Relatividad General y la Geometría de Ecuaciones Diferenciales

Por Emanuel Gallo

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Física de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo, 2006

Director: Dr. Carlos Kozameh

Resumen

En esta tesis, se muestran y desarrollan las estructuras geométricas subyacentes en cierta clase de ecuaciones diferenciales que estan intimamente relacionadas a aquellas que dan origen a la formulación de superficies nulas de la relatividad general. Se estudia en particular, como a partir de cierta clase de ecuaciones a derivadas parciales (EDPs) de segundo orden que satisfacen ciertas condiciones conocidas como condiciones de Wünschmann, puede ser construida una geometría conforme Lorentziana que convierte al espacio solución de las EDPs en el eventual espacio-tiempo de relatividad general. Se da además un claro significado geométrico de las condiciones de Wünschmann. También, se estudian otras ecuaciones diferenciales, y la geometrías Riemanianas y Lorentzianas que ellas generan sobre el espacio solución. En particular se describe como obtener la formulación de superficies nulas de relatividad general en n-dimensiones a partir de un sistema de EDPs.

Palabras Claves: Conexión de Cartan, Relatividad General, Formulación de superficies nulas.
Pacs: 02.40.-k Geometría, geometría diferencial, y topología; 04.20.Cv Problemas fundamentales y formalismo general.

Abstract

In this thesis, we show and develope the geometric structures underlying in certain class of differential equations which are intimately related to those that give origin to the null surface formulation of general relativity. In particular, we show how from certain class of second order partial differential equations (PDEs) which satisfies some conditions known as Wünschmann conditions, can be constructed a conformal Lorentzian geometry that convert the solution space of these PDEs into the eventual space-time of general relativity. We also give a clear geometrical meaning to the Wünschmann's conditions. On the other hand, we study other differential equations and the Riemannian and Lorentzian geometries that they generate on the space solution. In particular, we describe how to obtain the null surface formulation of general relativity in n-dimensiones from a system of EDPs.

Key Words: Cartan's connection, General Relativity, Null surface formulation.
Pacs: 02.40.-k Geometry, differential geometry, and topology; 04.20.Cv Fundamental problems and general formalism.

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer al Dr. Carlos Kozameh, quien posibilitó realizar mi anhelo de investigar en Relatividad General. Siempre resultó un placer poder disfrutar de sus conocimientos, de sus estímulos e ideas, y de su amabilidad y calidez a la hora de las consultas. Por todo lo que me brindó, y por su amistad, le estoy profundamente agradecido.

También quisiera agradecer a mis padres y a mi hermano, por haber siempre incentivado mi amor a la ciencia, y hacer lo imposible para que yo pudiese estar donde estoy.

Este trabajo tampoco hubiese sido posible, sin la beca de postgrado otorgada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET.

Agradezco también a la FaMAF, por haberme permitido utilizar dicho lugar de trabajo para la elaboración de esta tesis, y en particular al grupo de Relatividad, por permitirme disfrutar de las charlas de grupo y dejarme así, adentrarme en su manera de pensar sobre física.

Finalmente, quisiera agradecer a Vale, y a mis amigos, por todo el apoyo dado durante toda la carrera.

Introducción

Esta tesis, la cual trata sobre la Relatividad General (RG) desde una perspectiva no convencional, tiene varios objetivos independientes.

Uno de ellos, es adquirir una nueva comprensión sobre la naturaleza geométrica de la Formulación de Superficies Nulas de Relatividad General.

Otro es mostrar y desarrollar las ricas estructuras geométricas que subyacen ocultas dentro de una gran clase de ecuaciones diferenciales.

Algunas de estas estructuras son conocidas desde hace mucho tiempo [1, 2, 3], mientras que otras son nuevas.

Hacia el fin del siglo IXX, y principios de los XX, Tresse, Wünschmann, Lie, Cartan y Chern ([2-7]), estudiaron la clasificación de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) de segundo y tercer orden de acuerdo a sus clases de equivalencia bajo una variedad de transformaciones, y las geometrías resultantes inducidas sobre el espacio solución. En particular, tanto Cartan ([4-6]) como Chern [7], encontraron que de una cierta subclase de EDOs de tercer orden,

$$\frac{d^3u}{ds^3} = F\left(u, \frac{du}{ds}, \frac{d^2u}{ds^2}, s\right),$$

puede ser construida de manera natural, una única métrica conforme Lorentziana sobre el espacio solución. Esta subclase fue definida por la anulación de un invariante relativo específico, $I[F] = 0$, definido a partir de la ecuación diferencial y obtenido por primera vez por Wünschmann [8]. Éste es ahora conocido como invariante de Wünschmann. En un trabajo mucho más actual, Tod [29] mostró como todos los espacios Einstein-Weyl pueden ser obtenidos de esta clase particular de EDOs.

Más recientemente (año 1983), una nueva formulación de la Relatividad General, llamada Formulación de Superficies Nulas (o NSF brevemente), presentó un punto de vista radicalmente diferente de la Relatividad General, donde el énfasis se trasladaba de un tensor métrico sobre una variedad $\mathfrak{M}$ 4-dim, a superficies de nivel y ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) en dos dimensiones. En NSF, el espacio-tiempo conforme, i.e., una variedad 4-dim equipada con una estructura conforme, surge de soluciones de un par de EDPs en un espacio 2-dimensional representando la esfera de direcciones nulas [9]. Una condición necesaria para la existencia de una métrica conforme es la "condición de metricidad", cuyo significado geométrico en aquel entonces, era desconocido.

En este enfoque, los objetos fundamentales son dos funciones, $Z(x^a, s, s^*)$ y $\Omega(x^a, s, s^*)$, dependientes de los puntos del espacio-tiempo x^a y parametrizadas por puntos sobre la esfera; esto es, son funciones definidas sobre $\mathfrak{M} \times \mathcal{S}^2$ (el fibrado esférico sobre el espacio-tiempo). La primera de estas funciones, $Z(x^a, s, s^*)$, la cual codifica toda la información conforme del espacio-tiempo, describe una familia de superficies a través de cada punto del espacio-tiempo. Es a partir de estas superficies, que una métrica conforme puede ser construida. La segunda función, $\Omega(x^a, s, s^*)$, la cual juega el rol de factor conforme, convierte a esta métrica en una específica de la clase conforme. Las superficies de nivel de $Z(x^a, s, s^*)$ en $\mathfrak{M}$, para cada valor fijo de (s, s^*), son superficies nulas con respecto a la métrica. Cuando (s, s^*) toman diferentes valores sobre $\mathcal{S}^2$, mientras se mantiene fijo a x^a en $\mathfrak{M}$, los vectores normales a las hipersuperficies nulas generan al cono de luz de x^a.

Para establecer este nuevo enfoque, dichos autores comenzaron con una variedad Lorentziana 4-dimensional, i.e., una variedad ya conteniendo una métrica g_{ab}, y una integral completa a la ecuación de la Eikonal,

$$g^{ab}(x^a)\nabla_a Z \nabla_b Z = 0. \tag{1}$$

Una integral completa, expresada como,

$$u = Z(x^a, s, s^*), \tag{2}$$

contiene las coordenadas del espacio-tiempo, x^a, y los dos parámetros necesarios (para una integral completa) (s, s^*). Construyendo las cuatro funciones,

$$\theta^i \equiv (u, \omega, \omega^*, R) \equiv (Z, \partial_s Z, \partial_{s^*} Z, \partial_{s^* s} Z), \tag{3}$$

de la Ec. (2) y sus derivadas, y eliminando x^a, via la inversión algebraica

$$x^a = X^a(s, s^*, \theta^i), \tag{4}$$

ellos encontraron que $u = Z(x^a, s, s^*)$ satisface además de la Ec. (2), un par de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) de segundo orden en s, s^*, de la forma

$$\begin{aligned} \partial_{ss} Z &= \Lambda(Z, \partial_s Z, \partial_{s^*} Z, \partial_{ss^*} Z, s, s^*), \\ \partial_{s^* s^*} Z &= \Lambda^*(Z, \partial_s Z, \partial_{s^*} Z, \partial_{ss^*} Z, s, s^*). \end{aligned} \tag{5}$$

Los x^a, en la solución de la Ec. (5), aparecen ahora como constantes de integración. Los roles de x^a y $(s,\, s^*)$ han sido intercambiados. Notar que la métrica ha desaparecido de las ecuaciones.

La pregunta en aquel entonces fué, ¿ podría este procedimiento ser revertido?. ¿ Podría uno comenzar con un par de EDPs de la forma, (5), y de allí encontrar la ecuación de la Eikonal, (1), con una métrica $g^{ab}(x^a)$?

Como veremos, si las funciones (Λ, Λ^*) satisfacen una condición de integrabilidad, una desigualdad débil, y cierto conjunto de condiciones diferenciales,

$$\mathcal{W}[\Lambda, \Lambda^*] = \mathcal{W}^*[\Lambda, \Lambda^*] = 0,$$

(la condición de metricidad o las condiciones de Wünschmann), el procedimiento puede ser revertido.

En esta tesis, nos proponemos demostrar, que soluciones a este par, no solamente determinan una métrica conforme Lorentziana 4-dimensional, sino que además, inducen estructuras geométricas imprescindibles para la formulación covariante conforme de la Gravedad como un par de EDPs. También demostraremos que no solo es posible encontrar un significado geométrico a las condiciones de metricidad $\mathcal{W}[\Lambda, \Lambda^*] = \mathcal{W}^*[\Lambda, \Lambda^*] = 0$, sino también, de las mismas $\mathcal{W}[\Lambda, \Lambda^*]$ y $\mathcal{W}^*[\Lambda, \Lambda^*]$.

Otro objetivo de esta tesis, es ir un poco más allá para demostrar que estas EDPs parecieran estar solo en la punta de un iceberg donde existen distintas ecuaciones diferenciales, cada una induciendo variadas geometrías en variadas dimensiones. En particular, demostraremos que se puede desarrollar un formalismo similar al de NSF, a partir de sistemas de EDPs en n dimensiones. También veremos que se pueden inducir geometrías no tan solo Lorentzianas, si no también geometrías riemannianas con condiciones tipo Wünschmann, las cuales como veremos en el capítulo 5 para un caso particular, tienen el mismo significado geométrico que en NSF.

Es un hecho notable, y al mismo tiempo sorprendente, el que uno pueda codificar todas las geometrías Riemanianas, Lorentzianas y conformes en ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales, independientemente de la dimensión del espacio donde estas métricas viven.

Finalmente, dejamos las puertas abiertas, para realizar nuevos estudios sobre geometrías de ecuaciones diferenciales, y sobre todo, para la codificación en un par de EDPs de las ecuaciones de Gravedad Conforme.

Organización de la Tesis

En los primeros dos capítulos damos las herramientas básicas necesarias para la codificación de geometrías en ecuaciones diferenciales. La intención de ambos capítulos es la de dar una rápida y comprensible introducción de distintos objetos de geometría diferencial, siendo desarrollados casi en su totalidad de manera heurística.

En los capítulos 3 y 4, desarrollamos la geometría asociada a una cierta clase de EDPs de segundo orden. En el capítulo 3, demostraremos como obtener todas las geometrías conformes a partir de un sistema de dos EDPs. También observaremos el significado geométrico de la condición de metricidad. En el capítulo 4, generalizaremos estos resultados, y veremos el porqué de la existencia de estas geometrías en estas EDPs. Además comprenderemos aun más el significado del invariante de Wünschmann.

Los capítulos 5 y 6, demuestran que existen otras clases de ecuaciones diferenciales que contienen variadas geometrías y que en cierto sentido, son muy similares a las ecuaciones provenientes de la formulación de Superficies Nulas de Relatividad General. Como veremos, estas ecuaciones se encuentran en dualidad con la ecuación de Hamilton-Jacobi.

En el capítulo 7, veremos que la formulación NSF de RG, no es única a variedades de 3 y 4 dimensiones, sino que siempre se pueden codificar métricas conformes en un sistema de EDPs.

Finalmente, desarrollamos conclusiones generales sobre lo tratado en esta tesis y comentamos posibles caminos de investigación, tanto en ramas de índole puramente matemática como en aspectos con una fuerte naturaleza física.

Como resultado de esta investigación surgieron los trabajos [22, 36, 37, 38, 39].

Capítulo 1

Herramientas de Geometría Diferencial

§1. Introducción

Una de las herramientas geométricas más potentes utilizadas hoy en día en teorías fundamentales de la Física, es la que se deriva de la teoría geométrica de conexiones. El primer uso sistemático en Física de una conexión, provino de la Teoría General de la Relatividad debido a su naturaleza intrínsicamente geométrica. Dicha conexión, es conocida como conexión de Levi-Civita, y básicamente permite transportar objetos geométricos de un punto a otro del espacio a lo largo de una curva, de tal forma que se preservan las longitudes, y en caso de transporte paralelo, también los ángulos. Pronto surgieron generalizaciones de estas conexiones de origen *métrico*. De éstas, podemos citar a las conexión de Weyl, caracterizada por no preservar longitudes, o a la teoría de Weyl-Cartan, que además tiene torsión no necesariamente nula. La teoría que utiliza a la conexión de Weyl tuvo como objetivo original, unificar a la gravedad con la teoría electromagnética de Maxwell. La segunda, además permitía que el espacio tuviese torsión, y por lo tanto que materia con momento angular intrínsico o spin, pudiese afectar torsionalmente a la geometría donde se hallaba inmersa.

La segunda gran revolución del uso de conexiones no surgió de teorías métricas, sino de teorías que compartían características muy similares con las mismas. Fue un hecho notable el que dichas conexiones estaban siendo *creadas* por los matemáticos cuando casi simultáneamente aparecían en física (aunque sin saberlo los físicos) en teorías conocidas hoy en día como teorías de tipo Yang-Mills. Justamente fue Yang, quien al tener contacto con el matemático James Simons que investigaba en teorías de conexiones, observó que sus teorías físicas quedaban bellamente formuladas como teorías de conexiones sobre ciertos fibrados conocidos como fibrados principales. Todas estas conexiones son agrupadas hoy en día dentro de las conexiones de Ehresmann.

Cabe mencionar sin embargo, que no fue Ehresmann el primero en desarrollar el estudio de conexiones sobre espacios que generalicen al euclídeo. Por un lado, estaba Georg Riemann, quien introdujo métricas no euclídeas generando lo que hoy en día se conocen como geometrías Riemannianas. Por el otro Felix Klein, quien observó que varias de las geometrías no euclídeas descubiertas hasta la fecha podían ser vistas como ejemplo de cocientes de grupos de Lie G/H. Sin embargo parecía no haber relación entre las geometrías de Riemann y las geometrías de Klein.

Pero hacia 1920, Elíe Cartan, demostró que ambas teorías tenían una generalización común. El llamó a estos espacios *"espacios generalizados"*, y hoy en día son conocidos como *geometrías de Cartan.* Estas geometrías de Cartan tienen grandes aplicaciones hoy en día, como por ejemplo en teoría de Twistors, o como veremos en esta tesis, en gravedad conforme. Sin embargo, en su momento fueron ignoradas por la mayoría de los matemáticos, primero porque era muy difícil seguir o comprender el lenguaje utilizado por Cartan[1] y segundo porque hacia 1950, Ehresmann, desarrolló su teoría de conexiones, que generaliza a la de Cartan, y que además estaba desarrollada en un lenguaje moderno comprensible para los matemáticos. Hoy en día, las conexiones de Cartan pueden ser escritas con el mismo lenguaje formal que se utiliza para desarrollar la teoría de conexiones de Ehresmann.

Con el fin de comprender aun más el uso de estas conexiones, nosotros haremos una breve sinopsis de una manera mas bien heurística, sobre la teoría de conexiones geométricas. Presentaremos las definiciones básicas, y algunos teoremas sin demostración, ya que la intención de éste y el capítulo siguiente, es la de tan solo revisar los conceptos básicos necesarios para el desarrollo posterior de los temas pertinentes a esta tesis. Para ello en la sección 2, daremos las herramientas básicas de fibrados principales, en la sección 3, explicaremos la conexión de Ehresmann y en la sección 4 culminamos, introduciendo la conexión de Cartan y como la misma ayuda para expresar a la Gravedad Conforme como condiciones algebraicas y diferenciales sobre esta conexión.

La bibliografía en estos temas es muy amplia. Libros recomendables que considero amenos y claros para alguien con formación en física, son:
I) "Geometry, topology and physics". Mikio Nakahara. Graduate Student Series in

[1]Citando al matemático Robert Bryant, "You read the introduction to a paper of Cartan and you understand nothing. Then you read the rest of the paper and still you understand nothing. Then you go back and read the introduction again and there begins to be the faint glimmer of something very interesting"

Physics.
II) "Geometry of Manifolds". R.L. Bishop, y R.J. Crittenden. Academic Press, New York and London.
III) "Differential Geometry, Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program". R.W. Sharpe. Graduate Texts in Mathematics. Springer.

§2. Fibrados Principales

Muy frecuentemente en teorías físicas, tenemos la posibilidad de hacer transformaciones en cada punto del espacio tiempo sin cambiar las predicciones, ni los objetos medibles físicamente. A estas transformaciones, cuando provienen de un grupo de Lie, $\mathcal{G}$, se las conoce generalmente como transformaciones de gauge. Por ejemplo, en electromagnetismo existe la posibilidad de cambiar el cuadri-vector potencial, sumándole el gradiente de una función arbitraria del espacio-tiempo $\nabla\phi(\mathbf{x})$, sin alterar las cantidades físicamente medibles, esto es, el campo electromagnético. Como veremos más adelante, estas transformaciones provienen de transformaciones de gauge con grupo $\mathcal{G} = U(1)$.

Podremos decir entonces, que a cada punto de un espacio-tiempo $\mathfrak{M}$ (supongamos por el momento con topología $\mathbb{R}^4$), le podemos asignar suavemente todo el grupo $\mathcal{G}$, obteniendo un espacio $\mathcal{P} = \mathfrak{M} \times \mathcal{G}$, que contiene tanto la información del espacio-tiempo, como la de las transformaciones permisibles que no alteran los observables físicos. Al espacio $\mathfrak{M}$ lo llamaremos espacio base.

