiamos la invariancia Lorentz del campo electromagnético por efectos de gravedad cuántica, pero considerando la propagación en un background curvo arbitrario. Obtenemos el Hamiltoniano efectivo de interacción y derivamos las correspondientes ecuaciones de campo. Usamos además estas ecuaciones para estudiar, como ejemplo particular, los posibles efectos debido a Gravedad Cuántica sobre la propagación de ondas electromagnéticas en un espacio de Friedman-Robertson-Walker con secciones espaciales planas.

Por otro lado, no hemos tenido en cuenta, hasta el momento, los términos de reacción de radiación en la métrica. Hemos analizado cómo afecta el espacio-tiempo cuántico al campo electromagnético pero hemos ignorado cómo este último afecta, a su vez, la geometría del espacio-tiempo. Estudiamos en el capítulo 6 los efectos debido a este backreaction resolviendo en forma perturbativa las ecuaciones acopladas de Einstein-Maxwell y construyendo formalmente los estados semiclásicos que se adaptan al problema, para finalmente tomar valor de expectación del vínculo Hamiltoniano y derivar las ecuaciones efectivas de campo.

Finalmente, en el Capítulo 7, hacemos un resumen y desarrollamos conclusiones generales de lo tratado en esta tesis.

Capítulo 1

Fundamentos de Gravedad Cuántica

§1. Introducción

El problema cuando se trata de unir RG y mecánica cuántica en una teoría consistente es que las dos partes parecen ser incompatibles. Esta incompatibilidad radica, principalmente, en que las suposiciones que ambas teorías hacen son completamente diferentes y las vías más obvias de combinarlas y que han resultado tan efectivos en otras teorías de campos cuánticos (como, por ejemplo, electrodinámica cuántica) se encuentran rápidamente con serias dificultades.

Otro factor que dificulta la cuantización de la gravedad es que las energías y condiciones a las que los efectos debidos a Gravedad Cuántica (GC) serían importantes son prácticamente imposibles de acceder en un experimento de laboratorio, por lo que es extremadamente difícil contar con observaciones que puedan dar una idea de cómo resolver el problema.

Además de estas dificultades existen otras inconsistencias que dificultan la fusión de ambas teorías. A lo largo de los últimos años se han desarrollado diversos formalismos que tratan de resolverlas pero no existe aún una teoría completa que describa de forma satisfactoria la microestructura del espacio-tiempo. Enumeraremos en este capítulo los principales problemas que enfrenta la cuantización de la RG y describiremos brevemente y sin entrar en detalles técnicos los enfoques más populares desarrollados hasta el momento.

§2. Problemas que dificultan la Unificación

La mayor dificultad que enfrenta la unificación de RG con mecánica cuántica es que los puntos de partida de ambas teorías son radicalmente diferentes.

Por un lado, la idea fundamental de la RG es que modela a la gravedad como un espacio-tiempo cuya curvatura está determinada por la distribución de masa, es decir, no hay un espacio-tiempo de background fijo como sucede en la mecánica Newtoniana o en relatividad especial; la geometría del espacio es dinámica: la curvatura (el tensor de Einstein en un miembro) es debida a la presencia de masa y otras formas de energía (el tensor energía-impulso en el otro miembro).

Por otro lado, la teoría cuántica está formulada desde el principio sobre una estructura de background fijo (no dinámico). En particular, la Teoría de Campos Cuántica (TCC) describe campos de partículas embebidos en el espacio-tiempo plano de relatividad especial, mientras que la Teoría de Campos en espacios curvos, aunque no es de carácter cuántico, ha probado que algunas de las suposiciones de TCC no se pueden extender de manera natural a RG.

Las vías mas obvias de combinar las dos teorías (tal como tratar a las gravedad simplemente como otro campo de partículas) se encuentran rapidamente con problemas de renormalización, en contraste con, por ejemplo, electrodinámica cuántica. La no renormalizabilidad de las interacciones gravitatorias conducen a las consecuente falla de los métodos perturbativos que han resultado tan efectivos en otras teorías de campos cuánticos.

Más precisamente, cuando se trata de desarrollar teorías cuánticas de campos los métodos usualmente usados son dos: teoría perturbativa y teoría de campos en espacios curvos. Los procesos considerados en ambos casos son dispersiones entre partículas donde se consideran estados que asintóticamente tienden a los estados libres antes y después de la interacción. El operador que da la amplitud de probabilidad de transición se expande formalmente como serie de potencias, pero la serie resulta, generalmente, divergente. Si la teoría es renormalizable, las divergencias se pueden manejar y se “fuerza” a la teoría a converger. Este método ha dado resultados más que satisfactorios en el estudio de la interacción electrodébil, sin embargo se aplica sólo a campos cuánticos libres en un background Minkowski.

Para un background general el análisis se complica bastante, pero aún así ha sido posible para los investigadores comprender los procesos de scattering entre partículas elementales en espacio-tiempos arbitrarios siempre que se desprecie el “backreaction” de la materia en la geometría y que la constante de acoplamiento entre las interacciones no-gravitatorias sea pequeña. De este modo las ecuaciones de Einstein se pueden resolver en forma aproximada ignorando los términos de materia y se tiene una teoría de campos cuántica perturbativa en espacios curvos.

Sin embargo, los dos formalismos descriptos dejan de funcionar si el campo gravitatorio (y por lo tanto el espacio-tiempo) se vuelve dinámico, como en Relatividad General, y no hay una métrica de background.

Otro factor que dificulta el desarrollo de Gravedad Cuántica es que las escalas a las cuales los efectos cuánticos serían apreciables están dadas por la longitud de Planck ℓ_P ($\simeq 1,62 \times 10^{-33}$ cm), el tiempo de Planck ($\simeq 5,4 \times 10^{-44}$ s), y la energía de Planck ($\simeq 1,22 \times 10^{19}$ GeV), i.e., las energías y condiciones a las que estos efectos serían importantes son prácticamente imposibles de acceder en un experimento de laboratorio. Por lo tanto, es extremadamente difícil contar con observaciones que puedan dar idea de cómo combinar las teorías.

Existen otros numerosos motivos por los cuales se hace difícil desarrollar una teoría completa y consistente de GC, entre ellos:

1) *Inconsistencia por la reacción de materia*

No se puede ignorar el backreaction en la geometría debido a la presencia de materia, consecuencia de las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}[g]$$

Dado que la materia está sujeta a los principios de la mecánica cuántica, el tensor energía impulso $T_{\alpha\beta}[g]$ debe tratarse como operador. Una posibilidad es conservar una geometría clásica manteniendo el carácter cuántico de la materia reemplazando $T_{\alpha\beta}[g]$ por su valor de expectación $\langle \hat{T}_{\alpha\beta}[\eta] \rangle$ en un estado de vacío de Minkowski. Sin embargo, la solución de esta ecuación nos daría $g \neq \eta$, que debería reinsertarse en la definición del valor de expectación de vacío, etc. El problema es que la iteración resultante generalmente no converge y el procedimiento descrito es inconsistente. Conclusión: mantener la geometría clásica no es posible y es necesario cuantizar también el campo gravitatorio. Eso conduce a las *Ecuaciones de Einstein Cuánticas*¹

$$\hat{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\hat{R}\hat{g}_{\alpha\beta} = \kappa\hat{T}_{\alpha\beta}[\hat{g}]$$

¹en este punto estas ecuaciones son puramente formales y para que tengan sentido debe definirse el espacio de Hilbert apropiado.

2) *Inconsistencias inherentes a RG*

Aún a nivel clásico (antes de la cuantización) existen teoremas en RG que predicen singularidades del espacio-tiempo tales como el big bang o agujeros negros, donde la teoría se desmorona. En una teoría fundamental, como se espera que sea GC, no debería haber cabida para ese tipo de problemas.

3) *Inconsistencias inherentes a mecánica cuántica*

Como hemos mencionado, TCC perturbativa en espacios curvos tiene sus propios problemas debido a las divergencias UV, que se pueden resolver solamente aplicando un procedimiento de renormalización formal orden a orden. Además, las energías de vacío (usualmente infinitas) y que se desprecian en esos procedimientos podrían tener un efecto de backreaction grande.

Un punto a destacar es que, dado que RG posee una escala de longitud fundamental (ℓ_P), se ha argumentado que una teoría de GC debería resultar finita automáticamente, ya que la gravedad proporciona de manera natural el cut-off para pequeñas distancias.

4) *Inconsistencia de geometría cuántica perturbativa*

Si se prueban los métodos de TCC en espacios curvos para el campo gravitatorio escribiendo el tensor métrico como $g = \eta + h$ (donde h es una perturbación de la métrica η de Minkowski), se obtiene una serie formal infinita con radio de convergencia finito, que pierde sentido si las fluctuaciones son grandes. Si bien es sabido que esta teoría es no-renormalizable, existía la esperanza de que pudieran producirse cancelaciones que resultaran en una teoría finita. Sin embargo, hay trabajos (por ejemplo [3]) que demuestran lo contrario. Si bien no existe una prueba definitiva, se cree que no existe un enfoque perturbativo de Gravedad Cuántica.

5) *El problema del tiempo*

Todos los enfoques que se basan en gravedad canónica deben enfrentarse con el “problema del tiempo”, que proviene de la invariancia ante difeomorfismos de RG: para preservar esta simetría y hacer la teoría independiente de la elección de coordenadas, la foliación del espacio-tiempo debería incluir, inevitablemente, al tiempo del mismo modo que al espacio. En la formulación canónica de RG, la invariancia ante difeomorfismos se refleja en los vínculos y las dificultades que estos acarrear constituyen lo que se ha llamado el problema del tiempo.

Históricamente, ha habido varias reacciones ante estas aparentes inconsistencias. Algunos científicos creen que la independencia con respecto al background es fundamental y que la mecánica cuántica se debe generalizar a enfoques donde no hay un tiempo especificado a priori, mientras que otros piensan que para obtener una teoría cuántica de la gravedad se debe considerar un punto de vista radicalmente diferente del espacio y el tiempo, y que la geometría tal como la conocemos sólo surgiría en un límite semiclásico. Los dos intentos más populares de unificar la gravedad con la mecánica cuántica (Teoría de Cuerdas y Gravedad Cuántica de lazos), si bien tienen orígenes muy diferentes, pertenecen a este último grupo. Sin embargo, existen otros numerosos intentos de cuantizar el campo gravitatorio que dieron lugar a diversos formalismos, de los que daremos una breve descripción en la siguiente sección.

§3. Enfoques de GC

§3.1. Teorías de Cuerdas, Supercuerdas y Teoría M

El primer progreso significativo en el área de GC, hecho por físicos particularistas, fue el descubrimiento de una nueva forma de simetría llamada supersimetría. Se demostró que si las simetrías del espacio-tiempo se extienden de manera de incluir supersimetría, entonces es necesario considerar campos de materia y variables suplementarias además de la métrica. La formulación resultante aplicada a la gravedad dio lugar a lo que se llamó teoría de “supergravedad”, en la que, sorprendentemente, los campos adicionales permitieron cancelar muchas de las divergencias que aparecían en la gravedad cuántica perturbativa, hecho que llevó a pensar que el formalismo sería completamente renormalizable. Sin embargo, luego de largos cálculos esta esperanza se desvaneció.

Un punto importante de mencionar es que la teoría de supergravedad funciona mejor en un espacio de diez dimensiones. Este hecho motivó el resurgimiento de las teorías de Kaluza-Klein.

Poco después Green y Schwarz [4] notaron que una teoría que originalmente había estudiado la fuerza nuclear fuerte se tornó más interesante como teoría de la gravedad. Este formalismo se basa en el hecho de que la teoría de Relatividad General clásica se comporta, bajo ciertas circunstancias, como un campo sin masa de spin dos que se propaga en un espacio Minkowskiano. De esta manera surgieron las teorías de cuerdas, que se iniciaron como una generalización de la Teoría Cuántica de Campos donde las partículas puntuales se reemplazaron por objetos unidimen-

sionales extendidos, llamados cuerdas, que se propagan en un background fijo.

Las cuerdas pueden ser cerradas o abiertas y poseen una tensión característica y por lo tanto un espectro vibracional. Los distintos modos de vibración corresponden a distintas partículas. Así, aunque la teorías de Cuerdas tiene sus orígenes en el estudio del confinamiento de quarks y no en Gravedad Cuántica, pronto se descubrió que el espectro de cuerdas contiene al gravitón, y que la “condensación” de ciertos modos es equivalente a la modificación del background original.

La teoría de Cuerdas es el único enfoque consistente de carácter perturbativo de GC conocido hasta el momento que tiene buenas perspectivas de unificar todos los tipos de interacciones. Como hemos mencionado, no es una teoría de campos en el sentido usual. Originariamente, empezó como una teoría de campos 2-dimensional embebida en una variedad (M, g) pseudo-Riemanniana D-dimensional de signatura Lorentziana que juega el rol de espacio-tiempo físico. El Lagrangeano de la teoría está definido para las variables embebidas X y, si se perturba la métrica de modo que $g(X) = \eta + h(X)$ y se mantienen sólo los órdenes más bajos en X , se obtiene una teoría de campos libres que es consistente sólo para ciertos valores de D.

Aún más, si se incorporan términos de orden más alto en $h(X)$ en la acción (suficientes para obtener correcciones de un sólo lazo) se encuentra que la teoría cuántica resultante es consistente sólo si la métrica de fondo satisface las ecuaciones de Einstein hasta correcciones por lazos de orden más alto. Esto es de suma importancia ya que es un indicativo de que la acción efectiva para la aproximación de bajas energías en D dimensiones es la Teoría de Einstein más correcciones. La teoría resultante tiene la ventaja de que, por lo menos para algunos tipos de cuerdas, es perturbativamente renormalizable hasta orden dos, y posiblemente hasta todo orden.

La combinación de la Teoría de Cuerdas con supergravedad originó la Teoría de Supercuerdas, la cual dio lugar a algunos descubrimientos notables. La principal desventaja ahora es que hay un gran número de maneras diferentes de aplicar la Teoría de Kaluza-Klein a la formulación de supercuerdas y el formalismo perturbativo hace imposible determinar cuál es la correcta. Sin embargo, el reciente descubrimiento de algunas relaciones de dualidad (transformaciones que conectan las diferentes teorías de cuerdas a supergravedad en once dimensiones) motivó la suposición de que todas las teorías de cuerdas son en realidad distintos aspectos de una única teoría, a la que se llamó “Teoría M”.

Los logros más notables de estas teorías son los siguientes:

- Arrojan, hasta cierto grado de aproximación, predicciones bastante precisas de efectos debido a gravedad cuántica, incluyendo el scattering de gravitones

con otras partículas.

- Para ciertos tipos muy específicos de agujeros negros, predicen resultados que concuerdan con las predicciones de Bekenstein y Hawking.
- Unifica satisfactoriamente la gravedad con las otras fuerzas.

Si bien estos hechos representan importantes progresos hay algunos factores desfavorables que cabe mencionar:

1) *Dependencia en la métrica de fondo*

El principal problema de las Teorías de Cuerdas es que no son independientes del background, lo que contradice una de las premisas más fundamentales de RG. Por ejemplo, el formalismo más estudiado dentro de esta área se puede ver como un campo libre 2-dimensional que se propaga en un espacio de Minkowski de dimensión 10 (más correcciones perturbativas). Esta es una descripción fuertemente dependiente del background y no permite considerar cuestiones básicas como la acción del grupo de difeomorfismos en 10 dimensiones o la reacción de la geometría debido a materia (backreaction). Si bien las teorías de Cuerdas perturbativas describen satisfactoriamente procesos de scattering del gravitón en un espacio-tiempo de fondo, muchos problemas requieren una descripción no perturbativa (por ejemplo, en procesos donde no se puede ignorar el backreaction, tal como el scattering en agujeros negros).

2) *Degeneración del vacío*

Dimensiones mayores a 4 no son las habituales en física por lo que se argumenta que las dimensiones extras están compactificadas, aunque no se conoce el mecanismo responsable de esta “compactificación espontánea”. Existe un número sorprendentemente grande de formas distintas y consistentes de compactificar estas dimensiones extras cada una de las cuales posee a su vez del orden de 10^2 parámetros libres (como el valor de expectación de vacío del campo de Higgs en el modelo standard). Por ejemplo, para cada compactificación de cada una de las cinco teorías desarrolladas para $D = 10$, y para cada elección de los parámetros, se obtiene una teoría efectiva de bajas energías diferente. Claramente, tales ambigüedades no deberían presentarse en un formalismo capaz de unificar todas las interacciones.

3) *Comprobación fenomenológica*

No existe, hasta el momento, una prueba concluyente de que alguna de las compactificaciones posibles conduzca a una teoría efectiva de bajas energías que resulte consistente con los datos experimentales existentes para el modelo standard.

§3.2. Gravedad Canónica

Mientras las Teorías de Cuerdas tratan al espacio-tiempo curvo de RG como una modificación de una geometría de background fija por un campo sin masa de spin dos, la formulación Canónica de Gravedad Cuántica (CQG por sus siglas en inglés) trata la métrica del espacio-tiempo mismo como un campo e intenta cuantizarlo directamente. De acuerdo con este enfoque, se debe formular a RG en una forma canónica o Hamiltoniana. En esta descripción se elige un conjunto de variables para el espacio de configuraciones y para los momentos canónicamente conjugados, que describen el estado del sistema a un dado tiempo. La evolución temporal de estas variables se obtiene a partir de las ecuaciones de Hamilton. La cuantización consiste entonces en promover las variables de configuración y los momentos conjugados a operadores en un espacio de estados cuánticos (espacio de Hilbert) sujetos a relaciones de conmutación análogas a los corchetes de Poisson clásicos.

Los primeros intentos de cuantizar RG dentro de este marco se debieron a Dirac, Wheeler, DeWitt y otros en los 50s y los 60s, y trabajaban con la elección más natural de variables para el espacio de configuraciones [5]: la 3-métrica inducida en una foliación arbitraria de hipersuperficies espaciales (que permite separar el espacio del tiempo). La idea es aplicar la transformada de Legendre a la acción de Einstein-Hilbert para obtener el Hamiltoniano. Los momentos conjugados (directamente relacionados con la curvatura extrínseca de la hipersuperficie) codifican, efectivamente, evolución temporal de la 3-métrica.

Este enfoque, conocido como geometrodinámica, al igual que cualquier otra formulación canónica de RG, se enfrenta con el problema de los vínculos, que provienen de la invariancia ante difeomorfismos de la teoría. El procedimiento que generalmente se adopta en las teorías de gauge es tratar los vínculos antes de la cuantización de manera que sólo los grados de libertad reales se promuevan a operadores (es decir, fijar un gauge). Sin embargo, no existe la seguridad de que la teoría cuántica resultante pueda ser independiente de la elección de gauge, por lo que el enfoque mas conveniente (y el más aceptado) en gravedad canónica es imponer los vínculos después de la cuantización tratándolos también como ope-

radores cuánticos \hat{A} , e imponiendo la condición de que los estados “físicos” ψ sean soluciones de la ecuación $\hat{A}\psi = 0$. De esta manera, el “Hamiltoniano” resultante H se convierte en lo que se ha llamado vínculo Hamiltoniano \hat{H} , que se trata de una densidad Hamiltoniana restringida a anularse por las ecuaciones de movimiento. Formalmente,

$$\hat{H}\psi = 0. \quad (1.1)$$

Esta es la famosa Ecuación de Wheeler-DeWitt o **Ecuación de Einstein Cuántica**.

En geometrodinámica, sin embargo, las ecuaciones de vínculo son muy difíciles de resolver. El operador de Wheeler-DeWitt es un operador diferencial de segundo orden de forma no polinomial y con coeficientes que ni siquiera son analíticos en estas variables de configuración, y por lo tanto el espacio de soluciones es extremadamente complicado de obtener.

Este problema fue resuelto por un formalismo iniciado por Ashtekar y colaboradores en 1986, que reformula las ecuaciones de Einstein en términos de nuevas variables: la conexión (en lugar de la 3-métrica) y su momento conjugado, lo que facilita notablemente la tarea de resolver los vínculos. Poco después se encontraron soluciones a las ecuaciones derivadas de esta teoría, la cual se conoce ahora como **Gravedad Cuántica de Lazos** (LQG por sus siglas en inglés). El aspecto más destacable de esta formulación de Gravedad Cuántica es que a escalas muy pequeñas, el espacio-tiempo no está descrito por una variedad suave y continua sino por elementos discretos; existe una unidad básica de medida de longitud: la longitud de Planck. Queda claro entonces que para entender Gravedad Cuántica es preciso comprender la estructura del espacio-tiempo a escalas de Planck. No entraremos, sin embargo, en detalles sobre este formalismo ya que, por ser el marco dentro del cual se desarrolló este trabajo de tesis, merece especial atención y abordaremos el tema en la siguiente sección.

LQG es un enfoque muy diferente a la Teoría de Cuerdas; no son necesarias dimensiones extras o campos auxiliares para cancelar las divergencias y no introduce ninguna modificación a los principios de las teorías relativista y cuántica, que han sido ampliamente verificadas por experimentos. Cabe destacar además que la única diferencia con respecto a la formulación canónica natural de Wheeler-DeWitt consiste en la introducción de las variables de Ashtekar.

Asimismo, los dos enfoques también comparten aspectos similares: ambos están formulados en términos de simetrías basadas en estructuras tipo lazos. Incluso se suele especular que ambos formalismos son dos aspectos diferentes de una sola teoría subyacente.

§3.3. Otros enfoques

Existen otros muchos intentos de cuantizar la gravedad. Algunos de ellos cuestionan desde un principio la teoría de campos usual desde un nivel elemental: si las ideas sobre la estructura discreta del espacio-tiempo son ciertas, entonces no tiene sentido partir de una variedad diferenciable, sino de algún espacio intrínsecamente discreto. Por ejemplo, en 1947, Synder encaró el problema tratando las coordenadas del espacio-tiempo como operadores con relaciones de conmutación no triviales. Si bien la formulación original no fue exitosa, trabajos recientes en el área de grupos cuánticos han hecho resurgir este tipo de enfoques, que también conducen a una interpretación discreta del espacio-tiempo. A este grupo pertenecen, por ejemplo, las teorías de **geometrías no conmutativas** [6], en las cuales el espacio-tiempo mismo es tratado como secundario al algebra de campos mas generales con productos no conmutativos, y las **Teorías Twistor**, desarrolladas por Roger Penrose [7].

Estos enfoques son las reformulaciones más radicales de la física fundamental, pero son también los más difíciles de entender ya que la conexión con la teoría de campos es muy remota y por lo tanto son, en algún sentido, menos observables. Es por este motivo que estos programas han recibido menos atención y no están tan desarrollados.

§4. Generalidades de Gravedad Cuántica de Lazos

En esta sección nos concentramos en la teoría de LQG ya que los capítulos siguientes y los resultados presentados en esta tesis están basados en este formalismo.

LQG es un intento de definir una teoría matemáticamente rigurosa, no perturbativa e independiente de la métrica de fondo, de Gravedad Cuántica en cuatro dimensiones y se trata de un enfoque minimalista, en el sentido de que simplemente analiza las consecuencias lógicas de combinar los principios básicos de RG con los de mecánica cuántica [8, 9, 10].

Más específicamente, LQG provee un marco general para teorías de campo invariantes ante difeomorfismos, dentro del cual se incluye la cuantización de la teoría de RG de Einstein (contando con los formalismos tanto canónicos como de integral de caminos). En particular, en el formalismo canónico, dado un campo clásico cuyo espacio de configuraciones incluye el espacio de conexiones y cuyas invariancias de gauge incluye las invariancias ante difeomorfismos y las correspon-

dientes invariancias locales, LQG proporciona, en una forma cerrada, un método que resulta en la construcción de un espacio de Hilbert constituido por estados invariantes de gauge y ante difeomorfismos.

En esta construcción, el espacio de Hilbert cinemático es una representación de un conjunto de operadores básicos completo en el sentido de que coordinatiza el espacio de fase (el álgebra de lazos). En este espacio los difeomorfismos espaciales están representados por operadores unitarios y el espacio cociente nos proporciona el espacio de estados invariantes ante difeomorfismos, junto con su producto interno.

Este procedimiento se puede aplicar a cualquier teoría de la clase descripta, incluyendo RG acoplada a un campo de materia arbitraria (incluyendo spinores, campos de gauge y antisimétricos en cualquier dimensión, así como algunas extensiones tales como supergravedad). Esta tesis se concentrará en el caso de gravedad acoplada a electromagnetismo.

Asimismo se han desarrollado, dentro de la formulación de LQG, procedimientos de regularización que resultan en operadores covariantemente invariantes finitos que representan ciertas funciones clásicas en el espacio de fase. Este procedimiento de regularización consiste en un “point splitting” modificado de manera que quede representado en forma covariante. La idea principal del método se trata de extraer “partes finitas” que, dado que no dependen del regularizador, resultan a su vez independientes de cualquier métrica de fondo que se haya introducido.

Dentro del conjunto de operadores que se pueden regularizar mediante este procedimiento se encuentran el área y el volumen, que resultan tener un espectro finito y calculable [11, 12, 13]. El vínculo Hamiltoniano está también dentro de los operadores que se han construido usando estos métodos de regularización y se ha encontrado, además, un espacio de soluciones de dimensión infinita.

En el capítulo siguiente aplicaremos el método descrito al vínculo Hamiltoniano asociado a la Teoría de Einstein-Maxwell.

Capítulo 2

Gravedad Cuántica de Lazos y Propagación de Luz

§1. Introducción

Como hemos mencionado anteriormente, varios trabajos recientes han sugerido que algunos efectos debido a GC podrían ser medibles ([1]-[17]). Entre ellos se destaca la posibilidad de observar efectos en la propagación de la luz a través de distancias cosmológicas debido a que los tiempos de llegada de fotones, así como su estado de polarización, podría depender de la energía. Esta especulación se basa en que algunos modelos predicen que (en la aproximación semiclásica) la relación de dispersión para fotones es modificada por el campo gravitatorio cuántico, que resulta en un espacio-tiempo que se comporta como un medio birrefringente con índice de refracción dependiente de la frecuencia [2, 18, 19].

Motivados por estas posibilidades presentamos en este capítulo un repaso de algunos aspectos básicos de la Teoría de Einstein-Maxwell dentro del marco de LQG y analizamos el operador Hamiltoniano de interacción para los campos gravitatorio y electromagnético, así como el procedimiento de regularización propuesto por T. Thiemann. Incluimos también el análisis semiclásico del formalismo describiendo los estados semiclásicos propuestos en la literatura, así como el Hamiltoniano efectivo de interacción, definido como el valor de expectación del vínculo Hamiltoniano regularizado en estos estados.

§2. Teoría de Einstein-Maxwell y LQG

Presentaremos en esta sección un repaso de la formulación canónica de RG acoplada al campo electromagnético en variables que se basan en las variables de Ashtekar. El procedimiento de cuantización consiste entonces en promover las va-

riables de configuración y los momentos a operadores en un espacio de estados cuánticos (espacio de Hilbert) sujetos a relaciones de conmutación analogas a los corchetes de Poisson clásicos. La teoría descrita recibe el nombre de LQG o geometría cuántica y, dentro de los principales resultados de este enfoque, encontramos operadores geométricos bien definidos con un espectro discreto.

§2.1. Descripción clásica

Partimos de un espacio-tiempo en el que introducimos una foliación de hipersuperficies espaciales. De este modo, asumimos que la variedad M tiene topología $\Sigma \times \mathbb{R}$, con Σ una 3-variedad Riemanniana, en la que definimos una co-triada e_a^i (con a un índice tensorial e i un índice $SU(2)$). La 3-métrica inducida está dada entonces por $q_{ab} = \delta_{ij} e_a^i e_b^j$. Una elección natural de variables canónicas para el sector de gravedad está dada por los campos (K_a^i, E_j^b) definidos por

$$K_{ab} = \text{sgn}[\det(e_c^j)] K_a^i e_b^j \delta_{ij}, \quad (2.1)$$

$$E_i^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k, \quad (2.2)$$

donde K_{ab} es la curvatura extrínseca de Σ . Sin embargo, con esta elección del par conjugado el vínculo Hamiltoniano (Hamiltoniano de Wheeler-DeWitt) tiene una forma muy complicada (no polinómica) y el espacio de soluciones es sumamente complejo de obtener. Para introducir un esquema de cuantización es conveniente, sin embargo, contar con una teoría formulada en forma polinómica. En un famoso trabajo de A. Ashtekar que sirvió de base a innumerables investigaciones posteriores, se mostró que esto es posible si se efectúa una transformación canónica en el espacio de fase gravitacional. Si bien las nuevas variables simplifican notablemente el Hamiltoniano, hay dos factores en su contra: por un lado, el Hamiltoniano es polinómico sólo si se reescala por $\sqrt{\det q}$ (por lo que el vínculo Hamiltoniano tiene peso de densidad 2 y la regularización covariante se hace imposible), mientras que por otro estas variables toman valores complejos lo que hace que el grupo de gauge no sea compacto, condición necesaria para que se puedan aplicar las teorías de gauge conocidas. Estos problemas fueron resueltos por una modificación introducida a las variables por T. Thiemann, en ellas el Hamiltoniano resulta bien definido y libre de anomalías ya que el formalismo permitió implementar un procedimiento de regularización covariante e invariante ante difeomorfismos para la densidad Hamiltoniana, proporcionando una versión cuántica de la teoría tanto en el caso de gravedad pura como en el acoplamiento con otros campos [20]. Asimismo es posible obtener un espacio de Hilbert que incorpora condiciones realistas. Describiremos este enfoque para el caso de interés, es decir, gravedad acoplada al

campo electromagnético.