Si consideramos un punto p arbitrario de este espacio $\mathcal{P}$, entonces el grupo $\mathcal{G}$ tiene una acción natural sobre el mismo:

Definición 1.1: *Sea $p \in \mathcal{P}$ con $p = (x, g)$, un punto de $\mathcal{P}$, donde $x \in \mathfrak{M}$, y $g \in \mathcal{G}$. Entonces dado cualquier $a \in \mathcal{G}$ definimos la acción a derecha de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{P}$, $R_a : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ por $R_a(p) = pa = (x, ga)$.*

Esta acción es *libre*, esto es $R_a(p) = p \Leftrightarrow a = e$, donde e es el elemento unidad de $\mathcal{G}$. Además, R_a define una relación de equivalencia entre puntos de $\mathcal{P}$: $p \sim q \;\Leftrightarrow\; \exists\, a \in \mathcal{G}$ tal que $q = R_a(p)$. Es fácilmente visto entonces, que cada punto de esta clase de equivalencia puede ser puesto en correspondencia uno a uno con puntos del espacio $\mathfrak{M}$. En otras palabras, podemos hacer la identificación $\mathfrak{M} \approx \mathcal{P}/\mathcal{G}$. Es más, la relación de equivalencia define una proyección natural en $\mathcal{P}$:

Definición 1.2: *Definimos una proyección canónica $\pi : \mathcal{P} \to \mathfrak{M}$ por $\pi(x, g) = x$.*

Claramente, $\pi(x,g) = \pi(x,ga) = x$, i.e., dos puntos sobre la misma clase de equivalencia, proyectan al mismo punto sobre el espacio base.

Notar que el conjunto de puntos $\pi^{-1}(x)$ es isomorfo a $\mathcal{G}$, i.e., tiene toda la información del grupo, a excepción de la noción de cual es el elemento unidad e. Al conjunto de puntos $\pi^{-1}(x)$, se lo llama fibra sobre x.

Al cuadruplete $(\mathcal{P}, \mathfrak{M}, \mathcal{G}, \pi)$ se la conoce como un caso particular de *fibrado principal trivial*. *Fibrado* porque a cada punto del espacio-tiempo le agregamos una fibra; *principal* porque dichas fibras provienen de una identificación con un cierto grupo, y *trivial* porque no siempre uno puede escribir globalmente a $\mathcal{P}$ como el producto cartesiano de $\mathfrak{M}$ y $\mathcal{G}$.

Ocurre a menudo, que uno puede escribir al espacio $\mathcal{P}$ como $\mathfrak{M} \times \mathcal{G}$ solo localmente, y además, en general la topología de $\mathfrak{M}$ no es $\mathbb{R}^4$.

Como un ejemplo típico, podemos considerar a la cinta de Möbius, donde $\mathfrak{M}$ tiene la topología de una esfera 1-dimensional S^1 y $\mathcal{G}$ consiste solo de dos elementos $\{0,1\}$ que se unen a $\mathfrak{M}$ de manera muy especial.

Esto nos lleva a la siguiente definición general de un Fibrado Principal:

Definición 1.3: *Sea $\mathcal{P}$ una variedad y $\mathcal{G}$ un grupo de Lie, entonces un Fibrado Principal Diferenciable sobre el espacio $\mathfrak{M}$, es un cuadruplete $(\mathcal{P}, \mathfrak{M}, \mathcal{G}, \pi)$, tal que:*
a) $\mathcal{G}$ tiene una acción libre a derecha sobre $\mathcal{P}$, i.e., si $p \in \mathcal{P}$ y $a \in \mathcal{G}$, entonces $R_a(p) \in \mathcal{P}$.
b) $\mathfrak{M}$ se puede identificar con el cociente $\mathcal{P}/\mathcal{G}$, y la proyección canónica $\pi : \mathcal{P} \to \mathfrak{M}$ es diferenciable.
c) $\mathcal{P}$ es localmente trivial, i.e., todo $x \in \mathfrak{M}$ tiene una vecindad V, tal que $\pi^{-1}(V)$ es isomorfo[2] a $V \times \mathcal{G}$.

El espacio $\mathcal{P}$ es conocido como *espacio total*, el grupo $\mathcal{G}$, *grupo de estructura*, y $\mathfrak{M}$ *espacio base.*

Ejemplo 1.1: El Fibrado de Marcos

Como ejemplo típico y muy útil de fibrado, definiremos lo que se conoce como fibrado de marcos. Sea $\mathfrak{M}$ una variedad C^∞ n-dimensional y $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ el conjunto de marcos sobre $\mathfrak{M}$, i.e., un elemento b de $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$, es de la forma $b = (x, e_1, e_2, ..., e_n)$, con $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base del espacio tangente $T_m\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{M}$ en m.

Sea $\pi : \mathcal{F}(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{M}$, dado por $\pi(x, e_1, e_2, ..., e_n) = x$. Notar que el grupo de

[2]El isomorfismo es como sigue: existe un difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(V) \to \mathcal{G}$, tal que $\Phi(p) = (\pi(p), \phi(p))$, donde $\phi : \pi^{-1}(V) \to \mathcal{G}$ es tal que $\phi(R_a(p)) = \phi(p) \cdot a$ para cada $p \in \pi^{-1}(V)$ y $a \in \mathcal{G}$.

transformaciones lineales reales $Gl(n, \mathbb{R})$ actúa naturalmente a derecha, a saber, si identificamos a un elemento $g \in Gl(n, \mathbb{R})$ con una matriz $g = g_{ij}$, entonces $R_g b = (x, g_{i1}e_i, ...g_{in}e_i)$. Entonces puede demostrarse fácilmente que nosotros tenemos todas las propiedades de un fibrado, con fibras isomorfas a $Gl(n, \mathbb{R})$ (que es el grupo de estructura), espacio base $\mathfrak{M}$, proyección π y espacio total $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$. Este fibrado, se denotará en lo sucesivo simplemente como $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$.

Ahora, si nosotros asignamos a cada punto del espacio base, solo uno de los posibles elementos del grupo que se encuentran sobre su fibra, entonces podríamos decir que tenemos una sección del fibrado.

Definición 1.4: *Una sección global de un fibrado principal* $(\mathcal{P}, \mathfrak{M}, \mathcal{G}, \pi)$, *es un mapa* $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathcal{P}$, *tal que* $\pi \circ \sigma(x) = x$ *para todo* $x \in \mathfrak{M}$. *Si nos restringimos a una vecindad* $V_\alpha \subset \mathfrak{M}$ *de* x, *entonces todo mapeo* $\sigma_\alpha : V_\alpha \to \mathcal{P}$ *tal que* $\pi(\sigma(x)) = x$, $\forall\, x \in V_\alpha$ *será dicho que es una sección local.*

Observación 1.1: *A partir de ahora a un fibrado* $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \pi, \mathfrak{M})$, *lo escribiremos simplemente como* $\mathcal{P}$, *salvo que hagamos explícito al grupo* $\mathcal{G}$ *del cual se está hablando.*

A todo fibrado principal se le puede asociar un fibrado con fibra F, de la siguiente manera:

Definición 1.5: *Sea una fibrado principal* $(\mathcal{P}, \mathfrak{M}, \mathcal{G}, \pi)$, *y sea* F *una variedad sobre la cual* $\mathcal{G}$ *actúa a izquierda. Sea* $E = \mathcal{P} \times F$, *y consideremos la acción a derecha de* $\mathcal{G}$ *sobre* E *definida por* $(p, f)g = (pg, g^{-1}f)$, *con* $p \in \mathcal{P}$, $f \in F$ *y* $g \in \mathcal{G}$. *Entonces* $\mathcal{E} = E/\mathcal{G}$ *es un espacio fibrado sobre* $\mathfrak{M}$ *con fibra* F *llamado fibrado asociado a* $\mathcal{P}$.
La proyección $\pi' : \mathcal{E} \to \mathfrak{M}$ *se define como* $\pi'((p, f)\mathcal{G}) = \pi(p)$; *y si* $m \in \mathfrak{M}$, *y* U *es una vecindad de* m, *entonces al mapeo* $\phi_U : \pi^{-1}(U) \to \mathcal{G}$, *le asociamos el mapeo* $F_U : \pi'^{-1}(U) \to F$ *dado por* $F_U((p, f)\mathcal{G}) = \phi_U(p)f$. *Si requerimos que estos homeomorfismos sean difeomorfismos, entonces resulta que* $\mathcal{E}$ *es una variedad localmente difeomorfa a* $U \times F$.

Al fibrado $\mathcal{E}$ asociado a $\mathcal{P}$ con fibra estándar F también se lo denota $\mathcal{E} = \mathcal{P} \times_{\mathcal{G}} F$.

§3. Conexiones de Ehresmann

Hemos visto que cada fibra de $\mathcal{P}$, es isomorfa al grupo de estructura $\mathcal{G}$ del fibrado. Sin embargo, no existe hasta ahora, con los objetos introducidos, relación canónica entre las fibras. El objetivo de una conexión es justamente el de introducir tal estructura, con el fin de *conectar* puntos sobre $\mathcal{P}$.

Como veremos, si nosotros fijamos un punto p perteneciente a la fibra asociada a un $x \in \mathfrak{M}$, entonces una vez introducida una conexión, tendremos que para cada curva uniendo dos puntos x e y sobre el espacio-base, habrá una única curva bien definida, que une al punto p con un punto q que se encuentra en la fibra de y. De esta manera tendremos un isomorfismo entre las distintas fibras de $\mathcal{P}$. Por ejemplo, en el caso de un fibrado de marcos, si pudiésemos introducir una conexión, y elegimos un marco dado e_x en un punto x, entonces por intermedio de la conexión podremos conectarlo con otro marco e_y en un punto y, y de tal forma también podremos definir transporte paralelo de vectores tangentes a $\mathfrak{M}$: serán aquellos que tengan las mismas componentes en ambos marcos.

Antes de definir una conexión, notar que todo vector en el espacio tangente $T_p\mathcal{P}$ en un punto $p \in \mathcal{P}$, puede ser descompuesto en una componente que es tangente a la fibra asociada a p (la llamaremos componente vertical), y otra que es transversal a la misma (llamada horizontal). La primera puede ser definida de manera unívoca, mientras la segunda solo si uno introduce el concepto de conexión, es decir aquella que decide cuales vectores son puramente horizontales, y cuales no.

Antes de definir un campo vectorial vertical y uno horizontal (dado por la conexión) recordemos ciertas propiedades de grupos de Lie.

§3.1. Acciones naturales sobre grupos de Lie

Sea $\mathcal{G}$, un grupo de Lie. Hay dos acciones naturales de $\mathcal{G}$ sobre si mismo. La acción a derecha R_g definida por $R_g h = hg$, $\forall \{h, g\} \in \mathcal{G}$, y la acción a izquierda $L_g h$, definida por $L_g h = gh$, $\forall \{h, g\} \in \mathcal{G}$. La última acción, induce el mapeo $L_{g^*} : T_h(\mathcal{G}) \to T_{gh}(\mathcal{G})$, entre los espacios tangentes asociados a g y gh (de igual manera hay un mapeo inducido por la acción a derecha).

Por un campo vectorial $\mathcal{V}$ invariante a izquierda, entenderemos a todo campo tal que

$$L_{g^*}\mathcal{V}|_h = \mathcal{V}|_{gh}.$$

Notar que todo campo vectorial invariante a izquierda forma un álgebra de Lie de G, frecuentemente denotada como $\mathfrak{g}$. Pero como, debido a la invariancia a izquierda, el campo $\mathcal{V}$ es especificado por su valor en el elemento unidad e de $\mathcal{G}$, resulta que existe un isomorfismo entre $\mathfrak{g}$ y $T_e(\mathcal{G})$, i.e., $\mathfrak{g} \simeq T_e(\mathcal{G})$.

Otra acción naturalmente definida sobre $\mathcal{G}$, es la denominada *acción adjunta*, $\mathrm{ad}_g : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, definida por $\mathrm{ad}_g(h) = ghg^{-1}$. Esta acción induce un mapa en el espacio tangente a g, llamado mapa adjunto, $\mathrm{Ad}_g : T_h(\mathcal{G}) \to T_{ghg^{-1}}(\mathcal{G})$.

Para uso posterior, también definiremos una 1-forma conocida como forma de Maurer-Cartan.

Definición 1.6: *Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie. Una 1-forma invariante a izquierda de Maurer-Cartan, es una 1-forma $\omega_G : T(\mathcal{G}) \to \mathfrak{g}$ definida por $\omega_G(\overrightarrow{V}) = L_{g^{-1}*}(\overrightarrow{V})$, para todo $\overrightarrow{V} \in T_g(\mathcal{G})$.*

§3.2. La conexión como espacios horizontales

Antes de introducir una conexión, veamos como definir un espacio vertical $V_p\mathcal{P}$ en cada punto $p \in \mathcal{P}$. Este espacio, será un subespacio de $T_p(\mathcal{P})$, tal que es tangente a la fibra F_p que pasa por p. Para construir este espacio, notemos que existe un isomorfismo entre campos vectoriales tangentes a F_p, y elementos del álgebra $\mathfrak{g}$, del grupo de estructura $\mathcal{G}$:

Sea $\mathfrak{v}$ un elemento de $\mathfrak{g}$, entonces en cada punto $p \in \mathcal{P}$, nosotros podemos trazar una curva

$$p_t = R_{\exp(t\mathfrak{v})}p = p\exp(t\mathfrak{v}),$$

que está completamente contenida en F_p, puesto que $\pi(p) = \pi\left(p\exp(t\mathfrak{v})\right) = x$. A partir de esta curva, podemos definir el vector $\overrightarrow{V_{\mathrm{F}}} \in T_p(\mathcal{P})$ dado por

$$\overrightarrow{V_{\mathrm{F}}} = \frac{d}{dt} f(p\exp(t\mathfrak{v}))|_{t=0},$$

con $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ una función arbitraria suave. De la definición, vemos que el vector $\overrightarrow{V_{\mathrm{F}}}$ es tangente a F_p, y por lo tanto $\overrightarrow{V_{\mathrm{F}}} \in T_p(\mathcal{G})$. De igual modo, definimos un vector $\overrightarrow{V_{\mathrm{F}}}|_q$ en cada punto q contenido sobre la misma fibra, obteniéndose un campo vectorial $\mathcal{V}_{\mathrm{F}}$, generado por $\mathfrak{v} \in \mathfrak{g}$. Dicho campo vectorial es conocido como *campo vectorial fundamental* asociado al elemento $\mathfrak{v}$ perteneciente a $\mathfrak{g}$. Por lo tanto, resulta claro que existe un isomorfismo entre $\mathfrak{g}$ y el espacio vertical de todo punto $V_p\mathcal{P}$.

El espacio horizontal $H_p\mathcal{P}$ de un punto $p \in \mathcal{P}$, es el espacio complemento de $V_p\mathcal{P}$, pero es definido de manera unívoca, solamente después de definir una conexión sobre $\mathcal{P}$.

Definición 1.7: *Sea $\mathcal{P}$ un fibrado principal. Una conexión de Ehresmann es una única separación del espacio tangente $T_p\mathcal{P}$, en un subespacio vertical $V_p\mathcal{P}$ y un subespacio horizontal $H_p\mathcal{P}$, tales que:*

(a) $T_p\mathcal{P} = H_p\mathcal{P} \oplus V_p\mathcal{P}$

(b) Todo campo vectorial suave $\mathcal{A}$ es separado en una parte vectorial suave horizontal, $A^H \in H_p\mathcal{P}$ y una suave vertical $A^V \in V_p\mathcal{P}$ como $A = A^H + A^V$.

(c) $H_{pg}\mathcal{P} = R_{g^*}H_p\mathcal{P}$ para todo $p \in \mathcal{P}$ y $g \in \mathcal{G}$.

La última condición, solo establece como se relacionan los subespacios horizontales en los puntos p y pg, i.e., el campo horizontal en el punto pg, puede ser obtenido por el mapeo R_{g^*}. En otras palabras, una vez que conocemos el subespacio H_p en un punto p, lo conocemos en toda la misma fibra a la cual p pertenece. Esta condición es un requisito necesario si uno desea que una vez que p sea propagado paralelamente (a ser definido en breve), también lo haga pg.

Si bien la definición parece totalmente natural, y se ve rápidamente su naturaleza geométrica, a fines de hacer cálculos, resulta mucho mas eficiente una definición algebraica, donde uno define una 1-forma, que contiene toda la información de cuales subespacios de $T_p(\mathcal{P})$, son horizontales, y cuales no.

§3.3. La conexión como una 1-forma

Introduzcamos una 1-forma ω sobre $T(\mathcal{P})$, tal que en vez de tomar valores en $\mathbb{R}$, toma valores en el álgebra de Lie de $\mathcal{G}$. En otras palabras, $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*(\mathcal{P})$.

Definición 1.8: *Una 1-forma conexión $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*(\mathcal{P})$ es una proyección de $T_p(\mathcal{P})$ sobre la componente vertical $V_p(\mathcal{P}) \simeq \mathfrak{g}$, tal que la misma tiene las siguientes propiedades,*

(a) $\omega(\overrightarrow{V_F}) = \mathfrak{v}$, donde $\overrightarrow{V_F}$ es un vector del campo vectorial fundamental inducido por el elemento $\mathfrak{v}$ perteneciente a $\mathfrak{g}$.

(b) $R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}}\omega$.