Consideremos un sistema de Einstein-Maxwell y sea F_{ab} el tensor electromagnético definido como la curvatura del potencial \underline{A}_a ¹, cuyo grupo de gauge es $U(1)$. Si \underline{E}^a y \underline{B}^a son las densidades vectoriales correspondientes a los campos eléctrico y magnético asociados a \underline{A}_a respectivamente, entonces una elección posible del par canónico para el sector de Maxwell está dado por $(\underline{A}_a, \underline{E}^a)$ y la contribución al vínculo Hamiltoniano correspondiente está dada por

$$H_{\text{EB}} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x N \frac{q_{ab}}{\sqrt{\det q}} [\underline{E}^a \underline{E}^b + \underline{B}^a \underline{B}^b], \quad (2.3)$$

con N la función lapse de la foliación. Para el sector gravitatorio, emplearemos las variables de Thiemann que se basan en las de Ashtekar: sea Γ_a^i la conexión libre de torsión compatible con e_a^i , entonces el par canónico es $(A_a^i = \Gamma_a^i + K_a^i, E_i^a)$, donde K_a^i y E_i^a están definidos en (2.1) y (2.2). La porción gravitatoria del Hamiltoniano es entonces

$$H_G = \int_{\Sigma} d^3x N \frac{1}{\sqrt{\det q}} \text{tr} (2 [K_a, K_b] - F_{ab}) [E_a, E_b], \quad (2.4)$$

El espacio de configuración clásico es el espacio cociente \mathcal{A}/\mathcal{G} de ambas conexiones (modulo sus transformaciones de gauge). Con esto queda completa la descripción del espacio de fase clásico de la teoría.

§2.2. Cuantización

Una vez definido el espacio de fase clásico estamos en condiciones de introducir un esquema de cuantización. El procedimiento canónico consiste en promover las variables de configuración y los momentos conjugados a operadores cuánticos en un espacio de Hilbert, e imponer relaciones de conmutación canónicas entre ellos.

Como primer paso en este esquema es necesario definir el espacio de Hilbert sobre el que actuarán los operadores asociados a cantidades físicas. Dado que las medidas que definen el producto escalar necesario para obtener el espacio de Hilbert están concentradas en campos de tipo distribucional que no pertenecen al espacio de fase clásico, es necesario extender éste último [21]. El espacio resultante $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ consiste, en cierto modo, en el límite de espacios de configuraciones compuestas por redes en teorías de gauge, para todos los tipos de redes posibles. De esta manera, se usan las estructuras geométricas en el espacio de redes para implementar las correspondientes estructuras en $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ y definir un procedimiento independiente

¹Denotamos las variables correspondientes al campo de Maxwell con una línea debajo para evitar confusión con las variables asociadas al sector de gravedad.

del background que conduce a la construcción de las medidas relevantes, el espacio de Hilbert y los operadores regularizados.

Ignorando inicialmente los vínculos, se puede construir un espacio de Hilbert auxiliar \mathcal{H}_{aux} de manera que el conjunto de funciones reales en el espacio de fase esté representado por operadores autoadjuntos. Los operadores asociados a los vínculos debido a la invariancia ante difeomorfismos están bien definidos en \mathcal{H}_{aux} , donde existe un subespacio denso que cuenta con un conjunto completo de estados que son soluciones de los vínculos en cuestión. Además es posible obtener un espacio de Hilbert para estos estados que cuenta con un producto interno donde los observables reales están representados por operadores autoadjuntos.

Aún más, \mathcal{H}_{aux} admite una base en términos de los llamados estados de redes de spin. Una red de spin es un triplete $(\alpha, \vec{j}, \vec{p})$, que consiste de un gráfico α , un *color* definido por un conjunto (j_1, \dots, j_n) de representaciones irreducibles de $SU(2)$ (donde j_i corresponde al borde i de α) y un conjunto de contractores (p_1, \dots, p_m) ; mientras que un estado de red de spin es una función C^∞ que depende de la conexión en un número finito de bordes del gráfico en $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, y que se construye a partir de una red de spin de acuerdo a

$$T_{\alpha, \vec{j}, \vec{c}}[A] := [\otimes_{i=1}^n j_i(h_{e_i}(A)) \bullet \otimes_{k=1}^m p_k], \quad (2.5)$$

para todo $A \in \overline{\mathcal{A}}$. En esta ecuación $h_{e_i}(A)$ es un elemento de $SU(2)$ asociado al borde e_i y el “ \bullet ” significa que, en cada vértice del gráfico, los índices superiores de las matrices correspondientes a los bordes entrantes y los inferiores de las correspondientes a los salientes saturan todos los índices del contractor p_k .

La construcción del espacio de Hilbert \mathcal{H}_{aux} que hemos descrito es válida para cualquier teoría de conexiones covariante invariante ante difeomorfismos cuyo grupo de gauge sea compacto ($SU(2)$ para el caso de gravedad, $U(1)$ para Maxwell). Puesto que estamos interesados en el acoplamiento de los campos gravitatorio y electromagnético, es natural generalizar el espacio de Hilbert de manera que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{aux}}^{SU(2)} \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}}^{U(1)} \quad (2.6)$$

Asimismo, los estados del sistema completo están dados por el producto directo de los estados correspondiente a cada sector y se denotan por $T_{\alpha, [\vec{j}, \vec{p}], [\vec{c}, \vec{q}]}[A, \underline{A}]$ con \vec{c}, \vec{q} el color y contractores asociados al grupo $U(1)$ del campo electromagnético, respectivamente.

§3. Análisis Semiclásico

El siguiente paso lógico a seguir en un programa de cuantización es investigar la aproximación semiclásica de la teoría y verificar que el operador asociado al Hamiltoniano se reduce al Hamiltoniano clásico en el límite. La idea es construir estados semiclásicos con respecto a los cuales los grados de libertad gravitacionales se comportan de manera “aproximadamente clásica”, con fluctuaciones cuánticas pequeñas. Más precisamente, estos estados deben satisfacer las propiedades usuales que se espera de un estado semiclásico:

- i)* Máximo pronunciado tanto en la geometría como en la conexión.
- ii)* Valores de expectación bien definidos de los operadores asociados a cantidades físicas.
- iii)* Existencia de una expansión en términos de la razón entre escalas características del problema y la longitud de Planck ℓ_P .

En el caso en que nos concentraremos en la primera parte de esta tesis utilizaremos estados que describen un espacio plano continuo en Σ a escalas mucho mayores que la longitud de Planck, pero no necesariamente a distancias comparables a ella. En la segunda parte, extenderemos el formalismo para incluir estados que describan un espacio curvo arbitrario en Σ para longitudes mucho mayores que ℓ_P .

Además de los estados puramente gravitacionales estamos interesados en considerar otros campos, tal como el campo electromagnético. Para nuestro análisis es suficiente requerir las mismas condiciones de máximo pronunciado y valores de expectación bien definidos extendidos de manera de incluir el campo de Maxwell. Los estados considerados describirán, entonces, un campo electromagnético suave embebido en un espacio de fondo.

El Hamiltoniano efectivo de interacción dentro de esta aproximación se define como el valor de expectación del operador cuántico asociado en los estados semiclásicos descriptos (implementando un procedimiento de regularización adecuado). Si los estados satisfacen la propiedad mencionada en *iii)*, el Hamiltoniano efectivo resultante queda expresado como una serie en potencias de la longitud de Planck cuyo orden cero es el Hamiltoniano clásico de interacción para los campos electromagnético y gravitatorio, mientras que los demás términos corresponden a las correcciones por efectos debidos a gravedad cuántica. En particular, si conservamos sólo el primer orden en ℓ_P estamos en el caso de la aproximación lineal que ha sido ampliamente estudiada en la literatura.

§4. Estados semiclásicos

Cuantizar una teoría significa, en términos generales, construir un homomorfismo de la forma

$$\Lambda : (\mathcal{M}, \{.,.\}, \mathcal{O}, \overline{(\cdot)}) \rightarrow (\mathcal{H}, \frac{[\cdot,\cdot]}{i\hbar}, \widehat{\mathcal{O}}, (\cdot)^\dagger) \quad (2.7)$$

donde $(\mathcal{M}, \{.,.\})$ representa la variedad simpléctica de la teoría clásica con corchete de Poisson $\{.,.\}$ que actúa sobre funciones complejas. Al promover estas funciones a operadores cuánticos el homomorfismo Λ mapea una subálgebra $\mathcal{O} \subset C^\infty(\mathcal{M})$ del álgebra de Poisson en una subálgebra $\widehat{\mathcal{O}}$ del álgebra de operadores lineales $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de manera que los corchetes de Poisson pasan a ser conmutadores (al menos para el caso de bosones, que es el que nos interesa) y tomar complejo conjugado se traduce en tomar el operador adjunto.

Un conjunto de estados $\{|\psi_m\rangle\}_{m \in \mathcal{M}} \in \mathcal{H}$ es semiclásico para la subálgebra de operadores $\widehat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si, para todo par de operadores $\widehat{O}, \widehat{O}' \in \widehat{\mathcal{O}}$ y un elemento genérico $m \in \mathcal{M}$, satisface las siguientes propiedades [22]:

i) Valor de expectación del operador centrado en el valor clásico

$$\left| \frac{\langle \psi_m | \widehat{O} | \psi_m \rangle}{O(m)} - 1 \right| \ll 1 \quad (2.8)$$

ii) Propiedad de Ehrenfest

$$\left| \frac{\langle \psi_m | [\widehat{O}, \widehat{O}'] | \psi_m \rangle}{i\hbar \{O, O'\}(m)} - 1 \right| \ll 1 \quad (2.9)$$

iii) Fluctuaciones pequeñas

$$\left| \frac{\langle \psi_m | \widehat{O}^2 | \psi_m \rangle}{\langle \psi_m | \widehat{O} | \psi_m \rangle^2} - 1 \right| \ll 1 \quad (2.10)$$

Si se cumplen estas tres propiedades se dice que $(\mathcal{M}, \{.,.\}, \mathcal{O}, \overline{(\cdot)})$ es el límite clásico de $(\mathcal{H}, \frac{[\cdot,\cdot]}{i\hbar}, \widehat{\mathcal{O}}, (\cdot)^\dagger)$ y los estados $|\psi_m\rangle$ son llamados estados semiclásicos de la teoría cuántica. Notar que esta definición tiene sentido sólo cuando ninguno de los denominadores se anula, por lo que se puede aplicar como mucho a puntos m genéricos del espacio de fase, pero que sin embargo es suficientemente buena para fijar ideas y para la mayoría de las aplicaciones prácticas.

Existen varios tipos de estados semiclásicos que se proponen en la literatura, sin embargo dos de ellos han merecido la mayor atención y se han convertido en los más populares.

Los primeros estados propuestos describen un espacio continuo sobre la hipersuperficie Σ (cuya geometría está determinada por la 3-métrica q_{ab}) a escalas grandes comparadas con ℓ_P , pero evidencian la estructura cuántica del espacio a distancias del orden de ℓ_P . Este tipo de estados reciben el nombre de “estados weave” y se construyen considerando una colección de lazos circulares de dimensiones Plankianas orientados al azar. Los estados weave tienen una longitud característica \mathcal{L} (supuesta grande en comparación con ℓ_P) tal que, para longitudes menores que \mathcal{L} se pone de manifiesto la naturaleza cuántica del espacio-tiempo, mientras que para distancias mucho mayores que \mathcal{L} se recupera la geometría clásica. Es decir, estos estados, llamados también “weave geométricos” [23, 24, 25], se comportan de manera que $\langle \Delta | \hat{q}_{ab} | \Delta \rangle = q_{ab} + O\left(\frac{\ell_P}{\mathcal{L}}\right)$. El problema que enfrentan los estados weave geométricos es que aproximan una métrica específica (ya sea plana o curva) pero no la conexión. Esto fue resuelto definiendo los llamados estados “weave de conexión” [26], que apuntan a aproximar operadores cinemáticos asociados a holonomías. Finalmente es posible obtener cierta independencia de los estados geométricos con respecto a los gráficos mediante un promedio estadístico que resulta en los estados “weave estadísticos” [27, 28].

La segunda propuesta de estados semiclásicos se basa en la construcción de estados coherentes para GC ([29]-[32]), que satisfacen todas las propiedades deseadas (*i*, *ii* y *iii*) así como la minimización del principio de incertidumbre de Heisenberg y la posibilidad de construir operadores creación y aniquilación con los correspondientes teoremas de Ehrenfest. Las excitaciones de estos estados se pueden interpretar como los análogos de los estados de gravitones. Se puede, además, combinar este método con el promedio estadístico para eliminar la dependencia con los gráficos.

A continuación daremos una breve descripción de los estados mencionados, comentando la idea principal detrás de la construcción de cada uno pero sin entrar en los detalles técnicos, ya que para los cálculos subsiguientes sólo tendremos en cuenta las propiedades básicas que tales estados deben satisfacer.

§4.1. Estados Weave

a) *Estados Weave geométricos*

Sea q_{ab} una 3-métrica de fondo en Σ . La idea es construir un estado que tenga fluctuaciones pequeñas alrededor de esta geometría clásica. Usando esta métrica se pueden introducir lazos circulares suaves que no se interseccionen (pero que pueden estar entrelazados) con orientación aleatoria de separación media y radio medio dados por ϵ (medido según q_{ab}). La unión de estos lazos forma un gráfico (o enlazado) α sin intersecciones. Consideremos el estado dado por el producto de las trazas de las holonomías a lo largo de estos lazos. La razón para considerar que los lazos no se interseccionan es que, si esto se cumple, entonces los estados construidos según el procedimiento descrito son aniquilados por el vínculo Hamiltoniano ([23]-[25]).

Dada cualquier superficie S en Σ se puede probar que este estado es un autoestado del operador asociado al área $\widehat{\text{Ar}}(S)$ con autovalor $\ell_p^2 \sqrt{3} N(S, q, \epsilon)/4$, donde $N(S, q, \epsilon)$ denota el número de intersecciones (llamadas vértices del estado) del enlazado α con la superficie S . Si q no varía mucho en una escala del orden de ϵ , entonces este número está dado, aproximadamente, por $\text{Ar}_q(S)/\epsilon^2$ (con $\text{Ar}_q(S)$ el área clásica de S medida según q) y el autovalor es proporcional a $\text{Ar}_q(S)\ell_p^2/\epsilon^2$. Esto significa que no es posible tomar gráficos arbitrariamente finos (con $\epsilon \rightarrow 0$) ya que el autovalor correspondiente al área diverge. Para obtener el autovalor correcto es necesario que $\epsilon \approx \ell_p$, es decir, que las dimensiones de los lazos deben ser del orden de la longitud de Planck.

Si bien los cálculos fueron hechos para métricas q que son aproximadamente planas, J. Zegwaard consideró estados weave para un background curvo genérico [24], los que requieren una adaptación a la geometría local en la manera de introducir el enlazado. Zegwaard muestra en [24] además, y como ejemplo particular, la construcción explícita de estados weave que aproximan la métrica de Schwarzschild.

b) *Estados Weave de conexión*

A diferencia de los estados weave geométricos, estos estados han sido construidos explícitamente sólo para el caso en que la geometría clásica es plana. Dado que para un elemento arbitrario h de $SU(2)$ se cumple $\text{Tr}(h) \leq 2$ (con la igualdad sólo para el caso $h = 1$), la función que mapea $h \mapsto 2 - \text{tr}(h)$ es no negativa. Si consideramos un lazo γ y $A \in \overline{\mathcal{A}}$, entonces $A \mapsto e^{-\beta[2 - \text{tr}(A(\gamma))]}$

tiene un pico pronunciado en aquellos $A \in \overline{\mathcal{A}}$ que satisfacen $A(\gamma) = 0$, es decir, en una conexión plana. Se pueden considerar entonces el producto de todas las funciones de esta clase que están concentradas en las conexiones distribucionales que, restringidas a los bordes del gráfico α , resultan planas [26]. Originalmente no se incluyeron topologías no compactas y por lo tanto gráficos infinitos (con un número infinito de lazos) no entraban dentro de la construcción, sin embargo esto se puede resolver definiendo un nuevo espacio de Hilbert mediante la construcción de una funcional lineal positiva en el álgebra de los operadores locales usando estados formales. En este espacio es posible calcular el valor de expectación a lo largo de los gráficos de varios operadores, entre ellos los operadores de holonomías, que resultan en valores cercanos a los valores clásicos.

c) *Estados Weave estadísticos*

Tanto la construcción de los estados geométricos como la correspondiente a los de conexión trabajan con una elección arbitraria pero fija del gráfico α . Esto no resulta natural ya que permite demasiada arbitrariedad, además del hecho de que si α no está orientado de manera “suficientemente aleatoria”, entonces los valores de expectación del operador de área en un estado weave geométrico para una métrica plana no resulta invariante ante rotaciones.

Para resolver este problema, Bombelli [27] aplicó a los estados weave geométricos una construcción (bastante usada en mecánica estadística [28]), que describimos a continuación.

Dada una métrica de fondo q , una hipersuperficie compacta σ y un parámetro de densidad λ es posible construir un subconjunto $\Gamma(q, \lambda)$ de gráficos que son analíticos a trozos. Un miembro de este subconjunto (denotado por α_{x_1, \dots, x_N}) se obtiene a partir de N puntos x_1, \dots, x_N en σ y la métrica q usando nociones básicas como distancias geodésicas.

Dado un coloreado y un conjunto de contractores (denotados por \vec{j} y \vec{p} , respectivamente) podemos construir una red $s_{x_1, \dots, x_N}(\vec{j}, \vec{p})$ donde asignamos el mismo color a cada borde y el mismo contractor a cada vértice. A partir de estas variables es posible construir el “operador densidad”

$$\hat{\rho}(q, \lambda, \vec{j}, \vec{p}) = \int_{\sigma^N} d\mu_q(x_1) \dots d\mu_q(x_N) T_{(s_{x_1, \dots, x_N}, \vec{j}, \vec{p})} < T_{(s_{x_1, \dots, x_N}, \vec{j}, \vec{p})} > \quad (2.11)$$

donde $d\mu_q(x) = \frac{\sqrt{\det(q)(x)} d^3x}{\text{Vol}_q(\sigma)}$ es una medida de probabilidad y $T_{(s_{x_1, \dots, x_N}, \vec{j}, \vec{p})}$ es un estado de red de spin del tipo de los definidos en la sección 2.

En rigor de verdad el operador (2.11) es un operador nulo ². Lo que ocurre es que, si bien para cualquier estado T_s el proyector $T_s < T_s | . >$ es un operador de tipo traza (unitaria, además), ésta no conmuta con la integral en (2.11). Sin embargo es posible definir una funcional lineal $\omega_{q,\lambda,\vec{j},\vec{p}}$ en el álgebra de los operadores lineales en el espacio de Hilbert según

$$\omega_{q,\lambda,\vec{j},\vec{p}}(\hat{O}) = \int_{\sigma^N} d\mu_q(x_1) \dots d\mu_q(x_N) < T_{(s_{x_1}, \dots, x_N, \vec{j}, \vec{p})} | \hat{O} | T_{(s_{x_1}, \dots, x_N, \vec{j}, \vec{p})} > \quad (2.12)$$

que sería igual a $\text{Tr}(\hat{\rho}(q, \lambda, \vec{j}, \vec{p}) \hat{O})$ si la traza y la integral conmutaran. Esta construcción permite entonces definir una nueva representación que depende de la estructura de fondo.

§4.2. Estados Coherentes

Los estados weave discutidos en la sección anterior son buenos candidatos para analizar la aproximación semiclásica de GC, sin embargo se podrían argumentar algunas objeciones como, por ejemplo, que aproximan la conexión (o la 3-métrica, dependiendo de si es un estado de conexión o geométrico) ó su canónico conju-gado, pero no ambos simultaneamente. Además, aún los weave estadísticos, seleccionan sólo cierta subclase arbitraria de gráficos. Existe otra propuesta de estados semiclásicos ([29]-[32]) que intenta evitar esta arbitrariedad así como aproximar simultáneamente la conexión y el campo eléctrico minimizando las fluctuaciones. La idea es construir *estados coherentes* para Gravedad Cuántica similares a los estados semiclásicos de la teoría de Maxwell libre. Estos estados, además de cumplir todas las condiciones necesarias para llamarse semiclásicos (i), ii) y iii)) mencionadas al principio de la sección 4, satisfacen algunas propiedades más.

Definición: Un conjunto de estados $\{|\psi_m\rangle\}_{m \in \mathcal{M}} \in \mathcal{H}$ se llama coherente para la subálgebra de operadores $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si para cada par $\hat{O}, \hat{O}' \in \hat{\mathcal{O}}$ y cualquier elemento genérico de \mathcal{M} se cumplen, además de i)-iii), las siguientes propiedades:

iv) *Condición de completitud*

La unidad se puede expresar como expansión de los estados $|\psi_m\rangle$ según

$$1_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{M}} d\nu(m) |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \quad (2.13)$$

para alguna medida ν en \mathcal{M} .

²puesto que para cualquier estado de red de spin se satisface $< T_{(s_{x_1}, \dots, x_N, \vec{j}, \vec{p})} | T_s > = \delta_{(s_{x_1}, \dots, x_N, \vec{j}, \vec{p}), s}$, lo que significa que $\alpha_{x_1, \dots, x_N} = \alpha(s)$. Sin embargo, el número de puntos que satisface esto es muy pequeño (con respecto a la medida considerada)

v) *Existencia del operador aniquilación*

Existe un sistema completo formado por operadores elementales \hat{g} (llamados de aniquilación) tales que

$$\hat{g}|\psi_m\rangle = g(m)|\psi_m\rangle \quad (2.14)$$

vi) *Minima incertidumbre*

Para los operadores autoadjuntos definidos a partir de los operadores creación y aniquilación de acuerdo a

$$\hat{x} = \frac{\hat{g} + \hat{g}^\dagger}{2}, \quad (2.15)$$

$$\hat{y} = \frac{\hat{g} - \hat{g}^\dagger}{2i}, \quad (2.16)$$

el principio de incertidumbre de Heisenberg se minimiza, es decir,

$$\langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle_m)^2 \rangle_m = \langle (\hat{y} - \langle \hat{y} \rangle_m)^2 \rangle_m = \frac{1}{2} | \langle [\hat{x}, \hat{y}] \rangle_m | \quad (2.17)$$

vii) *Estados centrados en los valores clásicos*

Para todo par $m, m' \in \mathcal{M}$, la función de “superposición”

$$m' \mapsto | \langle \psi_m | \psi_{m'} \rangle |^2 \quad (2.18)$$

está concentrada en una pequeña celda de volumen $\frac{1}{2} | \langle [\hat{p}, \hat{h}] \rangle_m |$ donde \hat{p} es un operador asociado a un momento canónico y \hat{h} a la variable de configuración correspondiente.

Las propiedades i)-vii) resumen todas las características que debe satisfacer un estado coherente.

El mecanismo de construcción de los estados coherentes para GC hace uso del concepto de “complexificador” [33] y se basa en un método conocido para generar estados coherentes para el oscilador armónico.

Supongamos que \mathcal{M} es un fibrado cotangente $T^*\mathcal{C}$ donde \mathcal{C} juega el rol de espacio de configuración con coordenadas locales q .

Definición: Un complexificador es una función suave C positiva definida en \mathcal{M} cuyo campo vectorial Hamiltoniano no se anula nunca en \mathcal{C} y tal que, para cada $q \in \mathcal{C}$, la función $p \mapsto C_q(p) = C(q, p)$ tiene un crecimiento más rápido que lineal

en $\|p\|_q$, donde p es un momento en la fibra y $\|\cdot\|_q$ alguna norma definida en $T_q^*(\mathcal{C})$.

La función C permite generar una *polarización compleja* de \mathcal{M} a partir de \mathcal{C} de la siguiente manera:

$$z(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \{q, C\}_{(n)}(m). \quad (2.19)$$

donde los corchetes de Poisson se definen según la relación de recurrencia $\{C, q\}_{(0)} = q$, $\{C, q\}_{(n+1)} = \{C, \{C, q\}_{(n)}\}$.

Si es posible invertir (2.19) para obtener m ($:= (q, p)$) como función de (z, \bar{z}) , entonces este par define coordenadas locales complejas en \mathcal{M} con la propiedad de que $\{z, z\} = \{\bar{z}, \bar{z}\} = 0$, mientras que $\{z, \bar{z}\}$ es necesariamente no nulo.

Podemos ahora aplicar el método de cuantización canónica de acuerdo al esquema descrito al principio de la sección 4, a la función z . Para ello asumiremos que el espacio de Hilbert puede representarse como un espacio de funciones de cuadrado integrable en una extensión $\bar{\mathcal{C}}$ (de tipo distribucional) de \mathcal{C} con respecto a una medida μ (esto es: $\mathcal{H} = L_2(\bar{\mathcal{C}}, d\mu)$). Además, puesto que C es una función positiva, resulta natural cuantizarla de manera que se promueve a un operador autoadjunto positivo definido. La versión cuántica de la variable z está dada entonces por:

$$\hat{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{[\hat{q}, \hat{C}]_{(n)}}{(i\hbar)^n} = e^{-\hat{C}/\hbar} \hat{q} e^{\hat{C}/\hbar} \quad (2.20)$$

El operador \hat{z} es llamado *operador aniquilación*.

Ahora bien, sea $q \mapsto \delta_{q'}(q)$ la distribución tipo δ de Dirac con respecto a la medida μ (de manera que $\int \delta_{q'} d\mu f = f(q')$ para toda función f). Es de notar que, si bien $\delta_{q'}$ no es de cuadrado integrable, puesto que C es positiva definida y depende de forma no trivial en los momentos (que se convierten en operadores de derivación funcional en la teoría cuántica), la cantidad

$$\psi_{q'}(q) := e^{-\hat{C}/\hbar} \delta_{q'} \quad (2.21)$$

define un estado coherente si es posible extender (2.21) de forma analítica a valores complejos z de q' . Es decir, el estado está dado por

$$\psi_m(q) := [\psi_{q'}(q)]_{q' \rightarrow z(m)} = [e^{-\hat{C}/\hbar} \delta_{q'}(q)]_{q' \rightarrow z(m)}, \quad (2.22)$$

el cual resulta automáticamente un autoestado del operador aniquilación \hat{z} con autovalor z (condición que debe cumplir un estado coherente, por v). Es posible

además probar que los estados ψ_m satisfacen todas las propiedades enumeradas (i)-vii)[32]:

- Están centrados en el valor clásico: el operador \hat{z} corresponde a la función $m \mapsto z(m)$, $m \in \mathcal{M}$.
- ψ_m , con $m \in \mathcal{M}$, son automáticamente estados de incertidumbre mínima para los operadores

$$\hat{x} := \frac{\hat{z} + \hat{z}^\dagger}{2}, \tag{2.23}$$

$$\hat{y} := \frac{\hat{z} - \hat{z}^\dagger}{2i}. \tag{2.24}$$

- La propiedad de Ehrenfest

$$\frac{\langle [\hat{x}, \hat{y}] \rangle_z}{i\hbar} = \{x, y\}(m) + \mathcal{O}(\hbar) \tag{2.25}$$

se sigue de implementar correctamente las relaciones de conmutación canónicas y las condiciones para los operadores adjuntos.

- Constituye una base completa.

En resumen, hemos estudiado en esta sección lo que se entiende por límite semiclassical de la teoría cuántica y hemos descripto los estados que hacen este límite posible³, junto con las propiedades básicas que se espera que satisfagan. En la siguiente sección enfocaremos nuestra atención en la regularización de operador Hamiltoniano para poder tomar luego valor de expectación del mismo en estados weave geométricos como los definidos arriba⁴, y obtener así la teoría efectiva que describe la interacción de los campos de Maxwell y gravitatorio.

§5. Regularización del operador Hamiltoniano

Por mucho tiempo ha existido en Teoría de Campos la intuición de que una vez cuantizado, el campo gravitacional actuará como regularizador natural de las Teorías de campos cuánticas de materia. El argumento sobre el que se basa esta

³Hemos incluido, por completitud, todos los estados semiclassicals construidos en la literatura, si bien sólo vamos a hacer uso de un tipo particular de tales estados.

⁴Elegimos estos estados y nos los weave de conexión (o los coherentes) ya que estos últimos aproximan la conexión (y su conjugado en el caso de los segundos) y, por razones que resultarán evidentes más adelante, en nuestro caso de interés es conveniente trabajar con estados semiclassicals que aproximen la 3-métrica q_{ab} .

especulación es que, dado que existe una escala de longitud fundamental (la escala de Planck $\ell_p = \sqrt{\hbar\kappa}$ donde κ es la constante de Newton), el campo gravitatorio sirve como “cut-off” ultravioleta.

T. Thiemann demostró hace algunos años que es posible concretar esta idea de forma precisa dentro del marco de cuantización canónica de gravedad Lorentziana 4-dimensional acoplada a materia, y desarrolló un procedimiento de regularización consistente para definir el vínculo Hamiltoniano de Relatividad General en \mathcal{H}_{aux} [20].

Esta propuesta se basa en la incorporación de una triangulación de la foliación de hipersuperficies espaciales Σ del espacio-tiempo $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, y en considerar al operador de volumen en Σ como un regularizador conveniente, ya que su acción sobre estados de redes de spin es finita. En el formalismo resultante es posible implementar esquemas de aproximación (que podrían ser necesarios para resolver la teoría) que ya no se tratan de series perturbativas formales sino de desarrollos con completo control de la convergencia.

Nos concentraremos a continuación en describir este procedimiento de regularización para la teoría de Einstein-Maxwell, lo cual nos permitirá tratar de forma natural la aproximación semiclásica que nos interesa.

Como ya hemos mencionado anteriormente, el Hamiltoniano efectivo de Maxwell se define como el valor de expectación del sector $U(1)$ del operador asociado al vínculo Hamiltoniano, con respecto a un estado semiclásico que denotaremos por $|\psi\rangle$.

Empecemos analizando la parte eléctrica $H_E = \int_{\Sigma} d^3x N(x) \frac{q_{ab}}{2\sqrt{\det(q)}} \underline{E}^a \underline{E}^b$. La siguiente identidad [34, 35] será fundamental para el desarrollo de los cálculos que haremos a continuación

$$\frac{1}{\kappa} \{A_a^i, V\} = \frac{\delta V}{\delta E_i^a} = 2 \text{sgn}(\det((e_b^j))) e_a^i, \quad (2.26)$$

donde $V = \int d^3x \sqrt{\det(q)}$ es el volumen total de la hipersuperficie ⁵.

Sea ϵ un parámetro pequeño y sea $\chi_{\epsilon}(x, y) = \prod_{a=1}^3 \theta(\epsilon/2 - |x^a - y^a|)$ la función característica de un cubo en Σ de volumen ϵ^3 en algunas coordenadas centrado en x . Notar que hemos introducido un sistema de coordenadas y por lo tanto hemos roto la invariancia ante difeomorfismos en este paso de la regularización. Esto no es preocupante mientras dicha invariancia se recupere al quitar el regularizador (que es ciertamente lo que sucede). Sea además $V(x, \epsilon) := \int d^3y \chi_{\epsilon}(x, y) \sqrt{\det(q)}$ el volumen de este cubo medido según q_{ab} . Luego, como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3} \chi_{\epsilon}(x, y) = \delta(x, y)$,

⁵Consideramos a las secciones Σ como superficies compactas de manera que esta integral resulte finita, sin embargo el formalismo puede extenderse asimismo al caso en que no lo son.

se cumple que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3} V(x, \epsilon) = \sqrt{\det(q)}(x)$. Se puede ver también fácilmente que para cada $\epsilon > 0$ tenemos $\delta V / \delta E_i^a(x) = \delta V(x, \epsilon) / \delta E_i^a(x)$.

El proceso de regularización que consideraremos se basa en el siguiente truco: sean f, g funciones integrables en Σ con respecto a la medida de Lebesgue. Entonces, $f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3} \int d^3 y f(y) \chi_\epsilon(x, y) =: \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3} f(x, \epsilon)$ y similarmente para g . Por lo tanto $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f(x, \epsilon) / g(y, \epsilon)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\{f(x, \epsilon) / \epsilon^3\} / \{g(y, \epsilon) / \epsilon^3\}] = f(x) / g(y)$, es decir, los dos factores singulares $1/\epsilon^3$ se cancelan en el cociente. Este tipo de procedimiento se denomina “point splitting”.

De esta manera, combinando todas estas relaciones con (2.26), podemos escribir la parte eléctrica del Hamiltoniano como

$$\begin{aligned}
 H_E &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3} \int_{\Sigma} d^3 x N(x) \frac{\{A_a^i(x), V\}}{2\sqrt[4]{\det(q)}(x)} \underline{E}^a(x) \int_{\Sigma} d^3 y \chi_\epsilon(x, y) \frac{\{A_b^i(y), V\}}{2\sqrt[4]{\det(q)}(y)} \underline{E}^b(y) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3} \int_{\Sigma} d^3 x N(x) \frac{\{A_a^i(x), V(x, \epsilon)\}}{2\sqrt[4]{\det(q)}(x)} \underline{E}^a(x) \int_{\Sigma} d^3 y \chi_\epsilon(x, y) \frac{\{A_b^i(y), V(y, \epsilon)\}}{2\sqrt[4]{\det(q)}(y)} \underline{E}^b(y) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3} \int_{\Sigma} d^3 x N(x) \frac{\{A_a^i(x), V(x, \epsilon)\}}{2\sqrt{\frac{1}{\epsilon^3} V(x, \epsilon)}} \underline{E}^a(x) \int_{\Sigma} d^3 y \chi_\epsilon(x, y) \frac{\{A_b^i(y), V(y, \epsilon)\}}{2\sqrt{\frac{1}{\epsilon^3} V(y, \epsilon)}} \underline{E}^b(y) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} d^3 x N(x) \frac{\{A_a^i(x), V(x, \epsilon)\}}{2\sqrt{V(x, \epsilon)}} \underline{E}^a(x) \int_{\Sigma} d^3 y \chi_\epsilon(x, y) \frac{\{A_b^i(y), V(y, \epsilon)\}}{2\sqrt{V(y, \epsilon)}} \underline{E}^b(y) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} d^3 x N(x) \{A_a^i(x), \sqrt{V(x, \epsilon)}\} \underline{E}^a(x) \int_{\Sigma} d^3 y \chi_\epsilon(x, y) \{A_b^i(y), \sqrt{V(y, \epsilon)}\} \underline{E}^b(y)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

lo que demuestra que podemos absorber el factor $1/\sqrt{\det q}$ (que de otro modo resultaría molesto) en el corchete de Poisson, con la desventaja, claro, de romper la invariancia de gauge a ϵ finito. Es de notar que la cancelación del factor $1/\epsilon^3$ fue posible sólo gracias a que el vínculo Hamiltoniano tiene densidad de peso uno.

Similarmente, para el término magnético

$$H_B = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} d^3 x N(x) \{A_a^i(x), \sqrt{V(x, \epsilon)}\} \underline{B}^a(x) \int_{\Sigma} d^3 y \chi_\epsilon(x, y) \{A_b^i(y), \sqrt{V(y, \epsilon)}\} \underline{B}^b(y).$$

El siguiente paso es introducir una triangulación de la hipersuperficie Σ en tetraedros Δ . Denotemos por $s_J(\Delta), s_K(\Delta), s_L(\Delta)$ los bordes de Δ con vértice común v y por F_{JK} una superficie paralela a la cara determinada por $s_J(\Delta), s_K(\Delta)$ que es transversal a $s_L(\Delta)$. Luego, la integral sobre Σ que aparece en (2.27) es simplemente la suma de las contribuciones debidas a cada tetraedro Δ , es decir

$$\begin{aligned}\Theta^i[f] &:= \int_{\Sigma} d^3x f(x) \underline{E}^a(x) \left\{ A_a^i(x), \sqrt{V(x, \epsilon)} \right\} \\ &= \sum_{\Delta} \int_{\Delta} d^3x f(x) \underline{E}^a(x) \left\{ A_a^i(x), \sqrt{V(x, \epsilon)} \right\}\end{aligned}\quad (2.28)$$

$$\Theta^i[f] =: \sum_{\Delta} \Theta_{\Delta}^i[f]. \quad (2.29)$$

Notar que, si denotamos por e la forma dual de \underline{E} , entonces podemos expresar $\Theta_{\Delta}^i[f]$ como:

$$\Theta_{\Delta}^i[f] = \int_{\Delta} f(x) e(x) \wedge \left\{ A^i(x), \sqrt{V(x, \epsilon)} \right\}. \quad (2.30)$$

Además, para una 2-superficie arbitraria S , $\Phi^E(S) := \int_S e$ es el flujo de \underline{E}^a a través de S . Por lo tanto, para tetraedros pequeños podemos considerar

$$\Phi^E(F_{JK}) \approx \frac{1}{2} \epsilon_{abc} s_J^b(\Delta) s_K^c(\Delta) \underline{E}^a, \quad (2.31)$$

con ϵ_{abc} el símbolo de Levi-Civita. Por otro lado, haciendo un desarrollo de $\underline{h}_s = e^{-i \int_0^1 dt \dot{s}^a(t) A_a(s(t))}$ para pequeños tetraedros (donde el punto denota derivada con respecto a t), se puede probar que

$$tr \left(\tau_i h_{s_L} \left\{ h_{s_L}^{-1}, \sqrt{V(x, \epsilon)} \right\} \right) \approx -\frac{1}{2} s_L^a(1) \left\{ A_a^i(s_L^{-1}(0)), \sqrt{V(x, \epsilon)} \right\}. \quad (2.32)$$

Combinando (2.31) y (2.32) obtenemos

$$\begin{aligned}& f(v) \epsilon^{JKL} \Phi^E(F_{JK}) tr \left(\tau^i h_{s_L(\Delta)} \left\{ h_{s_L(\Delta)}^{-1}, \sqrt{V(v(\Delta), \epsilon)} \right\} \right) \\ & \approx -\frac{1}{4} f(v) \epsilon^{JKL} \epsilon_{abc} s_J^b(\Delta) s_K^c(\Delta) \underline{E}^a s_L^d(\Delta) \left\{ A_d^i(s_L^{-1}(0)), \sqrt{V(x, \epsilon)} \right\} \\ & = -\frac{3!}{2} f(v) vol(\Delta) \underline{E}^a \left\{ A_a^i(s_L^{-1}(0)), \sqrt{V(x, \epsilon)} \right\} \\ & = -\frac{3!}{2} \int_{\Delta} f e \wedge \left\{ A^i(x), \sqrt{V(x, \epsilon)} \right\},\end{aligned}\quad (2.33)$$

y, por lo tanto

$$\Theta_{\Delta}^i[f] = -\frac{2}{3!} f(v) \epsilon^{JKL} \Phi^E(F_{JK}) tr \left(\tau^i h_{s_L(\Delta)} \left\{ h_{s_L(\Delta)}^{-1}, \sqrt{V(v(\Delta), \epsilon)} \right\} \right). \quad (2.34)$$

La porción eléctrica del Hamiltoniano está entonces dada por

$$H_E = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\Delta \Delta'} \Theta_{\Delta}^i[N] \Theta'_{\Delta'}^i[\chi]. \quad (2.35)$$

Para obtener la contrapartida cuántica de (2.35) debemos promover \underline{E}^a y $V(x, \epsilon)$ a operadores, reemplazar los corchetes de Poisson por conmutadores y adaptar la triangulación al gráfico α correspondiente al estado que se esté considerando. Esta adaptación es tal que, para cada vértice de α y cada triplete de bordes e, e', e'' , introducimos un tetraedro Δ cuyo punto base es el vértice $v(\Delta) = v$ y con segmentos $s_I(\Delta)$, $I = 1, 2, 3$ (suponemos que existe un mapa uno a uno entre $s(e), s(e'), s(e'')$ y $s_I(\Delta)$ y que, además, $\epsilon_{abc}\hat{s}_1^a\hat{s}_2^b\hat{s}_3^c \geq 0$). Podemos entonces formar un lazo dado por $\alpha_{IJ} := s_I \circ a_{IJ} \circ s_J^{-1}$ donde $a_{IJ}(\Delta)$ denota el arco de Δ que conecta los extremos de $s_I(\Delta)$ y $s_J(\Delta)$. Asimismo, llamamos F_{IJ} a la superficie generada por $s_I(\Delta)$ y $s_J(\Delta)$.

La idea es ahora aplicar el operador asociado a (2.35) al estado correspondiente al gráfico α . Al evaluar en la triangulación descrita sólo aquellos tetraedros Δ que tienen base $v(\Delta)$ que coincide con un vértice v del gráfico contribuyen (esto es debido a la presencia del operador de volumen en (2.35)) [34, 35] y la acción del operador regularizado queda entonces concentrado en los vértices del gráfico. Por lo tanto, en lo sucesivo, podemos reemplazar

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_\Delta^i[N] &= -\frac{2}{3!} \frac{1}{i\hbar} N(v(\Delta)) \epsilon^{JKL} \hat{\Phi}^E(F_{JK}) \text{tr} \left(\tau^i h_{s_L(\Delta)} \left[h_{s_L(\Delta)}^{-1}, \sqrt{\hat{V}(v(\Delta), \epsilon)} \right] \right) \\ \hat{\Theta}_{\Delta'}^i[\chi] &= -\frac{2}{3!} \frac{1}{i\hbar} \chi_\epsilon(v(\Delta), v(\Delta')) \epsilon^{MNP} \hat{\Phi}^E(F'_{MN}) \times \\ &\quad \times \text{tr} \left(\tau^i h_{s_P(\Delta')} \left[h_{s_P(\Delta')}^{-1}, \sqrt{\hat{V}(v(\Delta'), \epsilon)} \right] \right)\end{aligned}$$

Ahora bien, al tomar $\epsilon \rightarrow 0$, solamente contribuyen pares de tetraedros con $v(\Delta) = v(\Delta')$. Resumiendo, debemos sumar sólo sobre vértices del gráfico y, para cada vértice v , sobre tetraedros Δ tales que $v(\Delta) = v$, y el operador resultante se puede escribir como

$$\begin{aligned}H_E &= -\frac{1}{2\hbar^2} \sum_{v \in V(\gamma)} N(v) \left(\frac{2}{3!} \frac{8}{E(v)} \right)^2 \sum_{v(\Delta)=v(\Delta')=v} \times \\ &\quad \times \text{tr} \left(\tau^i h_{s_L(\Delta)} \left[h_{s_L(\Delta)}^{-1}, \sqrt{\hat{V}_v} \right] \right) \epsilon^{JKL} \hat{\Phi}^E(F_{JK}) \times \\ &\quad \times \text{tr} \left(\tau^i h_{s_P(\Delta')} \left[h_{s_P(\Delta')}^{-1}, \sqrt{\hat{V}_v} \right] \right) \epsilon^{MNP} \hat{\Phi}^E(F'_{MN}). \quad (2.36)\end{aligned}$$

donde $E(v) = n(v)(n(v) - 1)(n(v) - 2)/3!$ con $n(v)$ la valencia del vértice v .

Finalmente, es posible tratar de manera análoga (excepto por algunas pequeñas diferencias que pueden consultarse en [21]) la parte magnética del Hamiltoniano, de

modo que el operador regularizado asociado al Hamiltoniano de Maxwell completo se puede expresar como

$$\begin{aligned}
H_{EB} = & \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{v \in V(\gamma)} N(v) \left(\frac{2}{3!} \frac{8}{E(v)} \right)^2 \sum_{v(\Delta)=v(\Delta')=v} \times \\
& \times \text{tr} \left(\tau_i h_{s_L(\Delta)} \left[h_{s_L(\Delta)}^{-1}, \sqrt{\hat{V}_v} \right] \right) \text{tr} \left(\tau_i h_{s_P(\Delta')} \left[h_{s_P(\Delta')}^{-1}, \sqrt{\hat{V}_v} \right] \right) \\
& \times \epsilon^{JKL} \epsilon^{MNP} \left[\left(e^{-i\hat{\Phi}^B(F_{JK})} - 1 \right) \left(e^{-i\hat{\Phi}^B(F'_{MN})} - 1 \right) - \hat{\Phi}^E(F_{JK}) \hat{\Phi}^E(F'_{MN}) \right].
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Esto concluye el procedimiento de regularización del Hamiltoniano de Maxwell. Es de notar que el operador resultante es automáticamente finito gracias a la acción del operador de volumen y que el hecho de que tuviera peso de densidad uno resulta crucial (además del hecho de que sólo en ese caso el integrando resulta invariante ante difeomorfismos), ya que esto permitió cancelar las divergencias en cocientes en los que ambos factores divergían como $1/\epsilon^3$.

§6. El Hamiltoniano efectivo

Estamos interesados ahora en la aproximación semiclásica de la teoría de Einstein-Maxwell, para lo cual es necesario definir un Hamiltoniano efectivo a partir del cual se deriven las ecuaciones semiclásicas de propagación para el campo electromagnético.

El Hamiltoniano efectivo se obtiene calculando el valor de expectación del vínculo Hamiltoniano cuántico, dentro del cual los operadores se expanden alrededor de los vértices relevantes de la triangulación en potencias de los segmentos $s_L^a(\Delta)$ (que tienen longitud del orden de ℓ_P). De esta manera es posible dar una aproximación sistemática dividiendo el espacio en cajas, cada una de ellas centrada en un dado punto \vec{x} y de volumen $\mathcal{L}^3 \approx d^3 x$. Cada caja contiene un número grande de vértices del estado semiclásico ($\mathcal{L} \gg \ell_P$), pero se considera infinitesimal en escalas en las que el espacio puede verse como continuo.

Asimismo, asumiremos que el campo electromagnético varía poco dentro de la caja (i.e., $\ell_P \ll \mathcal{L} < \lambda$, con λ la longitud de onda del fotón) de manera que podemos expandir el campo de Maxwell en serie de Taylor alrededor del punto central. De esta forma obtenemos una expansión del Hamiltoniano en potencias de ℓ_P/\mathcal{L} .

Para calcular el Hamiltoniano efectivo consideraremos estados semiclásicos $|\psi\rangle$ dados por el producto directo de estados coherentes para el campo de Maxwell y

estados weave que aproximan la métrica plana en Σ para el sector gravitatorio. Es decir, $|\psi\rangle = |\gamma\rangle \otimes |\Delta\rangle$ con

$$\langle\gamma|\hat{E}^a|\gamma\rangle = E_{class}^a ; \quad \langle\gamma|\hat{B}^a|\gamma\rangle = B_{class}^a \quad (2.38)$$

$$\langle\Delta|\hat{q}_{ab}|\Delta\rangle = \delta_{ab} + \mathcal{O}\left(\frac{\ell_P}{\mathcal{L}}\right), \quad (2.39)$$

donde E^a , B^a y q_{ab} representan el campo eléctrico, el campo magnético y la 3-métrica inducida en Σ , respectivamente⁶. Aquí, \mathcal{L} es la longitud característica del estado semiclásico $|\Delta\rangle$ (supuesta grande en comparación con ℓ_P) tal que, para longitudes menores que \mathcal{L} se pone de manifiesto la naturaleza cuántica del espacio-tiempo mientras que para longitudes mucho mayores que \mathcal{L} se “ve”, esencialmente, una geometría clásica.

Ahora bien, la porción electromagnética del vínculo Hamiltoniano que describe el acoplamiento de gravedad con el campo de Maxwell está dado por el término usual tipo “ $E^2 + B^2$ ”

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{EB} &= \frac{1}{2} \int d^3x q^{ab} \sqrt{\det(q)} (E_a E_b + B_a B_b) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x q_{ab} (e^a e^b + b^a b^b), \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde hemos supuesto una foliación del espacio-tiempo adaptada al campo temporal t^a (paramterizado por t) de manera que la función lapse es $N = 1$ y, en la última línea, las cantidades e^a , b^a enfatizan el hecho de que estamos tratando con densidades vectoriales, lo que requiere dividir por el determinante de la métrica el cual ha sido absorbido en q_{ab} . Al escribir el Hamiltoniano en estas variables podemos aplicar el método de “point-splitting” propuesto por Thiemann y descrito en la sección anterior a q_{ab} , que consiste en escribir la métrica (dividida por el determinante) como el producto de dos operadores $\hat{w}_a^i(x)$, que corresponden, cada uno, al conmutador de la conexión de Ashtekar con la raíz cuadrada del operador de volumen (ver ec. (2.27)). De esta manera, el operador asociado a la parte eléctrica del Hamiltoniano está dada entonces por ⁷:

$$\hat{\mathcal{H}}_E = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \delta_{kl} \hat{w}_a^k(x) \hat{w}_b^l(y) \hat{E}^a(x) \hat{E}^b(y) \chi_\epsilon(x - y) \quad (2.41)$$

⁶Hemos suprimido la línea debajo de los campos E^a y B^a ya que no existe más riesgo de confundirlo con la parte gravitatoria.

⁷La parte magnética es completamente análoga. Nos concentramos aquí sólo en la porción eléctrica por cuestiones de brevedad.

donde $\chi_\epsilon(x - y)$ es el regularizador usual del “point-splitting” tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_\epsilon(x - y) = \delta(x - y)$.

Consideremos ahora la acción de este Hamiltoniano en el estado $|\psi\rangle$, para lo cual seguiremos el enfoque descrito en [2]. Asumiremos que el estado coherente correspondiente al campo de Maxwell aproxima una onda viajera clásica de longitud de onda λ (supuesta mucho mayor que \mathcal{L} y que ℓ_P), y podemos entonces, a todo fin práctico, considerar al campo electromagnético como clásico. Es suficiente, por lo tanto, concentrarnos en la acción del Hamiltoniano en el estado weave $|\Delta\rangle$.

De acuerdo a lo desarrollado en la sección anterior, los operadores \hat{w}_a^i actuando en un estado weave sólo introducen contribuciones en los vértices del mismo, de modo que las integrales en (2.41) se reducen a sumas sobre los vértices dentro de la caja de longitud \mathcal{L} y el término eléctrico del Hamiltoniano efectivo resulta

$$\mathcal{H}_{eff} = \langle \Delta | \hat{H}_E | \Delta \rangle = \frac{1}{2} \sum_{v_i, v_j} \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(v_i) \hat{w}_b^l(v_j) | \Delta \rangle E^a(v_i) E^b(v_j). \quad (2.42)$$

Ahora bien, como $\mathcal{L} \ll \lambda$ el campo electromagnético varía poco en la escala \mathcal{L} y podemos expandirlo en serie de Taylor alrededor del punto central \vec{x} de la caja

$$E^a(v_i) = E^a(\vec{x}) + (v_i - x)^c \partial_c E^a(\vec{x}) + \dots \quad (2.43)$$

Es de notar que la cantidad $(v_i - x)^c$ es al menos del orden de ℓ_P y como máximo del orden de \mathcal{L} , mientras que $\partial_c E$ va como $1/\lambda$. Por lo tanto, (2.43) representa una serie en potencias de \mathcal{L}/λ .

Insertando (2.43) en (2.42) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} &= \frac{1}{2} E^a(\vec{x}) E^b(\vec{x}) \sum_{v_i, v_j} \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(v_i) \hat{w}_b^l(v_j) | \Delta \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{v_i, v_j} \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(v_i) \hat{w}_b^l(v_j) | \Delta \rangle \times \\ &\times \left((v_i - x)^c \partial_c E^a(\vec{x}) E^b(\vec{x}) + (v_j - x)^c E^a(\vec{x}) \partial_c E^b(\vec{x}) \right) + \dots \quad (2.44) \end{aligned}$$

La sumatoria en el primer término de esta expresión es simplemente la métrica clásica (por definición de estado weave) y este término corresponde, entonces, al Hamiltoniano usual de Maxwell en un espacio plano. Los demás términos en la expansión dan la corrección al Hamiltoniano clásico debido a la interacción del campo electromagnético con el espacio-tiempo cuántico y pueden ser calculados imponiendo invariancia ante rotaciones del Hamiltoniano. En particular, para obtener la primera corrección

$$\frac{1}{2} \sum_{v_i, v_j} \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(v_i) \hat{w}_b^l(v_j) | \Delta \rangle \left((v_i - x)^c \partial_c (E^a(\vec{x})) E^b(\vec{x}) + (v_j - x)^c E^a(\vec{x}) \partial_c (E^b(\vec{x})) \right), \quad (2.45)$$

debemos evaluar las cantidades $\sum \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(v_i) \hat{w}_b^l(v_j) | \Delta \rangle (v_i - x)^c$ que, dado que el Hamiltoniano debe comportarse como un escalar, debe tratarse de un tensor de tres índices invariante ante rotaciones, es decir, debe ser de la forma $\chi \epsilon_{abc} \ell_P$ con χ una constante de proporcionalidad que por construcción se espera que sea de orden 1 y ϵ_{abc} el símbolo de Levi-Civita (hemos usado además que $(v_i - x)^c \approx \ell_P$). El Hamiltoniano efectivo de Einstein-Maxwell en la aproximación semiclásica está dado entonces, hasta primer orden perturbativo, por

$$\mathcal{H}_{EB} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \chi \ell_P (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (2.46)$$

donde hemos adoptado, por simplicidad, la notación vectorial.

Una vez determinada la relación entre los campos eléctrico y magnético y las variables canónicas, estamos en condiciones de derivar las ecuaciones de Maxwell modificadas por acción de gravedad cuántica. Dedicaremos los siguientes capítulos al cálculo de las demás correcciones al Hamiltoniano y de las ecuaciones de campo que se derivan de él, así como a tratar de predecir y analizar los efectos inducidos por gravedad cuántica que pudieran aparecer sobre la propagación de la luz y la factibilidad de que sean medidos.

Capítulo 3

Efectos debidos a Gravedad Cuántica en la propagación de la luz

§1. Introducción

Los modelos presentes que describen la interacción entre los campos de Maxwell y gravitatorio cuánticos predicen una ruptura de la Invariancia Lorentz en la aproximación semiclásica. Una característica que estos modelos comparten es que las ecuaciones de campo arrojan relaciones de dispersión no estandar indicando que el espacio tiempo se comporta como un medio dispersivo, con un índice de refracción dependiente de la frecuencia [2, 1, 18, 19]. Otra consecuencia de estas teorías es la existencia de un referencial privilegiado: el que se encuentra en reposo con respecto a dicho medio. En términos geométricos esto es equivalente a introducir un vector temporal t^a que sirve para definir un tiempo universal.

Existen dos efectos que estos modelos predicen que podrían, en principio, ser medidos con la tecnología presente. Uno de ellos, que proviene de Teoría de Cuerdas, es la dependencia de la velocidad de los fotones con la energía. Fotones más energéticos viajarían más lento que los menos energéticos, lo que se traduciría en una diferencia en los tiempos de llegada entre ellos (suponiendo que fueron emitidos simultáneamente) luego de recorrer una distancia cosmológica [2, 1].

El segundo efecto, que se deriva de LQG, es una dependencia adicional de la velocidad de los fotones con su helicidad [2] (lo que viola paridad e invariancia Lorentz). Como consecuencia de esto la dirección de polarización puede rotar un ángulo de 2π en una distancia dependiente de la energía. Por lo tanto, si consideramos un paquete de onda con un espectro de energías (ya sea continuo o discreto) que inicialmente esté linealmente polarizado, la dirección de polarización de cada

componente rotará un ángulo diferente y el paquete llegaría totalmente despolarizado luego de atravesar cierto camino óptico. En este capítulo estudiaremos cómo surgen estos efectos en el formalismo de Gravedad cuántica de lazos y analizaremos los órdenes de magnitud que podemos esperar de los mismos para considerar la posibilidad de que resulten observables con la tecnología disponible actualmente.

Asimismo, resulta instructivo analizar en términos puramente fenomenológicos estos efectos de gravedad semiclásica en la propagación de radiación electromagnética. Para ello modelaremos la interacción efectiva mediante la adición de términos extras en las ecuaciones de Maxwell estándar que contemplan acoplamiento mínimo entre el campo electromagnético y el campo vectorial t^a mencionado anteriormente. Incluiremos tanto términos que conservan paridad como términos que la violan, sin embargo veremos que los únicos efectos que surgen de este enfoque susceptibles de ser medidos provienen, sorprendentemente, de las porciones que rompen paridad.

§2. Efectos Medibles Debido a Gravedad Cuántica

En esta sección estudiaremos las ecuaciones de campo que se derivan del Hamiltoniano efectivo de interacción obtenido en el capítulo anterior y que resultan en ecuaciones modificadas de Maxwell que violan invariancia Lorentz y ante paridad [2]. Esto da lugar a un efecto de birrefringencia que, de ser medido, permitiría obtener una verificación experimental de la teoría.

Ahora bien, este Hamiltoniano está dado como serie de potencias en la longitud de Planck, por lo tanto, para los efectos de estudiar cantidades medibles basta conservar sólo la primera corrección no trivial, ya que los demás términos dan contribuciones despreciables. Podemos entonces considerar que la densidad Hamiltoniana está dada por

$$\mathcal{H}_{\mathcal{EB}} = \frac{1}{2} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) + \chi \ell_P \left(\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \right), \quad (3.1)$$

donde χ es la constante de acoplamiento fenomenológica que destruye paridad. Es necesario ahora establecer la relación entre los campos y las variables conjugadas $(\vec{A}, \vec{\pi})$. En [2] la elección sugerida (proveniente de electromagnetismo clásico en espacio plano) es,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.2)$$

$$\vec{E} = -\vec{\pi}, \quad (3.3)$$

donde hemos adoptado notación vectorial para facilitar la lectura de las ecuaciones. Si ahora insertamos estas relaciones en el Hamiltoniano (3.1) las ecuaciones de Hamilton para el par conjugado resultan,

$$\partial_t \vec{A} = (\vec{\pi} + 2\chi\ell_P \nabla \times \vec{\pi}), \quad (3.4)$$

$$\partial_t \vec{\pi} = -\nabla \times (\nabla \times \vec{A} + 2\chi\ell_P \nabla \times \nabla \times \vec{A}), \quad (3.5)$$

Ahora bien, si tomamos rotor de la primera de estas expresiones y la combinamos con la segunda, podemos reescribirlas en términos de los campos \vec{E} y \vec{B} para obtener las ecuaciones de Maxwell corregidas a primer orden,

$$\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = 2\chi\ell_P \nabla^2 \vec{B}, \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = -2\chi\ell_P \nabla^2 \vec{E}, \quad (3.7)$$

Es de notar que el término de corrección caracteriza tanto la violación de la covariancia Lorentz como la no conservación de paridad.

Por otro lado, a las ecuaciones (3.6) y (3.7) debemos agregarle $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (la primera de ellas representa el vínculo sobre el momento conjugado $\nabla \cdot \vec{\pi} = 0$, asociado a la invariancia de gauge del potencial \vec{A} el cual está definido a menos del gradiente de un campo escalar, mientras que la segunda se cumple por ser \vec{B} el rotor del potencial). Estas cuatro relaciones conforman el conjunto completo de la ecuaciones de Maxwell, que pueden combinarse para expresarse en forma de ecuación de onda para el campo eléctrico

$$\partial_t^2 \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} - 4\chi\ell_P \nabla^2 (\nabla \times \vec{E}) = 0, \quad (3.8)$$

y similar para \vec{B} .

Si proponemos una solución que represente una onda plana con vector de onda \vec{k} y una dada helicidad de la forma [2]

$$\vec{E}_\pm = \text{Re}((\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2)e^{i(\omega_\pm t - \vec{k} \cdot \vec{x})}), \quad (3.9)$$

donde $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$, y la insertamos en (3.8) obtenemos la siguiente relación de dispersión

$$\omega_\pm = \sqrt{k^2 \mp 4\chi\ell_P k^3} \simeq |k|(1 \mp 2\chi\ell_P |k|). \quad (3.10)$$

Además $\hat{e}_1 \cdot \vec{k} = \hat{e}_2 \cdot \vec{k} = 0$ y la última aproximación es posible porque hemos supuesto que la longitud de onda del campo electromagnético es mucho mayor que ℓ_P .