Ahora definimos al subespacio horizontal $H_p\mathcal{P}$ en $p \in \mathcal{P}$, como el kernel de ω, i.e.,

$$H_p\mathcal{P} = \{\overrightarrow{A} \in T_p\mathcal{P} \mid \omega(\overrightarrow{A}) = 0\}. \tag{1.1}$$

Es fácil ver entonces, que ambas definiciones son equivalentes, o más precisamente, la 1-forma conexión ω induce subespacios horizontales que satisfacen todas las condiciones de la definición 1.7. Notemos en particular, que los espacios $H_p\mathcal{P}$ dados por la Ec.(1.1), satisfacen

$$R_{g^*}H_p\mathcal{P} = H_{pg}\mathcal{P}.$$

En efecto, debido a la definición de ω, si tomamos un $\overrightarrow{A} \in H_p\mathcal{P}$, y a partir de él, construimos $R_{g^*}\overrightarrow{A} \in T_{pg}\mathcal{P}$, de *(b)* de la definición 1.8 encontramos que,

$$\omega(R_{g^*}\overrightarrow{A}) \equiv R_g^*\omega(\overrightarrow{A}) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\omega(\overrightarrow{A}) = g^{-1}\omega(\overrightarrow{A})g = 0,$$

debido a que hemos asumido que $\overrightarrow{A} \in H_p\mathcal{P}$, y por ende que $\omega(\overrightarrow{A}) = 0$. En otras palabras, si $A \in H_p\mathcal{P}$, entonces $R_{g^*}\overrightarrow{A} \in H_{pg}\mathcal{P}$, es decir hemos recuperado a la tercera condición de la definición 1.7.

§3.4. La 1-forma conexión local o potenciales de gauge

Sea $\{V_\alpha\}$ una colección de vecindades del espacio base $\mathfrak{M}$, y $\{\sigma_\alpha\}$ respectivas secciones locales definidas en cada V_α. Entonces definimos a las 1-formas locales $\mathcal{A}_\alpha$ sobre cada V_α, y valuadas en $\mathfrak{g}$, como:

$$\mathcal{A}_\alpha \equiv \sigma_\alpha^*\omega \ \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(V_\alpha),$$

donde $\Omega^1(V_\alpha)$ es el conjunto de 1-formas sobre V_α.

Lo interesante, es que dado un conjunto local de formas $\mathcal{A}_\alpha$, uno puede reconstruir una única forma conexión, cuyo pull-back por σ_α^*, es $\mathcal{A}_\alpha$.

Mas precisamente, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.1: *Dada una colección de $\mathfrak{g}$-valuadas 1-formas $\mathcal{A}_\alpha$ definidas en cada V_α, y secciones locales $\sigma_\alpha : V_\alpha \to \pi^{-1}(V_\alpha)$, entonces existe una única 1-forma conexión ω sobre $\mathcal{P}$, tal que $\sigma_\alpha^*\omega = \mathcal{A}_\alpha\ \forall\ \mathcal{A}_\alpha$.*

En física, donde en general el espacio base $\mathfrak{M}$, es el espacio-tiempo, a las 1-formas $\mathcal{A}_\alpha$, se las conoce como potenciales de gauge. Es más, si uno cambia de una sección $\sigma_1(x)$, a una sección $\sigma_2(x) = \sigma_1(x)g(x)$ en la misma vecindad V, entonces los potenciales de gauge (o 1-formas conexión locales) en cada sección se relacionan por intermedio de la fórmula:

$$\mathcal{A}_2 = g^{-1}\mathcal{A}_1 g + g^{-1}dg, \tag{1.2}$$

o, en componentes

$$\mathcal{A}_{2i} = g^{-1}\mathcal{A}_{1i} g + g^{-1}\partial_i g. \tag{1.3}$$

Por ejemplo, sea $\mathcal{P}$ un fibrado principal sobre el espacio-tiempo $\mathfrak{M}$, con grupo de estructura $\mathcal{G} = U(1)$, esto es, un elemento de $U(1)$ será de la forma $g = e^{i\phi}$. Por lo tanto, si pasamos de una sección $\sigma_1(x)$ donde el potencial es $\mathcal{A}_1$, a una sección

$\sigma_2(x) = \sigma_1(x)g(x) = \sigma_1(x)e^{i\phi(x)}$, donde el potencial es $\mathcal{A}_2$, tendremos que ambos potenciales se relacionan por la Ec.(1.2), es decir:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= e^{-i\phi(x)}\mathcal{A}_1 e^{i\phi(x)} + e^{-i\phi(x)}d(e^{i\phi(x)}), \\ &= \mathcal{A}_1 + id\phi(x), \end{aligned} \tag{1.4}$$

o en coordenadas,

$$\mathcal{A}_{2i} = \mathcal{A}_{1i} + i\partial_i\phi(x).$$

Esta forma local se transforma de la misma manera que el potencial vector $\overrightarrow{A_i}$ del electromagnetismo, es más, ambos solo difieren en el factor i que proviene del álgebra de Lie de $U(1)$, $\mathcal{A}_\alpha = i\overrightarrow{A_\alpha}$.

Como se verá pronto, el tensor de Maxwell $\mathcal{F}_{ij}$, no es ni mas ni menos que la curvatura asociada a esta conexión.

§3.5. Transporte paralelo, curvatura y torsión

Transporte paralelo:

Antes de definir transporte paralelo, definamos lo que es conocido como el *levantado*[3] de una curva $\gamma \subset \mathfrak{M}$.

Definición 1.9: *Sea $\gamma \subset \mathfrak{M}$, una curva C^∞ a tramos sobre el espacio base $\mathfrak{M}$, entonces un levantado de γ, es una curva $\widetilde{\gamma}$, C^∞ a tramos sobre $\mathcal{P}$, tal que:*

(a) $\widetilde{\gamma}$ es horizontal, i.e., $\widetilde{\gamma}_*$ es horizontal.

(b) $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.

Entonces uno puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.2: *Sea γ una curva C^∞ a tramos sobre $\mathfrak{M}$, $\gamma : [0,1] \to \mathfrak{M}$. Sea $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Entonces existe un único levantado $\widetilde{\gamma}$ de γ, tal que $\widetilde{\gamma}(0) = p$.*

Como un corolario de este teorema surge lo que se entiende por transporte paralelo de $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$.

Corolario 1.1: *Si H es una conexión sobre $p \in \mathcal{P}$, y γ una curva C^∞ a tramos sobre $\mathfrak{M}$, entonces existe un difeomorfismo Γ_γ de $\pi^{-1}(\gamma(0))$ a $\pi^{-1}(\gamma(1))$, llamado transporte paralelo de $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$, a lo largo de γ. Es más, Γ_γ es independiente de*

[3] Lift en inglés

la parametrización de γ y satisface $\Gamma_\gamma \circ R_g = R_g \circ \Gamma_\gamma$. Por otro lado, si γ y β son dos curvas tales que $\beta(0) = \gamma(1)$, entonces $\Gamma_{\gamma\beta} = \Gamma_\beta \circ \Gamma_\gamma$.

Para ver más claro el significado de transporte paralelo, veamos como éste se acomoda a la definición usual de transporte paralelo definido en el espacio tangente $T_m\mathfrak{M}$ de una variedad $\mathfrak{M}$ utilizado en teorías métricas, como por ejemplo, en el transporte paralelo de Levi-Civita.

Supongamos que $\mathcal{P}$, es el fibrado de marcos $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ sobre $\mathfrak{M}$. Entonces, una conexión en este espacio es conocida como una *conexión afín.* Cualquier conexión en un subfibrado de $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$, también es conocida como conexión afín, debido a que esta puede ser extendida por la acción a derecha del grupo $GL(n,\mathbb{R})$ a todo $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$.

Ahora, sea γ una curva en $\mathfrak{M}$, y $\overrightarrow{t} \in T_m\mathfrak{M}$, con $m = \gamma(0)$. Entonces nosotros podemos transportar paralelamente a $\overrightarrow{t}$ a lo largo de γ como sigue: elegimos cualquier $b \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$ con $\pi(b) = m$, y tomamos la única curva horizontal $\widetilde{\gamma}$ que es el levantado de γ pasando por b. Entonces si $\widetilde{\gamma}(s) = (\gamma(s), e_1(s), ..., e_n(s))$, y $\overrightarrow{t} = t^i e_i(0)$, definimos el transporte paralelo de $\overrightarrow{t}$ a lo largo de γ hacia el punto final $n = \gamma(u)$, a ser $\overrightarrow{t}\ |_u = t^i e_i(u)$, i.e., aquel vector que tiene las mismas componentes en la base $e_i(u)$, que las que tenia $\overrightarrow{t}$ en $e_i(0)$. Es fácil ver que este transporte es independiente de la elección de $b \in \mathcal{P}$ sobre $m \in \mathfrak{M}$.

Del mismo modo, podemos definir una geodésica sobre $\mathfrak{M}$, como aquella curva cuyo vector tangente se transporta paralelamente a si mismo.

Tener en cuenta que en general, una conexión H no será integrable, es decir la 1-forma conexión no será cerrada cuando es evaluada en vectores horizontales (ver capítulo 2). Esto implica, que si nosotros comenzamos con una curva cerrada γ en $\mathfrak{M}$ trazada en un punto inicial x (igual al punto final de la curva), entonces si bien su levantado comienza y termina en la misma fibra sobre x, no lo hará en general en el mismo punto. Por lo tanto, si nosotros transportamos paralelamente un vector $\overrightarrow{t}$ a lo largo de γ, cuando este regrese a su punto de partida, (por el hecho de tener las mismas componentes t^i, pero al estar éstas expresadas en otra base $e_i(u)$) no apuntará en la misma dirección que la inicial, concepto que uno toma como indicativo de la curvatura del espacio.

Curvatura:

En general, sin necesidad de trabajar con una conexión afín uno define la *2-forma curvatura* de la siguiente manera:

Definición 1.10: *Sea ω una 1-forma conexión sobre $\mathcal{P}$. Entonces definimos la 2-forma curvatura Ω por $\Omega = \mathfrak{D}\omega(A_1, A_2) = d\omega(A_1^H, A_2^H)$, donde A_1 y A_2 son* *vectores en el espacio tangente de $\mathcal{P}$, y A_1^H, A_2^H sus respectivas componentes horizontales. La operación d, es el diferencial exterior estándar definido en $\mathcal{P}$, y el operador $\mathfrak{D} = d \circ H$, es conocido como derivada covariante exterior. Notar que $\Omega \in \Omega^2(\mathcal{P}) \otimes \mathfrak{g}$, con $\Omega^2(\mathcal{P})$ el conjunto de 2-formas sobre $\mathcal{P}$.*

Definición 1.11: *Sea $\zeta = \zeta^a \otimes \mathfrak{e}_a$ una $\mathfrak{g}$-valuada p-forma con $\zeta^a \in \Omega^p(\mathfrak{M})$ y $\mathfrak{e}_a$ una base para $\mathfrak{g}$, y sea $\eta = \eta^a \otimes \mathfrak{e}_a$ una $\mathfrak{g}$-valuada q-forma con $\eta^a \in \Omega^q(\mathfrak{M})$. Entonces se define el conmutador de ζ y η por*

$$\begin{aligned} [\zeta, \eta] &= \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq} \eta \wedge \zeta \\ &= \mathfrak{e}_a \mathfrak{e}_b \zeta^a \wedge \eta^b - (-1)^{pq} \mathfrak{e}_b \mathfrak{e}_a \eta^b \wedge \zeta^a \\ &= [\mathfrak{e}_a, \mathfrak{e}_b] \otimes \zeta^a \wedge \eta^b \\ &= C_{ab}^c \mathfrak{e}_c \otimes \zeta^a \wedge \eta^b. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Con ayuda de esta definición, se puede demostrar el siguiente importante teorema:

Teorema 1.3: *Sean $\overrightarrow{X}$ e $\overrightarrow{Y}$, dos vectores en $T_p(\mathcal{P})$, entonces la 2-forma curvatura Ω y la 1-forma conexión ω satisfacen la (segunda) ecuación de estructura de Cartan,*

$$\Omega(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = d\omega(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) + [\omega(\overrightarrow{X}), \omega(\overrightarrow{Y})].$$

o lo que es lo mismo, debido a la definición del conmutador entre $\mathfrak{g}$-valuadas formas,

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega. \tag{1.6}$$

Del mismo modo que definimos las 1-formas locales de conexión, podemos definir la forma local $\mathcal{F}$ de la curvatura por $\mathcal{F} = \sigma^* \Omega$, donde σ es una sección local en una carta V del espacio base $\mathfrak{M}$.

De la Ec.(1.6) uno puede demostrar, que la 2-forma de curvatura local $\mathcal{F}$ se expresa como:

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}. \tag{1.7}$$

Entonces, si nosotros expresamos localmente a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{F}$, como $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i dx^i$, y $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ij} dx^i \wedge dx^j$, entonces obtenemos que,

$$\mathcal{F}_{ij} = \partial_i \mathcal{A}_j - \partial_j \mathcal{A}_i + [\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j]. \tag{1.8}$$

Por ejemplo, en el caso en que el fibrado $\mathcal{P} = U(1)$ (un grupo abeliano), identificando la 1-forma conexión local $\mathcal{A}$ con el cuadri-potencial $\overrightarrow{A}$, vemos que el tensor de Maxwell, no es ni más ni menos que la curvatura asociada a esta conexión.

Torsión:

Concentrémosnos ahora en el fibrado de marcos $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ sobre una variedad $\mathfrak{M}$, n-dimensional. Sea $\overrightarrow{t} \in T_b\mathcal{F}(\mathfrak{M})$, un vector en el punto $b = (x, e_1, e_2, ..., e_n)$.

Definamos ahora, a las denominadas *1-formas fundamentales*, o *1-formas soldadura*[3] $\theta^i : T_b\mathcal{F}(\mathfrak{M}) \to \mathbb{R}^n$, como aquellas que aplicadas a $\overrightarrow{t}$, dan las componentes del vector (en la base $\{e_i\}$) obtenido de la proyección de $\overrightarrow{t}$ sobre $T_x(\mathfrak{M})$ a través de π. Más precisamente, se tiene:

$$\pi_{*b}(\overrightarrow{t}) = \theta^i(\overrightarrow{t})e_i.$$

A partir de ellas, tenemos el concepto de torsión:

Definición 1.12: *La Torsión de una conexión afín ω es una $\mathbb{R}^n$-valuada 2-forma sobre $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$, obtenida por hacer actuar la derivada covariante exterior, a las 1-formas fundamentales θ^i. Más precisamente,*

$$T(\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{t_2}) = \mathfrak{D}\theta(\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{t_2}) = d\theta(\overrightarrow{t_1^H}, \overrightarrow{t_2^H}),$$

donde

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \vdots \\ \theta^n \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar entonces que

$$T = d\theta + \omega \wedge \theta.$$

A esta ecuación se la conoce como *primera ecuación de estructura.*

A partir de esta 2-forma, se puede construir un tensor sobre $\mathfrak{M}$, definido como sigue. Sea $b = (x, e_1, e_2, ..., e_n)$, un punto de $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$, y $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{t} \in T_b\mathcal{F}(\mathfrak{M})$, entonces, a la forma T le hacemos corresponder el vector $\overrightarrow{T}_{st} \in T_x\mathfrak{M}$, definido por:

$$\overrightarrow{T}_{st} = -T^i(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})e_i. \tag{1.9}$$

La interpretación del vector $\overrightarrow{T}_{st}$ asociado a la 2-forma torsión es la siguiente. Sean $\overrightarrow{s^*}$ y $\overrightarrow{t^*}$, dos vectores no colineales sobre $T_{x_0}\mathfrak{M}$ tales que $\pi_{*b}(\overrightarrow{t}) = \overrightarrow{t^*}$,

[3]Solder forms, en inglés

$\pi_{*b}(\overrightarrow{s}) = \overrightarrow{s^*}$. Con ayuda de la conexión, tracemos una geodésica en la dirección $\overrightarrow{t^*}$ desde un punto x_0, hasta una distancia paramétrica u; llamemos x_1, al punto final obtenido, y traslademos paralelamente al vector $\overrightarrow{s^*}$ hasta allí. Desde el punto x_1, trazamos una geodésica en la dirección de $\overrightarrow{s^*}$, nuevamente por una distancia paramétrica u, llegando a un punto x_2. Entonces, transportamos paralelamente a $\overrightarrow{t^*}$ hasta el punto x_2 a lo largo de ésta geodésica. Estando en x_2, nos movemos en la geodésica generada por $-\overrightarrow{t^*}$, y transportamos paralelamente a $\overrightarrow{s^*}$, llegando a un punto x_3. Finalmente, desde x_3, se traza la geodésica en la dirección $-\overrightarrow{s^*}$, nuevamente por una distancia u, terminando en un punto x_4. En general, si el espacio tiene una 2-forma torsión no nula, x_4 no coincide con el punto de inicio x_0; es decir, no se pueden cerrar paralelogramos en un espacio con torsión. El vector $\overrightarrow{T}_{st}$, es el vector tangente a la curva que se genera por los puntos finales $x_4(u)$ obtenidos por variar continuamente el parámetro u.

§4. Conexiones de Cartan

Ahora definiremos lo que es conocido como conexión de Cartan. Ésta, no es una conexión en el sentido usual, pero tiene muchas particularidades que la hacen tan interesante en física como en matemática. En primer lugar, como veremos, esta conexión tiene en el caso de fibrados de marcos, codificada en su curvatura, no tan solo la información de la curvatura estándar, si no también la de la torsión.

Una conexión de Cartan, es la que permite generalizar las ideas de Klein, sobre como estudiar geometrías. La idea de Klein, fué analizar geometrías a través del estudio del grupo de movimientos que preservan las propiedades que las caracterizan. Por ejemplo, para geometría euclídea, las propiedades a estudiar son los ángulos y longitudes de figuras, y el grupo de movimientos, es el grupo de movimientos rígidos, que preserva a estas propiedades, también conocido como grupo euclídeo. Klein, consideró que una geometría se constituye de un grupo de Lie $\mathcal{G}$, una variedad suave $\mathfrak{M}$, y una acción efectiva, y transitiva de $\mathcal{G}$ sobre $\mathfrak{M}$. El estudio de dicha geometría es el estudio de las propiedades de objetos, que se preservan ante la acción de $\mathcal{G}$. Ahora bien, el punto central de la idea de Klein, es darse cuenta que uno puedo olvidarse del espacio $\mathfrak{M}$, y capturar su información en $\mathcal{G}$. En efecto, sea x_0 un punto de $\mathfrak{M}$, entonces como $\mathcal{G}$ actúa transitivamente sobre $\mathfrak{M}$, tenemos que todo punto de $\mathfrak{M}$, puede ser obtenido por su acción sobre x_0, ahora, si tenemos en cuenta que la acción de $\mathcal{G}$ no es uno a uno, ya que en general el grupo estabilizador $\mathcal{H}$ es no vacío, vemos que si consideramos el cociente $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, este se encuentra en correspondencia uno a uno con $\mathfrak{M}$. La geometría de Klein entonces, consiste de un grupo $\mathcal{G}$, actuando sobre el espacio $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. Esto permite definir un fibrado $\mathcal{H} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Notar que sobre $\mathcal{G}$, hay una 1-forma que toma valores en $\mathfrak{g}$ naturalmente definida, a saber la 1-forma ω_G de Maurer-Cartan. Observar además que ω_G satisface

$$d\omega_G + \omega_G \wedge \omega_G = 0. \tag{1.10}$$

Si pensamos a ω_G como una 1-forma conexión sobre $\mathcal{G}$, (notar sin embargo que no es exactamente una conexión, ya que toma valores en $\mathfrak{g}$ en vez de en $\mathfrak{h}$, y además solo se anula en $\overrightarrow{0} \in T_p\mathcal{P}$), entonces de la Ec.(1.10), podríamos pensar a estas geometrías como planas (curvatura nula).