Podemos concluir entonces que aparece una velocidad de propagación distinta para cada uno de los estados de polarización circular y, por lo tanto, la primera

corrección en la propagación de ondas debido gravedad cuántica da lugar a un efecto de birrefringencia. Este efecto es sumamente pequeño, correspondiendo a una corrección del orden de ℓ_P por longitud de onda. Sin embargo, si consideramos fotones que hayan recorrido distancias cosmológicas, estas correcciones pueden haberse acumulado de forma tal que el efecto neto resulte medible.

Existen dos tipos de experimentos que podrían proporcionar evidencia observacional al respecto. Uno de ellos consiste en detectar la diferencia de tiempos de llegada asociada a las diferentes velocidades [2], mientras que el otro intentaría medir la rotación del vector de polarización de la onda [36].

§2.1. Retardo temporal

Analicemos entonces las dos posibilidades mencionadas, para lo cual resulta conveniente concentrarnos en radiación linealmente polarizada emitida por alguna fuente cosmológica. Por simplicidad despreciaremos como primera aproximación los efectos de curvatura, y consideraremos un sistema de coordenadas con origen en la fuente. Supongamos un paquete de onda gaussiano en la frecuencia centrado en ω_0 y con dispersión $\Delta\omega$ que se propaga a lo largo del eje z [36]:

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \mathcal{A} e^{i\omega_0(t-z)} \left[e^{-(z-v_+t)^2(\Delta\omega)^2} e^{-i\chi\ell_P z \omega_0^2 \hat{e}_+} + e^{-(z-v_-t)^2(\Delta\omega)^2} e^{i\chi\ell_P z \omega_0^2 \hat{e}_-} \right] \right\}, \quad (3.11)$$

donde \mathcal{A} es una amplitud constante, $\hat{e}_\pm = (\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2)/\sqrt{2}$ y v_\pm representa la velocidad de grupo asociada a \hat{e}_\pm . Claramente, si bien $v_+ \neq v_-$, las correcciones de ambas velocidades con respecto a c son muy pequeñas ($\simeq \ell_P/\lambda^2$), por lo tanto $|v_+ - v_-| \ll 1$ y, tomando $c = 1$, deben satisfacer $v_+ \simeq v_- \simeq 1$.

Ambas porciones del paquete de onda (correspondientes a helicidad positiva y negativa) están centradas entonces cerca de $z = t$. Se puede mostrar que para distancias z tales que

$$|v_+ - v_-| t \Delta\omega \simeq 8\chi\ell_P z \omega_0 \Delta\omega \ll 1 \quad (3.12)$$

la rotación del plano de polarización se reduce al usual (proporcional a la distancia recorrida) debido a la birrefringencia óptica [36].

Por otra parte, si estamos analizando fuentes a distancias cosmológicas, con z tal que

$$8\chi\ell_P z \omega_0 \Delta\omega \gg 1 \quad (3.13)$$

los dos modos de polarización se separan en la función de onda, y los fotones correspondientes a cada modo se detectarían con una diferencia de tiempos del

orden [2]:

$$\Delta t \simeq \chi \ell_P z \omega_0. \quad (3.14)$$

No obstante, este retardo temporal es muy difícil de observar ya que es “enmascarado” por procesos físicos convencionales y, además, los órdenes de magnitud del mismo son comparables (o menores) que la sensibilidad de los instrumentos de detección más precisos disponibles. Por otro lado, existe un segundo efecto sobre la propagación de fotones mucho más factible de medir, sobre el que nos concentraremos en la próxima sección.

§2.2. Rotación del vector de polarización

En la naturaleza, en general, los fotones provenientes de una fuente astrofísica no corresponden nunca a una onda monocromática, sino que se presentan en espectros de frecuencias que pueden ser discretos o continuos. Si el mecanismo de emisión es tal que el espectro de fotones es continuo en algún rango de frecuencias, pero todos con polarización lineal y en la misma dirección (un ejemplo claro es la radiación de sincrotron), una señal de la presencia del efecto de birrefringencia sería la falta total de esta polarización en el detector.

Existen observaciones de objetos cosmológicos que muestran una componente importante de polarización lineal en todo el espectro visible, con muy poca dependencia del ángulo de polarización con la frecuencia [37]. Se puede probar que, luego de recorrer una distancia z , dos fotones emitidos simultáneamente y con igual estado de polarización de longitudes de onda λ_1 y λ_2 respectivamente, habrán rotado sus direcciones de polarización de manera que el ángulo relativo entre ellas está dada por [36]

$$\Delta\phi_{Pol} = 4\pi^2 \chi \ell_P z \left((1/\lambda_1^2) - (1/\lambda_2^2) \right). \quad (3.15)$$

Si consideramos ahora fotones con frecuencias en un intervalo continuo, el ángulo correspondiente a cada uno de ellos es diferente y, por lo tanto, para distancias z suficientemente grandes, el efecto neto observado sería una pérdida total de polarización. Este experimento es notablemente más sensible que el descrito en la sección anterior, ya que, aún si no es posible detectar el retardo temporal entre fotones, el estado de polarización del paquete recibido se puede determinar fácilmente. De este modo, si se tiene la seguridad de que el paquete fue emitido con polarización lineal, este efecto es muy posible de observar.

Existen, sin embargo, observaciones recientes de luz emitida por fuentes lejanas de tipo sincrotrónicas en las cuales se detecta polarización lineal [38]. La pregunta natural que surge entonces es si esto demuestra la ausencia total del efecto, o si

existen algunas condiciones bajo las cuales sería posible observar polarización lineal en los fotones asumiendo que *son* emitidos con polarización lineal *y* que el efecto de birefringencia predicho en [2] ocurre. Claramente, si este es el caso y es posible ubicar a la fuente sin ninguna ambigüedad a una distancia cosmológica z , las observaciones permiten establecer una cota superior para la constante χ .

Esto fue hecho en [36] para los resultados de Jannuzi [39], que indican una polarización de más del 10% en el ultravioleta para observaciones de la radio galaxia 3C 256, a redshift $z = 1,82$, correspondiente a una distancia $z \simeq 10^9$ años luz. La cota obtenida, consistente con estas evidencias, es

$$\chi \leq 5 \times 10^{-4}. \quad (3.16)$$

Es importante notar que, si bien la falta de polarización en la radiación detectada, así como la evidencia de una polarización dependiente de la frecuencia, pueden deberse a muchos efectos (no necesariamente debido a Gravedad Cuántica), la detección de un porcentaje significativo de polarización lineal es posible sólo si χ está por debajo de la cota (3.16).

Por otro lado, un análisis de la polarización de fotones más energéticos, en el rango de los rayos gamma por ejemplo, podría evidenciar este efecto de birefringencia, o en su defecto establecer una cota más estricta para χ que la dada en (3.16). En particular, aplicando los resultados de [36] a radiación polarizada proveniente de exposiciones de rayos gamma [40], es posible obtener una cota mucho más estricta ($\chi < 10^{-15}$ correspondiente a fotones de 2 MeV [41]).

Hemos estudiado en esta sección los efectos medibles sobre la propagación de radiación electromagnética debidos a la cuantización del campo gravitatorio que se derivan del formalismo desarrollado en [2]. En la siguiente sección consideraremos, desde un punto de vista fenomenológico, todos los posibles efectos que podrían surgir de una teoría que acople estos campos y analizaremos las condiciones en las que esperamos que resulten observables¹.

¹La siguiente sección puede ser analizada en forma separada e independiente del resto de esta tesis (ya que, si bien resulta instructiva desde el punto de vista intuitivo y fenomenológico, no guarda relación con los resultados estudiados a continuación) y el lector puede, por lo tanto, saltarla sin que afecte la comprensión de los capítulos siguientes.

§3. Ecuaciones Fenomenológicas Para la Propagación de la Luz

Para obtener ecuaciones que describan la propagación de la luz bajo la influencia de efectos debido a la naturaleza cuántica del campo gravitatorio es necesario hacer suposiciones explícitas acerca de cuál es la forma que se espera que tome el régimen de bajas energías. En particular, esperamos que los valores de expectación en los estados cuánticos se correspondan con la métrica $g_{\alpha\beta}$ que describe la geometría clásica². Para el modelo estandar, la misma está caracterizada por un campo vectorial temporal t^α , cuyas líneas integrales representan las líneas mundo de observadores comóviles con 4-velocidad u^α . Asumimos entonces que esto implica que los valores de expectación que definen el límite (local) de bajas energías están dados por funciones tensoriales de u^α , $g_{\alpha\beta}$ y t solamente, con t un parámetro afín (“tiempo”) para las líneas integrales de t^α .

Consideremos el tensor de Maxwell $F_{\alpha\beta}$ como la cantidad física fundamental que describe el campo electromagnético, y cuyas componentes en un sistema localmente Lorentz están dadas por $F_{a0} = E_a$ y $F_{ab} = \epsilon_{abc}B_c$ ($a, b, c = 1, 2, 3$), con E_a y B_a las componentes de los campos eléctrico y magnético respectivamente y ϵ_{abc} el símbolo de Levi-Civita.

En ausencia de efectos debidos a GC, la propagación está gobernada por las ecuaciones de Maxwell usuales

$$\nabla^\alpha (*F_{\alpha\beta}) = 0, \quad (3.17)$$

$$\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 4\pi J_\beta, \quad (3.18)$$

donde $*F_{\alpha\beta}$ es la forma dual de $F_{\alpha\beta}$ y J_α es la 4-corriente eléctrica.

La modificación que proponemos para estas ecuaciones es la adición de términos extras en los miembros derechos de (3.17) y (3.18), que corresponden a la presencia de diferentes “corrientes efectivas” que podrían resultar de efectos debidos a Gravedad Cuántica, a la cual el campo electromagnético se acopla³. Nos restringimos además a términos que son lineales en el campo de Maxwell, asumiendo que efectos no lineales son de orden más alto y pueden despreciarse en esta aproximación. Las ecuaciones fenomenológicas que proponemos son, luego, de

²En este capítulo y en adelante, adoptaremos caracteres griegos para denotar índices espacio-temporales ($\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$), y latinos para componentes espaciales ($a, b, \dots = 1, 2, 3$).

³Los resultados de esta sección fueron publicados en el trabajo *On low-energy quantum gravity induced effects on the propagation of light* [42], por R. Gleiser, C. Kozameh y F. Parisi.

la forma

$$\begin{aligned}
\nabla^\alpha(*F_{\alpha\beta}) &= \hat{\psi}_1 t^\alpha F_{\alpha\beta} + \hat{\psi}_2 t^\alpha (*F_{\alpha\beta}) \\
&+ \hat{\psi}_3 t^\alpha t^\delta \nabla_\delta F_{\alpha\beta} + \hat{\psi}_4 t^\alpha t^\delta \nabla_\delta (*F_{\alpha\beta}) \\
&+ \hat{\psi}_5 t^\alpha t^\delta t^\sigma \nabla_\delta [\nabla_\sigma F_{\alpha\beta}] + \hat{\psi}_6 t^\alpha t^\delta t^\sigma \nabla_\delta [\nabla_\sigma (*F_{\alpha\beta})] \\
&+ \hat{\psi}_7 t^\alpha g^{\delta\sigma} \nabla_\delta [\nabla_\sigma F_{\alpha\beta}] + \hat{\psi}_8 t^\alpha g^{\delta\sigma} \nabla_\delta [\nabla_\sigma (*F_{\alpha\beta})], \quad (3.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} &= 4\pi J_\beta + \hat{\chi}_1 t^\alpha F_{\alpha\beta} + \hat{\chi}_2 t^\alpha (*F_{\alpha\beta}) \\
&+ \hat{\chi}_3 t^\alpha t^\delta \nabla_\delta F_{\alpha\beta} + \hat{\chi}_4 t^\alpha t^\delta \nabla_\delta (*F_{\alpha\beta}) \\
&+ \hat{\chi}_5 t^\alpha t^\delta t^\sigma \nabla_\delta [\nabla_\sigma F_{\alpha\beta}] + \hat{\chi}_6 t^\alpha t^\delta t^\sigma \nabla_\delta [\nabla_\sigma (*F_{\alpha\beta})] \\
&+ \hat{\chi}_7 t^\alpha g^{\delta\sigma} \nabla_\delta [\nabla_\sigma F_{\alpha\beta}] + \hat{\chi}_8 t^\alpha g^{\delta\sigma} \nabla_\delta [\nabla_\sigma (*F_{\alpha\beta})]. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

En estas relaciones estamos suponiendo acolpamientos locales (descritos por las constantes fenomenológicas $\hat{\chi}_i$ y $\hat{\psi}_i$) que se expresan en términos de $F_{\alpha\beta}$ y sus derivadas, y hemos incluido términos sólo hasta derivadas segundas. Notar que de las suposiciones que hemos hecho sobre el tiempo cosmológico se desprende

$$\begin{aligned}
t^\alpha \nabla_\alpha t^\beta &= 0, \\
\nabla^\alpha t^\beta - \nabla^\beta t^\alpha &= 0. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Por otro lado, es importante destacar que, aún cuando algunas (o todas) de las constantes $\hat{\chi}_i$ y $\hat{\psi}_i$ sean no nulas, basándonos en argumentos observacionales podemos afirmar que son pequeñas (y deben anularse en el límite en que $\ell_P \rightarrow 0$). Por lo tanto, podemos considerar los efectos de cada término por separado y asumir que cualquier efecto cruzado es de orden superior. Llevamos a cabo este análisis en la siguiente sección.

§3.1. Análisis en un sistema localmente Lorentz

Las ecuaciones se pueden analizar más fácilmente si se expresan en un sistema de coordenadas adaptado al campo t^α : si las coordenadas se denotan por (t, x, y, z) , entonces $t^\alpha = (1, 0, 0, 0)$. Como primera aproximación despreciaremos efectos de curvatura e igualaremos derivadas covariantes a derivadas parciales ordinarias. Asumiremos además propagación en el “vacío”, por lo que $J^\alpha = 0$.

Con estas consideraciones las ecuaciones para $F_{\alpha\beta}$ y $*F_{\alpha\beta}$ se reducen a

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.22)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.23)$$

y

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \chi_1 \vec{E} + \psi_1 \vec{B} + \chi_2 \partial_t \vec{E} + \psi_2 \partial_t \vec{B} \\ &\quad + \chi_3 \partial_t^2 \vec{E} + \psi_3 \partial_t^2 \vec{B} + \chi_4 \nabla^2 \vec{E} + \psi_4 \nabla^2 \vec{B},\end{aligned}\quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= \chi_5 \vec{B} + \psi_5 \vec{E} + \chi_6 \partial_t \vec{B} + \psi_6 \partial_t \vec{E} \\ &\quad + \chi_7 \partial_t^2 \vec{B} + \psi_7 \partial_t^2 \vec{E} + \chi_8 \nabla^2 \vec{B} + \psi_8 \nabla^2 \vec{E}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Donde, para llegar a la forma final en (3.24) y (3.25), hemos reagrupado algunos términos de (3.19) y (3.20) y renombrado algunas constantes. Asimismo es de notar que los términos cuyos coeficientes son χ_i violan paridad. Por otra parte, se puede ver de (3.24) que las constantes ψ_1, \dots, ψ_4 , y χ_1, \dots, χ_4 deben anularse si asumimos ausencia de corrientes de tipo magnéticas, en cuyo caso $F_{\alpha\beta}$ admite un potencial vector A_α . Analizaremos esta situación en la siguiente sección.

§3.2. Ondas Planas

Consideremos ahora soluciones que representan ondas planas viajando a lo largo del eje z . En este caso, de acuerdo a (3.22) la onda debe ser de la forma

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \text{Re} \{ (E_x \hat{e}_x + E_y \hat{e}_y) \exp(i(\omega t - kz)) \}, \\ \vec{B} &= \text{Re} \{ (B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y) \exp(i(\omega t - kz)) \}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Insertando (3.26) en (3.24) y (3.25) encontramos la forma general de la relación de dispersión $k = k(\omega, \chi_i, \psi_i)$ la cual, en vista de la pequeñez de los parámetros χ_i y ψ_i , puede expandirse en serie de potencias en estos coeficientes. Si consideramos separadamente términos según el orden de derivada que contiene, y según si conserva o viola paridad, encontramos, en el caso de conservación de la misma:

$$\begin{aligned}k &= \sqrt{\omega^2 + 2i\omega(\psi_1 + \psi_5) - 4\psi_1\psi_5} \\ &\simeq \omega + i(\psi_1 + \psi_5),\end{aligned}\quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}k &= \omega \sqrt{(1 - 2(\psi_2 + \psi_6) + 4\psi_2\psi_6)} \\ &\simeq \omega[1 - (\psi_2 + \psi_6)],\end{aligned}\quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}k &= \omega \sqrt{[1 - 2i\omega(\psi_3 + \psi_7) - 4\omega^2\psi_3\psi_7]} \\ &\simeq \omega[1 - i\omega(\psi_3 + \psi_7)],\end{aligned}\quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}k &= \omega \left[\sqrt{1 - k^2(\psi_4 - \psi_8)^2 + ik(\psi_4 + \psi_8)} \right]^{-1} \\ &\simeq \omega[1 - i\omega(\psi_4 + \psi_8)],\end{aligned}\quad (3.30)$$

y para el caso que se viole paridad:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\omega^2 \pm 2k(\chi_1 - \chi_5) + 4\chi_1\chi_5} \\ &\simeq \omega \pm (\chi_1 - \chi_5), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} k &= \omega \left[\sqrt{1 - (\chi_2 + \chi_6)^2} \pm i(\chi_2 - \chi_6) \right] \\ &\simeq \omega [1 \pm i(\chi_2 - \chi_6)], \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} k &= \omega \left[\sqrt{1 + \omega^2(\chi_3 + \chi_7)^2} \pm \omega(\chi_3 - \chi_7) \right] \\ &\simeq \omega [1 \pm \omega(\chi_3 - \chi_7)], \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} k &= \omega \left[1 \pm 2k(\chi_4 - \chi_8) - 4k^2\chi_4\chi_8 \right]^{-1/2} \\ &\simeq \omega [1 \pm \omega(\chi_4 - \chi_8)]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Si usamos estos resultados para obtener las amplitudes correspondientes, encontramos que, para el caso en que se conserva paridad, existe un único modo de propagación y el estado de polarización de una onda plana se conserva en el tiempo; mientras que en el caso que se viola paridad existen dos modos, correspondientes a polarización circular derecha e izquierda respectivamente. Posibles consecuencias observacionales de esto han sido discutidas en la sección 2 y en [36].

Si consideramos ahora casos particulares, podríamos en principio descartar términos como (3.27), (3.29), (3.30), y (3.32) ya que violan la conservación de la energía (la amplitud de las ondas es amplificada o atenuada). Si, por otra parte, estamos dispuestos a aceptar este hecho (después de todo no estamos teniendo en cuenta términos de reacción de radiación en la métrica), podemos analizar todas las posibilidades.

Notemos que (3.27) corresponde a una amplificación o atenuación (dependiendo del signo de $\psi_1 + \psi_5$) de la amplitud de la onda con el tiempo dependiente de la frecuencia, sin ningún efecto en la polarización. Esta amplificación no existiría en el caso $\psi_1 = -\psi_5$, pero restaría aún un término cuadrático en ψ_1 , que se comportaría como una masa taquiónica adicionada al fotón. El punto de importancia aquí reside en los órdenes de magnitud de estos acoplamientos. En ausencia de una teoría completa, podemos a lo sumo conjeturar que se esperaría que fueran del orden de las cantidades que caracterizan el modelo y que tienen las dimensiones correspondientes. En nuestro caso, estas cantidades están dadas por las longitud y el tiempo de Planck ℓ_P , t_P y, posiblemente, el radio (o escala) $a(T)$ y edad T (o la constante de Hubble $H = \dot{a}/a$) del universo. En ese caso, como ψ_1 y ψ_5 tienen dimensiones de $[\text{longitud}]^{-1}$, esperamos que estas cantidades sean del orden de $t_P H^2$, el cual, luego de multiplicarse por los tiempos de vuelo típicos a través de distancias cosmológicas, es muy pequeño para tener relevancia observacional.

En el caso de (3.28) tenemos un cambio en la velocidad de la onda que es independiente de la frecuencia, lo que implicaría que la propagación de la luz en el espacio de Minkowski sería temporal o espacial dependiendo del signo de $\psi_2 + \psi_6$. Ya que ψ_2 y ψ_6 no tienen dimensiones, una estimación estaría dada por $t_P H$, lo que, nuevamente, es muy pequeño para resultar observable.

El caso (3.30) es conceptualmente similar a (3.27), correspondiente a una amplificación (o atenuación) de la onda. Sin embargo, en este caso ψ_4 y ψ_8 tienen dimensiones de [longitud]. Asumimos entonces que son del orden de ℓ_P , y la cantidad relevante sería por lo tanto del orden de $\ell_P L / \lambda^2$, con λ la longitud de onda y L del orden de la distancia a una fuente cosmológica. Sorpresivamente, si suponemos $\lambda = 10^{-5} \text{cm}$, (correspondiente a luz visible), y $L = 10^9$ años luz, encontramos que $\ell_P L / \lambda^2 \simeq 10^3!!$. Esto implicaría que la luz visible nunca llegaría al observador. Sin embargo, observamos no sólo luz visible sino también rayos gamma provenientes de fuentes cosmológicas. Como consecuencia, o bien ψ_4 y ψ_8 son mucho más pequeñas que la escala supuesta, o $\psi_4 \simeq -\psi_8$. Si tomamos $\psi_4 = -\psi_8$, entonces $k \simeq \omega - 2\psi_8^2 \omega^3$, lo que implica una velocidad de grupo $v_g = 1 - 6\psi_8^2 \omega^2$ que, aún para tiempos cosmológicos y rayos gamma, da un efecto demasiado pequeño para ser medido.

El efecto de (3.29) es similar a (3.30), pero en este caso se podría cuestionar si es aceptable incluir términos en derivadas segundas en el miembro derecho de la ecuación o si se debería descartar esta posibilidad.

Consideraciones similares en lo que respecta a ordenes de magnitud y factibilidad de detección son válidas para los casos que violan paridad ((3.31), (3.32), (3.33), y (3.34)). Este último caso, con $\chi_4 = -\chi_8$, es el obtenido en [2] y descrito en detalle en la sección 2.2. Es de notar, sin embargo, que la evidencia observacional disponible parece indicar que χ_4 está varios órdenes de magnitud por debajo del valor cercano a uno que se espera del desarrollo teórico expuesto en [2].

Capítulo 4

Invariancia Lorentz y la Aproximación Semiclásica de LQG

§1. Introducción

Hemos visto que los modelos presentes que describen la interacción entre los campos de Maxwell y gravitatorio cuánticos predicen una ruptura de la Invariancia Lorentz a nivel lineal en la aproximación semiclásica. Una característica que estos modelos comparten es que las ecuaciones de campo arrojan relaciones de dispersión no estandar indicando que el espacio-tiempo se comporta como un medio dispersivo, con un índice de refracción dependiente de la frecuencia. Otra consecuencia de estas teorías es la existencia de un referencial privilegiado: el que se encuentra en reposo con respecto a dicho medio, lo que en términos geométricos es equivalente a introducir un vector temporal t^α que sirve para definir un tiempo universal.

Los dos efectos que estos modelos predicen podrían, de existir, ser medidos con la tecnología actual. Por un lado la velocidad de los fotones dependería de su energía, mientras que por otro existiría una dependencia adicional de esta velocidad con la helicidad de los fotones. Recientemente se han producido esfuerzos por observar estos efectos vía la propagación de la luz a través de distancias cosmológicas. En particular, observaciones recientes de radiación de sincrotrón emitida por fuentes cosmológicas establecen severas restricciones para estos modelos y ponen en duda la validez de la aproximación lineal, ya que estas observaciones son consistentes con la Invariancia Lorentz [38].

La falta de evidencia observacional a favor de la violación de la Invariancia motivó como punto central de este trabajo de tesis una revisión del Hamiltoniano efectivo que describe la interacción entre los campos gravitatorio y electromagnético en

la aproximación semiclásica, cuestionándonos acerca de las suposiciones de partida de los modelos canónicos que, si bien pueden parecer naturales a primera vista, podrían no ser ciertas en la teoría final.

En particular, en este capítulo reemplazaremos la suposición hecha en la sección 2 del capítulo anterior de que el potencial de Maxwell y el campo eléctrico son variables conjugadas, por un enfoque diferente: asumiremos que el tensor electromagnético cuántico es la curvatura del potencial de Maxwell. Esta interpretación geométrica del campo electromagnético conduce a ecuaciones de campo que preservan la invariancia Lorentz ¹. Si bien inicialmente consideraremos la aproximación lineal, veremos que este resultado se puede extender fácilmente a todo orden en el parámetro perturbativo, si se conservan todos los términos en la expansión que surge cuando se toman en cuenta las propiedades de los estados weave ².

Veremos además que los mismos resultados son válidos si se consideran tipos más generales de interacción, así como otros estados semiclásicos al momento de tomar valor de expectación.

§2. Interacción entre los Campos Electromagnético y Gravitatorio

Es útil hacer un repaso desde primeros principios de las formulaciones Lagrangeana y Hamiltoniana clásicas para el acoplamiento entre los campos de Maxwell y gravitatorio. Esta revisión permitirá argumentar que, aún cuando estos campos se promuevan a operadores cuánticos, algunas condiciones deben seguir siendo válidas en la teoría cuántica, mientras que otras ideas deberán abandonarse.

El campo electromagnético está dado, en un espacio-tiempo arbitrario, por la 2-forma exacta

$$F = dA,$$

con A la 1-forma de conexión de Maxwell. Dado un sistema de coordenadas local con vectores base temporal y espaciales e_o^α y e_a^α respectivamente, los campos eléctrico y magnético son vectores puramente espaciales definidos por $E_a = F_{a0}$ y $B_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}F_{bc}$, donde ϵ_{abc} es el símbolo de Levi-Civita, y, nuevamente, usamos letras griegas para denotar índices espacio-temporales, mientras que $a, b, c = 1, 2, 3$. Con estas definiciones (y asumiendo que $A_0 = 0$ ya que estamos considerando solamente propagación de ondas) la relación entre los campos y el potencial puede

¹Resultado publicado en el trabajo *On low-energy quantum gravity induced effects on the propagation of light* [42], por R. Gleiser, C. Kozameh y F. Parisi.

²Resultado publicado en el trabajo *Lorentz Invariance and the semiclassical approximation of Loop Quantum Gravity* [43], por C. Kozameh y F. Parisi.

escribirse como

$$E_a = -\partial_t A_a, \quad (4.1)$$

y

$$B_a = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \partial_b A_c. \quad (4.2)$$

Es de notar que la primera de estas relaciones no depende de una métrica ya que es, simplemente, las componente temporal en un sistema de coordenadas de la ecuación $F = dA$, mientras que la segunda de ellas, ec (4.2), es la definición usual del campo magnético $B_\alpha = {}^*F_{\alpha\beta} t^\beta$ para el caso particular de una métrica de fondo plana.

Si asumimos ahora que tenemos una densidad lagrangeana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F, g)$ que describe el acoplamiento entre los campos de Maxwell y gravitacional, el campo electromagnético debe satisfacer, por definición

$$dF = 0,$$

ya que esta relación no forma parte de las ecuaciones de Euler-Lagrange, sino que se trata de una identidad consecuencia directa de la definición de F en términos del potencial. El acoplamiento entre la métrica y el campo de Maxwell dependerá, obviamente, de la forma explícita de la densidad lagrangeana. En particular, para

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} F \wedge {}^*F \quad (4.3)$$

obtenemos las ecuaciones de campo usuales

$$d{}^*F = 0,$$

sin embargo tipos más generales de acoplamiento podrían surgir de la aproximación semiclásica cuando se promueven los campos a operadores cuánticos.

Ahora bien, si deseamos introducir un esquema de cuantización canónico, debemos formular la Teoría dentro de un marco Hamiltoniano. En este punto es importante recalcar que la Formulación Lagrangeana de una teoría de campos es covariante: uno especifica en la variedad correspondiente al espacio-tiempo una acción que es funcional del campo en cuestión y cuyo valor extremo proporciona las ecuaciones de movimiento. La formulación Hamiltoniana, por otra parte, requiere la separación del espacio-tiempo en espacio \mathbf{y} tiempo (como queda claro en capítulos anteriores). De hecho, el primer paso para construir un formalismo Hamiltoniano consiste en introducir una función temporal t y un campo vectorial t^α tales que las hipersuperficies Σ_t (correspondientes a $t = cte$) dan una foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales, y que permiten introducir las definiciones (4.1) y (4.2).

El campo vectorial t^α se puede interpretar como “el flujo del tiempo” y se puede usar para identificar las superficies Σ_t con la superficie inicial Σ_0 . En particular, para el espacio plano de Minkowski la elección se hace vía el sistema inercial global. En espacios curvos dicha elección no es tan directa, sin embargo la identificación entre superficies se hace introduciendo las funciones lapse y shift, que describen los cambios del campo t^α en las direcciones normal y tangencial a Σ_t ³.

El segundo paso para introducir la formulación Hamiltoniana es definir el momento canónicamente conjugado a la variable de configuración, en nuestro caso A_a . Sea \mathcal{L} el Lagrangeano de interacción, entonces el momento canónico está dado por

$$\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t A_a)}. \quad (4.4)$$

Para el caso de electromagnetismo clásico en espacio plano esto se reduce a

$$\pi^a = -\delta^{ab} E_b, \quad (4.5)$$

sin embargo, debemos estar abiertos a la posibilidad de que, al considerar la aproximación semiclásica de LQG, surja un Lagrangeano más general (diferente de \mathcal{L}_0). En ese caso, el Hamiltoniano se obtiene invirtiendo (4.4) y resolviendo para $\partial_t A_a$ como función de π^a , es decir

$$\partial_t A_a = G_a(\pi^b, A_c), \quad (4.6)$$

de manera que la transformación de Legendre $\mathcal{H} = \pi^a G_a - \mathcal{L}$ nos proporciona la densidad Hamiltoniana deseada. Es importante destacar que la ecuación de campo de Hamilton para A_a es, por construcción, (4.6). Notar además que, independientemente de la forma de G_a , E_a debe satisfacer la ecuación (4.1). Es de esperar por lo tanto que para un Hamiltoniano de interacción que no sea el estándar, $-E_a$ no será en general el momento canónicamente conjugado a A_a ⁴. La relación exacta entre E_a y π^a se obtiene de

$$E_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^a} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_b} \frac{\partial E_b}{\partial \pi^a}, \quad (4.7)$$

la cual resulta ser una ecuación diferencial para el campo eléctrico como función del momento, cuya solución determina unívocamente $E_a(\pi^b)$.

³Volveremos sobre este punto en capítulos posteriores, cuando estudiemos la propagación de fotones en espacios curvos.

⁴En este punto cabe mencionar que, en adelante, nuestra hipótesis de trabajo será $\partial_t A_a = -E_a$, a diferencia de trabajos anteriores que suponen que A_a y $-E_a$ son variables canónicamente conjugadas.

Si ahora promovemos los campos clásicos a operadores cuánticos $(\hat{A}, \hat{F}, \hat{g})$ esperamos que ocurran cambios en el Hamiltoniano cuántico. No obstante las definiciones básicas deberían seguir siendo válidas. Por ejemplo,

$$\hat{F} = d\hat{A},$$

nos dice que \hat{F} es la curvatura de \hat{A} . Por lo tanto la ecuación

$$d\hat{F} = 0,$$

debe mantenerse como una identidad para \hat{A} . Aún más, esta relación no depende de \hat{g} , por lo que, aún si debemos regularizar el operador métrica, debería permanecer inalterada. Por otro lado, si tomamos valor de expectación de esta relación y asumimos que el estado cuántico es producto directo de estados coherentes para el campo de Maxwell y un “estado semiclásico” para el sector gravitacional deberíamos reobtener

$$F_{class} = dA_{class}, \quad dF_{class} = 0,$$

por lo menos en la aproximación semiclásica. En consecuencia, proponemos que el plan a seguir para el esquema de cuantización (y dentro de dicha aproximación semiclásica) es el siguiente:

1. Comenzamos imponiendo $\hat{F} = d\hat{A}$.
2. Tomamos la densidad de energía regularizada para el campo electromagnético escrita en términos de E_a y B_a y, via la ecuación (4.7), escribimos la relación modificada entre E_a y π^a de manera tal que, por medio de las ecuaciones de Hamilton, la ecuación

$$E_a = -\partial_t A_a$$

se cumpla orden a orden en la expansión perturbativa.

3. Una vez reemplazada $E_a(\pi^b)$ en el operador asociado a la densidad de energía obtenemos, tomando valor de expectación en estados semiclásicos, la densidad Hamiltoniana efectiva a partir de la cual se deriva la ecuación de campo faltante para π^a . Como resultado de este procedimiento, las ecuaciones de Hamilton para el par conjugado se pueden reescribir como un conjunto de ecuaciones modificadas de Maxwell para los campos eléctrico y magnético.

§3. El Hamiltoniano efectivo y las ecuaciones de campo

Siguiendo el procedimiento descrito calcularemos a continuación la densidad Hamiltoniana efectiva de interacción para los campos electromagnético y gravitatorio en la aproximación semiclásica. Como primer paso consideraremos en la sección 4.3.1 la aproximación lineal en la longitud de Planck y probaremos que las ecuaciones resultantes se reducen a las ecuaciones de Maxwell usuales más términos de orden ℓ_P^2 y preservan, hasta ese orden por lo tanto, la invariancia Lorentz.

Extenderemos este resultado a todo orden en ℓ_P en la sección 4.3.2, así como a casos más generales de acoplamientos en la sección 4.3.3.

§3.1. La aproximación lineal

Siguiendo el enfoque de Gambini-Pullin [2], la densidad hamiltoniana fenomenológica de interacción (obtenida tomando valor de expectación del hamiltoniano cuántico regularizado en un estado dado por estados coherentes para el campo de Maxwell y estados weave - correspondientes a la métrica plana - para el gravitatorio) está dado, hasta orden lineal en la longitud de Planck ℓ_P , por ⁵

$$\mathcal{H}_{\mathcal{EB}} = \frac{1}{2} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) + \chi \ell_P \left(\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \right), \quad (4.8)$$

donde χ es la constante de acoplamiento fenomenológica que destruye paridad. Supondremos que la relación entre los campos y las variables conjugadas $(\vec{A}, \vec{\pi})$ es de la forma

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (4.9)$$

$$\vec{E} = -\vec{\pi} + \chi \ell_P \vec{F}[\vec{\pi}], \quad (4.10)$$

donde hemos adoptado notación vectorial para facilitar la lectura de las ecuaciones y donde $\vec{F}[\vec{\pi}]$ es una función de $\vec{\pi}$ y sus derivadas. Si ahora insertamos estas relaciones en el Hamiltoniano (4.8) e imponemos que $\vec{E} = -\partial_t \vec{A}$ (lo cual debe cumplirse por definición e independientemente de la métrica de fondo), la funcional \vec{F} queda unívocamente determinada via la ecuación de Hamilton para \vec{A} , de lo que se deriva

$$\vec{E} = -\vec{\pi} + 2\chi \ell_P \vec{\nabla} \times \vec{\pi}. \quad (4.11)$$

⁵La deducción de esta expresión está desarrollada en la sección 6 del capítulo 2.

Esto permite obtener la segunda ecuación de movimiento para $\vec{\pi}$. Las ecuaciones de Hamilton finales para el par conjugado son entonces

$$\partial_t \vec{A} = \vec{\pi} - 2\chi\ell_P \vec{\nabla} \times \vec{\pi}, \quad (4.12)$$

$$\partial_t \vec{\pi} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{A} + 2\chi\ell_P \vec{\nabla} \times \vec{A}). \quad (4.13)$$

Usando las definiciones de \vec{E} y \vec{B} podemos derivar las ecuaciones de Maxwell para los campos eléctrico y magnético:

$$\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \mathcal{O}((\chi\ell_P)^2), \quad (4.14)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \quad (4.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \mathcal{O}((\chi\ell_P)^2), \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.17)$$

Notas:

- Puesto que el Hamiltoniano de partida está dado sólo hasta orden lineal en $\chi\ell_P$, hemos despreciado términos de orden más alto en los cálculos anteriores.
- Hasta este orden, las ecuaciones de campo obtenidas son invariantes Lorentz y satisfacen las relaciones de dispersión usuales.
- Es de notar que las ecuaciones de campo para \vec{E} y \vec{B} resultantes son invariantes de gauge aunque (4.12) no lo es. Asimismo, es importante mencionar que el formalismo completo puede hacerse invariante gauge introduciendo un espacio de fase donde el espacio de configuración está constituido por clases de equivalencia de potenciales de Maxwell (definidos a menos del gradiente de una función) y los momentos son campos de divergencia nula [44].
- Partiendo del mismo Hamiltoniano de interacción (4.8), Gambini y Pullin [2] asumieron una relación diferente entre el campo eléctrico y el momento canónico, a saber, $\vec{E} = -\vec{\pi}$. Esta suposición conduce a ecuaciones de movimiento que se traducen en las ecuaciones modificadas de Maxwell (3.6) y (3.7):

$$\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = 2\chi\ell_P \nabla^2 \vec{B}, \quad (4.18)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = -2\chi\ell_P \nabla^2 \vec{E}, \quad (4.19)$$

las cuales, a diferencia de las que hemos obtenido aquí, rompen la invariancia Lorentz. Es importante notar que este rompimiento se sigue de la suposición de que $-\vec{E}$ y \vec{A} son variables canónicamente conjugadas. Si bien este es el caso en la teoría clásica (siempre que la métrica de fondo sea plana), podría

no seguir siendo válida cuando promovemos los campos a operadores cuánticos. Por otro lado, la versión cuántica de $\vec{E} = -\partial_t \vec{A}$ debería permanecer inalterada ya que es sólo una consecuencia de $F = dA$. Conjeturamos por lo tanto que las ecuaciones homogéneas de Maxwell, contenidas en $F = dA$, deberían seguir cumpliéndose en la teoría completa.

- Un punto a destacar es que, usando un procedimiento de cuantización completamente diferente, Ellis et. al. obtuvieron un conjunto de ecuaciones de Maxwell generalizadas que mantiene la parte homogénea inalterada [45].

Queda claro, por lo tanto, que el hecho de que la invariancia Lorentz se rompa o no depende fuertemente de la relación específica entre los campos y el potencial de Maxwell. Asumiendo la condición simple $\hat{F} = d\hat{A}$ hemos obtenido un único $E_a(\pi^b)$ que no es canónicamente conjugado a A_a y, más importante aún, que las ecuaciones de campo son invariantes Lorentz (hasta orden lineal en $\chi\ell_P$). Si el Hamiltoniano estuviera dado como una expansión perturbativa en potencias de $\chi\ell_P$, sería posible introducir correcciones de orden más alto en la relación entre el campo eléctrico y el momento canónico de manera que la ley de Faraday se satisfaga a cada orden en esa expansión. Demostraremos este hecho en la siguiente sección.

§3.2. Generalización a todo orden

Siguiendo el esquema descrito anteriormente calcularemos la densidad Hamiltoniana efectiva para la interacción entre el campo gravitatorio y el electromagnético tomando valor de expectación en los estados semiclásicos $|\psi\rangle$ dados por el producto directo de estados coherentes para el campo de Maxwell y estados weave de la métrica plana para el campo gravitatorio [2]. Es decir, $|\psi\rangle = |\gamma\rangle \otimes |\Delta\rangle$ con

$$\langle\gamma|\hat{E}^a|\gamma\rangle = E_{class}^a \quad (4.20)$$

$$\langle\Delta|\hat{q}_{ab}|\Delta\rangle = \delta_{ab} + \mathcal{O}\left(\frac{\ell_P}{\mathcal{L}}\right), \quad (4.21)$$

Aquí, \mathcal{L} es la longitud característica del estado semiclásico $|\Delta\rangle$ (supuesta grande en comparación con ℓ_P) tal que, como hemos mencionado anteriormente, para longitudes menores que \mathcal{L} se pone de manifiesto la naturaleza cuántica del espacio-tiempo mientras que para longitudes mucho mayores que \mathcal{L} se “ve”, esencialmente, una geometría clásica. Una vez obtenido el Hamiltoniano efectivo derivaremos las ecuaciones de campo correspondientes y mostraremos que pueden ser escritas como las ecuaciones de Maxwell usuales.

Consideremos nuevamente, entonces, el campo electromagnético dado por

$$F = dA,$$

con A la conexión de Maxwell. Dado un sistema de coordenadas local con vectores base e_0^α y e_a^α , los campos eléctrico y magnético están definidos como $E_a = F_{a0}$ y $B_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}F_{bc}$ respectivamente.

La densidad de energía es:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}q^{ab}\sqrt{q}(E_aE_b + B_aB_b) \quad (4.22)$$

donde q^{ab} es la métrica 3-dimensional inducida sobre la superficie Σ_t (correspondiente a $t = cte$) y q su determinante. Para obtener la densidad hamiltoniana asociada es necesario, primero, definir el espacio de fase. Tomaremos los pares $([A_a], \pi^b)$ como miembros de nuestro espacio de fase, donde $[A_a]$ representa una clase de equivalencia (con \tilde{A}_a y A_a equivalentes si $\tilde{A}_a = A_a + \partial_a\phi$) y π^b satisface $\partial_b\pi^b = 0$ [44]. Con las definiciones de arriba E_a y B_a están dados, en términos del potencial, por $E_a = -\partial_t[A_a]$ y $B_a = \epsilon_{abc}\partial_b[A_c]$.

Promoviendo la métrica a operador cuántico de la manera propuesta por Thiemann [20] y descripta en el capítulo 2, la parte eléctrica del operador densidad de energía es

$$\hat{\mathcal{H}}_E = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \delta^{kl} \hat{w}_k^a(x) \hat{w}_l^b(y) E_a(x) E_b(y) \chi_\epsilon(x-y), \quad (4.23)$$

donde \hat{w}_k^a son los operadores asociados a los vectores de una triada y $\chi_\epsilon(x-y)$ es una función de regularización que tiende a la delta de Dirac cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Tomando valor de expectación en el estado weave $|\Delta\rangle$ mencionado anteriormente, obtenemos

$$\langle \Delta | \hat{\mathcal{H}}_E | \Delta \rangle = \frac{1}{2} \sum_{v_i, v_j} \delta^{kl} \langle \Delta | \hat{w}_k^a(v_i) \hat{w}_l^b(v_j) | \Delta \rangle E_a(v_i) E_b(v_j), \quad (4.24)$$

puesto que los operadores \hat{w}_k^a sólo actúan en los vértices v_i del estado. La sumatoria en el miembro derecho de la ecuación incluye los vértices dentro de una región de dimensión \mathcal{L} de manera tal que la densidad de energía se comporte como un escalar bajo rotaciones espaciales. Asumiendo que el campo eléctrico varía poco en una escala \mathcal{L} (es decir que la longitud de onda es grande comparada con \mathcal{L}), podemos hacer una expansión de Taylor alrededor del punto central \vec{x} en forma similar al cálculo descripto en la sección 6 del capítulo 2 (ver ec. (2.43))

$$E_a(v_i) = E_a(\vec{x}) + \sum_k \frac{1}{k!} (v_i - x)^{c_1} \dots (v_i - x)^{c_k} \partial_{c_1} \dots \partial_{c_k} E_a(\vec{x}), \quad (4.25)$$

donde asumimos que la distancia $(v_i - \vec{x})^{c_1}$ es al menos del orden de la longitud de Planck ℓ_P .

Insertando esta expresión en (4.24), la parte eléctrica de la densidad de energía se puede escribir como

$$\mathcal{H}_E = \frac{1}{2} \delta^{ab} E_a E_b + E_a \sum_{k=1}^{\infty} \ell_P^k \theta_k^{abc_1 \dots c_k} \partial_{c_1} \dots \partial_{c_k} E_b \equiv \frac{1}{2} E_a H^{ab} E_b, \quad (4.26)$$

con $\theta_k^{abc_1 \dots c_k}$ un tensor independiente del campo eléctrico.

Dado que \mathcal{H}_E debe comportarse como un escalar, la cantidad $\theta_k^{abc_1 \dots c_k} \partial_{c_1} \dots \partial_{c_k} E_b$ debe transformar como vector ante rotaciones espaciales y, como todo vector en un espacio plano, puede ser escrito como la suma del rotor de un vector y el gradiente de una función escalar:

$$\theta_k^{abc_1 \dots c_k} \partial_{c_1} \dots \partial_{c_k} E_b = \left(\nabla \times \vec{C}_{1k} \right)^a + \nabla^a \phi_{1k}. \quad (4.27)$$

Pero nuevamente $\vec{C}_{1k} = \left(\nabla \times \vec{C}_{2k} \right) + \nabla \phi_{2k}$ y así sucesivamente (por simplicidad cambiaremos entre notación de índices y vectorial cada vez que sea necesario). Luego de k pasos obtenemos

$$\theta_k^{abc_1 \dots c_k} \partial_{c_1} \dots \partial_{c_k} E_b = \alpha_k \left[(\nabla \times)^k \vec{E} + \nabla \phi_k \right]^a, \quad (4.28)$$

donde la expresión $(\nabla \times)^k$ debe interpretarse como k rotadores tomados consecutivamente, las cantidades α_k son coeficientes constantes y ϕ_k es una funcional lineal de E_a .

Introduciendo esto en (4.26) obtenemos

$$\mathcal{H}_E = \frac{1}{2} \delta^{ab} E_a E_b + E_a \sum_{k=1}^{\infty} \ell_P^k \alpha_k \left[(\nabla \times)^k \vec{E} + \nabla \phi_k \right]^a. \quad (4.29)$$

De esta expresión se puede leer la forma explícita del “operador métrico” H^{ab} actuando sobre E_b :

$$H^{ab} E_b = E^a + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \ell_P^k \alpha_k \left[(\nabla \times)^k \vec{E} \right]^a + \nabla^a \phi(\vec{E}), \quad (4.30)$$

donde $\phi(\vec{E}) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell_P^k \alpha_k \phi_k(\vec{E})$ es lineal en el campo eléctrico.

Para obtener la densidad Hamiltoniana primero debemos determinar la relación entre el campo eléctrico E_a y el momento canónico π^b . Sabemos que por definición $E_a = -\partial_t[A_a]$ y, de las ecuaciones de Hamilton, que $\partial_t[A_a] = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^a}$, por lo tanto

$$E_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^a} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_b} \frac{\partial E_b}{\partial \pi^a}. \quad (4.31)$$

Esta es una ecuación diferencial para el campo eléctrico como funcional del momento, es decir para $E_a(\pi^b)$. Insertando (4.29) en (4.31) obtenemos

$$\left(\frac{\partial E_b}{\partial \pi^a} H^{bc} + \delta_a^c \right) E_c = 0 \quad (4.32)$$

y, resolviendo esta ecuación para E_a se tiene

$$E_a = -(H^{-1})_{ab} \pi^b. \quad (4.33)$$

Esta es la relación buscada entre E_a y π^b . Reemplazando esta relación en la densidad de energía obtenemos la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\pi^a H^{-1}{}_{ab} \pi^b + B_a H^{ab} B_b \right). \quad (4.34)$$

Ahora bien, puesto que los campos π^a y B_a tienen ambos divergencia cero, es posible, mediante integración por partes y desechando términos de superficie, redefinir el operador H^{ab} eliminando la parte que contiene gradientes. Escribimos por lo tanto

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\vec{\pi} \mathbf{H}^{-1} \vec{\pi} + \vec{B} \mathbf{H} \vec{B} \right), \quad (4.35)$$

con

$$\mathbf{H} = Id + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \ell_P^k \alpha_k (\nabla \times)^k. \quad (4.36)$$

Estamos ahora en condiciones de derivar las ecuaciones de campo correspondientes para \vec{E} y \vec{B} . Las ecuaciones homogéneas de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.37)$$

$$\partial_t \vec{B} + \nabla \times \vec{E} = 0, \quad (4.38)$$

se satisfacen automáticamente ya que $\vec{E} = -\partial_t \vec{A}$ y $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

Además, usando que $\vec{\pi} = -\mathbf{H} \vec{E}$ obtenemos

$$0 = \nabla \cdot \vec{\pi} = \nabla \cdot \vec{E}, \quad (4.39)$$

donde hemos usado la forma explícita de \mathbf{H} .

La ecuación de Hamilton faltante $\partial_t \pi^a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_a}$ resulta (usando nuevamente $\vec{\pi} = -\mathbf{H} \vec{E}$),

$$\mathbf{H}(\partial_t \vec{E}) = \nabla \times (\mathbf{H} \vec{B}), \quad (4.40)$$

la cual, teniendo en cuenta que el rotor conmuta con el operador \mathbf{H} , se raduce a

$$\partial_t \vec{E} = \nabla \times \vec{B}. \quad (4.41)$$

Esto prueba que, dentro de la aproximación semiclásica considerada, el campo electromagnético satisface las ecuaciones de Maxwell usuales y conserva, por lo tanto, la invariancia Lorentz.

Un punto a destacar, nuevamente, es que $-\vec{E}$ no es el momento canónicamente conjugado a \vec{A} . Es de notar que la ecuación (4.7) es la contrapartida cuántica de $E_a = -q_{ab}\sqrt{q} \pi^b$ donde la cantidad clásica $q_{ab}\sqrt{q}$ es reemplazada por el operador H^{-1}_{ab} . No se debe, por ende, extrapolar a partir de los resultados clásicos y hacer la suposición de que $-\vec{E}$ y \vec{A} son variables conjugadas si se toman en cuenta efectos debidos a Gravedad Cuántica.

§3.3. Extensión a casos más generales

En la sección anterior hemos probado que si tomamos en cuenta el volumen típico del estado weave de la métrica plana para obtener el valor de expectación de la densidad de energía (el cual debe ser invariante rotacional) y asumimos que el campo de Maxwell admite una expansión de Taylor (tomando la longitud de Planck como parámetro de expansión), las ecuaciones de campo resultantes son invariantes Lorentz. Dicho de otra manera, la discretización del espacio introducida por los estados weave no modifica las propiedades invariantes del campo clásico.

Puesto que para derivar los resultados anteriores hemos usado solamente la invariancia ante rotaciones de la densidad de energía, éstos deberían seguir siendo válidos para cualquier estado cuántico invariante rotacional, siempre que se mantenga el mismo procedimiento de regularización para construir la densidad Hamiltoniana efectiva.

Queremos estudiar ahora la generalidad de estos resultados si se permiten otros tipos de Hamiltonianos de interacción, mediante el análisis y comparación de las soluciones de las ecuaciones de campo clásicas y el valor de expectación de las soluciones cuánticas asociadas. Para ello haremos primero un breve repaso del proceso de cuantización canónico.

Sea

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} q^{ab} \sqrt{q} (E_a E_b + B_a B_b) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{q}^{ab} (E_a E_b + B_a B_b) \end{aligned} \quad (4.42)$$

la parte electromagnética de la densidad Hamiltoniana (clásica). Si definimos, como venimos haciendo hasta ahora, el tensor de Maxwell $F = dA$ y los campos eléctrico

y magnético como $E_a = -\partial_t A_a$ y $B_a = (\nabla \times \vec{A})_a$ respectivamente (donde hemos introducido una base coordenada), el momento canónicamente conjugado a A_a es

$$\pi^b = -\tilde{q}^{ab} E_a \quad (4.43)$$

y la densidad Hamiltoniana escrita en el par conjugado es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(q_{ab} \pi^a \pi^b + \tilde{q}^{ab} B_a B_b \right), \quad (4.44)$$

donde q_{ab} es la inversa de \tilde{q}^{ab} .

Las ecuaciones de campo que se derivan de este Hamiltoniano son

$$\partial_t A_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^a} = -E_a, \quad (4.45)$$

$$\partial_t \pi^a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_a} = -\epsilon^a{}_{bc} \partial_b (\tilde{q}^{cd} B_d). \quad (4.46)$$

Ahora bien, para llevar a cabo la cuantización se deben promover los campos clásicos (\tilde{q}, A, π) a operadores cuánticos $(\hat{\tilde{q}}, \hat{A}, \hat{\pi})$, reemplazar los corchetes de Poisson por los conmutadores correspondientes e imponer relaciones de conmutación canónicas entre las variables conjugadas. Esto es

$$[\hat{A}_a(\vec{x}, t), \hat{\pi}^b(\vec{x}', t)] = -i \delta_a{}^b \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (4.47)$$

Por otro lado la contrapartida cuántica de la densidad Hamiltoniana está dada por

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left(\hat{q}_{ab} \hat{\pi}^a \hat{\pi}^b + \hat{q}^{ab} \hat{B}_a \hat{B}_b \right), \quad (4.48)$$

mientras que las ecuaciones de campo cuánticas son

$$\partial_t \hat{A}_a = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_a] = -\hat{E}_a, \quad (4.49)$$

$$\partial_t \hat{\pi}^a = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\pi}^a] = -\epsilon^a{}_{bc} \partial_b (\hat{q}^{cd} \hat{B}_d). \quad (4.50)$$

Dado que estamos interesados en comparar las ecuaciones de campo clásicas con las ecuaciones semiclásicas asociadas (obtenidas mediante el promedio en los estados semiclásicos de las ecuaciones cuánticas), debemos tomar valor de expectación de las expresiones (4.49) y (4.50). Consideremos, una vez más, que el espacio de Hilbert está constituido por estados que son producto directo de estados semiclásicos para gravedad y estados coherentes para el campo electromagnético, es decir $|\psi\rangle = |\gamma\rangle \otimes |\Delta\rangle$ con

$$\langle \gamma | \hat{E}^a | \gamma \rangle = E_{class}^a, \quad (4.51)$$

$$\langle \gamma | \hat{B}^a | \gamma \rangle = B_{class}^a, \quad (4.52)$$

$$\langle \Delta | \hat{q} | \Delta \rangle = \tilde{q}_{class} + \mathcal{O}\left(\frac{\ell_P}{\mathcal{L}}\right). \quad (4.53)$$

De acuerdo a los resultados de secciones anteriores, la acción de tomar valor de expectación en uno de estos estados se reduce a reemplazar la métrica clásica \tilde{q}^{ab} por el operador métrico H^{ab} asociado y el valor de expectación de las ecuaciones cuánticas es entonces

$$\partial_t \langle \hat{A}_a \rangle = -E_{a \text{ class}}, \quad (4.54)$$

$$\partial_t \langle \hat{\pi}^a \rangle = \epsilon^a{}_{bc} \partial_b (H^{cd} B_{d \text{ class}}). \quad (4.55)$$

Ahora bien, la contrapartida cuántica de (4.43) nos dice que

$$\langle \hat{\pi}^a \rangle = -H^{ab} E_{b \text{ class}}, \quad (4.56)$$

y, por lo tanto, la ecuación de campo para el momento π , en notación vectorial, es

$$\partial_t \langle \vec{\pi} \rangle \equiv -\partial_t (\mathbf{H} \vec{E}_{class}) = \nabla \times (\mathbf{H} \vec{B}_{class}). \quad (4.57)$$

Dado que estamos considerando un background plano (y por lo tanto estático) y estados invariantes ante rotaciones, el operador \mathbf{H} conmuta tanto con la derivada temporal como con el rotor y esta ecuación se reduce a la conocida ley de Ampere.

Acabamos de demostrar entonces que los valores de expectación de las ecuaciones cuánticas coinciden con las correspondientes ecuaciones clásicas, es decir, $\partial_t \langle \hat{A}_a \rangle = \partial_t A_{class}$ y $\partial_t \langle \hat{\pi}^a \rangle = \partial_t \pi_{a \text{ class}}^a$. En consecuencia, la solución clásica coincide con el valor de expectación de la solución cuántica para todo tiempo, suponiendo que coinciden inicialmente. Más aún, esta conclusión sigue siendo válida para cualquier Hamiltoniano de interacción que sea cuadrático en los campos, cualquiera sea su forma, siempre que usemos los estados cuánticos descritos arriba. Para ver esto consideremos un operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\hat{q}, \hat{A}, \hat{\pi})$ con la única condición de que sea cuadrático en los campos \hat{A} y $\hat{\pi}$. Si este es el caso, las ecuaciones de campo cuánticas estarían dadas por las relaciones (4.49) y (4.50), i.e.

$$\partial_t \hat{A}_a = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_a] = F(\hat{q}, \hat{A}, \hat{\pi}) = -E_a, \quad (4.58)$$

$$\partial_t \hat{\pi}^a = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\pi}^a] = G(\hat{q}, \hat{A}, \hat{\pi}), \quad (4.59)$$

donde las F y G son funcionales lineales en los campos \hat{A} y $\hat{\pi}$ y hemos impuesto en (4.58) la definición de campo eléctrico, que suponemos no se ve afectada al cuantizar la teoría (recordar que esta es la hipótesis de trabajo que hemos adoptado, y que permite obtener la relación entre el campo eléctrico E_a y el momento π^a , si la función F es conocida). Ahora bien, las ecuaciones semiclásicas asociadas a estas expresiones, que provienen de tomar valor de expectación, convierten la dependencia funcional en la métrica de las funciones F y G en la acción de un operador lineal aplicado a las variables electromagnéticas (que se reduce al operador métrico H^{ab} de la sección anterior para el hamiltoniano usual, pero que podría adoptar formas más complicadas para una interacción general que podría surgir de una teoría completa de GC). No obstante, este mismo operador aparecería en el miembro izquierdo de (4.59) (que surge de resolver (4.58) para π^a en función de E_a) y, en vista de que estamos usando estados invariantes rotacionales que aproximan la métrica plana, dicho operador debe conmutar con las derivadas tanto temporales como espaciales (que sólo pueden aparecer en forma de rotores), reduciendo, nuevamente, la ecuación para el momento canónico a la ley de Ampere.

En conclusión, el valor de expectación de las ecuaciones cuánticas se reducen a las ecuaciones de Maxwell usuales y por ende, conservarían la invariancia Lorentz y la propagación de ondas no se vería afectada por efectos cuánticos.

Estas consideraciones permiten concluir que los resultados de la sección anterior se pueden generalizar para cualquier tipo de interacción entre los campos gravitatorio y electromagnético de tipo cuadrático, siempre que se usen estados semiclásicos formados por producto directo de estados invariantes rotacionales para el sector de gravedad y estados coherentes para el campo de Maxwell.

La pregunta natural que sigue es cómo podría entonces aparecer algún efecto debido a Gravedad Cuántica. Se podría argumentar que los estados usados no constituyen una base apropiada para computar los valores de expectación de las correcciones de segundo u orden más alto. Sin embargo, parecería plausible encontrar una nueva base tal que, a cada orden en la expansión perturbativa de la solución de las ecuaciones de campo acopladas, el valor de expectación del operador asociado a la métrica dé el valor clásico del tensor métrico en las ecuaciones de Einstein-Maxwell resultantes del Hamiltoniano clásico. Si existe una familia monoparamétrica de bases que conecten los estados weave aquí usados a la nueva base, entonces la generalización resultaría directa y se podría probar la invariancia Lorentz de la Teoría completa.