La idea de Cartan, fue generalizar a estas geometrías, es decir, solo localmente se tiene una geometría de Klein, y la conexión de Cartan, (la cual es el análogo de ω_G), es una medida de cuanto uno se aleja de dicho modelo local.

Por otro lado, desde el punto de vista físico, hay una correspondencia natural entre ciertas conexiones de Cartan y conexiones Twistors [17], es decir la teoría Twistor puede escribirse como una teoría con una conexión conforme normal de Cartan. Esta misma conexión también aparece naturalmente para escribir a las condiciones que un espacio con métrica Lorentziana debe satisfacer para ser conformalmente relacionado a un espacio Einstein.

§4.1. Definición y relación con la conexión de Ehresmann

Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie, y $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ un subgrupo de Lie cerrado de $\mathcal{G}$. Sea $\mathfrak{M}$ una variedad de dimensión n, y además también sea $\dim[\mathcal{G}/\mathcal{H}] = n$. A las álgebras de Lie de cada grupo las denotaremos $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente.

Definición 1.13: *Sea $(\mathcal{P}, \mathfrak{M}, \mathcal{H}, \pi)$ un fibrado principal con grupo de estructura $\mathcal{H}$, entonces una conexión de Cartan es una $\mathfrak{g}$-valuada 1-forma ω tal que:*

(a) Para cada $p \in \mathcal{P}$, el mapeo lineal $\omega_p : T_p\mathcal{P} \to \mathfrak{g}$, es un isomorfismo;

(b) $R_h^*\omega = Ad(h^{-1})\omega \; \forall \, h \in \mathcal{H}$;

(c) $\omega(\overrightarrow{V_F}) = \mathfrak{v} \; \forall \, \mathfrak{v} \in \mathfrak{h}$ y donde $\overrightarrow{V_F}$ es es campo vectorial fundamental generado por $\mathfrak{v}$.

Notar, que si bien esta definición de conexión de Cartan, se ve muy similar a la de la definición de la conexión de Ehresmann, hay ciertas diferencias notables.

Primero, la 1-forma no es valuada en el álgebra de Lie del grupo de estructura $\mathcal{H}$ del fibrado, sino en la de un grupo mayor.

Segundo, esta 1-forma, solo se anula en el vector $\overrightarrow{0} \in T\mathcal{P}$, debido a la condición (a) de la definición. Sin embargo, se puede llegar a ver que esta 1-forma, da origen a una conexión de Ehresmann, si nosotros tomamos el fibrado asociado $\mathcal{P} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ a $\mathcal{P}$, donde la forma de Cartan ω tiene una extensión natural a una conexión de Ehresmann. (Ver [16] y [33]). En este fibrado asociado, la condición (a) de la definición 1.13, si interpreta como la condición de que los planos horizontales definidos por ω no sean tangentes a las subfibras generadas por H de $\mathcal{P}$

Uno puede también definir una 2-forma curvatura sobre $\mathcal{P}$, también $\mathfrak{g}$-valuada, por una expresión similar a la de la curvatura de Ehresmann, dada por:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Se puede ver, que esta curvatura es horizontal, en el sentido de que se anula cuando se aplica a vectores tangentes a fibras sobre $\mathfrak{M}$.

Sin embargo, como veremos en el siguiente ejemplo, esta curvatura contiene mas información dentro de si, que la curvatura estándar.

Ejemplo 1.2: Consideremos el modelo Kleiniano de la geometría euclídea n-dimensional de una variedad $\mathfrak{M}$ real. En tal caso $\mathcal{G}$ es el grupo euclídeo, y $\mathcal{H}$ es el subgrupo que fija el origen:

$$\mathcal{G} = \mathrm{Eucl}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ y } A \in \mathcal{O}(n) \right\},$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathcal{O}(n) \right\},$$

con respectivas álgebras de Lie dadas por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{eucl}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ y } A + A^T = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A + A^T = 0 \right\}.$$

Resulta, por lo tanto que $\mathcal{G}/\mathcal{H} \simeq \mathfrak{M}$ y uno puede ver, que toda conexión de Cartan, tendrá la forma

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & \omega_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix},$$

con θ una 1-forma valuada en $\mathbb{R}^n$, y $\omega_{\mathfrak{h}}$, una 1-forma valuada en $\mathfrak{h}$. Su curvatura Ω asociada se lee,

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & \Omega_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix},$$

con $T = d\theta + \omega_{\mathfrak{h}} \wedge \theta$, y $\Omega_{\mathfrak{h}} = d\omega_{\mathfrak{h}} + \omega_{\mathfrak{h}} \wedge \omega_{\mathfrak{h}}$. Por lo tanto, si interpretamos a la 1-forma θ como la forma soldadura, y $\omega_{\mathfrak{h}}$ como una conexión Levi-Civita, vemos

que la curvatura contiene a la torsión T como una de sus componentes, y por otro lado, a la curvatura de Riemann estándar.
En general uno puede demostrar lo siguiente:

Teorema 1.4: *Sea $(\mathcal{P}, \mathfrak{M}, \mathcal{H}, \pi)$ una geometría de Cartan con grupo de estructura $\mathcal{H}$, y ω una $\mathfrak{g}$-valuada conexión de Cartan, tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$, con $\mathfrak{p}$ un álgebra de Lie complemento de $\mathfrak{h}$. Sea $\omega_{\mathfrak{h}}$ la proyección sobre $\mathfrak{h}$ de ω. Entonces $\omega_{\mathfrak{h}}$ es una conexión de Ehresmann sobre $\mathcal{P}$.*

Del Teorema 1.4, vemos que ahora podemos definir un espacio horizontal (y a partir de el, transporte paralelo), simplemente como el espacio formado por vectores $\overrightarrow{V} \in T(\mathcal{P})$, tales que $\omega_{\mathfrak{h}}(\overrightarrow{V}) = 0$.

Nosotros trabajaremos con álgebras de Lie que pueden ser $\mid k \mid$-gradadas, i.e., con álgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$ que pueden ser descompuestas como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \cdots \oplus \mathfrak{g}_k,$$

donde $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$, y además $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$.

Ejemplo 1.3: Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(m+1, n+1, \mathbb{R})$, el álgebra de Lie asociada al grupo especial ortogonal $SO(m+1, n+1, \mathbb{R})$ de signatura $(m+1, n+1)$, que preserva una métrica $(m+n+2)$-dimensional Q_{AB}, (i.e., $g^T \cdot Q \cdot g = Q$, con $g \in SO(m+1, n+1, \mathbb{R})$) dada por

$$Q_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times(m+n)} & -1 \\ 0_{(m+n)\times 1} & [\eta]_{(m+n)\times(m+n)} & 0_{(m+n)\times 1} \\ -1 & 0_{1\times(m+n)} & 0 \end{pmatrix},$$

donde η es una métrica $(m+n)$-dimensional de signatura (m, n).
Entonces tenemos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1,$$

con

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{-1} &= \mathbb{R}^{m+n}, \\ \mathfrak{g}_0 &= \mathfrak{co}(m, n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(m, n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}, \\ \mathfrak{g}_1 &= \mathbb{R}^{(m+n)*} \end{aligned}$$

Explícitamente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times(m+n)} & 0 \\ t_{(m+n)\times 1} & 0_{(m+n)\times(m+n)} & 0 \\ 0 & -t^T\eta & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{-1},$$

$$\begin{pmatrix} -c & 0_{1\times(m+n)} & 0 \\ 0_{(m+n)\times 1} & \Lambda_{(m+n)\times(m+n)} & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & t^*_{1\times(m+n)} & 0 \\ 0_{(m+n)\times 1} & 0_{(m+n)\times(m+n)} & -\eta t^{*T} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_1,$$

con $\Lambda \in SO(m,n,\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}^{(m+n)}$ y $t^* \in \mathbb{R}^{(m+n)*}$. Es fácil ver entonces que:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0] &\subset \mathfrak{g}_{-1}, \\ [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] &\subset \mathfrak{g}_0, \\ [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] &\subset \mathfrak{g}_1, \\ [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] &\subset \mathfrak{g}_0. \end{aligned}$$

§4.2. La conexión conforme normal de Cartan SO(4,2) y Gravedad Conforme

El Grupo $SO(4,2)$ y su homomorfismo con el grupo conforme $C_o(3,1)$

Estudiaremos ahora, ciertas conexiones de Cartan definidas sobre un fibrado $\mathcal{P}$ 15-dimensional con espacio base $\mathfrak{M}$, 4-dimensional, y con grupo de estructura $H = CO(3,1) \otimes_s T^{*4}$, donde $CO(3,1)$ es el grupo conforme de Lorentz, y T^{*4} las traslaciones especiales 4-dimensionales, actuando sobre la variedad $\mathfrak{M}$ isomorfa a $SO(4,2)/\{CO(3,1) \otimes_s T^{*4}\}$.

Esta conexión de Cartan tomará valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4,2)$, y como veremos en el Capítulo 3, nos permite codificar toda la estructura conforme que se encuentra oculta en un par de ecuaciones diferenciales parciales.

Antes de definir a dicha conexión mostraremos el homomorfismo que existe entre los grupos $SO(4,2)$ y el grupo de transformaciones conformes 15-dimensional.

Sea $\mathcal{E}$ un espacio 6-dimensional con coordenadas $\mathbb{X}^A = (u, x^a, v)$, con $a \in \{1,2,3,4\}$ y $A \in \{0,1,2,3,4,5\}$, y se Q_{AB} una métrica sobre $\mathcal{E}$ dada por

$$Q = -2du \otimes dv + \eta_{ab} dx^a \otimes dx^b = Q_{AB} d\mathbb{X}^A \otimes d\mathbb{X}^B,$$

con

$$Q_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \eta_{ab} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y donde η_{ab} es una métrica Minkowskiana 4-dimensional. Notar que la métrica Q tiene signatura $(4,2)$. Por lo tanto el grupo de transformaciones en este espacio, que deja a la métrica invariante es el grupo $SO(4,2)$, i.e., para cualquier elemento $g \in SO(4,2)$ se deberá tener

$$g^T \cdot Q \cdot g = Q.$$

Consideremos ahora todos los vectores $L^A \in T_o(\mathcal{E})$ (el espacio tangente a $\mathcal{E}$ en el origen) de la forma,

$$L^A = k(x^a) \begin{pmatrix} 1 \\ x^a \\ \frac{1}{2}\eta_{ab}x^a x^b \end{pmatrix} = kl^a, \tag{1.11}$$

con $k(x^a)$ una función arbitraria de las cuatro coordenadas x^a. Es decir para cada x^a tendremos un rayo $L^a = kl^a$ en $T_o(\mathcal{E})$
La particularidad de todos estos vectores (o rayos) es que son nulos, i.e.,

$$Q_{AB}L^A L^B = 0,$$

por lo tanto, pertenecen al cono nulo del origen de $\mathcal{E}$.

Como se ve, cada uno de estos rayos esta en correspondencia con las cuatro coordenadas x^a, i.e., todos estos rayos generan una subvariedad $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$ de dimensión 4.

Veamos ahora, cual es la métrica inducida por Q sobre esta subvariedad. Dicha métrica se obtiene del pullback de la métrica Q, es decir

$$ds_4^2 = \frac{\partial L^A}{\partial x^a}\frac{\partial L^B}{\partial x^b}Q_{AB}dx^a \otimes dx^b = k(x)^2(\eta_{ab}dx^a \otimes dx^b) = k^2 ds_M^2, \tag{1.12}$$

con ds_M^2 la métrica de Minkowski 4-dimensional. Esto es,

La métrica inducida sobre la subvariedad 4-dimensional $\mathcal{M}$ es una métrica conforme a la métrica de Minkowski.

Por lo tanto, los vectores L^A permiten mapear a un par de direcciones nulas sobre $\mathcal{E}$, (cada dirección correspondiente al signo de $k(x^a)$, es decir $k(x^a) > 0$ o $k(x^a) < 0$), a puntos de un espacio conforme a Minkowski .

Notar que $SO(4,2)$ deja invariante al cono nulo de $\mathcal{E}$, y por lo tanto podemos estudiar cual es el efecto que un elemento arbitrario $g \in SO(4,2)$ induce sobre la subvariedad $\mathcal{M}$. Como ya hemos recalcado, dicho elemento g deberá satisfacer $g^T \cdot Q \cdot g = Q$. Entonces si uno hace actuar este elemento a L^A, se tendrá:

$$L^{A'}(x^a) = L^A(x'^a) = g \cdot L^A(x^a),$$

y por lo tanto de la Ec.(1.12), resulta:

$$ds_4'^2 = k'^2 ds_M'^2 = k^2 ds_M^2 = ds_4^2,$$

es decir,

$$ds_M'^2 = \Omega^2 ds_M^2, \tag{1.13}$$

con $\Omega = k'^{-1}k$.

De la Ec.(1.13), vemos que el efecto de cada elemento de $g \in SO(4,2)$ es inducir una transformación conforme sobre $\mathcal{M}$. Sin embargo la correspondencia entre un elemento $g \in SO(4,2)$ y un elemento $h \in C_0(3,1)$ (con $C_0(3,1)$ el grupo conforme conectado al elemento unitario), no es uno a uno, ya que si g está en correspondencia con h, también lo estará $-g$, debido a que hay dos direcciones nulas que definen el mismo punto $x^a \in \mathcal{M}$. La correspondencia resulta entonces de 2 a 1. Notar también que si bien los vectores L^A generan a $\mathcal{M}$, no todos los vectores nulos de E pueden ser generados por puntos de $\mathcal{M}$, i.e., existen direcciones nulas que no se pueden escribir de la forma Ec.(1.11). Por todo lo dicho, podemos considerar al espacio de Minkowski $\mathcal{M}$, como el espacio proyectivo generado por los L^A con la relación de equivalencia $L^A \sim L'^A$ sí y solo sí, $L^A = kL'^A$ para algún $k(x)$. Las coordenadas homogéneas de este espacio las tomaremos con $u = 1$, i.e., todo punto del espacio x^a de Minkowski sera representado por el punto $(1, x^a, \eta_{ab}x^a x^b/2)$ de $\mathcal{E}$.

Hallemos ahora el grupo de isotropía H asociado a $SO(4,2)$ que deja fijo la dirección asociada al punto $(1, x^a = \mathbf{0}, 0)$, i.e., aquellos elementos del grupo que visto desde la subvariedad $\mathcal{M}$ dejan fijo al origen $x^a = \mathbf{0}$. Para eso, veamos cual es la forma mas general que tiene un elemento $h \in H \subset SO(4,2)$ cuando actúa sobre $\mathcal{E}$.

Si escribimos a $h \in H$ como

$$h = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b^T} & c \\ \mathbf{d} & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{f} \\ g & \mathbf{h^T} & i \end{pmatrix}$$

con $\{a, c, g, i\} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{\Lambda}$ una matriz 4×4, $\{\mathbf{d}, \mathbf{f}\}$ vectores 4-dim y $\{\mathbf{b^T}, \mathbf{h^T}\}$ representando la transpuesta de los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{h}$ respectivamente, entonces la condición

$$h = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b^T} & c \\ \mathbf{d} & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{f} \\ g & \mathbf{h^T} & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica que necesariamente se deba tener: $a = k$, $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ y $g = 0$.

Por otro lado, de la condición de que $h \in SO(4,2)$, i.e., $h^T \cdot Q \cdot h = Q$, deducimos que

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2i}\mathbf{f^T}\eta\mathbf{f} && (1.14)\\ ik &= 1 && (1.15)\\ i\mathbf{b^T} &= \mathbf{f^T}\eta\mathbf{\Lambda} && (1.16)\\ \mathbf{\Lambda^T}\eta\mathbf{\Lambda} &= \eta, && (1.17)\\ \mathbf{h^T} &= \mathbf{0} && (1.18) \end{aligned}$$

resultando entonces que cualquier elemento $h \in H \subset SO(4,2)$ es de la forma:

$$h = \begin{pmatrix} k & k\mathbf{f^T}\eta\mathbf{\Lambda} & \frac{1}{2}k\mathbf{f^T}\eta\mathbf{f} \\ 0 & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{f} \\ 0 & 0 & k^{-1} \end{pmatrix}.$$

y donde $\mathbf{\Lambda} \in O(3,1)$ debido a la Ec.(1.17).