Si tenemos en cuenta lo dicho anteriormente, sólo podrían surgir efectos debido a la cuantización de la teoría si consideramos un Hamiltoniano de interacción de

grado cúbico o mayor en el campo electromagnético⁶. Para ilustrar mejor este hecho, consideremos un “modelo de juguete” en mecánica cuántica consistente en un Hamiltoniano del tipo cúbico en la variable de configuración (la idea es estudiar cómo se aparta la solución clásica del valor de expectación de la solución cuántica). Sea

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 \quad (4.60)$$

el Hamiltoniano del sistema, con q la variable de configuración y p su momento canónicamente conjugado. Las ecuaciones clásicas están dadas entonces por

$$\partial_t q = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p, \quad (4.61)$$

$$\partial_t p = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -q - q^2. \quad (4.62)$$

En la versión cuántica tendríamos

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\hat{q}^2 + \frac{1}{3}\hat{q}^3, \quad (4.63)$$

con las ecuaciones de movimiento cuánticas asociadas

$$\partial_t \hat{q} = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{q}] = \hat{p}, \quad (4.64)$$

$$\partial_t \hat{p} = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{p}] = -\hat{q} - \hat{q}^2, \quad (4.65)$$

donde asumimos relaciones de conmutación canónicas entre las variables del espacio de fase. Si tomamos valor de expectación de estas expresiones en un estado coherente (es decir uno que satisfaga $\langle \hat{q} \rangle = q_{clas}$ y $\langle \hat{p} \rangle = p_{clas}$) obtenemos

$$\partial_t \langle \hat{q} \rangle = p_{clas}, \quad (4.66)$$

$$\partial_t \langle \hat{p} \rangle = -q_{clas} - \langle \hat{q}^2 \rangle. \quad (4.67)$$

En consecuencia

$$\partial_t(\delta p) \equiv \partial_t(p_{clas}(t) - \langle \hat{p}(t) \rangle) = q_{clas}^2 - \langle \hat{q}^2 \rangle \quad (4.68)$$

$$= \langle \hat{q} \rangle^2 - \langle \hat{q}^2 \rangle. \quad (4.69)$$

Ahora bien, en general $\langle \hat{q} \rangle^2 \neq \langle \hat{q}^2 \rangle$, no obstante, para estados coherentes, la diferencia entre estas cantidades se mantiene pequeña (propiedad de Ehrenfest) y

⁶De hecho, como veremos a continuación, para que aparezcan efectos apreciables de tipo cuánticos el Hamiltoniano de interacción debe ser de orden *cuarto* o mayor.

el valor de expectación de la solución cuántica, si bien no coincide con la solución clásica correspondiente, se mantiene muy cerca de ella. Esto nos dice que podemos, por lo tanto, incluir los Hamiltonianos de interacción cubicos en el campo electromagnético sin esperar modificaciones apreciables de las conclusiones anteriores (en el sentido de que las ecuaciones de campo coincidan con las ecuaciones de Maxwell usuales).

Por otro lado, si consideramos, en cambio, un Hamiltoniano de tipo cuartico (por ejemplo de la forma $\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{4}q^4$), entonces, siguiendo un desarrollo análogo al anterior, obtendríamos

$$\partial_t(\delta p) = \langle \hat{q} \rangle^3 - \langle \hat{q}^3 \rangle, \quad (4.70)$$

pero, aún para estados coherentes, tendremos en general $\langle \hat{q} \rangle^3 \neq \langle \hat{q}^3 \rangle$ y, por lo tanto, si analizamos la ecuación (4.70), vemos que el valor de expectación de la solución cuántica se va apartando de la solución clásica asociada con el tiempo, aún si éstas coinciden inicialmente (como vimos anteriormente, esto no puede suceder si partimos de un Hamiltoniano de tipo cuadrático o cúbico). Este efecto se puede interpretar como una pérdida de coherencia de la función de onda de la partícula, en el sentido de que si consideramos un estado inicialmente centrado en el valor clásico y con dispersión pequeña éste pierde esa propiedad durante la evolución. En el caso de la propagación de ondas electromagnéticas, si el Hamiltoniano de interacción fuera de orden cuarto o mayor en los campos obtendríamos resultados similares, donde el estado coherente aproximaría la onda clásica por un tiempo acotado (tiempo de Ehrenfest) después del cual el formalismo descrito en las secciones anteriores dejaría de ser válido. Por supuesto, este es un efecto que tendría lugar en cualquier teoría de campos cuántica, aún antes de cuantizar el campo gravitatorio.

El análisis que acabamos de presentar nos sirve, además, para confirmar que es razonable hacer la suposición de que podemos considerar al campo de Maxwell como una cantidad clásica (al asumir que el estado usado representa un estado coherente para la porción electromagnética) y que sólo debemos concentrarnos en la acción de los operadores de gravedad sobre el estado weave en los cálculos de las secciones anteriores que condujeron a la obtención del Hamiltoniano efectivo.

En cuanto a la porción de gravedad, si la dependencia del Hamiltoniano de interacción no fuera lineal en el tensor métrico, no hay razón para suponer que los resultados obtenidos anteriormente seguirían siendo válidos, ya que la única propiedad que los estados weave utilizados satisfacen es la de aproximar la 3-

métrica clásica (plana), con correcciones pequeñas (del orden ℓ_P). Sin embargo, para cualquier funcional (no lineal) F de q_{ab} , las correcciones a $F(q_{ab\ class})$ que surgen de tomar valor de expectación en el estado $|\Delta\rangle$ podrían ser grandes y las ecuaciones efectivas de campo resultar notablemente diferentes de las ecuaciones de Maxwell usuales.

Las consideraciones enumeradas son de carácter especulativo y contemplan la posibilidad de que, al cuantizar la teoría completa, surja un Hamiltoniano de interacción que no sea el usual (de la forma “ $q_{ab}(E^a E^b + B^a B^b)$ ”). Sin embargo, si asumimos un esquema de cuantización minimalista (donde simplemente promovemos los campos dentro de la densidad Hamiltoniana clásica a operadores cuánticos), la pérdida de coherencia mencionada no existe, y las ecuaciones semiclásicas preservan entonces las simetrías de las ecuaciones clásicas.

De todo lo expuesto, es nuestra conclusión que, dentro del formalismo canónico de Gravedad Cuántica para un espacio plano, e ignorando los efectos debidos a reacción de radiación, las ecuaciones que gobiernan la propagación de fotones son invariantes Lorentz. Resta estudiar la interacción entre el campo electromagnético y un espacio-tiempo curvo cuántico arbitrario, así como las consecuencias de considerar backreaction. Abordaremos estos temas en los capítulos siguientes.

Capítulo 5

LQG y Propagación de fotones en espacio curvo

§1. Introducción

Hemos analizado hasta ahora las condiciones bajo las cuales se mantiene o se rompe la invariancia Lorentz del campo electromagnético por efectos debidos a Gravedad Cuántica en un background plano. En particular, hemos visto que las ecuaciones de campo resultantes rompen la invariancia Lorentz en la aproximación lineal si consideramos que el potencial de Maxwell y el campo eléctrico son variables conjugadas (lo que da lugar a efectos observables en la propagación de la luz), mientras que esta simetría es preservada a todo orden si se impone la condición geométrica de que el operador asociado al campo electromagnético es la curvatura de la conexión de Maxwell, y si se usan estados semiclásicos de la métrica plana que son invariantes ante rotaciones espaciales.

En este capítulo estudiaremos los efectos inducidos por Gravedad Cuántica sobre la propagación de fotones en un espacio-tiempo curvo arbitrario. Obtendremos el Hamiltoniano efectivo de interacción para los campos electromagnético y gravitatorio mediante un procedimiento similar al seguido en el caso plano, y derivaremos las ecuaciones de campo correspondientes, las cuales se pueden combinar para expresarse como una ecuación de onda modificada para el potencial de Maxwell. Esta ecuación preserva la invariancia Lorentz si la métrica de fondo es estacionaria, pero rompe esta simetría para geometrías generales.

Analizaremos posteriormente como caso particular la propagación de fotones en una cosmología tipo Friedman-Robertson-Walker (FRW) con secciones espaciales planas, y resolveremos las ecuaciones efectivas de campo que surgen de la

aproximación semiclásica para el caso de un universo Einstein-De Sitter (i.e. dominado por materia), las cuales rompen la invariancia Lorentz en la aproximación lineal. Asimismo, un estudio de las evidencias observacionales disponibles aplicado a estos resultados permite establecer cotas superiores sobre el término que viola la invariancia¹.

§2. El Hamiltoniano efectivo de interacción en la aproximación semiclásica

Supongamos una métrica de fondo arbitraria $g_{\alpha\beta}$ y consideremos una separación 3+1 del espacio-tiempo mediante una foliación de hipersuperficies espaciales de la manera descrita en el capítulo anterior. Introduzcamos coordenadas (t, \vec{x}) adaptadas a dicha foliación de manera que las funciones lapse N y shift N^α sean 1 y 0 respectivamente (elección particular de gauge)². Sea q_{ab} la 3-métrica inducida en la superficie Σ_t (que corresponde a $t = \text{const}$).

Para los siguientes cálculos, vamos a asumir que existe un estado weave geométrico $|\Delta\rangle$ en Σ_t tal que, dada la métrica clásica q_{ab} , $\langle\Delta|\hat{q}_{ab}|\Delta\rangle = q_{ab} + \mathcal{O}\left(\frac{\ell_P}{\mathcal{L}}\right)$, donde \hat{q}_{ab} es el operador cuántico asociado al tensor métrico y \mathcal{L} es la longitud típica del estado $|\Delta\rangle$, medida según q_{ab} . Este estado podría construirse, por ejemplo, introduciendo lazos circulares de escala planckiana orientados al azar que formen un gráfico adaptado a la geometría local de Σ_t , y considerando el producto de trazas de las holonomías a lo largo de esos lazos [24]. No entraremos en detalle sobre la forma exacta de tales estados, ya que para desarrollar los cálculos del Hamiltoniano efectivo sólo usaremos propiedades generales que los estados weave satisfacen.

Ahora bien, si E^a y B^a son los vectores (puramente espaciales) campo eléctrico y campo magnético en el background correspondiente a la métrica $g_{\alpha\beta}$ respectivamente, entonces la densidad Hamiltoniana que acopla estos campos con gravedad está dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathcal{EB}} &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} d^3x q_{ab} \sqrt{q} (E^a E^b + B^a B^b) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} d^3x q_{ab} (e^a e^b + b^a b^b),\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde, en la última línea, hemos reescrito el Hamiltoniano en términos de las densidades vectoriales e^a y b^a asociadas a los campos E^a y B^a , y q_{ab} es la 3-métrica

¹Los resultados de este capítulo fueron incluidos en el trabajo *Light propagation on Quantum Curved Spacetime and Back reaction effects* [46], por C. Kozameh y F. Parisi.

²Esta elección corresponde a introducir un campo vectorial t^α que es hipersuperficie ortogonal.

dividida por su determinante. Con el Hamiltoniano escrito en estas variables, es posible usar el procedimiento de regularización implementado por Thiemann y descrito en el capítulo 2. Recordemos rápidamente que dicho procedimiento consiste en el método de “point splitting” en el que el operador asociado a la métrica dividida por su determinante se escribe como el producto de dos operadores $\hat{w}_a^k(\vec{x})$ (cada uno dado por el conmutador de la conexión de Ashtekar A_a^k y la raíz cuadrada del operador de volumen asociado a q_{ab} , i.e. $\hat{w}_a^k(\vec{x}) \equiv [A_a^k(\vec{x}), \sqrt{V(\vec{x})}]$ ([34],[35])) evaluados en puntos diferentes. De esta manera, el operador cuántico que corresponde a la parte eléctrica de la densidad Hamiltoniana es

$$\hat{\mathcal{H}}_E = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \delta_{kl} \hat{w}_a^k(\vec{x}) \hat{w}_b^l(\vec{y}) e^a(\vec{x}) e^b(\vec{y}) \chi_\epsilon(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.2)$$

y similarmente para la parte magnética. En esta expresión, $\chi_\epsilon(\vec{x} - \vec{y})$ es la función de regularización del “point splitting” que tiende a $\delta(\vec{x} - \vec{y})$ para $\epsilon \rightarrow 0$. El siguiente paso en el procedimiento de regularización consiste en introducir una triangulación de la hipersuperficie Σ_t en tetraedros adaptados al gráfico del estado weave $|\Delta\rangle$ considerado ([34], [35]).

El Hamiltoniano efectivo de interacción se define, tal como veníamos haciendo, como el valor de expectación del operador dado por la expresión (5.2) en el estado semiclásico dado por el estado weave que acabamos de describir para el sector de gravedad, y asumiremos, nuevamente, que dicho estado semiclásico corresponde a un estado coherente para el sector de Maxwell de manera que, dentro de nuestra aproximación, podemos considerar al campo electromagnético como una cantidad clásica. Bajo estas suposiciones, la construcción es completamente análoga a la desarrollada para el caso plano, con algunas pequeñas modificaciones debido a la curvatura, y el Hamiltoniano efectivo está dado entonces por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E &= \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(\vec{x}) \hat{w}_b^l(\vec{y}) | \Delta \rangle e^a(\vec{x}) e^b(\vec{y}) \chi_\epsilon(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v_i, v_j} \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(v_i) \hat{w}_b^l(v_j) | \Delta \rangle e^a(v_i) e^b(v_j), \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde en la última línea hemos usado la propiedad del estado weave que nos dice que, por construcción, los operadores $\hat{w}_a^k(\vec{x})$ sólo contribuyen en los vértices v_i del gráfico.

Si ahora asumimos, una vez más, que la escala de variación del campo e^a es grande en comparación con la longitud típica del estado weave, podemos, análogamente al desarrollo introducido en el caso plano considerado anteriormente, ex-

pandirlo en serie de Taylor alrededor del punto central \vec{x} del gráfico. Conservando sólo hasta orden lineal tenemos

$$e^a(v_i) \simeq e^a(\vec{x}) + (v_i - x)^c \partial_c e^a(\vec{x}), \quad (5.4)$$

donde, nuevamente, la cantidad $(v_i - x)^c$ es del orden de la longitud de Planck ℓ_P . Insertando esta expansión en el valor de expectación del Hamiltoniano obtenemos que, hasta orden lineal,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Eff} &= \frac{1}{2} e^a(\vec{x}) e^b(\vec{x}) \sum_{v_i, v_j} \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(v_i) \hat{w}_b^l(v_j) | \Delta \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{v_i, v_j} \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(v_i) \hat{w}_b^l(v_j) | \Delta \rangle \times \\ &\times \left((v_i - x)^c \partial_c e^a(\vec{x}) e^b(\vec{x}) + (v_j - x)^c e^a(\vec{x}) \partial_c e^b(\vec{x}) \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

La sumatoria en el primer término de esta expresión es, por definición de estado weave y por la construcción de los operadores \hat{w}_a^k , simplemente la 3-métrica clásica dividida por su determinante y este término corresponde, por lo tanto, al Hamiltoniano usual (clásico) de Maxwell en el espacio curvo dado por $g_{\alpha\beta}$. Los demás términos en la expansión dan la corrección al Hamiltoniano clásico debido a la interacción del campo electromagnético con el espacio-tiempo cuántico y pueden ser calculados, en forma análoga a la seguida en el capítulo 2 para el caso plano, imponiendo invariancia ante rotaciones del Hamiltoniano. En particular, para obtener la primera corrección

$$\frac{1}{2} \sum_{v_i, v_j} \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(v_i) \hat{w}_b^l(v_j) | \Delta \rangle \left((v_i - x)_c \partial^c (e^a(\vec{x})) e^b(\vec{x}) + (v_j - x)_c e^a(\vec{x}) \partial^c (e^b(\vec{x})) \right), \quad (5.6)$$

debemos evaluar las cantidades $\sum \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(v_i) \hat{w}_b^l(v_j) | \Delta \rangle (v_i - x)_c$ que, dado que el Hamiltoniano debe comportarse como un escalar, deben tratarse de tensores de tres índices invariantes ante rotaciones en la geometría definida por q_{ab} . Ahora bien, el único tensor que satisface estas condiciones en tres dimensiones es la 3-forma e_{abc} que define el elemento de volumen de q_{ab} (recordar que $e_{abc} = \sqrt{q} \epsilon_{abc}$ con ϵ_{abc} el símbolo de Levi-Civita). Por lo tanto, la cantidad

$$\sum \delta_{kl} \langle \Delta | \hat{w}_a^k(v_i) \hat{w}_b^l(v_j) | \Delta \rangle (v_i - x)_c$$

debe ser proporcional al tensor e_{abc} y, teniendo en cuenta una vez más que $(v_i - x)_c$ debe ser del orden de ℓ_P , toma la forma $\chi \ell_P e_{abc}$ con χ una constante de proporcionalidad. El Hamiltoniano efectivo de Einstein-Maxwell en la aproximación semiclásica está dado entonces, hasta primer orden perturbativo en ℓ_P , por

$$\mathcal{H}_{E_{eff}} = \frac{1}{2}q_{ab}e^ae^b + \chi\ell_P e_{abc}e^a\partial^ce^b. \quad (5.7)$$

Si ahora restituimos las variables originales (en lugar de las densidades asociadas) y si, en vista de que el término que contiene las derivadas espaciales está antisimetrizado debido a la 3-forma e_{abc} , reemplazamos la derivada parcial por la derivada covariante tridimensional ∇^a consistente con q_{ab} (de esta manera evitamos la aparición de derivadas del tensor métrico en las ecuaciones), podemos reescribir la parte eléctrica del Hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H}_{E_{eff}} = \sqrt{q} \left(\frac{1}{2}q^{ab}E_aE_b + \chi\ell_P\sqrt{q}e^{abc}E_a\nabla_bE_c \right), \quad (5.8)$$

Además, hemos usado en esta expresión la 1-forma E_a en lugar del vector E^a ya que, por lo expuesto en capítulos anteriores, es E_a el que se define naturalmente a partir del potencial de Maxwell y en forma totalmente independiente de cualquier métrica de fondo.

Por otro lado, la parte magnética se trata de manera completamente análoga y la densidad Hamiltoniana efectiva en la aproximación semiclásica que describe la interacción entre los campos gravitatorio y electromagnético en un background curvo arbitrario toma (hasta orden lineal en ℓ_P) la forma

$$\mathcal{H}_{eff} = \sqrt{q} \left(\frac{1}{2}q^{ab}(E_aE_b + B_aB_b) + \chi\ell_P\sqrt{q}e^{abc}(E_a\nabla_bE_c + B_a\nabla_bB_c) \right). \quad (5.9)$$

Una vez determinada la relación entre los campos E_a y B_a y las variables del par conjugado podemos derivar, a partir de este Hamiltoniano, las ecuaciones de campo que gobiernan la propagación semiclásica de fotones en el espacio-tiempo cuántico que corresponde a la métrica de fondo $g_{\alpha\beta}$. Nos concentraremos en esta tarea en la próxima sección.

§3. Las ecuaciones de campo

Para derivar las ecuaciones de campo a partir del Hamiltoniano que acabamos de obtener, primero debemos determinar la relación entre los campos eléctrico y magnético y las variables canónicas. Sea A la conexión de Maxwell y $F = dA$ la 2-forma de Maxwell asociada. Entonces, los campos eléctrico y magnético en un background curvo arbitrario descrito por la métrica $g_{\alpha\beta}$ con campo vectorial temporal t^α (parametrizado por la coordenada t) se definen como

$$E_a = F_{a\beta}t^\beta, \quad (5.10)$$

$$B_a = -\frac{1}{2} e_{a\beta}{}^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta}t^\beta, \quad (5.11)$$

respectivamente, donde $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor totalmente antisimétrico asociado al elemento de volumen cuatridimensional de $g_{\alpha\beta}$, y hemos enfatizado una vez más, que estos campos están dados por vectores puramente espaciales al usar en ellos índices latinos.

Es de notar que la definición (5.10) nos dice que $E_a = -\partial_t A_a$ (elegimos nuevamente $A_0 = 0$ ya que estamos interesados sólo en la propagación de ondas sin fuentes), la cual es independiente de cualquier métrica de fondo. Por otro lado, si π^a es el momento canónicamente conjugado a A_a , entonces las ecuaciones de Hamilton son

$$\partial_t A_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^a}, \quad (5.12)$$

$$\partial_t \pi^a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_a}. \quad (5.13)$$

Estas expresiones son consistentes con (5.10) sólo si

$$E_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^a} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_b} \frac{\partial E_b}{\partial \pi^a}. \quad (5.14)$$

Esta condición puede verse como una ecuación diferencial para $E_a(\pi^b)$ y, resolviendola, obtenemos la siguiente relación entre el campo eléctrico y el momento canónico

$$\pi^a = -\sqrt{q} (q^{ab} E_b + 2\chi \ell_P \sqrt{q} e^{abc} \nabla_c E_b), \quad (5.15)$$

o, simbólicamente

$$\pi^a = -H^{ab} E_b, \quad (5.16)$$

donde el operador métrico H^{ab} asociado a la 3-métrica q_{ab} está dado por

$$H^{ab} = \sqrt{q} (q^{ab} + 2\chi \ell_P \sqrt{q} e^{abc} \nabla_c). \quad (5.17)$$

Ahora bien, de la segunda ecuación de Hamilton, ec. (5.13), obtenemos

$$\partial_t (H^{ab} E_b) = H^{ab} e_b{}^{cd} \nabla_c B_d. \quad (5.18)$$

Introduciendo las definiciones (5.10) y (5.11) de E_a y B_a en términos del potencial de Maxwell podemos obtener la ecuación tipo onda que debe satisfacer A_a :

$$H^{ab}\mathcal{W}_g A_b = -4\chi\ell_P q \partial_t(q) e^{abc} \nabla_b(\partial_t A_c), \quad (5.19)$$

donde \mathcal{W}_g es el operador de onda covariante (y por lo tanto invariante Lorentz) que describe la propagación clásica en un background dado por la métrica g , es decir, $\mathcal{W}_g A_\beta = \nabla^{(4)\alpha} F_{\alpha\beta} \equiv \nabla^{(4)\alpha} \nabla_\alpha^{(4)} A_\beta - R^\alpha{}_\beta A_\alpha$, con $\nabla^{(4)\alpha}$ la derivada covariante completa (cuadridimensional) consistente con $g_{\alpha\beta}$, y $R_{\alpha\beta}$ el tensor de Ricci de dicha métrica. Aún más, si multiplicamos a izquierda ambos miembros por el operador H_{ad} (que se trata del inverso del operador métrico H^{ab} , y estaría asociado entonces a la inversa de la 3-métrica), la ecuación (5.19) se puede reescribir como

$$\nabla^\alpha F_{\alpha a} = 2\xi\ell_P \partial_t[\det(q)^2] H_{ad} e^{bcd} \nabla_b(F_{0c}). \quad (5.20)$$

De esta expresión queda claro que el miembro izquierdo es la componente espacial de una cantidad covariante y que el término que rompe la covariancia es el que aparece en el miembro derecho. En particular, notar que para una métrica de fondo estacionaria (que incluye, obviamente, el caso plano) este término se anula y obtenemos una propagación que preserva la invariancia Lorentz. Para un background arbitrario, sin embargo, esta simetría se rompe, y el efecto está asociado a la variación con el tiempo del elemento de volumen tridimensional en Σ_t . Para analizar posibles consecuencias observacionales de este resultado estudiaremos, en la próxima sección, el caso particular de la propagación de fotones en un universo homogéneo e isotrópico.

§4. Propagación de luz en un espacio FRW cuántico

Podemos aplicar el formalismo desarrollado en la sección anterior al caso particular de un espacio-tiempo Friedman-Robertson-Walker. Por simplicidad consideraremos secciones espaciales planas, por lo tanto el elemento de línea está dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.21)$$

con $a(t)$ el factor de expansión del universo. Para este caso el operador métrico (5.17) actuando en un vector C_a nos da

$$H_{FRW}^{ab} C_b = (a(t)\delta^{ab} + 2\chi\ell_P a(t)^3 \epsilon^{abc} \partial_c) C_b \quad (5.22)$$

con ϵ_{abc} el símbolo de Levi-Civita, y la ecuación de campo correspondiente (5.18) en la aproximación semiclásica es

$$\partial_t(a(t)\vec{E}) = \nabla \times \vec{B}, \quad (5.23)$$

donde hemos adoptado, por simplicidad, notación vectorial y, dado un vector \vec{C} , $\vec{\tilde{C}}$ se define como

$$\vec{\tilde{C}} = \vec{C} - 2\chi\ell_P a(t)^2 \nabla \times \vec{C}. \quad (5.24)$$

Aquí $\nabla \times \vec{\tilde{C}}$ es el rotor usual tridimensional en coordenadas planas, i.e. $(\nabla \times \vec{\tilde{C}})_a \equiv \epsilon_a{}^{bc} \partial_b \tilde{C}_c$. Esta expresión es la única ecuación de campo no trivial, ya que la otra ecuación de Hamilton (5.12) es simplemente la definición del campo eléctrico en términos del potencial y no nos aporta nueva información. Notar además, que en las últimas expresiones (desde (5.22) en adelante) los índices tensoriales se suben y bajan con la 3-métrica δ_{ab} y que, al escribir las ecuaciones de esta manera, hemos expresado toda la dependencia temporal en forma explícita.

Por otro lado, la contrapartida clásica de la ecuación (5.23) es

$$\partial_t(a(t)\vec{E}) = \nabla \times \vec{B}. \quad (5.25)$$

Existe otra ecuación que relaciona los campos \vec{E} y \vec{B} , y proviene del hecho que, dado que $F = dA$, $dF = 0$, la cual, escrita en términos de los campos eléctrico y magnético definidos por (5.10) y (5.11) se puede expresar como:

$$\partial_t \vec{B} = -\frac{\dot{a}}{a} \vec{B} - \frac{\nabla \times \vec{E}}{a} \quad (5.26)$$

donde $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$. Esta ecuación es válida tanto clásicamente como en la aproximación semiclásica que estamos analizando.

Aún más, a partir de la ecuación de campo (5.23) podemos derivar la ecuación de onda que satisface el potencial de Maxwell:

$$\partial_t(a\partial_t \vec{A}) - \frac{\nabla^2 \vec{A}}{a} = 2\chi\ell_P \left(\partial_t(a^3 \partial_t(\nabla \times \vec{A})) - a \nabla \times (\nabla^2 \vec{A}) \right), \quad (5.27)$$

mientras que la versión clásica está dada por

$$\partial_t(a\partial_t\vec{A}) - \frac{\nabla^2\vec{A}}{a} = 0. \quad (5.28)$$

Intentaremos encontrar soluciones de la ecuación (5.27) y estudiar su comportamiento en la siguiente sección.

§4.1. Soluciones en ondas planas

Consideremos, como primer paso, fotones provenientes de una fuente suficientemente cercana. En ese caso, podemos pensar que el factor de expansión del universo no ha variado demasiado en el tiempo de vuelo del fotón, asumir entonces $a(t) \simeq const$ y la ecuación de onda (5.27) se reduce a

$$a\partial_t^2\vec{A} - \frac{\nabla^2\vec{A}}{a} = 2\chi\ell_P a^2 \nabla \times \left(a\partial_t^2\vec{A} - \frac{\nabla^2\vec{A}}{a} \right). \quad (5.29)$$

Si proponemos una solución correspondiente a una onda plana de la forma $\vec{A} = Re\left(\vec{A}_0 e^{iS}\right)$ y la insertamos en las expresión de arriba, obtenemos la siguiente relación de dispersión para el vector de onda $k_\mu := S_{,\mu}$

$$(-a^2 k_t^2 + k^2)(1 - 2\chi\ell_P a^2 k) = 0, \quad (5.30)$$

donde $k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Vemos, por lo tanto, que el vector k_μ satisface la relación de dispersión usual $g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$.

Notar además que este resultado es válido en la aproximación de óptica geométrica de la propagación, ya que en ese caso estamos considerando el límite de muy altas frecuencias y podemos despreciar, en primera aproximación, las derivadas temporales del factor de expansión frente a las derivadas temporales del campo electromagnético.

Si consideramos, por otra parte, una fuente ubicada a distancias cosmológicas (que es el caso de interés si queremos estudiar efectos inducidos por Gravedad Cuántica) entonces no podemos suponer $a(t) \simeq const$ y debemos tener en cuenta los términos que contienen derivadas temporales del factor de expansión y resolver la ecuación de onda completa (5.27) de manera perturbativa puesto que la misma no admite soluciones en ondas planas de amplitud constante, como la propuesta anteriormente. El problema es más simple de resolver si introducimos el tiempo conforme η , tal que $\frac{d\eta}{dt} = a^{-1}$. Expresada en esta nueva variable, el elemento de línea de FRW está dado por

$$ds^2 = a(\eta)^2(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.31)$$

y la ecuación de onda (5.27) se puede reescribir como

$$(1 - 2\chi\ell_P a^2 \nabla \times) \square \vec{A} = 4\chi\ell_P a a' \nabla \times \vec{A}', \quad (5.32)$$

donde $\square \vec{A} \equiv \partial_\eta^2 \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ y prima denota la derivada con respecto al tiempo conforme η . Notar que, en vista de que la métrica (5.31) es conformemente plana, la ecuación de onda clásica asociada es simplemente $\square \vec{A} = 0$.