Como en breve describiremos como codificar a las ecuaciones de Einstein conformes en condiciones sobre una conexión de Cartan $SO(4,2)$, haremos algunos leves cambios de notación sobre ciertas variables, con el fin de utilizar la misma notación que en [20]. Al término $\mathbf{f^T}\eta\mathbf{\Lambda}$ lo denotaremos $\xi^{\mathbf{T}}$, y al término k, lo escribiremos como $k = e^{-\phi}$. Entonces, la forma general de un elemento $h \in H \subset SO(4,2)$ se puede reescribir,

$$h = \begin{pmatrix} e^{-\phi} & e^{-\phi}\xi^{\mathbf{T}} & \frac{1}{2}e^{-\phi}\xi^{\mathbf{T}}\eta\xi \\ 0 & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{\Lambda}\eta^{-1}\xi \\ 0 & 0 & e^{\phi} \end{pmatrix}. \qquad (1.19)$$

Antes de finalizar, veamos cual es la acción que induce un elemento h del grupo de isotropía de $SO(4,2)$ sobre la subvariedad de Minkowski 4-dim $\mathcal{M}$. Debe resultar claro de antemano, por todo lo dicho anteriormente, que dichos elementos deben estar en correspondencia 2 a 1, con el grupo $CO(3,1) \otimes_s T^{4*}$; esto es, con el producto semi-directo entre el grupo conforme de Lorentz que contiene a las rotaciones y dilaciones; y el grupo de traslaciones especiales T^{4*}. Estas son las únicas transformaciones que mantienen fijo al origen, no así las traslaciones T^4. Veamos como es la acción en detalle.

Como primer punto observar que el término $e^{-\phi}$, es el culpable de las dilaciones, (recordar que $e^{-\phi} = k$ y que $k^2 = \Omega^2$). Aplicando h a un punto $X = (1, x^a, \eta_{ab}x^a x^b/2) = (1, \mathbf{x}, x^2/2)$ obtenemos un punto $X' = hX$ dado por

$$X' = \begin{pmatrix} e^{-\phi} & e^{-\phi}\xi^{\mathbf{T}} & \frac{1}{2}e^{-\phi}\xi^{\mathbf{T}}\eta\xi \\ 0 & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{\Lambda}\eta^{-1}\xi \\ 0 & 0 & e^{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \\ \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} = e^{-\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{\Lambda}e^{\phi}\left(\frac{\mathbf{x}+x^2\eta^{-1}\xi/2}{1+\xi^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{x}+\frac{\xi^2x^2}{4}}\right) \\ \frac{e^{2\phi}}{2}x^2, \end{pmatrix}$$

entonces vemos como la métrica se re-escalea por un factor $e^{-2\phi}$, mientras que sobre el punto $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ actúa una dilación

$$\mathbf{x} \to e^{\phi}\mathbf{x},$$

una rotación de Lorentz (parametrizada por las 6 componentes que la definen)

$$\mathbf{x} \to \mathbf{\Lambda x},$$

y una traslación inversa parametrizada por el vector 4-dimensional ξ,

$$\mathbf{x} \to \frac{\mathbf{x} + x^2\eta^{-1}\xi/2}{1 + \xi^T \cdot \mathbf{x} + \frac{\xi^2 x^2}{4}}.$$

Vemos entonces que el grupo H es un grupo 11-dimensional (1 dilación, 6 rotaciones de Lorentz, y 4 traslaciones especiales). Los 4 parámetros extras que contiene un elemento del grupo 15-dimensional $SO(4,2)$ y que no aparecen en H son las traslaciones estándar. Entonces, siguiendo las ideas de Klein, podemos identificar al espacio $\mathcal{M}$ con $SO(4,2)/H \simeq SO(4,2)/(CO(3,1) \otimes_s T^{4*})$. Como se sigue del ejemplo 1.3, al álgebra de Lie de H la podremos descomponer como:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}, \tag{1.20}$$

con

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{co}(3,1) = \mathfrak{so}(3,1) \oplus \mathbb{R}^+,$$

$\mathfrak{g}_{-1}$ el álgebra de Lie de los generadores infinitesimales de las traslaciones especiales. Para finalizar esta sección, cabe destacar, que si bien hemos trabajado con el espacio plano de Minkowski, en cualquier punto de un espacio-tiempo curvado puede hallarse un conjunto linealmente independiente de 4 1-formas θ^a que formen una base y tal que la métrica del espacio curvado pueda escribirse $ds^2 = \eta_{ab}\theta^a \otimes \theta^b$. Entonces, sobre cada punto de tal espacio, podemos reproducir localmente todos los resultados de esta sección.

La conección conforme normal de Cartan $SO(4,2)$

Ahora que ya hemos visto la correspondencia entre el grupo $SO(4,2)$ y el grupo conforme, podemos definir una conexión de Cartan $SO(4,2)$ sobre un fibrado principal $H \to \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ con $\mathcal{M}$ una variedad 4-dimensional, ya que como hemos visto, se tiene que $dim\,[SO(4,2)/H] = dim\,[\mathcal{M}] = 4$. Sean entonces θ^a cuatro 1-formas linealmente independientes definidas sobre $\mathcal{M}$, y tales que $ds^2 = \eta_{ab}\theta^a\theta^b$.

Entonces una 1-forma localmente definida en $\mathcal{M}$ con valores en $\mathfrak{so}(4,2)$ esta dada por:

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \psi_b & 0 \\ \theta^a & \Gamma^a{}_b & \eta^{a\rho}\psi_c \\ 0 & \eta_{bc}\theta^c & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Ahora bien, a partir de un elemento $h \in H$ podemos elevar esta 1-forma $\tilde{\omega}$ a una 1-forma ω sobre $M \times H$, por intermedio de la relación

$$\omega = h^{-1}\tilde{\omega}h + h^{-1}dh,$$

y si ahora escribimos al h de la Ec.(1.19) en componentes,

$$\begin{pmatrix} e^{-\phi} & e^{-\phi}\xi_a & \frac{1}{2}e^{-\phi}\xi_a\xi_b\eta^{ab} \\ 0 & \Lambda^b{}_a & \Lambda^b{}_\rho\eta^{cd}\xi_d \\ 0 & 0 & e^{\phi} \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

con

$$\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d\eta_{ab} = \eta_{cd}$$

obtenemos que la 1-forma ω se escribe

$$\omega = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A & \psi'_a & 0 \\ \theta'^b & \Gamma'^b_a & \eta^{bc}\psi'_c \\ 0 & \theta'^c\eta_{ca} & \frac{1}{2}A \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \theta'^b &= \mathrm{e}^{-\phi}\Lambda^{-1b}{}_d\theta^d, \\ A &= 2\xi_a\theta'^a + 2d\phi, \\ \Gamma'^b_a &= \Lambda^{-1b}{}_d\Gamma^d{}_c\Lambda^c{}_a + \Lambda^{-1b}{}_d d\Lambda^d{}_a + \theta'^b\xi_a - \xi^b\eta_{ad}\theta'^d, \\ \psi'_a &= \mathrm{e}^{\phi}\psi_b\Lambda^b{}_a - \xi_e\Lambda^{-1e}{}_d\Gamma^d{}_b\Lambda^b{}_a + \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\phi}\eta^{ef}\xi_e\xi_f\psi_b\Lambda^b{}_a - \xi_aA\right) \\ &\quad +d\xi_a - \xi_e\Lambda^{-1e}{}_d d\Lambda^d{}_a. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Notar que Γ'^a_b, toma valores en el álgebra de Lie de O(3,1), que las θ'^a son las formas de soldadura definidas en $\mathcal{M} \times H$, y que la 1-forma A depende de las traslaciones especiales ξ_a. La forma ω es una conexión de Cartan, pero hasta ahora no ha sido definida de manera unívoca.

Si nosotros definimos a las Γ'^a_b, tales que

$$d\theta'^a + \Gamma'^a_c \wedge \theta'^c = T^a = 0,$$

entonces podremos determinar unívocamente a las 1-formas ${\Gamma'}^a{}_b$, y resultarán en las 1-formas estándar que definen la conexión de Levi-Civita.

La curvatura Ω asociada a la 1-forma ω, es:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = \begin{pmatrix} 0 & (\mathfrak{D}\psi_a)' & 0 \\ \\ T^a = 0 & {C'}^b{}_a & \eta^{ab}(\mathfrak{D}\psi_a)' \\ \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} {C'}^a{}_b &= \Lambda^{-1a}{}_c C^c{}_d \Lambda^d{}_b \qquad (1.24) \\ (\mathfrak{D}\psi_b)' &= e^{\phi}\mathfrak{D}\psi_a \Lambda^a{}_b - \xi_e \Lambda^{-1e}{}_c C^e{}_a \Lambda^a{}_b, \end{aligned}$$

y

$$C^a{}_b = \frac{1}{2}C^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d = d\Gamma^a{}_b + \theta^a \wedge \psi_b + \Gamma^a{}_c \wedge \Gamma^c{}_b + \psi^a \wedge \theta_b, \qquad (1.25)$$

$$\mathfrak{D}\psi_a = \frac{1}{2}\psi_{abc}\theta^b \wedge \theta^c = d\psi_a + \psi_b \wedge \Gamma^b{}_a. \qquad (1.26)$$

Si nosotros requerimos que la 2-forma ${C'}^a{}_b$ tenga traza nula, entonces, como veremos en el Capítulo 3, la conexión de Cartan queda definida unívocamente, y se la denomina *conexión conforme normal de Cartan.*

En el Capítulo 3, también veremos que la curvatura Ω de esta conexión, tiene como ingredientes, no tan solo a la torsión estándar, si no también al tensor de Weyl (tensor asociado a la 2-forma ${C'}^b{}_a$), y el tensor de Cotton-York (asociado a la 2-forma $\mathfrak{D}\psi_a$). Se puede demostrar también, que la corriente asociada a esta curvatura, es el tensor $\mathcal{B}$ de Bach, i.e. $\mathfrak{D} \star \Omega = \mathcal{B}$ [18].

Las ecuaciones de Einstein conformes y la Conexión $SO(4,2)$ de Cartan

En 1985, Kozameh, Newman y Tod, [21] pudieron establecer un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que un espacio sea conforme a un Espacio Einstein.

Por definición, un espacio $\mathcal{E}$ con métrica g_{ab} es Einstein si y solo si

$$S_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab} = 0,$$

y se dice que otro espacio $\mathcal{CE}$ con métrica g'_{ab} está *conformalmente relacionado a* un espacio Einstein si existe un una función ϕ, tal que el espacio con métrica $g = e^{-2\phi}g'$ es Einstein.

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tal factor conforme, que convierte una métrica de tipo Lorentziana en una métrica Einstein, fueron escritas en [21] como

$$B_{ab} = \nabla^m \nabla^n C_{mabn} + \frac{1}{2} R^{mn} C_{mabn} \;=\; 0, \tag{1.27}$$

$$N_{cab} = C^{efgh}[C_{efgh}\nabla^d C_{cdab} - 4\nabla^d C_{efgd} C_{chab}] \;=\; 0, \tag{1.28}$$

con C^a_{bcd} el tensor de Weyl, y donde se asume que $C^2 = C_{abcd}C^{abcd} \neq 0$.

La primera condición, es la solicitud de que el tensor de Bach, sea nulo. Como dijimos en un párrafo anterior, y demostrado recientemente en [18], se puede ver entonces, que la primer condición equivale a requerir la anulación de la corriente tipo Yang-Mills, para una conexión conforme normal de Cartan $SO(4,2)$, i.e.,

$$\mathfrak{D} \star \Omega = 0.$$

Lo interesante, es que la segunda condición, también puede escribirse como una condición sobre la curvatura del tensor de Weyl, como también fue demostrado recientemente en [20]. Sin embargo esta condición es de origen algebraico en la curvatura y se lee:

$$(\overline{\Omega}^3)^T + \overline{\Omega}^3 = 0,$$

con $\overline{\Omega}^3$ una expresión algebraica cúbica en la curvatura de Cartan Ω,

$$\overline{\Omega}^3_{AF} = \frac{1}{2} Q_{AE}\Omega^E{}_{Bab}\Omega^B_{Cf\delta}\Omega^C{}_{Fcd}\eta^{af}\eta^{b\delta}\theta'^c \wedge \theta'^d.$$

y $(\overline{\Omega}^3)^T$ su expresión transpuesta. En efecto, Kozameh, Nurowski y Newman, demostraron que

$$(\overline{\Omega}^3)^T + \overline{\Omega}^3 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{6\phi}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\phi}\Lambda^a{}_b N_{acd}\theta^c \wedge \theta^d \\ 0 & \mathrm{e}^{-\phi}\Lambda^a{}_b N_{acd}\theta^c \wedge \theta^d & V^a N_{acd}\theta^c \wedge \theta^d \end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

donde

$$V^a = \frac{4}{C^2}(\nabla_d C^d{}_{efb})C^{aefb} - \mathrm{e}^{-\phi}\xi_d \Lambda^{-1d}{}_e \eta^{ea}, \tag{1.30}$$

con $C^2 = C_{abcd}C^{abcd}$ y N_{acd} dado por la Ec.(1.28). (Para detalle, ver [20]).

Como nosotros seremos capaces de construir esta conexión de Cartan $SO(4,2)$ a partir de un par de EDPs, tendremos a dispocisión una herramienta para poder capturar a los espacios Einstein como originados en el espacio solución de un par de ecuaciones a derivadas parciales.

Capítulo 2

Geometrizando ecuaciones diferenciales

§1. Introducción

En general, uno está acostumbrado a pensar sobre ecuaciones diferenciales, como relaciones que deben existir entre funciones a determinar y sus derivadas. Sin embargo, a veces resulta más útil tener una interpretación geométrica del significado de una ecuación diferencial. El propósito de este capítulo es dar una exposición de esa imagen geométrica. La misma será utilizada en su totalidad en lo que resta de la tesis.

§2. Sistemas diferenciales y sitemas Pfaffianos

Antes de introducirnos en la geometría de ecuaciones diferenciales, haremos un breve resumen sobre sistemas diferenciales, los cuales resultarán el lenguaje en donde se codificará toda la información geométrica de una ecuación diferencial.

Por un sistema diferencial, entenderemos un conjunto de formas diferenciales $\{\omega^1, \omega^2, ...\}$ definida sobre una variedad m-dimensional M.

Una subvariedad $N \subset M$ será llamada una *subvariedad integral*, si ésta aniquila a todas las formas diferenciales ω^i, i.e., si $\omega^i|_N = 0$. El problema consiste entonces en, una vez dado un sistema diferencial, hallar (si existe) una subvariedad integral $N \subset M$ de una dimension previamente prescripta.

Ahora, es claro que si N es una subvariedad integral de un sistema diferencial, y γ es una forma no necesariamente en el sistema, entonces el producto exterior $\gamma \wedge \omega^i$, con ω^i siendo una de las formas del sistema diferencial, también se anulará sobre N. Esto nos lleva, a no solo considerar al sistema conformado por las formas ω^i, sino más bien, a tener en cuenta el *ideal* completo que ellas generan.

Definición 2.1: *Un ideal exterior $\mathcal{I}$, es una colección de formas diferenciales sobre una variedad M, tal que: a) Si ω y $\widetilde{\omega}$ son dos formas del sistema, entonces también lo es su suma; b) Si $\omega \in \mathcal{I}$ y γ es cualquier forma diferencial, entonces $\gamma \wedge \omega \in \mathcal{I}$.*

Con esta definición en mente, tendremos que,

Teorema 2.1: *Una subvariedad $N \subset M$, es una subvariedad integral del sistema diferencial determinado por el ideal $\mathcal{I}$, si y solo si $\mathcal{I}$ se anula sobre N, i.e. para toda $\omega \in \mathcal{I}$, $\omega|_N = 0$.*

Nosotros diremos que un conjunto de formas $\{\omega^1, \omega^2, ...\}$ generan un ideal, si toda forma $\theta \in \mathcal{I}$ se puede escribir como una combinación lineal finita de la forma

$$\theta = \sum_j \gamma^j \wedge \omega^j,$$

donde las γ^j son formas arbitrarias tales que $\text{grad}\,[\theta] = \text{grad}\,[\gamma^j] + \text{grad}\,[\omega^j]$, con $\text{grad}\,[\omega]$ significando el grado de la forma ω.

En particular, cuando el ideal es generado por 1-formas, diremos que $\mathcal{I}$ es *simplemente generado.* En tal caso, al sistema diferencial de 1-formas que genera al ideal, se lo conoce como *sistema pfaffiano.*

Definición 2.2: *Un ideal exterior $\mathcal{I}$, es llamado cerrado, si siempre y cuando $\omega \in \mathcal{I}$, entonces $d\omega \in \mathcal{I}$.*

Sea $N \subset M$, una subvariedad integral n-dimensional del sistema $\mathcal{I}$. Entonces el espacio tangente TN_x en un dado punto $x \in N$, será un subespacio n-dimensional del espacio TM_x. Como las formas diferenciales del ideal $\mathcal{I}$, se anulan sobre N, tenemos que, consideradas como mapeos multi-lineales, se deberá cumplir que para toda k-forma $\omega \in \mathcal{I}$,

$$\omega(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_k) = 0 \ \text{ donde } \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_k\} \in TN_x.$$

Esta es una condición necesaria que el espacio tangente de una potencial subvariedad integral deberá cumplir.

Definición 2.3: *Un subespacio $S \subset TM_x$, n-dimensional, será llamado un elemento integral del ideal $\mathcal{I}$, si todas las formas diferenciales de $\mathcal{I}$ aniquilan a S, i.e., si para toda k-forma en $\mathcal{I}$,*

$$\omega(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_k) = 0 \ \ \textit{donde}\ \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_k\} \in S.$$

Luego, se tendrá lo siguiente:

Teorema 2.2: *Una subvariedad N es una subvariedad integral del ideal $\mathcal{I}$, si y solo si, TN_x es un elemento integral de $\mathcal{I}$.*

Observación 2.1: *Puesto que toda 1-forma en $\mathcal{I}$, se debe anular sobre el espacio tangente TN_x de una subvariedad integral N, el subespacio del espacio cotangente T^*M_x generado por las 1-formas en $\mathcal{I}$, tendrá a lo sumo dimensión $m-n$. A este número $r(x)$, lo llamaremos el "Rango" del ideal.*

Ahora bién, los objetos duales a formas diferenciales, son campos vectoriales, de allí, el problema de hallar integrales a un sistema diferencial, se traduce en la integración de sistemas de campos vectoriales, i.e., campos vectoriales que forman un espacio lineal bajo adición y multiplicación por funciones suaves.

Definición 2.4: *Una subvariedad $N \subset M$, es llamada una subvariedad integral del sistema de campos vectoriales $\mathcal{V}$ si y solo si, TN_x está contenido en $\mathcal{V}_x$, para todo $x \in N$.*

En general diremos que un sistema de campos vectoriales es llamado *integrable*, si a través de todo $x \in M$, pasa una subvariedad integral de dimensión $n = \dim\mathcal{V}_x$. Al número n también lo denominaremos *rango* de $\mathcal{V}$.