Resolveremos entonces la ecuación (5.32) de manera perturbativa proponiendo una solución de la forma

$$\vec{A} = \vec{A}_{class} + \chi\ell_P \vec{A}, \quad (5.33)$$

donde \vec{A}_{class} es la onda plana clásica $\vec{A}_{class} = \text{Re}(\vec{A}_0 e^{i(\omega\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})})$, con $\omega^2 = k^2$ y $k^2 = \vec{k} \cdot \vec{k}$. Instertando la solución (5.33) en (5.32) e ignorando términos de orden $(\chi\ell_P)^2$ y mayores, obtenemos la ecuación que debe satisfacer \vec{A} :

$$\begin{aligned} \square \vec{A} &= 4aa' \nabla \times \vec{A}'_{class} \\ &= -4iaa' \vec{k} \times \vec{A}'_{class} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Para encontrar la forma final de la solución, debemos hacer alguna suposición sobre el factor de expansión $a(t)$. Consideremos un modelo Einstein-De Sitter, es decir, un universo FRW dominado por materia. En ese caso el radio del universo como función del tiempo comovil está dado por $a(t) = \alpha t^{2/3}$ y, escrito en términos del tiempo conforme η es

$$a(\eta) = \alpha \left(\frac{\alpha}{3} (\eta - \eta_0) + t_0^{1/3} \right)^2, \quad (5.35)$$

donde el subíndice 0 denota el momento t_0 de emisión de la radiación electromagnética, para el cual el valor del factor de expansión se supone a_0 (esto significa que la constante α está dada por $\alpha = a_0 t_0^{-2/3}$). Introduciendo esto en (5.34) podemos obtener la solución perturbativa final:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \text{Re} \left[(\vec{A}_0 + \chi\ell_P \alpha^2 (\hat{n} \times \vec{A}_0)) (L(\omega, r) - L(\omega, r_0)) e^{i(\omega\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right], \\ &\equiv \text{Re} \left[(\vec{A}_0 + \chi\ell_P \vec{\Lambda}(\eta, \omega)) e^{i(\omega\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right], \end{aligned} \quad (5.36)$$

donde $\hat{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ y la función $L(\omega, r)$ está definida por

$$L(\omega, r) = -\frac{\alpha^3 r}{9\omega^2} + \frac{2\alpha r^3}{3} + i \left(\frac{\alpha^2 r^2}{3\omega} - \omega r^4 \right), \quad (5.37)$$

con $r = \frac{\alpha}{3}(\eta - \eta_0) + t_0^{1/3}$ ó, en términos del tiempo comóvil, $r = t^{1/3}$. Notar que para obtener esta expresión hemos impuesto como condición inicial que la solución completa de la aproximación semiclásica coincida con la onda clásica asociada en el instante de emisión t_0 .

Podemos ver de la ecuación (5.36) que la solución final corresponde a una onda plana con la misma fase que la onda clásica asociada y por ende una relación de dispersión estandar. Por lo tanto, la velocidad de propagación no se ve modificada por efectos de Gravedad Cuántica. El vector de amplitud, por otra parte, presenta correcciones dependientes tanto de la frecuencia como del tiempo debido a la interacción de los fotones con el universo cuántico. Como veremos a continuación, esta interacción induce una rotación del vector de polarización de la onda inicial, mientras que su amplitud, dentro de la aproximación lineal considerada, no se ve afectada.

Para estudiar el comportamiento de las correcciones mencionadas, consideremos una onda inicial normalizada y linealmente polarizada. Si introducimos una base ortonormal con orientación derecha $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{n})$ y asumimos que el potencial de Maxwell inicial está polarizado a lo largo de la dirección \hat{e}_1 , obtenemos, tomando la parte real de (5.36)

$$\begin{aligned} \vec{A} = & [\hat{e}_1 + \chi\ell_P\hat{e}_2\text{Re}(L(\omega, r) - L(\omega, r_0))] \cos(\omega\eta - \vec{k} \cdot \vec{x}) \\ & - \chi\ell_P\hat{e}_1\alpha^2\text{Im}(L(\omega, r) - L(\omega, r_0)) \sin(\omega\eta - \vec{k} \cdot \vec{x}). \end{aligned} \quad (5.38)$$

A partir de esta expresión no podemos concluir ningún resultado cuantitativo para la corrección a la magnitud del vector amplitud, ya que obtenemos

$$|\vec{A}_0 + \chi\ell_P\vec{\Lambda}(\eta, \omega)| = |\vec{A}_0| + \mathcal{O}((\chi\ell_P)^2) \quad (5.39)$$

y hemos estado considerando, a lo largo de todo el desarrollo, la aproximación lineal (hemos, por lo tanto, descartado los términos cuadráticos en ℓ_P en los cálculos). Por otra parte, la dirección del vector de amplitud sí se ve afectada, y el ángulo de rotación θ del vector de polarización se puede obtener de (5.38), resultando en

$$\tan(\theta) = \chi\ell_P a_0 t_0^{-2/3} \sqrt{\text{Im}(L(\omega, r) - L(\omega, r_0))^2 + \text{Re}(L(\omega, r) - L(\omega, r_0))^2}. \quad (5.40)$$

Aquí θ está medido a partir de la dirección de polarización inicial de la onda,

y es una función creciente tanto del tiempo de vuelo t como de la frecuencia ω de la onda. A partir de la ecuación (5.40) es posible probar que la tangente del ángulo de polarización presenta un comportamiento creciente con el tiempo (para una frecuencia dada) con el término dominante de la forma $t^{4/3}$ (ver figura 5.1), mientras que para un instante de tiempo fijo, dicho ángulo crece linealmente con la energía del fotón (fig. 5.2).

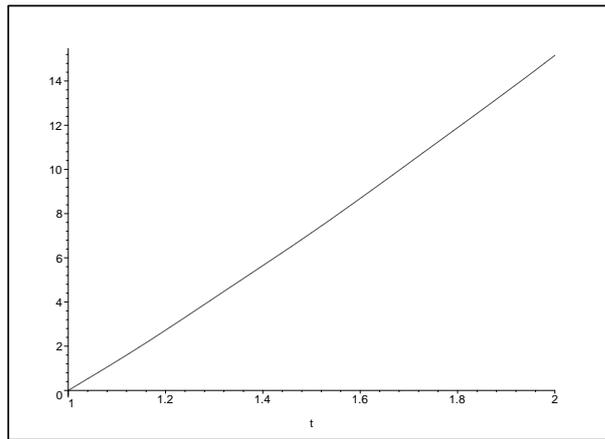


Figura 5.1: Tangente del ángulo correspondiente a la dirección de polarización de la onda como función del tiempo comovil, para una dada energía del fotón, cuyo comportamiento es de la forma $\tan(\theta) \propto t^{4/3}$.

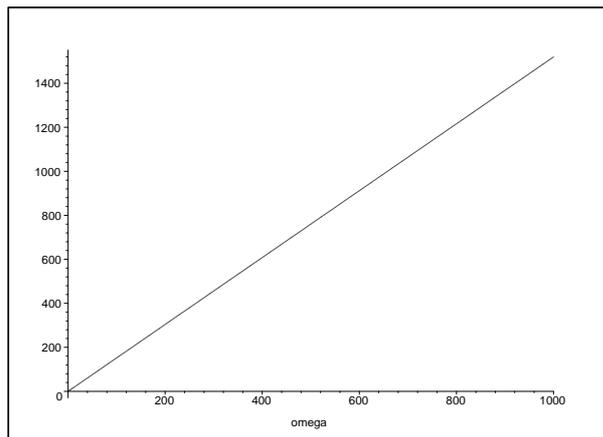


Figura 5.2: Tangente del ángulo correspondiente a la dirección de polarización de la onda como función de la frecuencia, para t fijo. El gráfico muestra un comportamiento de tipo lineal.

Es importante destacar que este resultado difiere del obtenido en el trabajo de Gambini y Pullin [2], donde la dependencia del ángulo de polarización con la energía del fotón es de tipo cuadrática. Notar, asimismo, que la solución (5.36) no presenta el efecto de birrefringencia predicho en [2], ya que en nuestro formalismo la velocidad de propagación de la onda resulta independiente tanto de la frecuencia como del estado de polarización de la misma.

La rotación del vector de polarización que hemos obtenido tiene importantes consecuencias observacionales, del tipo de las mencionadas en capítulos anteriores, a saber, si una fuente emite un paquete de onda linealmente polarizado con un espectro de energías, al viajar por el universo la dirección de polarización de los fotones de frecuencia más alta rotará un ángulo mayor que la de aquellos menos energéticos. El resultado neto sería una pérdida total de la polarización al momento de ser observado. El hecho de que se observe, sin embargo, luz proveniente de fuentes cosmológicas con un alto porcentaje de polarización lineal, es un indicativo de que el efecto, de existir, es muy pequeño (con ordenes de magnitud por debajo de la sensibilidad de los instrumentos actuales). Más aún, podríamos usar los datos observacionales disponibles, para imponer una cota superior para la constante de acoplamiento χ . Claramente, si usamos los datos de Coburn *et al* dicha cota será distinta del valor $\chi \leq 10^{-15}$ obtenida en [41], pues la misma fue calculada para un efecto de tipo cuadrático en la energía. Si suponemos dos fotones emitidos simultáneamente por una fuente cosmológica a distancia L con igual estado de polarización y de longitudes de onda λ_1 y λ_2 respectivamente, entonces, al momento de ser detectados, sus direcciones de polarización habrán rotado de manera que la diferencia entre los ángulos correspondientes estaría dada por

$$\Delta\theta = \chi_{rw} \ell_P \alpha (cL)^{4/3} \frac{c}{2\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right). \quad (5.41)$$

Para derivar esta expresión hemos usado (5.40) y, basándonos en argumentos observacionales, asumido $\theta \ll 1$ y por lo tanto $\tan(\theta) \simeq \theta$. Asimismo sólo hemos tenido en cuenta los términos dominantes de (5.40) considerando altas frecuencias y grandes distancias. Usando (5.41) podríamos, si conociéramos la constante α del factor de expansión, obtener una cota para χ_{rw} . Es de notar, sin embargo, que no contamos con datos suficientes de los parámetros del universo que permitan determinar el valor de α , lo que dificulta enormemente obtener la cota deseada. Por otro lado, para que los efectos de curvatura sean apreciables, deberíamos contar con observaciones de fuentes a redshift muy altos y que, para los datos disponibles, la aproximación de background plano es suficiente y la cota obtenida en [41] es la

más confiable.

Se podría argumentar, no obstante, que los resultados desarrollados en este capítulo no reflejan la propagación real de las ondas puesto que no tienen en cuenta los efectos de reacción de radiación en la geometría de fondo. En el siguiente capítulo trataremos de analizar el caso en que se incluyen estos efectos y probaremos que la ecuación de onda resultante para el campo de Maxwell rompe, en este caso también, la invariancia Lorentz.

Capítulo 6

Invariancia Lorentz y efectos de Reacción de Radiación

§1. Introducción

Hemos estudiado hasta ahora las condiciones bajo las cuales se mantiene o se rompe la invariancia Lorentz del campo electromagnético por efectos debidos a Gravedad Cuántica, y hemos analizado las consecuencias observacionales que se desprenden de dicha ruptura, pero siempre ignorando los términos de reacción de radiación en la métrica, es decir, hemos considerado cómo afecta el espacio-tiempo cuántico al campo de Maxwell, pero sin tener en cuenta cómo éste último afecta, a su vez, la geometría del espacio.

En particular, hemos visto que, siguiendo el enfoque de Gambini y Pullin, las ecuaciones de campo resultantes en un background plano rompen la invariancia Lorentz en la aproximación lineal si se considera que el potencial de Maxwell y el campo eléctrico son variables conjugadas, mientras que esta simetría es preservada a todo orden si imponemos la condición geométrica de que el operador asociado al campo electromagnético es la curvatura de la conexión de Maxwell.

Este último resultado permite concluir que, al ignorar los términos de reacción de radiación en la métrica, la discretización del espacio de Minkowski no rompe la Invariancia Lorentz. Una pregunta que surge naturalmente entonces es si al incluir tales términos la invariancia se verá afectada. Intentaremos responder a esta pregunta dentro del marco del formalismo de gravedad canónica de acuerdo al siguiente esquema: encontraremos el primer término perturbativo no trivial en las ecuaciones de la formulación de gravedad acoplada a electromagnetismo y construiremos los estados semiclásicos adaptados al problema, para tomar luego valor de expectación del operador asociado a la densidad Hamiltoniana de interacción y obtener finalmente las ecuaciones de campo efectivas para el campo electromagnético en la

aproximación semiclásica en presencia de backreaction¹.

§2. Propagación de fotones en presencia de reacción de radiación

En capítulos anteriores hemos considerado la propagación de ondas electromagnéticas en una geometría de fondo fija, ya sea plana o curva. Sin embargo, las ecuaciones de Einstein acoplan gravedad a todas las otras formas de energía, en particular, al campo electromagnético, por lo que esperamos que no sólo el espacio cuántico afecte la propagación del campo de Maxwell, sino que además éste último modifique, a su vez, al espacio-tiempo mismo.

Trataremos en esta sección de considerar este efecto aplicando el formalismo desarrollado en el capítulo anterior (válido para cualquier espacio curvo) a la teoría de Einstein-Maxwell completa. Para ello, primero debemos analizar si es razonable suponer que estamos dentro de las suposiciones hechas en ese capítulo, es decir, que existe una métrica clásica solución de las ecuaciones acopladas y expresada en el gauge adecuado, y que es posible construir un estado weave que aproxima dicha métrica.

Las ecuaciones clásicas que describen la teoría de Einstein-Maxwell son

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (6.1)$$

$$\nabla^{\alpha} F_{\alpha\beta} = 0, \quad (6.2)$$

$$\nabla_{[\alpha} F_{\beta]\delta} = 0, \quad (6.3)$$

donde el tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$ queda determinado por el tensor energía-impulso asociado al campo de Maxwell $F_{\alpha\beta}$, es decir

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\alpha\delta} F_{\beta}{}^{\delta} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\delta\sigma} F^{\delta\sigma} \right), \quad (6.4)$$

y ∇^{α} es la derivada covariante consistente con la métrica $g_{\alpha\beta}$.

La ecuación (6.3) será idénticamente satisfecha si asumimos que el tensor electromagnético se deriva del potencial de Maxwell según $F_{\alpha\beta} = 2\nabla_{[\alpha} A_{\beta]}$ (como venimos suponiendo a lo largo de esta tesis), por lo que la única ecuación no trivial para el campo electromagnético es (6.2).

¹Los resultados de este capítulo fueron incluidos en el trabajo *Light propagation on Quantum Curved Spacetime and Back reaction effects* [46], por C. Kozameh y F. Parisi.

Este es el sistema que acopla los campos gravitatorio y electromagnético interactuantes.

Como hemos mencionado, si queremos aplicar el formalismo desarrollado en el capítulo anterior, hay dos cosas que debemos considerar:

- i)* que existe una métrica clásica solución de (6.1) escrita en el gauge en el que $g_{tt} = -1$ y $g_{ta} = 0$ (es decir, introducimos una foliación del espacio-tiempo adaptada al campo temporal t^α , de manera que las funciones lapse y shift son $N = 1$ y $N^a = 0$ respectivamente)², y
- ii)* que es razonable asumir que podemos construir un estado semiclásico $|\psi\rangle$ que aproxima la 3-métrica q_{ab} inducida en las hipersuperficies espaciales de la foliación mencionada, es decir, tal que $\langle\psi|\hat{q}_{ab}|\psi\rangle = q_{ab}$ más correcciones de orden ℓ_P .

Si estamos en condiciones de afirmar que estas dos propiedades se cumplen, entonces podemos asumir que la ecuación de campo para el campo electromagnético en la aproximación semiclásica de LQG está dada por la expresión (5.18), con H^{ab} y e_{abc} los correspondientes a la 3-métrica q_{ab} asociada a la solución de (6.1).

§2.1. La métrica clásica

Debemos resolver las ecuaciones de campo (6.1), con $T_{\alpha\beta}$ dado por (6.4). Para ello consideraremos que el campo de Maxwell introduce una pequeña perturbación a la métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$, i.e., supondremos que el tensor electromagnético está dado por $\epsilon F_{\alpha\beta}$, con ϵ un parámetro pequeño que nos permitirá resolver las ecuaciones por medio de un desarrollo perturbativo. En ese caso, la métrica clásica está dada por

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon g_{\alpha\beta}^{(1)} + \epsilon^2 g_{\alpha\beta}^{(2)} + \dots \quad (6.5)$$

Además, supondremos que el dato libre (en la superficie inicial) de $g_{\alpha\beta}^{(1)}$, $g_{\alpha\beta}^{(2)}$, etc, es cero, ya que estamos interesados en el caso en que no hay radiación gravitacional entrante y que toda la perturbación es generada por la interacción con el campo de Maxwell.

Si insertamos (6.5) en (6.1), y consideramos expansiones perturbativas similares para el campo electromagnético y, por lo tanto, para el tensor energía impulso

²Seguimos bajo la convención en la que índices griegos (latinos) denotan componentes espacio-temporales (espaciales).

$$F_{\alpha\beta} = \epsilon(F_{\alpha\beta}^{(1)} + \epsilon F_{\alpha\beta}^{(2)} + \dots), \quad (6.6)$$

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon^2(T_{\alpha\beta}^{(2)} + \epsilon T_{\alpha\beta}^{(3)} + \dots), \quad (6.7)$$

podemos resolver las ecuaciones acopladas orden a orden y de forma recursiva, de manera que cada orden queda determinado por los ordenes previos. En esta tesis nos concentraremos en la primera corrección no trivial a los campos libres.

El término de la ecuación (6.1) que corresponde al orden lineal en ϵ es simplemente

$$G_{\alpha\beta}^{(1)} = 8\pi T_{\alpha\beta}^{(1)} \quad (6.8)$$

$$= 0, \quad (6.9)$$

puesto que el primer término no nulo del tensor energía impulso es de orden ϵ^2 y, por lo tanto, obtenemos el resultado familiar de gravedad linealizada [44]

$$\partial^\delta \partial_{(\alpha} \bar{g}_{\beta)\delta}^{(1)} - \frac{1}{2} \partial^\delta \partial_\delta \bar{g}_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma \partial^\delta \bar{g}_{\sigma\delta}^{(1)} = 0, \quad (6.10)$$

donde $\bar{g}_{\alpha\beta}^{(1)} = g_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} g^{(1)}$ con $g^{(1)} = \eta^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{(1)}$. Obviamente este resultado se reduce a la conocida ecuación de onda $\partial^\delta \partial_\delta \bar{g}_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$ si la expresamos en el gauge de Lorentz. No consideraremos aquí, sin embargo, ese gauge, sino otro consistente con la ecuación de campo (5.18). Volveremos sobre este punto más adelante.

La única solución de la ecuación (6.10) es $g_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$, ya que, como hemos mencionado, el dato inicial para esta perturbación es cero.

Por otro lado, el primer orden en ϵ de la ecuación (6.2) es

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta}^{(1)} = 0, \quad (6.11)$$

que nos dice, como es de esperar, que $F_{\alpha\beta}^{(1)}$ es el campo de Maxwell libre en un background plano.

Por lo tanto, las correcciones no triviales tanto para el campo electromagnético como para la métrica son al menos de orden ϵ^2 . La ecuación de campo para $g_{\alpha\beta}^{(2)}$ es, en analogía con (6.10),

$$\partial^\delta \partial_{(\alpha} \bar{g}_{\beta)\delta}^{(2)} - \frac{1}{2} \partial^\delta \partial_\delta \bar{g}_{\alpha\beta}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\sigma \partial^\delta \bar{g}_{\sigma\delta}^{(2)} = 8\pi T_{\alpha\beta}^{(2)}, \quad (6.12)$$

donde

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\alpha\delta}^{(1)} F_{\beta}^{(1)\delta} - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F_{\delta\sigma}^{(1)} F^{(1)\delta\sigma} \right). \quad (6.13)$$

Esta expresión prueba que la primera corrección a la métrica debido a efectos de reacción de radiación es generada por el campo de Maxwell libre. Escribiremos, por simplicidad,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon^2 \gamma_{\alpha\beta} \quad (6.14)$$

con $\gamma_{\alpha\beta}$ tal que $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$ es solución de (6.12).

Ahora bien, el formalismo desarrollado en el capítulo anterior requiere que el tensor métrico esté escrito en coordenadas en las que el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + q_{ab} dx^a dx^b. \quad (6.15)$$

Esto puede hacerse fácilmente si usamos la libertad de gauge que la ecuación (6.12) posee y que corresponde, precisamente, a la elección de coordenadas. Es sabido que bajo la transformación $x^\alpha \mapsto x^\alpha + \epsilon \xi^\alpha$, la perturbación transforma de acuerdo a $\gamma_{\alpha\beta} \mapsto \gamma_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha$ [44]. Para satisfacer (6.15), la elección de gauge debe ser tal que $\gamma_{t\beta} = 0$, lo que proporciona las cuatro condiciones que fijan el generador ξ^α de la transformación, a saber

$$\partial_t \xi_\beta + \partial_\beta \xi_t = -\gamma_{t\beta}. \quad (6.16)$$

Por lo tanto, siempre es posible expresar la métrica de la forma (6.15) y, en ese gauge particular, $\gamma_{\alpha\beta}$ sólo tiene componentes tipo espacial-espacial.

Para obtener las correcciones al campo electromagnético debido a efectos de reacción de radiación, insertamos la solución (6.14) en la ecuación de Maxwell $\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 0$, lo que da como resultado

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta}^{(2)} = 0, \quad (6.17)$$

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta}^{(3)} = \gamma^{\alpha\sigma} \partial_\sigma F_{\alpha\beta}^{(1)} + \eta^{\alpha\sigma} \left(\Gamma_{\alpha\sigma}^{(2)\delta} F_{\delta\beta}^{(1)} + \Gamma_{\beta\sigma}^{(2)\delta} F_{\alpha\delta}^{(1)} \right), \quad (6.18)$$

con $\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)\sigma}$ el símbolo de Christoffel dado por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)\sigma} = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\delta} (\partial_\alpha \gamma_{\beta\delta} + \partial_\beta \gamma_{\alpha\delta} - \partial_\delta \gamma_{\alpha\beta}). \quad (6.19)$$

Estas expresiones nos dicen que la primera corrección no trivial al campo de Maxwell es $F_{\alpha\beta}^{(3)}$, puesto que podemos usar un argumento análogo al presentado para concluir que $g_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$; a saber, que las únicas ondas entrantes son las que corresponden al campo electromagnético libre $F_{\alpha\beta}^{(1)}$ y, dado que no hay fuente que lo genere, $F_{\alpha\beta}^{(2)}$ debe ser cero.

Por lo tanto, los vectores (espaciales) campo eléctrico y magnético serán de la forma

$$E_a = \epsilon E_a^{(1)} + \epsilon^3 E_a^{(3)} + \dots, \quad (6.20)$$

$$B_a = \epsilon B_a^{(1)} + \epsilon^3 B_a^{(3)} + \dots \quad (6.21)$$

En el formalismo perturbativo descripto, hemos visto que cada orden en la expansión puede obtenerse a partir de los órdenes anteriores, tanto para la métrica como para el campo electromagnético. Podríamos continuar con este esquema para obtener las correcciones de orden superior debidas a la reacción en la métrica, sin embargo, nos detendremos aquí pues estamos interesados sólo en la primera corrección no trivial, que está dada, para la teoría de Einstein-Maxwell, por las soluciones de las ecuaciones (6.12) para el tensor métrico y (6.18) para el campo electromagnético.

Hemos probado entonces la condición *i*), a saber, que es posible encontrar una métrica solución de las ecuaciones acopladas de Einstein-Maxwell y escribirla en el gauge en el que $g_{tt} = -1$ y $g_{ta} = 0$. Sólo nos resta considerar si es posible construir un estado semiclásico que aproxima esa métrica en particular (condición *ii*).

§2.2. El estado semiclásico

Estamos interesados en un estado semiclásico $|\psi\rangle$ que cumpla la siguiente condición:

- Posee un pico pronunciado en la 3-métrica clásica que acabamos de obtener, es decir,

$$\langle \psi | \hat{q}_{ab} | \psi \rangle = q_{ab \text{ class}} + \mathcal{O}(\ell_P) \quad (6.22)$$

$$= \delta_{ab} + \epsilon^2 \gamma_{ab} + \mathcal{O}(\ell_P). \quad (6.23)$$

Intentaremos derivar aquí una solución formal a este problema.

Como primer paso, notemos que en el enfoque preturbativo que estamos considerando, el Hamiltoniano está dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \epsilon^2 \mathcal{H}_2, \quad (6.24)$$

donde \mathcal{H}_0 es el vínculo Hamiltoniano correspondiente a gravedad pura, y \mathcal{H}_2 es la perturbación introducida por el campo de Maxwell (que es simplemente el

término usual tipo “ $q_{ab}(E^a E^b + B^a B^b)$ ”) y que describe el acoplamiento entre los dos campos. En ese caso, es razonable proponer que, similarmente, el estado semiclásico toma la forma

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + \epsilon^2 |\psi_2\rangle, \quad (6.25)$$

con $|\psi_0\rangle$ el estado (conocido) para el Hamiltoniano no perturbado (por ejemplo, el estado weave para el espacio plano $|\Delta\rangle$), y que por lo tanto satisface $\mathcal{H}_0|\psi_0\rangle = 0$ y $\langle\psi_0|\hat{q}_{ab}|\psi_0\rangle = \delta_{ab} + \mathcal{O}(\ell_P)$; mientras que $|\psi_2\rangle$ es la corrección debida al campo electromagnético.

Ahora bien, para que la condición de pico pronunciado en la geometría clásica sea satisfecha, la perturbación $|\psi_2\rangle$ debe ser tal que se cumpla

$$2\text{Re}(\langle\psi_0|\hat{q}_{ab}|\psi_2\rangle) = \gamma_{ab} \quad (6.26)$$

modulo correcciones del orden de ℓ_P .

Asumimos en adelante que es posible encontrar un estado $|\psi_2\rangle$ que satisface esta condición y que, en consecuencia, aproxima la métrica clásica derivada en la subsección previa hasta orden lineal en ℓ_P .

En ese caso, hemos construido entonces formalmente y en forma perturbativa tanto la métrica clásica solución de las ecuaciones de Einstein teniendo en cuenta efectos de reacción de radiación expresada en el gauge apropiado, como el estado semiclásico que aproxima dicha métrica. Estamos, por lo tanto, dentro de las suposiciones hechas para derivar la ecuación (5.18), lo que nos permitirá aplicar, en la próxima sección, el formalismo desarrollado en el capítulo anterior a la propagación de ondas electromagnéticas en gravedad cuántica, bajo efectos de backreaction.

§3. Las ecuaciones de campo: propagación de fotones con backreaction

Recordemos del capítulo 5 que las ecuaciones de campo están dadas por

$$\begin{aligned} \partial_t A_a &= -E_a, \\ \partial_t(H^{ab}E_b) &= H^{ab}e_b{}^{cd}\nabla_c B_d. \end{aligned} \quad (6.27)$$

donde el operador métrico H^{ab} asociado a una dada 3-métrica clásica q_{ab} (cuyo determinante es q) es

$$H^{ab} = \sqrt{q} (q^{ab} + 2\chi\ell_P\sqrt{q} e^{abc}\nabla_c). \quad (6.28)$$

En el caso que estamos considerando, tanto el tensor métrico como el campo electromagnético están dados como desarrollos perturbativos, i.e., conservando sólo la primera corrección no trivial,

$$q_{ab} = \delta_{ab} + \epsilon^2 \gamma_{ab}, \quad (6.29)$$

$$F_{\alpha\beta} = \epsilon F_{\alpha\beta}^{(1)} + \epsilon^3 F_{\alpha\beta}^{(3)}, \quad (6.30)$$

y, por lo tanto, el operador H^{ab} está asimismo dado en forma perturbativa

$$H^{ab} = H^{(0)ab} + \epsilon^2 H^{(2)ab} \quad (6.31)$$

con

$$H^{(0)ab} = \delta^{ab} + 2\chi\ell_P \epsilon^{abc} \partial_c, \quad (6.32)$$

$$H^{(2)ab} = \left(\frac{1}{2} \delta^{ab} \gamma - \gamma^{ab} \right) + 2\chi\ell_P \left((\tilde{e}^{abc} + \gamma \epsilon^{abc}) \partial_c + \epsilon^{abc} \nabla_c^{(2)} \right). \quad (6.33)$$

En estas expresiones γ es la traza de γ_{ab} , i.e., $\gamma = \delta^{ab} \gamma_{ab}$, y \tilde{e}^{abc} y $\nabla_a^{(2)}$ representan la primera corrección no trivial a e^{abc} y a la derivada covariante tridimensional consistente con q_{ab} , respectivamente, i.e.,

$$\tilde{e}^{abc} = \frac{1}{2} \gamma \epsilon^{abc} - 3\epsilon^{[ab} \gamma^{c]d}, \quad (6.34)$$

mientras que $\nabla_a^{(2)}$ aplicado a un co-vector C_b está dado por

$$\nabla_a^{(2)} C_b = -\frac{1}{2} (\partial_a \gamma_{bd} + \partial_b \gamma_{ad} - \partial_d \gamma_{ab}) \delta^{cd} C_c. \quad (6.35)$$

Es de notar que el orden cero del operador métrico (ec. (6.32)) es, hasta orden lineal en ℓ_P y como es de esperar dado que estamos haciendo perturbaciones de Minkowski, simplemente el operador plano obtenido en el capítulo 4 (ver ec. (4.30)) [42], [43].

Por otra parte, el desarrollo perturbativo (6.30) da lugar a expansiones similares de los campos eléctrico y magnético (ver ecs. (6.20) y (6.21)) las cuales, insertadas en las ecuaciones de campo (6.27), junto con (6.32) y (6.33), resultan en

$$\partial_t \vec{A}^{(1)} = -\vec{E}^{(1)}, \quad (6.36)$$

$$\partial_t (\vec{E}^{(1)} + 2\chi\ell_P \nabla \times \vec{E}^{(1)}) = \nabla \times (\vec{B}^{(1)} + 2\chi\ell_P \nabla \times \vec{B}^{(1)}), \quad (6.37)$$

para el primer orden, correspondiente al campo de Maxwell libre propagándose en un background plano (hemos adoptado, una vez más, notación vectorial), y

$$\begin{aligned}\partial_t A_a^{(3)} &= -E_a^{(3)}, \\ \partial_t(H^{(0)ab}E_b^{(3)}) - H^{(0)ab}\epsilon_b^{cd}\partial_c B_d^{(3)} &= -[\partial_t(H^{(0)ab}E_b^{(1)}) - H^{(2)ab}\epsilon_b^{cd}\partial_c B_d^{(1)}] \\ &\quad + H^{(0)ab}[\tilde{\epsilon}_b^{cd}\partial_c + \epsilon_b^{cd}\nabla_c^{(2)}]B_d^{(1)},\end{aligned}$$

para la corrección generada por efectos de reacción de radiación. Las ecuaciones para el campo libre (6.36) y (6.37) coinciden, por supuesto, con las obtenidas en los capítulos 3 y 4 ([42], [43]), y preservan la invariancia Lorentz, mientras que las correcciones debido al backreaction rompen esta simetría.