Notar que si $\overrightarrow{v}$ es un campo vectorial tal que es tangente a toda subvariedad integral, entonces éste necesariamente pertenece a $\mathcal{V}$. Por lo tanto, si $\overrightarrow{w}$ es otro campo con esta propiedad, también lo deberá ser su bracket de Lie $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

Un sistema vectorial $\mathcal{V}$ tal que se tiene que cuando $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{V}$ entonces también lo hace $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, es llamado involutivo. El siguiente teorema, es uno de los más poderosos de geometía:

Teorema de Frobenius: *Sea $\mathcal{V}$ un sistema de campos vectoriales suaves, de rango constante n. Entonces $\mathcal{V}$ es integrable, si y solo si, éste es involutivo.*

Ahora bien, sea dado un sistema de campos vectoriales de rango constante $r(x) = n$, denotemos por $\mathcal{I}^1$ el espacio dual de 1-formas que se anulan en el sistema, i.e., $\omega(\overrightarrow{v}) = 0$ para todo $\omega \in \mathcal{I}^1$ y $\overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$. Entonces diremos que el ideal $\mathcal{I}$, simplemente generado por $\mathcal{I}^1$, es el ideal exterior *dual* a $\mathcal{V}$. Notar que el rango de $\mathcal{I}$, es $r(x) = m - n$.

Uno puede demostrar lo siguiente,

Teorema 2.3: *Un sistema de campos vectoriales $\mathcal{V}$ es involutivo, si y solo si, el ideal exterior dual es cerrado.*

Con lo cual tenemos la formulación dual del teorema de Frobenius:

Teorema de Frobenius (Formulación dual): *Sea $\mathcal{I}$ un ideal simplemente generado de rango constante $r = m - n$. Entonces $\mathcal{I}$ es n-integrable, si y solo si, $\mathcal{I}$ es cerrado.*

Como veremos a partir de la siguiente sección, nuestras ecuaciones diferenciales, podrán ser escritas como sistemas pfaffianos sobre ciertos espacios que caracterizan a las ecuaciones.

§3. Geometrización de ecuaciones diferenciales

§3.1. Motivación

Con el fin de motivar la intepretación geométrica de una ecuación diferencial, comencemos a analizar el siguiente caso simple. Sea una EDO de primer orden,

$$y' = F(x, y), \tag{2.1}$$

donde x es una variable independiente definida en un conjunto $\mathbb{X}$, e y es la variable dependiente definida en un conjunto $\mathbb{Y}$. Aquí, y' significa la derivada de y con respecto a x.

Soluciones a esta ecuación, serán funciones $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, tales que $y = f(x)$ satisfaga

$$f'(x) = F(x, f(x)).$$

Consideremos ahora, un espacio $J^1(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ de dimensión 3, con coordenadas (x, y, y') en donde y' es considerada como una variable independiente, es decir, no tiene connotación por el momento, de una derivada asociada a y.
Entonces, a la relación Ec.(2.1), podemos interpretarla como una superficie Σ (una subvariedad) embebida en J^1. Por lo tanto,

Una EDO de primer orden, puede ser interpretada como una superficie Σ sobre un cierto espacio J^1.

Ahora, interpretemos geométricamente, a las soluciones de la EDO original. Es obvio que si uno tiene una solución $y = f(x)$, entonces la curva $C : \mathbb{X} \to \mathbb{J}^1$ definida por los puntos $(x, f(x), f'(x))$ estará completamente contenida en la superficie

Σ. Por lo tanto,

Toda solución de la ecuación diferencial Ec.(2.1), está en correspondencia con ciertas curvas trazadas sobre la superficie Σ.

Pero debe resultar claro, que *no toda curva* C_1 *sobre* Σ *será una solución de la Ec.(2.1).* Para que lo sea, será necesario que la proyección Π de una dada pero arbitraria curva $C_1 \equiv (x, y(x), p(x))$ sobre el espacio $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ con coordenadas (x, y),

$$\Pi : C_1 \equiv (x, y(x), p(x)) \to C_0 \equiv (x, y(x)),$$

sea tal que la curva C_0 generada en la proyección, defina a una función $y = f(x)$, dependiente del parámetro x y *además* que $f'(x) = p$.

Entonces, uno debe agregar más estructura, además de definir la superficie Σ, si se desea codificar geométricamente la información de cuales curvas deben ser interpretadas como soluciones a la Ec.(2.1), y cuales no.

Esta estructura extra, como veremos en breve, es provista por un sistema diferencial (más precisamente, por el ideal generado por un cierto sistema pfaffiano sobre Σ), y es conocida como una estructura de contacto.

Esta idea puede obviamente ser generalizada para EDOs y EDPs de cualquier orden. Por ejemplo, sea una ODE de orden n,

$$\frac{du^n}{dx^n} = F(u, \frac{du}{dx}, \frac{du^2}{dx^2}, ..., \frac{du^{n-1}}{dx^{n-1}}),$$

con $x \in \mathbb{X}$, e $u \in \mathbb{U}$.

En una notación más compacta, escribiremos

$$u^{(n)} = F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, ..., u^{(n-1)}). \tag{2.2}$$

Con esta ecuación en mente, construimos un espacio denotado $J^n(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ con coordenadas locales $(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, ..., u^{(n-1)}, u^{(n)})$, i.e., un espacio $(n+2)$-dimensional.

Entonces, como en el caso de una ODE de primer orden, podemos considerar que la ODE, Ec.(2.2), es definida como una hipersuperficie Σ sobre J^n, y las soluciones estarán en correspondencia con ciertas curvas sobre Σ.

En general, si el espacio $\mathbb{X}$, tiene dimensión $n > 1$, i.e., hay más de un parámetro independiente, ya no podremos hablar de curvas sobre Σ, pero las soluciones, aun se verán como subvariedades n-dimensionales contenidas en Σ.

§3.2. Espacios Jet y estructuras de contacto

Nuestro propósito, es geometrizar completamente a estas ecuaciones y a sus soluciones, para ello, observemos lo siguiente:

Si bien hemos dicho que la Ec.(2.2) puede ser considerada como una hipersuperficie embebida en J^n, debe resultar claro, que nosotros podemos estudiar a esta hipersuperficie de manera intrínsica, es decir, sin hacer referencia a un espacio de dimensión mayor.

Esto es, nosotros podemos considerar a esta superficie coordenatizada localmente por $(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, ..., u^{(n-1)})$. A este espacio lo denotaremos, en coherencia con la definición anterior, $J^{n-1}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Dichos espacios, son conocidos con el nombre de *Espacios Jets*.

Una solución de la ODE original, inducirá una subvariedad 1-dimensional en este espacio, y por ende, si conocemos una solución en el espacio $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ dada por $s_1 = (x, f(x))$, (a menudo conocido como grafo de $f(x)$), la misma generará una curva sobre $J^{(n-1)}$ dada por

$$p^{(n-1)}[f] = (x, f(x), f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), ..., f^{(n-1)}(x)).$$

Diremos que esta curva, es la prolongación sobre $J^{(n-1)}$ de $f(x)$.

Nuestro próximo objetivo, es saber como reconocer si una curva en $J^{(n-1)}$ es la prolongación de alguna función (y por ende una solución de la ODE original) o no.

Para ello, introduciremos la idea de estructura de contacto.

Definición 2.5: *Una 1-forma diferencial θ sobre el espacio Jet $J^{(n-1)}$ es llamada una forma de contacto, si ésta es aniquilada por todas las funciones prolongadas. Es decir, si $u = f(x)$, tiene prolongación suave sobre $J^{(n-1)}$, $p^{(n-1)}[f] : \mathbb{X} \to J^{(n-1)}$, entonces el pull-back de θ a $\mathbb{X}$, via $P^{(n-1)}[f]$ se anula: $(p^{(n-1)}[f])^*\theta = 0$.*

Ejemplo 2.1: Consideremos el caso de J^1, con coordenadas $x, u, p_1 = u_x$. Una 1-forma genérica toma la forma coordenada

$$\theta = adx + bdu + cdp_1.$$

Con a, b, c funciones de (x, u, p_1). Una función $u = f(x)$, tiene primer prolongación $p^{(1)}[f] = (x, f(x), f'(x))$, y por lo tanto

$$(P^{(1)}[f])^*\theta = [a(x, f(x), f'(x)) + b(x, f(x), f'(x))f'(x) + c(x, f(x), f'(x))f''(x)]dx.$$

Esta 1-forma se anulará para toda f, si y solo si, $c = 0$, y $a = -bp_1$, por lo tanto debemos tener que

$$\theta = b(du - p_1dx) = b(du - u_xdx) = b\theta_0.$$

A la forma de contacto $\theta_0 = du - u_x dx$, la llamaremos *forma de contacto básica.*

Ejemplo 2.1 *bis*: Del mismo modo, sobre J^2, con coordenadas (x, u, p_1, p_2), $(p_2 = u_{xx})$, una 1-forma

$$\theta = adx + bdu + cdp_1 + edp_2,$$

será una forma de contacto, si y solo si,

$$\theta = b\theta_0 + c\theta_1,$$

donde $\theta_1 = du_x - u_{xx}dx$ es la próxima forma de contacto básica.

Observación 2.2: *La notación $J^{n-1}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, no es exclusiva a EDOs, por ejemplo, si estudiamos EDPs, $J^{n-1}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, significará el espacio con coordenadas (x, y, Dy), con $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$ y Dy denotando a todas las derivadas posibles hasta orden $(n-1)$ de y con respecto a los parámetros x. En general, tanto $\mathbb{X}$ como $\mathbb{Y}$, serán espacios de dimensión mayor que uno. Por ejemplo, para una sistema de dos EDPs de segundo orden de la forma:*

$$\begin{aligned} u_{xx} &= F_1(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y, u_{xy}, u_{yy}, v_{xy}, v_{xx}), \\ v_{yy} &= F_2(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y, u_{xy}, u_{yy}, v_{xy}, v_{xx}), \end{aligned}$$

con $\{x, y\} \in \mathbb{X}$, las variables independientes, y $\{u, v\} \in \mathbb{Y}$, las variables dependientes, resulta

$$J^1 = (x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y).$$

Ejemplo 2.2: Teniendo en cuenta la observación anterior, en el caso de dos variables independientes, y una dependiente, habrá una 1-forma básica sobre J^1,

$$\theta_0 = du - u_x dx - u_y dy.$$

Dos 1-formas básicas sobre J^2,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= du_x - u_{xx}dx - u_{xy}dy, \\ \theta_2 &= du_y - u_{xy}dx - u_{yy}dy, \end{aligned}$$

etcetera.

Lo interesante, es que las formas de contacto, caracterizan completamente a las subvariedades de $J^{(n-1)}$ que provienen de la prolongación de una función como lo establece el siguiente teorema:

Teorema 2.4: *Una subvariedad arbitraria $F : \mathbb{X} \to J^{(n-1)}$,*

$$F(x) = (x, u(x), p(x), ..., p_{(n-1)}(x)),$$

sobre el espacio Jet $J^{(n-1)}$, es la prolongación de alguna función $u = f(x)$, si y solo si, F aniquila a todas las formas de contacto sobre $J^{(n-1)}$,

$$F^*\theta_i = 0. \tag{2.3}$$

En otras palabras, la subvariedad es una prolongación de $u = f(x)$, si y solo si, es una subvariedad integral del sistema pffafiano generado por las formas básicas de contacto θ_i.

Observación 2.3: *También podemos pensar a F como una sección sobre J^{n-1}, ya que, utilizando la jerga del capítulo anterior, podemos considerar a $J^{(n-1)}$, como un espacio fibrado $\pi : J^{n-1} \to \mathbb{X}$. En tal sentido, $F : \mathbb{X} \to J^{(n-1)}$ es una sección sobre este fibrado Jet.*

Nosotros no daremos la prueba general aquí, pero sí veremos ciertos casos especiales, de donde resultará clara la idea de la prueba general. Como primer ejemplo, sea $\mathbb{X} \subseteqq \mathbb{R}$ y $\mathbb{Y} \subseteqq \mathbb{R}$. Sea F una curva sobre J^1 descrita por un par de funciones, $u = f(x)$, $p_1 = g(x)$, i.e., $F(x) = (x, f(x), g(x))$. Esta sección aniliquilará a la forma básica de contacto $\theta_0 = du - pdx$, siempre y cuando

$$0 = F^*\theta_0 = df - gdx = [f'(x) - g(x)]dx,$$

i.e., si y solo si $g(x) = f'(x)$. Por lo tanto, F deberá ser necesariamente la prolongación de una función $f(x)$.

Del mismo modo, si $F = (x, f(x), g(x), h(x))$ es una sección sobre J^2, entonces se deberá cumplir:

$$0 = F^*\theta_0 = F^*(du - p_1 dx), \tag{2.4}$$
$$0 = F^*\theta_1 = F^*(dp_1 - p_2 dx). \tag{2.5}$$

De la Ec.(2.4) deducimos nuevamente que $g(x) = f'(x)$, y de la Ec.(2.5) tenemos que

$$0 = F^*(dp_1 - p_2 dx) = dg - hdx = [g'(x) - h(x)]dx.$$

Por lo tanto, se deberá tener, $h(x) = g'(x) = f''(x)$.

De allí, nuevamente $F = (x, f(x), f'(x), f''(x))$, y por ende, es la prolongación de una cierta función f.

Con ayuda de esta estructura, ya tenemos a nuestra disposición una manera de caracterizar geométricamente a EDOs y EDPs de orden arbitrario, como veremos en la siguiente sección.

§3.3. Geometrización de ecuaciones diferenciales en ejemplos

Ahora que ya tenemos toda la maquinaria para codificar geométricamente a ecuaciones diferenciales, daremos algunos ejemplos sencillos. En el caso de una ODE de primer orden, podremos pensar que resolver la ecuación,

$$y' = F(x, y),$$

es equivalente a encontrar subvariedades 1-dimensionales del espacio $J^0 = (x, y)$, que sean integrales del sistema generado por la única 1-forma básica

$$\theta_0 = dy - F(x, y)dx.$$

Del mismo modo, una EDO de orden n,

$$u^{(n)} = F\left(x, u, u', ..., u^{(n-1)}\right),$$

tiene asociado al espacio Jet $J^{n-1}(\mathbb{X}, \mathbb{U})$, con coordenadas locales $\left(x, u, u', ..., u^{(n-1)}\right)$, y un ideal $\mathcal{I}$, generado por el sistema pfaffiano,

$$\begin{aligned} \theta_0 &= du - u'dx, \\ \theta_1 &= du' - u''dx, \\ &\vdots \\ \theta_{(n-1)} &= du^{(n-1)} - Fdx, \end{aligned}$$

Hallar subvariedades 1-dimensionales integrales de este sistema, es equivalente a encontrar soluciones de la EDO original.

Diferentes casos de sistemas pfaffianos asociados a EDOs y EDPs, serán analizados en los siguientes capítulos, donde se utilizará esta imagen geométrica de las ecuaciones, para poder introducir más estructuras extras, como métricas y conexiones.

Capítulo 3

Conexiones de Cartan a partir de EDPs

§1. Introducción

Aquí, nos concetraremos en la geometría asociada con un par de EDPs de segundo orden con dos variables independientes y una dependiente. Via la estructura emergente, la discusión será acotada a una clase especial de ecuaciones conocida como la clase de Wünschmann generalizada. Entonces, describiremos la geometría diferencial que es inducida por estas ecuaciones sobre el espacio solución 4-dimensional de estas EDPs. Esta geometría incluye la existencia de todas las métricas conformes Lorentzianas, tanto como todas las conexiones conformes normales de Cartan. Puesto que todas la métricas conformes Lorentzianas pueden ser construidas a partir de *algún* par de EDPs de segundo orden, se infiere que, en particular, todas las métricas conformalmente relacionadas a métricas Einstein de vacío, son incluidas dentro de este contexto o discusión.

Como segundo objetivo entonces, queremos preparar las estructuras básicas necesarias para codificar a las ecuaciones de Einstein (o más precisamente, las ecuaciones de Einstein conformes) dentro del formalismo de pares de EDPs. Primero, recordemos que existen dos usos para el término de 'ecuaciones de Einstein conformes'; en un caso solo son dadas ecuaciones diferenciales para la clase conforme de métricas Lorentzianas tales que *existe* un factor conforme, cuya elección convierte a la clase a una única métrica de vacío que es solución de las ecuaciones de Einstein; en el otro caso, las ecuaciones diferenciales envuelven tanto a la métrica como al *necesario* factor conforme. Nuestro interés en el presente, es solo en el primer caso.

Veinte años atrás, fue introducido el formalismo de Superficies Nulas de Relatividad General (RG) [9, 11, 13, 15, 32] como una herramienta alternativa para estudiar RG, y en particular, para capturar los grados de libertad conforme. Lo novedoso de este enfoque, consistió en usar superficies nulas como las variables principales de la teoría. Las superficies en sí mismas, fueron obtenidas como soluciones de un par de EDPs de segundo orden integrables, para secciones de un fibrado de linea sobre la 2-esfera con una función compleja Λ jugando un rol análogo al de F en la ODE de tercer orden. (Aquí, usaremos S en vez de Λ.) El espacio solución 4-dimensional de estas ecuaciones, emergió como el espacio-tiempo en si mismo. Luego, fue derivado un método algebraico explícito para construir métricas conformes provisto de que cierta condición diferencial sobre Λ fuera satisfecha. Tal condición, conocida entonces como condición de metricidad, y escrita $\mathcal{W} = \mathcal{W}[\Lambda]$, resultó esencial para la formulación de NSF. En aquel entonces, se pudo construir explícitamente objetos tipo el tensor de Weyl, el tensor de Riemman, la conexión de Levi-Civita, etc. Aun cuando no fue muy elegante mezclar conexiones no corformalmente invariantes con superficies nulas para la construcción de estos objetos, en aquel tiempo no resultaba claro como producir una formulación invariante conforme de la Relatividad General.

Nosotros intentamos aquí, llenar este vacío. Comenzando con un par de EDPs que definen a nuestras variables principales, y sin ninguna asunción a priori sobre el espacio-tiempo, construiremos lo que es conocido como conexión conforme de Cartan sobre el espacio solución asociado a estas ecuaciones. Una tetrada (nula), definida a partir del par de EDPs, es entonces introducida sobre el espacio solución. El requisito de torsión nula unívocamente fija la conexión asociada e impone una condición diferencial sobre la clase de EDPs consideradas. El formalismo es conformalmente covariante por construcción; la parte no trivial de su curvatura son los tensores de Weyl y de Cotton-York. El tensor de Ricci es codificado dentro de la 1-forma de la conexión conforme normal de Cartan.

Las ecuaciones de Einstein conformes, en este nuevo lenguaje, resultan condiciones diferenciales impuestas sobre el par de EDPs que definen a las superficies características. Éstas son encontradas luego de imponer condiciones sobre la curvatura conforme de Cartan; una condición algebraica cúbica y una condición diferencial, equivalente a la anulación del tensor de Bach.

En la sección 2, describimos ciertas ideas preliminares y revisamos resultados previos. Nuestros resultados principales, son presentados en la sección 3, donde demostramos como, a partir de la primera ecuación de estructura de Cartan, se encuentra una conexión conforme y una restricción sobre la clase de EDPs consideradas, llevando a una subclase conocida como clase de Wünschmann generalizada. Muchas de las expresiones explícitas y sus pruebas, son relegadas a Apéndices debido a su longitud. En la sección 4, discutimos la segunda ecuación de estructura de Cartan y las tensores de curvaturas de Cartan. Para claridad, en la sección 5 damos una breve sinopsis de las secciones previas. La sección 6 unifica todo el material dentro de la conexión conforme normal de Cartan. Finalmente, en la sección 7, discutimos como obtener las ecuaciones de Einstein conformes.

§2. Preliminares

Sobre un espacio 2-dimensional con coordenadas (s, s^*) consideremos el siguiente par de EDPs

$$\begin{aligned} Z_{ss} &= S(Z, Z_s, Z_{s^*}, Z_{ss^*}, s, s^*), \\ Z_{s^*s^*} &= S^*(Z, Z_s, Z_{s^*}, Z_{ss^*}, s, s^*), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde los subíndices denotan derivadas parciales y Z es una función real de (s, s^*). Aun cuando sería igualmente posible tratar a (s, s^*) como un par de variables reales, resulta ser más útil considerar a las mismas como un par complejo conjugado. En tal caso, la segunda ecuación es simplemente la complejo conjugada de la primera.

Observación 3.1: *Notar que la segunda ecuación (en el caso que (s, s^*) sean variables complejas conjugadas), contiene información no trivial, ya que estamos considerando que Z debe ser una función real.*

En lo sucesivo, entonces, $(^*)$ denotará la operación de tomar el complejo conjugado. Asumiremos además, que las funciones S y S^* satisfacen las condiciones de integrabilidad. Se sigue entonces, que soluciones $Z = Z(s, s^*)$, son 2-superficies en el espacio 6-dimensional J^2, con coordenadas

$$(Z, W, W^*, R, s, s^*) \equiv (Z, Z_s, Z_{s^*}, Z_{ss^*}, s, s^*). \tag{3.2}$$

Para una función arbitraria $H = H(Z, W, W^*, R, s, s^*)$, las derivadas totales en s y s^* son por definición

$$\frac{dH}{ds} \equiv DH \equiv H_s + WH_Z + SH_W + RH_{W^*} + TH_R, \tag{3.3}$$

$$\frac{dH}{ds^*} \equiv D^*H \equiv H_{s^*} + W^*H_Z + RH_W + S^*H_{W^*} + T^*H_R, \tag{3.4}$$

donde

$$\begin{aligned} T &= D^*S, \\ T^* &= DS^*. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Tanto T como T^* son funciones explícitas de (Z, W, W^*, R, s, s^*) que son obtenidas de la siguiente manera. Haciendo $H = S^*$ en la Ec.(3.3) y $H = S$ en la Ec.(3.4), nosotros obtenemos dos ecuaciones conteniendo T y T^* . A partir de ellas, encontramos

$$\begin{aligned} T &= \frac{S_{s^*} + W^* S_Z + R S_W + S^* S_{W^*}}{1 - S_R S_R^*} \\ &+ \frac{S_R(S_s^* + W S_Z^* + S S_W^* + R S_{W^*}^*)}{1 - S_R S_R^*}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Notar que D y D^* son en esencia, los vectores coordenados e_s ye_{s^*}, respectivamente. Es decir,

$$\begin{aligned} e_s &\equiv D = \frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} + W\frac{\partial}{\partial Z} + S\frac{\partial}{\partial W} + R\frac{\partial}{\partial W^*} + T\frac{\partial}{\partial R}, \\ e_{s^*} &\equiv D^* = \frac{d}{ds^*} = \frac{\partial}{\partial s^*} + W^*\frac{\partial}{\partial Z} + R\frac{\partial}{\partial W} + S^*\frac{\partial}{\partial W^*} + T^*\frac{\partial}{\partial R}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

A menudo, para cálculos detallados, las siguientes identidades resultarán muy útiles. Para $H = H(Z, W, W^*, R, s, s^*)$ e $y \in \{Z, W, W^*, R, s, s^*\}$

$$\begin{aligned} D(H_y) &= (DH)_{,y} - (S_y H_W + T_y H_R + \delta_{W,y} H_Z + \delta_{R,y} H_{W^*}), \\ D^*(H_y) &= (D^*H)_{,y} - (S_y^* H_{W^*} + T_y^* H_R + \delta_{W^*,y} H_Z + \delta_{R,y} H_W), \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $\delta_{y',y}$ es el símbolo de Kronecker.

Con las definiciones de D y D^* las condiciones de integrabilidad de (3.1) son

$$D^2 S^* = D^{*2} S. \tag{3.9}$$

Además, se asume que las funciones S y S^* satisfacen la desigualdad débil

$$1 - S_R S_R^* > 0. \tag{3.10}$$

De esta desigualdad y del teorema de Frobenius, uno puede demostrar [10] que las soluciones dependen de cuatro parámetros x^a, definiendo la variedad espacio-tiempo, $\mathfrak{M}^4$, como el espacio solución de estas EDPs. Podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} Z &= Z(x^a, s, s^*), \\ W &= W(x^a, s, s^*), \\ W^* &= W^*(x^a, s, s^*), \\ R &= R(x^a, s, s^*). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Observación 3.2: *El espacio J^2 es foliado por las curvas integrales de D y D^* las cuales son etiquetadas por x^a. Las relaciones precedentes, pueden ser interpretadas como transformaciones de coordenadas dependientes de (s, s^*), entre (Z, W, W^*, R) y x^a.*

Las derivadas exteriores de (3.11),

$$\begin{aligned} dZ &= Z_a dx^a + W ds + W^* ds^*, \\ dW &= W_a dx^a + S ds + R ds^*, \\ dW^* &= W_a^* dx^a + R ds + S^* ds^*, \\ dR &= R_a dx^a + T ds + T^* ds^*, \end{aligned} \tag{3.12}$$

pueden ser re-escritas como el sistema Pfaffiano para cuatro 1-formas,

$$\begin{aligned} \beta^0 &\equiv dZ - W ds - W^* ds^* = Z_{,a}\, dx^a, \\ \beta^+ &\equiv dW - S ds - R ds^* = W_{,a}\, dx^a, \\ \beta^- &\equiv dW^* - R ds - S^* ds^* = W^*{}_{,a}\, dx^a, \\ \beta^1 &\equiv dZ - T ds - T^* ds^* = R_{,a}\, dx^a. \end{aligned} \tag{3.13}$$

La anulación de las cuatro β^i es equivalente al par de EDPs, Ecs.(3.1), lo cual motiva sus definiciones. Para un uso posterior, elegiremos el conjunto equivalente de 1-formas,

$$\begin{aligned} \theta^0 &= \Phi\beta^0, \\ \theta^+ &= \Phi\alpha(\beta^+ + b\beta^-), \\ \theta^- &= \Phi\alpha(\beta^- + b^*\beta^+), \\ \theta^1 &= \Phi(\beta^1 + a\beta^+ + a^*\beta^- + c\beta^0). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Nos referiremos al conjunto $(\alpha, b, b^*, a, a^*, c)$ como *parámetros tetrádicos* y a Φ como un parámetro conforme. Por el momento, estos parámetros son funciones indeterminadas de (S, S^*) y sus derivadas. Más tarde, nosotros determinaremos de manera unívoca a $(\alpha, b, b^*, a, a^*, c)$ en términos de (S, S^*) e impondremos condiciones sobre Φ.

Observación 3.3: *Notar que uno puede generalizar los θ^i por incluir más parámetros, i.e., por tomar combinaciones lineales de los θ^i. Nosotros, no haremos esto así, ya que para nuestros propósitos, las definiciones de arriba son suficientes. Sin embargo, como veremos en el próximo capítulo, en el estudio del problema de equivalencia de Cartan para un par de EDPs de segundo orden, los otros parámetros son necesarios. En cualquier caso, no obstante, β^0 debe ser preservado salvo una escala. Nosotros retornaremos a la cuestión de los otros parámetros también en este capítulo (sección 5) cuando tratemos la conexión conforme normal de Cartan.*

Observación 3.4: *Nosotros impondremos dos condiciones diferentes sobre Φ: (1) Para uso intermedio o transitorio en la visualización de expresiones complicadas, usaremos $\Phi = 1$ y nos referiremos, en este caso, a θ's como $\widehat{\theta}$'s; (2) Una elección más básica es que Φ satisfaga una cierta ecuación diferencial que simplifica la estructura de la métrica conforme que pronto definiremos. (Para esta elección ver sección 3). De aquí, tenemos que*

$$\theta^i = \Phi \widehat{\theta}^i, \tag{3.15}$$

para un Φ no trivial.

De la Ec.(3.14), los vectores base duales, e_i, son

$$\begin{aligned} e_0 &= \Phi^{-1}(\partial_Z - c\partial_R), \\ e_+ &= \Phi^{-1}\frac{\partial_W - b^*\partial_{W^*} - (a - a^*b^*)\partial_R}{\alpha(1 - bb^*)} \\ e_- &= \Phi^{-1}\frac{\partial_{W^*} - b\partial_W - (a^* - ab)\partial_R}{\alpha(1 - bb^*)} \\ e_1 &= \Phi^{-1}\partial_R. \end{aligned} \tag{3.16}$$

De la Ec.(3.15),

$$e_i = \Phi^{-1}\widehat{e}_i. \tag{3.17}$$

Por agregar las 1-formas

$$\begin{aligned} \theta^s &\equiv ds, \\ \theta^{s^*} &\equiv ds^*, \end{aligned} \tag{3.18}$$

(las cuales son duales a los vectores e_s, e_{s^*}, Ec.(3.7)), a las cuatro θ^i definidas arriba, nosotros tenemos una base de 1-formas sobre el espacio 6-dimensional (Z, W, W^*, R, s, s^*). Nos referiremos a θ^0, θ^+ , θ^-, y θ^1 como el conjunto de 1-formas del espacio-tiempo, y llamaremos a θ^s y θ^{s^*} las 1-formas de las fibras. A las 1-formas del espacio-tiempo, les asociaremos índices latinos en minúscula, i, j, etc., y a todas las seis 1-formas las denotaremos con índices latinos en mayúscula I, J, etc. Por lo tanto,

$$\theta^i \in \{\theta^0, \theta^+, \theta^-, \theta^1\}, \tag{3.19}$$

$$\theta^I \in \{\theta^0, \theta^+, \theta^-, \theta^1, \theta^s, \theta^{s^*}\}. \tag{3.20}$$

Notar que, en general, una p-forma tendrá componentes en las 6 dimensiones. Por ejemplo, la 1-forma Π^i_j y la 2-forma Υ^i tendrán las respectivas expansiones

$$\begin{aligned} \Pi^i_j &= \Pi^i{}_{jK}\theta^K = \Pi^i{}_{jk}\theta^k + \Pi^i{}_{js}\theta^s + \Pi^i{}_{js^*}\theta^{s^*}, \\ \Upsilon^i &= \frac{1}{2}\Upsilon^i{}_{JK}\theta^J \wedge \theta^K, \\ &= \frac{1}{2}\Upsilon^i{}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k + \Upsilon^i{}_{js}\theta^j \wedge \theta^s + \Upsilon^i{}_{js^*}\theta^j \wedge \theta^{s^*} + \Upsilon^i{}_{ss^*}\theta^s \wedge \theta^{s^*}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Para su uso posterior, construyamos una métrica tal que los θ^i formen una tetrada nula

$$\begin{aligned} g(Z,W,W^*,R,s,s^*) &= \theta^0\otimes\theta^1+\theta^1\otimes\theta^0-\theta^+\otimes\theta^- -\theta^-\otimes\theta^+, \\ &= \eta_{ij}\theta^i\otimes\theta^j. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Esto define la matriz de coeficientes constantes η_{ij} como

$$\eta_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

De la Ec.(3.10), se sigue [9, 10] que la métrica g es Lorentziana.

También definimos los tensores simétricos G_{ij} y G^*_{ij} a partir de las derivadas de Lie de la métrica en las direcciones e_s y e_{s^*}:

$$\begin{aligned} \pounds_{e_s} g &= G_{ij}\theta^i\otimes\theta^j, \\ \pounds_{e_{s^*}} g &= G^*_{ij}\theta^i\otimes\theta^j, \end{aligned} \tag{3.24}$$

y las derivadas exteriores de la base de 1-formas por

$$d\theta^i = \frac{1}{2}\triangle^i{}_{JK}\theta^J\wedge\theta^K. \tag{3.25}$$

De ésto y de

$$\pounds_{e_s}\theta^i = e_s\rfloor\, d\theta^i, \tag{3.26}$$

tenemos que los G_{ij} y los $\triangle^i{}_{JK}$ están relacionados por

$$\begin{aligned} G_{ij} &= -2\triangle_{(ij)s}, \\ G^*_{ij} &= -2\triangle_{(ij)s^*}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

donde

$$\triangle_{iJK} = \eta_{il}\triangle^l{}_{JK}. \tag{3.28}$$

Las expresiones de G_{ij} y $\triangle^i{}_{JK}$, en términos de S, S^*, Φ, los parámetros tetrádicos y sus derivadas pueden ser encontradas en el Apéndice B.

§3. La Primera Ecuación de Estructura

Comencemos por insertar las 1-formas, $\theta^i \in \{\theta^0,\theta^+,\theta^-,\theta^1\}$, dentro de las primeras ecuaciones de estructura de Cartan libres de torsión,

$$d\theta^i + \omega^i{}_j\wedge\theta^j = 0. \tag{3.29}$$

Nuestro objetivo, es ahora resolver estas ecuaciones para las 1-formas de la conexión, $\omega^i{}_j$. Con tal fin, escribimos

$$d\theta^i = \frac{1}{2}\Delta^i{}_{JK}\theta^J \wedge \theta^K, \tag{3.30}$$
$$\omega_{ij} = \omega_{ijK}\theta^K, \tag{3.31}$$

definiendo $\triangle^i{}_{JK}$ y ω_{ijK}. Notar que

$$\omega^i{}_k = \eta^{ij}\omega_{jk}, \tag{3.32}$$

donde η_{ij} es la matriz definida de la Ec.(3.23). Las ecuaciones de estructura entonces se leen,

$$\frac{1}{2}\triangle^i{}_{JK}\theta^J \wedge \theta^K + \eta^{ij}\omega_{jkL}\theta^L \wedge \theta^k = 0. \tag{3.33}$$

Puesto, que nosotros estamos realmente interesados en la geometría conforme contenida en las ecuaciones de estructura, requeriremos que las 1-formas conexión sean conexiones de Weyl generalizadas ("generalizadas" debido al grado extra de libertad en las direcciones de las fibras, s y s^*):

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \omega_{[ij]} + \omega_{(ij)}, \\ \omega_{(ij)} &= \eta_{ij}A, \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde la 1-forma

$$A = A_I\theta^I = A_i\theta^i + A_s\theta^s + A_{s^*}\theta^{s^*}, \tag{3.35}$$

es la 1-forma (generalizada) de Weyl.

En las Ecs.(3.14) nosotros expresamos las θ^i, en términos de S, S^*, los parámetros tetrádicos no especificados, $(\alpha, b, b^*, a, a^*, c)$ y Φ. De aquí, nosotros podemos explícitamente computar los $\triangle^i{}_{JK}$ en términos de S, S^*, los parámetros tetrádicos, Φ y sus derivadas. (Las expresiones explícitas para los $\triangle^i_{JK}$, son dadas en el Apéndice B.)

Nosotros usaremos las Ecs.(3.33) para hallar los coeficientes de la conexión, ω_{ijK}, en términos de los $\triangle^i{}_{JK}$ y los indeterminados A_I. Al hacer esto, encontraremos varios resultados: *i)* las cuatro componentes espacio-temporales de la 1-forma de Weyl, A_i, se mantienen arbitrarias; *ii)* la parte antisimétrica de la conexión, $\omega_{[ij]}$, y las partes fibrosas de la 1-forma de Weyl, A_s y A_{s^*}, son unívocamente determinadas como funciones de S, S^*, A_i y Φ; *iii)* los parámetros tetrádicos son unívocamente determinados como funciones de S y S^*; y *iv)* deben existir restricciones sobre la clase de EDPs de segundo orden a las cuales S y S^* pertenecen. Las condiciones de *(iv)* son conocidas como las condiciones de Wünschmann (generalizadas). Estas condiciones son ecuaciones diferenciales complejas en las seis variables de nuestro espacio 6-dimensional, (Z, W, W^*, R, s , s^*).

Comencemos por desdoblar las ecuaciones de estructura dentro de sus componentes fibra-fibra, tetrada-fibra, y tetrada-tetrada.