La manera más simple de demostrar esto es considerando la ecuación tipo onda que debe satisfacer el potencial (ec. (5.19)), en la que resultaba claro el término responsable de la ruptura de covariancia. De esta expresión habíamos concluido que la Invariancia se rompería cada vez que la derivada temporal de \sqrt{q} fuera distinta de cero. En nuestro enfoque perturbativo, esta cantidad está dada por

$$\sqrt{q} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon^2\gamma, \quad (6.38)$$

cuya derivada temporal es, en general, no nula. Por lo tanto, concluimos que, aún para una métrica de fondo plana, las ecuaciones resultantes que describen la propagación de ondas electromagnéticas rompen la invariancia Lorentz si tomamos en cuenta los efectos que surgen por reacción de radiación.

Sólo por completitud mencionamos que esta ecuación de onda se reduce, en el caso de interés, a las siguientes expresiones:

Para el campo de Maxwell libre

$$\square A_b^{(1)} = 0, \quad (6.39)$$

y, para la corrección por reacción de radiación,

$$\begin{aligned}[(1 - 2\chi\ell_P\nabla\times)\square A^{(3)}]^a &= -\partial_t(H^{(2)ab}E_b^{(1)}) \\ &\quad + (\epsilon_b^{cd}(H^{(0)ab}\nabla_c^{(2)} + H^{(2)ab}\partial_c) + \tilde{\epsilon}_b^{cd}H^{(0)ab}\partial_c)B_d^{(1)},\end{aligned}$$

donde $\square \equiv \partial_t^2 - \nabla^2$ con ∇^2 el operador Laplaciano plano. Si bien no contamos con soluciones para estas ecuaciones por ser muy complicadas de resolver, podemos conjeturar que las mismas presentarán efectos medibles similares a los obtenidos en el caso de la propagación de ondas electromagnéticas en el espacio de FRW. Sin embargo, la posibilidad de medir cualquier efecto que surja de tener en cuenta la reacción en la métrica es ínfima, ya que éste sería de un orden de magnitud mucho menor al predicho en el capítulo anterior. Esto se debe a que las correcciones debido a backreaction son desde un comienzo de orden ϵ^2 , y los

apartamientos de los valores clásicos son además de orden χ^{ℓ_P} , por lo que concluimos que, en vista de que ni siquiera se han detectado hasta el momento los efectos predichos para la propagación en un background fijo, es imposible esperar corroboración experimental, con la tecnología actual, de los resultados presentados en este capítulo.

Capítulo 7

Resumen y comentarios finales

En esta tesis hemos centrado nuestra atención en el estudio y análisis de la interacción entre los campos gravitatorio y electromagnético cuánticos en la aproximación semiclásica. La principal motivación para ello es la posibilidad de poner a prueba los resultados obtenidos mediante observaciones de fenómenos de tipo cosmológico que podrían servir para verificar los formalismos que modelan la cuantización del campo gravitatorio.

Como hemos mencionado al comienzo de esta tesis, desarrollar una teoría de Gravedad Cuántica se ha convertido en una de las áreas de investigación más activas en ciencia y permitiría completar la unificación de todas las leyes fundamentales de la física. El problema que enfrenta la unificación de RG con mecánica cuántica es que ambas partes parecen ser incompatibles, tanto conceptual como prácticamente. Desde el punto de vista conceptual, es la naturaleza misma del espacio y el tiempo lo que presenta la mayor dificultad, aunque existen, sin embargo, otras inconsistencias que dificultan la fusión de ambas teorías. Hemos descrito los diversos formalismos desarrollados a lo largo de los últimos años que intentan resolver estas inconsistencias y que, si bien han logrado un progreso considerable en la cuantización de la gravedad, no proporcionan una Teoría Cuántica de la Relatividad General completa y satisfactoria. Es ahí donde radica la importancia de obtener resultados verificables experimentalmente, ya que esto podría hechar luz sobre la forma que debería adoptar la teoría final.

Hay un punto importante, no obstante, que el estado de las investigaciones deja claro: no es posible formular una teoría completa sin un cambio fundamental en la manera en que estamos acostumbrados a pensar sobre el espacio-tiempo y para enfrentar el desafío que presenta la Gravedad Cuántica debemos estar abiertos a nuevos principios e ideas ya que, si bien se espera que algunas propiedades de la teoría clásica se mantengan cuando se promueven los campos a operadores

cuánticos, es posible que algunos de los aspectos que parecen más intuitivos deban abandonarse.

Nos hemos adentrado con cierto detalle en el formalismo de Gravedad Cuántica de Lazos (LQG) que representa uno de las propuestas más prometedoras cuando se trata de cuantizar el campo gravitatorio, ya que cuenta con muchas de las propiedades que se esperan de una teoría consistente de GC. El formalismo, como hemos visto, define una teoría matemáticamente rigurosa, no perturbativa e independiente de la métrica de fondo, de Gravedad Cuántica en cuatro dimensiones y se trata de un enfoque minimalista, en el sentido de que simplemente analiza las consecuencias lógicas de combinar los principios de RG con los de mecánica cuántica

LQG proporciona, en una forma cerrada, un método que resulta en la construcción de un espacio de Hilbert constituido por estados invariantes de gauge y ante difeomorfismos, junto con su producto interno.

Por otra parte, el procedimiento de cuantización propuesto en LQG consiste entonces en promover las variables de configuración y los momentos a operadores en este espacio de Hilbert, sujetos a relaciones de conmutación análogas a los corchetes de Poisson clásicos.

Hemos dado un repaso del procedimiento de regularización desarrollado dentro de la formulación de LQG que resulta en operadores covariantemente invariantes y finitos que representan ciertas funciones clásicas en el espacio de fase. Este método de regularización muestra que el campo gravitacional actúa como regularizador natural y consiste en introducir un “point splitting” que, cuando se aplica al operador asociado al vínculo Hamiltoniano, resulta en un operador completamente finito. La propuesta se basa en la incorporación de una triangulación de la foliación de hipersuperficies espaciales del espacio-tiempo, y en considerar al operador de volumen en la hipersuperficie como un regularizador conveniente (ya que su acción sobre estados de redes de spin es finita) para luego tomar el límite continuo.

Para contar con una aproximación semiclásica de la teoría de Einstein-Maxwell hemos descrito los estados semiclásicos desarrollados en la literatura y que permiten la implementación de dicha aproximación al definir un Hamiltoniano efectivo a partir del cual se derivan las ecuaciones semiclásicas de propagación para el campo electromagnético. El mismo se obtiene calculando el valor de expectación del vínculo Hamiltoniano cuántico regularizado en los estados mencionados, dentro del cual los operadores se expanden alrededor de los vértices relevantes de la triangulación en potencias de la longitud de Planck ℓ_P . Los estados que hemos usado consisten en el producto directo de estados coherentes para el sector de Maxwell

y estados weave para el gravitatorio y vimos que, de este modo, es posible definir una densidad Hamiltoniana efectiva de interacción escrita en términos de los campos eléctrico y magnético cuyas ecuaciones de Hamilton proporcionan, una vez determinada la relación entre dichos campos y las variables canónicas, ecuaciones de Maxwell modificadas por acción de gravedad cuántica.

En particular, si suponemos, extrapolando a partir de electromagnetismo clásico, que el espacio de fase está formado por el potencial de Maxwell y el campo eléctrico (este es el enfoque adoptado por Gambini y Pullin), obtenemos un Hamiltoniano efectivo que, en la aproximación lineal, viola paridad e invariancia Lorentz y que predice dos efectos sobre la propagación de la radiación electromagnética que podrían ser detectados: por un lado la velocidad de los fotones dependería de su energía, mientras que por otro existiría una dependencia adicional de esta velocidad con la helicidad de los fotones.

Asimismo hemos analizado las ecuaciones fenomenológicas para la interacción del campo de Maxwell con gravedad semiclásica mediante la introducción de corrientes efectivas debido a la discretización del espacio y vimos que, hasta orden lineal, existe una única manera de obtener relaciones de dispersión distintas de la usual que resulten en efectos medibles: ecuaciones con constantes de acoplamiento que violen paridad. Este es el tipo de predicción verificable que mencionábamos y que podrían proporcionar una pista sobre la forma de la teoría final.

Ahora bien, ninguno de estos efectos ha sido detectado con la tecnología existente en la actualidad. Más aún, las observaciones disponibles establecen cotas muy restrictivas a los modelos descritos por lo que, en vista de estas evidencias y de la ambigüedad de dichos modelos, resulta justo preguntarse si es posible desarrollar un formalismo que preserve la invariancia Lorentz.

Hemos probado que si cambiamos la suposición de que el potencial de Maxwell y el campo eléctrico son variables conjugadas por la interpretación geométrica de que el tensor electromagnético es la curvatura de la conexión de Maxwell, obtenemos ecuaciones de campo invariantes Lorentz no sólo en la aproximación lineal, sino a todo orden en la longitud de Planck, cuando la métrica de fondo es plana.

Queda claro, por lo tanto, que el hecho de que la invariancia Lorentz se rompa o no depende fuertemente de la relación específica entre los campos y el potencial de Maxwell. Asumiendo la condición simple $\hat{F} = d\hat{A}$ hemos obtenido un único $E_a(\pi^b)$ que no es canónicamente conjugado a A_a y, más importante aún, que si tomamos en cuenta el volumen típico del estado weave para obtener el valor de expectación de la densidad de energía (la cual debe ser invariante rotacional) y

asumimos que el campo de Maxwell admite una expansión de Taylor (tomando la longitud de Planck como parámetro de expansión), las ecuaciones de campo resultantes son invariantes Lorentz. Dicho de otra manera, la discretización del espacio plano introducida por los estados weave no modifica las propiedades invariantes del campo clásico.

Puesto que para derivar los resultados anteriores hemos usado solamente la invariancia ante rotaciones de la densidad de energía, éstos deberían seguir siendo válidos para cualquier estado cuántico del espacio plano invariante rotacional, siempre que se mantenga el mismo procedimiento de regularización para construir el operador densidad de energía.

Estas conclusiones se pueden generalizar, asimismo, para cualquier tipo de interacción entre el espacio-tiempo de Minkowski cuántico y el campo electromagnético que podría surgir de la cuantización de la teoría, siempre que la misma esté descrita por un Hamiltoniano de tipo lineal en la métrica y cuadrático en las variables de Maxwell, y si se usan estados semiclásicos formados por producto directo de estados invariantes rotacionales para el sector de gravedad y estados coherentes para el campo de electromagnético. Similarmente, para Hamiltonianos cúbicos no se esperan apartamientos apreciables con respecto a las ecuaciones clásicas debidos a la decoherencia del estado cuántico. Por lo tanto sólo podrían surgir efectos debido a la cuantización si consideramos un Hamiltoniano de interacción de grado cuatro o mayor en el campo electromagnético. Este tipo de interacción daría como resultado una pérdida de coherencia de la onda al propagarse por el espacio-tiempo luego de un tiempo finito (tiempo de Ehrenfest), a partir del cual el formalismo dejaría de ser válido, independientemente del esquema de cuantización del campo métrico que se siga.

Por otra parte hemos estudiado a continuación la propagación de fotones en un espacio curvo cuántico arbitrario en la aproximación semiclásica de LQG. Se calculó el Hamiltoniano efectivo de interacción para los campos gravitatorio y electromagnético para este caso y se derivaron las ecuaciones de campo correspondientes, las cuales pueden combinarse para obtener una ecuación de onda modificada para el potencial de Maxwell.

En el caso particular de un background plano, esta ecuación de onda se reduce a la propagación invariante Lorentz obtenida anteriormente. Este resultado también es válido para cualquier geometría de fondo estacionaria, pero deja de ser cierto en el caso general, en el que la ecuación de onda contiene un término que rompe covariancia y que está relacionado con la derivada temporal del elemento

de volumen de la 3-métrica espacial.

Como un ejemplo de este resultado, estudiamos la propagación de luz en un espacio de FRW con secciones espaciales planas y dominado por materia, y resolvimos la ecuación de onda obteniendo un efecto inducido en la propagación debido a Gravedad Cuántica, a saber, que la dirección de polarización de una onda plana inicialmente polarizada en forma lineal rota al viajar por el universo con un ángulo dependiente de la frecuencia. Este efecto tiene importantes implicancias observacionales, tal como la pérdida de polarización de un paquete de onda inicialmente linealmente polarizado con un espectro de energías. Notar, además, que la dirección de polarización tiene una dependencia lineal con la energía del fotón, por lo que el resultado obtenido difiere del predicho por Gambini y Pullin, donde la dependencia es cuadrática. Por otro lado, en nuestro formalismo, la relación de dispersión no se ve afectada, la velocidad de propagación de las ondas es constante (independiente de la energía y del estado de polarización) por lo que tampoco aparecerían los efectos de birrefringencia y retardo temporal.

El hecho de que se observe, no obstante, radiación con un gran porcentaje de polarización lineal es un indicativo de que, si este efecto existe en realidad, debe ser mucho más pequeño de lo esperado y, más aún, usando datos observacionales recientes es posible establecer una cota muy estricta en la constante de acoplamiento χ [36], [41].

Asimismo, tener en cuenta los efectos de reacción de radiación en la métrica también rompe la invariancia y, si bien no hemos resuelto las ecuaciones, es razonable suponer que la propagación de ondas electromagnéticas presentará efectos similares a los obtenidos para el espacio FRW. Sin embargo, en este caso, cualquier efecto inducido, de existir, sería mucho más difícil de observar dado que es de orden superior: las correcciones son de orden cuadrático en el pequeño parámetro ϵ y, además, de orden $\chi \ell_p$.

El hecho de que las observaciones parecen apoyar las invariancia Lorentz nos lleva a preguntarnos si el formalismo canónico es correcto, o si es necesario hacer una profunda revisión de las suposiciones hechas en la teoría. Es nuestra opinión que el problema podría yacer en la manera en que la formulación canónica trata la coordenada temporal y/o en las propiedades de los estados semiclásicos utilizados. En LQG, como en cualquier esquema de cuantización canónica, la variable temporal es tratada como una cantidad clásica, mientras la métrica tridimensional inducida en las hipersuperficies Σ_t es cuantizada resultando en una estructura tipo granular de las secciones espaciales. Esto suena en contra del espíritu de Rela-

tividad General, ya que la Teoría de Gravitación de Einstein está formulada en forma totalmente covariante e invariante ante difeomorfismos, donde las cuatro coordenadas del espacio-tiempo son tratadas en pie de igualdad y, aparte de su naturaleza tipo temporal o espacial, no existe ninguna diferencia entre ellas. Por otro lado, los estados semiclásicos que existen en la literatura (en particular los estados weave utilizados a lo largo de esta tesis), si bien son soluciones del vínculo Hamiltoniano, no satisfacen el vínculo asociado a la invariancia ante difeomorfismos ya que están definidos sobre las hipersuperficies espaciales Σ_t de la foliación en la que se fija, desde un principio (antes de la cuantización), un gauge particular (aquel en el que $N = 1$ y $N^a = 0$). No obstante, estos estados sí son invariantes ante difeomorfismos espaciales (no cuatridimensionales), que se trata justamente de la condición que hemos usado para definir un Hamiltoniano efectivo invariante ante rotaciones.

Notar además que se podría argumentar que, para el caso de métricas no estacionarias, la suposición de que existe un estado weave que no evoluciona (es decir, que se define en la superficie inicial y queda fijo) y que aproxima dicha métrica para todo tiempo es muy fuerte. En efecto, si la 3-métrica presenta una evolución no trivial, la misma se encuentra codificada en su variable conjugada (directamente relacionada con la curvatura extrínseca de la hipersuperficie) y, puesto que el weave no cumple las propiedades de un estado coherente (que aproxima, además de la variable de configuración, su conjugado canónico), al tomar valor de expectación no hay control sobre $\partial_t \langle \hat{q}_{ab} \rangle$ y podría suceder que $\langle \hat{q}_{ab} \rangle$ se aparte del valor clásico luego de un tiempo corto. Más aún, existen indicios ([24], [25]) de que, para el caso de geometrías curvas arbitrarias, los estados weave no son aniquilados por el vínculo Hamiltoniano y, como consecuencia, sería plausible que no constituyan estados físicos. Claramente una solución a estos problemas sería construir estados coherentes para el campo métrico (en lugar de los existentes en la literatura que aproximan la conexión) tales que sean aniquilados por el vínculo Hamiltoniano. Sin embargo esto representa una tarea sumamente difícil de llevar a cabo ya que, como hemos mencionado, resolver el dicho vínculo en las variables ADM (Ec. de Wheeler-De Witt) resulta muy complejo (fue por ese motivo, justamente, que introdujimos las variables de Ashtekar). Por otra parte, no existen en la actualidad otros candidatos de estados semiclásicos de los que se pueda afirmar, sin lugar a dudas, que aproximen la geometría clásica para todo instante de tiempo y, con las herramientas disponibles y considerando el estado actualmente limitado de las investigaciones, nuestra suposición de trabajo es la única que permite hacer algún tipo de predicción.

Con estas observaciones en mente surgen algunos aspectos que uno podría cuestionarse: ¿Es posible construir una base de estados físicos semiclásicos que aproxi-

men la métrica clásica para todo tiempo y que sean completamente invariantes ante difeomorfismos (cuadridimensionales)? Además, ¿Es razonable considerar una de las coordenadas continua, mientras las otras presentan la apariencia granular mencionada? ¿O debería el espacio-tiempo completo presentar dicha apariencia? Una posible propuesta sería introducir, además del operador cuántico \hat{q}_{ab} , un operador temporal autoadjunto \hat{T} tal que conmute con el operador asociado al elemento de volumen 3-dimensional, cuya variación con respecto al tiempo es la responsable de la ruptura de covariancia. En ese caso, al considerar la aproximación semiclásica, dicho elemento de volumen se conservaría en la evolución temporal y la teoría efectiva resultaría covariante. Por supuesto que implementar esta idea requeriría una reformulación completa desde primeros principios del formalismo y, si bien no sabemos cómo hacerlo, conjeturamos que una vez resuelto este “problema del tiempo”, y si además es posible introducir estados semiclásicos físicos e invariantes ante difeomorfismos, será posible formular la teoría en forma completamente covariante y de manera que preserve la invariancia Lorentz. Futuras investigaciones nos propocionarán herramientas para saber si esta conjetura es cierta, o si debemos abandonar la idea de un formalismo invariante Lorentz. Creemos, sin embargo, que vale la pena prestar atención a estas aparentes inconsistencias de la teoría de Gravedad Canónica de lazos.

Un punto que queda claro es que, si bien se han logrado grandes avances en el área, aún nos resta un largo camino por recorrer para obtener una Teoría Cuántica de la Gravedad completa y satisfactoria y, en el estado actual de las investigaciones, la pregunta de si vivimos en un universo que localmente preserva la invariancia Lorentz o no es difícil de responder con certeza definitiva. Futuras observaciones, así como nuevas propuestas teóricas en la materia, servirán para aproximarnos a la respuesta. Sin embargo, teniendo en cuenta los datos existentes y lo expuesto en esta tesis, es nuestra conclusión que no hay razón evidente para creer que una Teoría Cuántica de la Gravedad deba cambiar la invariancia y conjeturamos que la misma se mantendrá en la interacción entre fotones y gravitones.

Bibliografía

- [1] G. Amelino-Camelia, J. Ellis, N.E. Mavromatos, D.V. Nanopoulos and S. Sarkar, *Tests of quantum gravity from observations of γ -ray bursts*, Nature, **393**, 763 (1998).
J. Ellis, N.E. Mavromatos and D.V. Nanopoulos, *Search for quantum gravity*, Gen. Rel. Grav., **31**, 1257 [gr-qc/9905048] (1999).
- [2] R. Gambini and J. Pullin, *Nonstandard optics from quantum spacetime*, Phys. Rev. D, **59**, 124021 (1999).
- [3] M.H. Goroff, A. Sagnotti, *The ultraviolet behavior of Einstein gravity*, Nucl. Phys., **B266**, 709 (1986).
- [4] M.B. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1987).
- [5] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity I: The Canonical Theory*, Phys. Rev., **160**, 1113 (1967); *Quantum Theory of Gravity II: The Manifestly Covariant Theory*, Phys. Rev., **162**, 1195 (1967); *Quantum Theory of Gravity III: Applications of the Covariant Theory*, Phys. Rev., **162**, 1239 (1967).
J. A. Wheeler, *Geometrodynamics*, Academic Press, New York (1962).
- [6] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London (1994).
G. Landi, *An Introduction to Non-Commutative Spaces and Their Geometries*, Springer Verlag, Berlin (1997).
- [7] R. Penrose, *Twistor Theory and the Einstein Vacuum*, Class. Quant. Grav., **16**, A113 (1999).
- [8] C. Rovelli and L. Smolin, *Loop space representation of quantum general relativity*, Nucl. Phys. **B331**, 80 (1990).
- [9] A. Ashtekar and J. D. Romano, *Spatial infinity as a boundary of spacetime*, Class. Quant. Grav., **9**, 1069, (1992).

- [10] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. T. Thiemann, *Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom*, JMP, **36**, 519, [gr-qc/9504018](1995).
- [11] A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Quantum Geometry I: area operator*, J.Geom.Phys., **17**, 191, [gr-qc/9602046, hep-th/9412073] (1995).
- [12] J. Lewandowski, *Volume and quantization*, Class.Quant.Grav., **14**, 71, [gr-qc/9602035] (1997).
- [13] J. Lewandowski and T. Thiemann, *Diffeomorphism-invariant quantum field theories of connections in terms of webs*, Class. Quant. Grav. **16**, 2299, [gr-qc/9901015] (1999).
- [14] D.V. Ahluwalia, *Quantum gravity: testing times for theories*, Nature, **398**, 199 (1999).
- [15] G.Z. Adunas, E. Rodriguez-Milla and D.V. Ahluwalia, *Probing quantum aspects of gravity*, Phys. Letts., **B485**,215, [gr-qc/0006021](2000).
- [16] G.Z. Adunas, E. Rodriguez-Milla and D.V. Ahluwalia, *Probing quantum violations of the equivalence principle*, Gen. Rel. Grav., **33**, 183, [gr-qc/0006022](2001).
- [17] D.V. Ahluwalia, C.A. Ortiz and G.Z. Adunas, *Robust flavor equalization of cosmic neutrino flux by quasi bimaximal mixing*, [hep-ph/0006092] (2000).
- [18] J. Alfaro, H. Morales - Técoatl, L. Urrutia, *Loop quantum gravity and light propagation*, Phys. Rev. D, **65**, 103509 (2002).
- [19] H. Sahlmann and T. Thiemann 2002 *Towards the QFT on Curved Spacetime Limit of QGR II: A Concrete Implementation*, Class.Quant.Grav., **23**, 909, [gr-qc/0207031] (2006).
- [20] T. Thiemann, *QSD5: Quantum gravity as the natural regulator of matter quantum field theories*, Class. Quant. Grav., **15**, 1281 (1998); *Quantum Spin Dynamics (QSD)*, Class. Quant. Grav., **15**, 839 (1998).
- [21] L. Urrutia, *Loop Quantum Gravity and light propagation*, Mod. Phys. Lett., **A17**, 943 (2002).
- [22] T. Thiemann, *Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity*, Pre-print AEI-2001-119, [gr-qc/0110034] (2001).

- [23] A. Ashtekar, C. Rovelli, L. Smolin, *Weaving a Classical Geometry with Quantum Threads*, Phys.Rev.Lett., **69**, 237, [hep-th/9203079] (1992).
- [24] J. Zegwaard, *Weaving of Curved Geometries*, Phys.Lett. B, **300**, 217, [hep-th/9210033] (1993).
- [25] J. Zegwaard, *Gravitons in Loop Quantum Gravity*, Nucl.Phys.B **378**, 288 (1992).
J. Iwasaki, C. Rovelli, *Gravitons as Embroidery of the Weave*, Int.J.Mod.Phys.D **1**, 533 (1993).
J. Iwasaki, C. Rovelli, *Gravitons from Loops: Nonperturbative Loop Space Quantum Gravity Contains The Graviton Physics Approximation*, Class.Quant.Grav., **11**, 1653 (1994).
Y. Ma, Y. Ling, *The Classical Geometry from a Physical State in Canonical Quantum Gravity*, Phys.Rev.D **62**, 064030,[gr-qc/0004070] (2000).
- [26] M. Arnsdorf, Sameer Gupta, *Loop Quantum Gravity on Noncompact Spaces*, Nucl.Phys.B, **577**, 529, [gr-qc/9909053] (2000).
M. Arnsdorf, *Approximating Connections in Loop Quantum Gravity*, [gr-qc/9910084] (1999).
- [27] L. Bombelli, *Statistical Lorentzian Geometry and the Closeness of Lorentzian Manifolds*, J.Math.Phys., **41**, 6944, [gr-qc/0002053] (2000).
- [28] C. Itzykson, J.-M.Drouffe, *Statistical Field Theory*, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge (1989).
- [29] T. Thiemann, *Quantum Spin Dynamics (QSD): VII. Symplectic Structures and Continuum Lattice Formulations of Gauge Field Theories*, Class.Quant.Grav., **18**, 3293, [hep-th/0005232] (2001).
T. Thiemann, *Gauge Field Theory Coherent States (GCS): I. General Properties*, Class.Quant.Grav., **18**, 2025, [hep-th/0005233] (2001).
- [30] T. Thiemann, O. Winkler, *Gauge Field Theory Coherent States (GCS): II. Peakedness Properties*, Class.Quant.Grav., **18**, 2561, [hep-th/0005237] (2001).
T. Thiemann, O. Winkler, *Gauge Field Theory Coherent States (GCS): III. Ehrenfest Theorems*, Class.Quant.Grav., **18**, 4629, [hep-th/0005234] (2001).
- [31] T. Thiemann, O. Winkler, *Gauge Field Theory Coherent States (GCS) IV: Infinite Tensor Product and Thermodynamical Limit*, Class.Quant.Grav., **18**, 4997, [hep-th/0005235] (2001).

- [32] H. Sahlmann, T. Thiemann, O. Winkler, *Coherent States for Canonical Quantum General Relativity and the Infinite Tensor product Extension*, Nucl.Phys.B, **606**, 401, [gr-qc/0102038] (2001).
- [33] T. Thiemann, *Complexifier Coherent States for Quantum General Relativity*, Class.Quant.Grav, **23**, 2063 (2006).
- [34] T. Thiemann, *Anomaly-free formulation of non-perturbative, four-dimensional, Lorentzian quantum gravity*, Harvard University Preprint HUTMP-96/B-350, Physics Lett. N, **380**, 257, [gr-qc/960688] (1996).
- [35] T. Thiemann, *Quantum Spin Dynamics (QSD)*, Harvard University Preprint HUTMP-96/B-359, [gr-qc/96066089] (1996).
T. Thiemann, *Quantum Spin Dynamics (QSD) II : The Kernel of the Wheeler-DeWitt Constraint Operator*, Harvard University Preprint HUTMP-96/B-352, [gr-qc/9606090] (1996).
- [36] R. J. Gleiser and C. N. Kozameh, *Astrophysical limits on quantum gravity motivated birefringence*, Phys. Rev. D, **64**, 083007, (2001).
- [37] M. S. Brotherton, H. D. Tran, W. van Breugel, A. Dey and R. Antonucci *Spectropolarimetry of FIRST Broad Absorption Line Quasars* Astrophys. Jour. Lett., **v.487**, p.L113 (1997).
- [38] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, *Lorentz violation and Crab synchrotron emission: a new constraint far beyond the Planck scale*, Nature, **424** 1019 (2003).
- [39] B. T. Jannuzi, R. Elston, G. D. Schmidt, P. S. Smith and H. S. Stockman, *Detection of Extended Polarized Ultraviolet Radiation from the $z = 1.82$ Radio Galaxy 3C 256*, Astrophys. Jour. Lett., **454**, L111 (1995).
- [40] W. Coburn, S. Boggs, *Polarization of the prompt gamma-ray emission from the gamma-ray burst of 6 December 2002*, Nature, **423**, 415 (2003).
- [41] T. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly, and F. Stecker *New limits on Planck scale Lorentz violation in QED*, Phys.Rev.Lett. **93** 021101 [astro-ph/0309681] (2004).
- [42] R. J. Gleiser, C. N. Kozameh C N and F. Parisi, *On low energy quantum gravity induced effects on the propagation of light* Class. Quant. Grav., **20**, 4375 (2003).

- [43] C. N. Kozameh and F. Parisi, *Lorentz Invariance and the semiclassical approximation of loop quantum gravity*, *Class. Quant. Grav.*, **21**, 2617 (2004).
- [44] R. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 466 (1984).
- [45] J. Ellis, K. Farakos K, N. E. Mavromatos, V. A. Mitsou and D. V. Nanopoulos, *A Search in Gamma-Ray Burst Data for Nonconstancy of the Velocity of Light*, *Astrophys. J.*, **535**, 139 (2000).
- [46] C. N. Kozameh and F. Parisi, *Light propagation on Quantum Curved Space-time and Back reaction effects*, submitted for publication to *Class. Quant. Grav.* (2006).