A. Las componentes fibra-fibra no contienen ninguna información, puesto que los términos $\omega_{ijK}\theta^K \wedge \theta^j$ no tienen parte fibra-fibra, (esto resulta de un cálculo directo y de las condiciones de integrabilidad)

$$\triangle^i{}_{ss^*} \equiv 0. \tag{3.36}$$

B. La parte fibra-tetrada de las ecuaciones de estructura son

$$\begin{aligned} \omega_{ijs} &= \triangle_{ijs}, \\ \omega_{ijs^*} &= \triangle_{ijs^*}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Una observación importante a hacer es que

$$\triangle_{ijs} = \widehat{\triangle}_{ijs} - \eta_{ij}\Phi^{-1}D\Phi, \tag{3.38}$$

donde $\widehat{\triangle}^k_{js}$ es definida por

$$d\widehat{\theta^i} = \frac{1}{2}\widehat{\Delta}^i{}_{JK}\widehat{\theta}^J \wedge \widehat{\theta}^K. \tag{3.39}$$

Simetrizando (i,j) en la Ec.(3.37) y usando las Ecs.(3.34) y (3.38) resulta

$$\begin{aligned} \eta_{ij}A_s &= \triangle_{(ij)s} = \widehat{\triangle}_{(ij)s} - \eta_{ij}\Phi^{-1}D\Phi, \\ \eta_{ij}A_{s^*} &= \triangle_{(ij)} = \widehat{\triangle}_{(ij)s^*} - \eta_{ij}\Phi^{-1}D^*\Phi, \end{aligned} \tag{3.40}$$

mientras que la parte antisimétrica da

$$\begin{aligned} \omega_{[ij]s} &= \triangle_{[ij]s} = \widehat{\triangle}_{[ij]s}, \\ \omega_{[ij]s^*} &= \triangle_{[ij]s^*} = \widehat{\triangle}_{[ij]s^*}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Las Ecs.(3.40), unívocamente determinan A_s y A_{s^*} en términos de S, S^*, y Φ como

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{1}{4}\triangle^k{}_{ks} = \widehat{A}_s - \Phi^{-1}D\Phi, \\ A_{s*} &= \frac{1}{4}\triangle^k{}_{ks*} = \widehat{A}_{s*} - \Phi^{-1}D^*\Phi, \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\widehat{A}_s \equiv \frac{1}{4}\widehat{\triangle}^k{}_{ks}. \tag{3.43}$$

Por otro lado, la parte libre de traza de las Ecs.(3.40),

$$\begin{aligned} \triangle_{(ij)s} - \frac{1}{4}\eta_{ij}\triangle^k{}_{ks} &= \widehat{\triangle}_{(ij)s} - \frac{1}{4}\eta_{ij}\widehat{\triangle}^k{}_{ks} = 0, \\ \triangle_{(ij)s^*} - \frac{1}{4}\eta_{ij}\triangle^k{}_{ks^*} &= \widehat{\triangle}_{(ij)s^*} - \frac{1}{4}\eta_{ij}\widehat{\triangle}^k{}_{ks^*} = 0, \end{aligned} \tag{3.44}$$

impone condiciones sobre S, S^* y determina unívocamente los parámetros tetrádicos, mientras que Φ se mantiene indeterminado. Alternativamente, de la Ec.(3.27), i.e., $G_{ij} = -2\triangle_{(ij)s}$, y por la definición

$$\widehat{G}_{ij} = -2\widehat{\triangle}_{(ij)s}, \tag{3.45}$$

obtenemos

$$G_{ij} = \widehat{G}_{ij} + 2\eta_{ij}\Phi^{-1}D\Phi, \tag{3.46}$$

de los cual es fácilmente visto que

$$G^{TF}_{ij} = \widehat{G}^{TF}_{ij} = 0, \tag{3.47}$$

donde TF denota la parte libre de traza.

Los detalles para el análisis de las Ecs.(3.47) son bastante complicados y son dados en el Apéndice C.

Teorema 3.1: *De las Ecs.(3.40) y la relación entre los $\triangle^k_{js}$ y los G_{ij}, i.e., de las Ecs.(3.27), tenemos que*

$$\begin{aligned} \pounds_{e_s} g &= -2A_s g, \\ \pounds_{e_{s^*}} g &= -2A_{s^*} g. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Se sigue de este teorema, que la métrica 6-dimensional definida en la Ec.(3.22) nos lleva a una métrica conforme 4-dimensional en el espacio solución, (con los movimientos a lo largo de e_s o e_{s^*} generando un re-escaleo conforme de la métrica.)

Corolario 3.1: *Hasta este punto, el factor Φ se mantiene indeterminado. Sin embargo, existe, via la Ec.(3.42), una manera canónica de elegirlo, a saber,*

$$\begin{aligned} D\Phi - \frac{1}{4}\widehat{\triangle}^k{}_{ks}\Phi &= 0, \\ D^*\Phi - \frac{1}{4}\widehat{\triangle}^k{}_{ks^*}\Phi &= 0, \end{aligned} \tag{3.49}$$

haciendo $A_s = A_{s^*} = 0$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \pounds_{e_s} g &= 0, \\ \pounds_{e_{s^*}} g &= 0. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Observación 3.5: *Notar que la libertad en la solución de la Ec.(3.49) para Φ, es una función arbitraria multiplicativa (referida como el factor conforme) ϖ tal que $D\varpi = D^*\varpi = 0$, i.e., ϖ es una función arbitraria sobre el espacio de fibras* *(y de allí, sobre el espacio solución, $\mathfrak{M}^4$). La solución, es de aquí, de la forma* $\Phi = \varpi\Phi_0$, *con*

$$\Phi_0 = \Phi_0[S, S^*] = \exp\frac{1}{4}(\int \widehat{\triangle}^k{}_{ks}ds + \widehat{\triangle}^k{}_{ks^*}ds^*).$$

donde la integral es tomada a lo largo de un camino arbitrario desde algún punto inicial hasta algún punto final (s, s^*)*. Las condiciones de integrabilidad necesarias son satisfechas. La multiplicación de la métrica por* ϖ^2 *es una libertad conforme ordinaria,* $g \Rightarrow \varpi^2 g$.

C. Retornando a las partes tetrada-tetrada de las ecuaciones de estructura, tenemos que,

$$\triangle^i{}_{mn} + \eta^{ij}(\omega_{jnm} - \omega_{jmn}) = 0, \tag{3.51}$$

o

$$\omega_{i[jk]} = \frac{1}{2}\triangle_{ijk}. \tag{3.52}$$

De la identidad tensorial,

$$\omega_{ijk} = \omega_{(ij)k} - \omega_{(jk)i} + \omega_{(ki)j} + \omega_{i[jk]} - \omega_{k[ij]} + \omega_{j[ki]}, \tag{3.53}$$

y de las Ecs.(3.34) y (3.52), obtenemos los coeficientes tetrada-tetrada de la conexión;

$$\omega_{ijk} = \eta_{ij}A_k - \eta_{jk}A_i + \eta_{ki}A_j + \frac{1}{2}(\eta_{mi}\triangle^m{}_{jk} - \eta_{mk}\triangle^m{}_{ij} + \eta_{mj}\triangle^m{}_{ki}). \tag{3.54}$$

Esto se descompone naturalmente, dentro de una parte Levi-Civita γ_{ijk} (la cual es independiente de A_i) más una parte de "Weyl", $\tilde{\omega}_{ijk}$, i.e.,

$$\omega_{ijk} = \gamma_{ijk} + \tilde{\omega}_{ijk}, \tag{3.55}$$

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\eta_{mi}\triangle^m{}_{jk} - \eta_{mk}\triangle^m{}_{ij} + \eta_{mj}\triangle^m{}_{ki}), \tag{3.56}$$

$$\tilde{\omega}_{ijk} = \eta_{ij}A_k - \eta_{jk}A_i + \eta_{ki}A_j. \tag{3.57}$$

Para hacer más clara a la exposición, analicemos donde las diferentes variables están ocultas. Primero, notemos que $\triangle_{imn}$ puede ser descompuesto, al igual que en la Ec.(3.38), como

$$\triangle_{imn} = \widehat{\triangle}_{imn}\Phi^{-1} + 2\widehat{e}_{[m}\Phi \cdot \eta_{n]\,i}\Phi^{-2}, \tag{3.58}$$

donde $\widehat{\triangle}_{imn}$ es la misma expresión que $\triangle_{imn}$ pero con $\Phi = 1$. Los $\widehat{\triangle}_{imn}$ dependen solamente de (S, S^*). Esto significa que γ_{ijk}, Ec.(3.56), también se descompone en términos que dependen de (S, S^*) y Φ.
Notar que $\Phi = \varpi\Phi_0[S, S^*]$, con $\varpi = \varpi(x^a)$, una función arbitraria de x^a. Este gauge o libertad conforme será discutido más tarde.

En resumen, nosotros hemos demostrado que las Ecs.(3.37) y (3.54) completamente determinan los ω_{ijK} en términos de los $\triangle^i{}_{JK}$ y la parte indeterminada espacio-temporal de A, i.e., A_i.

§3.1. Un Teorema

Para culminar esta sección, retornemos a la anulación de la parte libre de traza de $\triangle_{(ij)s}$ o a la parte libre de traza de $\widehat{\triangle}_{(ij)s}$, i.e., a la Ec.(3.44). Estas son nueve ecuaciones complejas para la determinación de los parámetros tetrádicos, $(\alpha, a, a^*, b, b^*, c)$. De aquí, deben existir varias identidades y/o condiciones a ser impuestas sobre S y S^*. Después de explícitamente resolver estas ecuaciones, (ver Apéndice C), los resultados pueden ser sintetizados en el siguiente teorema:

Teorema 3.2: *La condición libre de torsión sobre la conexión:*

1. Unívocamente determina la conexión ω_{ij}, via Ecs.(3.54) y (3.37).

2. Unívocamente determina los parámetros tetrádicos en termino de S y S^*, (ver abajo).

3. Impone una condición (compleja), la anulación del invariante de Wünschmann, sobre S y S^*, (ver abajo) con las componentes tetrádicas dadas por

$$b = \frac{-1+\sqrt{1-S_R S_R^*}}{S_R^*}, \tag{3.59}$$

$$\alpha^2 = \frac{1+bb^*}{(1-bb^*)^2}, \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} a = {} & b^{-1}b^{*-1}(1-bb^*)^{-2}(1+bb^*)\{b^{*2}(-Db+bS_W-S_{W^*}) \\ & +b(-D^*b^*+b^*S^*_{W^*}-S^*_W)\}, \end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned} c = {} & -\frac{Da+D^*a^*+T_W+T^*_{W^*}}{4} - \frac{aa^*(1+6bb^*+b^2b^{*2})}{2(1+bb^*)^2} \\ & +\frac{(1+bb^*)(bS^*_Z+b^*S_Z)}{2(1-bb^*)^2} + \frac{a(2ab-b^*S_{W^*})+a^*(2a^*b^*-bS^*_W)}{2(1+bb^*)}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

y la condición de Wünschmann impuesta sobre S y S^* es

$$\mathcal{W} \equiv \frac{Db+bD^*b+S_{W^*}-bS_W+b^2S^*_{W^*}-b^3S^*_W}{1-bb^*} = 0. \tag{3.63}$$

§4. Las Curvaturas de Cartan

En la sección previa, fueron usadas las primeras ecuaciones de estructura, Ec.(3.29), con el fin de hallar algebraicamente a las componentes de la conexión libre de torsión

$$\omega_{ij} = \omega_{[ij]} + \eta_{ij}A, \tag{3.64}$$

de manera unívoca en términos de (S, S^*) y los indeterminados A_i y ϖ.

Nuestro próximo objetivo es computar la 2-formas de la curvatura, Θ_{ij}, definida por la *segunda ecuación de estructura*:

$$d\omega^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j = \Theta^i{}_j = \frac{1}{2}\Theta^i{}_{jLM}\theta^L \wedge \theta^M. \tag{3.65}$$

Si derivamos exteriormente a la primera ecuación de estructura, Ec.(3.29), y tenemos en cuenta a la segunda ecuación de estructura, Ec.(3.65), obtenemos las *primeras identidades de Bianchi*:

$$\Theta_{ij} \wedge \theta^j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Theta_{i[jLM]} = 0. \tag{3.66}$$

Si desdoblamos estas identidades, en su parte tetrada-tetrada, tetrada-fibra, y fibra-fibra, observamos que

$$\Theta_{ijkm} + \Theta_{ikmj} + \Theta_{imjk} = 0, \tag{3.67}$$

$$\Theta_{i[jk]s} = 0, \tag{3.68}$$

$$\Theta_{ijss^*} = 0, \tag{3.69}$$

Las dos últimas relaciones se deben al hecho de que los primeros dos índices de Θ_{ijLM} son 4-dimensional, mientras que los últimos dos son 6-dimensional.

Ahora calcularemos los Θ_{ij} como funciones explícitas de(S, S^*) y de los indeterminados A_i y ϖ. Para ello, notemos en primer lugar, que de las Ecs.(3.64) y (3.65), surge directamente, que los Θ_{ij} heredan la simetría de los ω_{ij}, y de aquí pueden ser escritas como

$$\Theta_{ij} = \Theta_{[ij]} + \eta_{ij} dA, \tag{3.70}$$

con

$$dA = \frac{1}{2}(dA)_{LM}\theta^L \wedge \theta^M. \tag{3.71}$$

(Esto define a las componentes $(dA)_{LM}$.)

Desdoblemos ahora, a las componentes Θ_{ijLM} en su parte tetrada-tetrada, Θ_{ijkm}, y sus partes tetrada-fibra, Θ_{ijks}. (las partes fibra-fibra se anulan idénticamente como consecuencia de las primeras identidades de Bianchi). Calculemos primero los Θ_{ijkm}, los cuales pueden ser desdoblados en términos que provienen de la parte Levi-Civita de su conexión y en términos proviniendo de la parte Weyl de su conexión. Estas partes serán denotadas $\Re_{[ij][km]}$ y $\tilde{\Theta}_{ij[km]}$, respectivamente

$$\begin{aligned} \Theta_{ij[km]} &= \Re_{[ij][km]} + \tilde{\Theta}_{ij[km]}, \\ &= \Re_{[ij][km]} + \tilde{\Theta}_{[ij][km]} + \eta_{ij}(dA)_{[km]}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Los $\Re_{[ij][km]}$ son las componentes estándar del tensor Riemann asociado a la conexión (Levi-Civita) γ_{ijk}.

Los $\tilde{\Theta}_{[ij][km]}$ dependen de A y de sus derivadas. Denotando a la derivada covariante asociada con la parte Levi-Civita de la conexión γ_{ijk}, por ∇_i, tenemos que

$$\nabla_i A_j = e_i(A_j) - \gamma_{kji} A^k, \tag{3.73}$$

y

$$(dA)_{ij} = 2\nabla_{[i} A_{j]}. \tag{3.74}$$

$\tilde{\Theta}_{[ij][km]}$ puede entonces, ser re-escrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\tilde{\Theta}_{[ij][km]} &= \eta_{j[k}\nabla_{m]}A_i - \eta_{i[k}\nabla_{m]}A_j + A^2\eta_{j[k}\eta_{m]\,i} \\ &\quad + A_j\eta_{i[k}A_{m]} - A_i\eta_{j[k}A_{m]}, \end{aligned} \tag{3.75}$$

donde $A^2 = A^m A_m$.

Definiendo

$$R_{jm} \equiv \eta^{ik}\Theta_{ijkm}, \tag{3.76}$$

y usando las Ecs.(3.72) y (3.75), obtenemos

$$R_{jm} = \Re_{(jm)} - \eta_{jm}\nabla_p A^p - 2\{\nabla_{(m}A_{j)} + \eta_{jm}A^2 - A_j A_m\} + 4\nabla_{[j}A_{m]}, \tag{3.77}$$

donde las $\mathfrak{R}_{(jm)}$ son las componentes del tensor de Ricci de γ_{ijk}.

Si además hacemos

$$R \equiv \eta^{jm} R_{jm}, \tag{3.78}$$

entonces, de la Ec.(3.77), surge que

$$R = \Re - 6\{\nabla_p A^p + A^2\}, \tag{3.79}$$

en donde $\mathfrak{R}$ representa al escalar de Ricci estándar.

La parte fibra-tetrada de Θ_{ij},

$$\Theta_{ijks} = \eta_{ij}(dA)_{ks} + \eta_{ik}(dA)_{js} - \eta_{jk}(dA)_{is}, \tag{3.80}$$

será derivada en la próxima sección.

§4.1. La Primer Curvatura de Cartan

La 2-forma de la primera curvatura de Cartan, es definida por

$$\Omega_{ij} = \Theta_{ij} + \Psi_i \wedge \eta_{jk}\theta^k + \eta_{ik}\theta^k \wedge \Psi_j - \eta_{ij}\Psi_k \wedge \theta^k, \tag{3.81}$$

en donde las 1-formas (Ricci) Ψ_i son apropiadamente elegidas, tales que

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\Omega_{ijLM}\theta^L \wedge \theta^M, \tag{3.82}$$

satisface a las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}\Omega_{ijkm} &= \Omega_{[ij]km}, &(3.83)\\ \eta^{ik}\Omega_{ijkm} &= 0, &(3.84)\\ \Omega_{ijks} &= 0. &(3.85)\end{aligned}$$

Notar que, Ω_{ij} también satisface a la primera identidad de Bianchi, Ec.(3.66), i.e.,

$$\Omega_{ij} \wedge \theta^j = 0. \tag{3.86}$$

Es directo demostrar que las condiciones Ecs.(3.83), (3.84) y (3.85), son unívocamente satisfechas por la 1-forma

$$\Psi_i = \Psi_{iK}\theta^K = \Psi_{ij}\theta^j + \Psi_{is}\theta^s + \Psi_{is^*}\theta^{s^*}, \tag{3.87}$$

con

$$\Psi_{ij} = -\frac{1}{4}R_{[ij]} - \frac{1}{2}(R_{(ij)} - \frac{1}{6}R\eta_{ij}). \tag{3.88}$$

y

$$\begin{aligned}\Psi_{is} &= -(dA)_{is}, &(3.89)\\ \Psi_{is^*} &= -(dA)_{is^*}.\end{aligned}$$

De las Ecs.(3.89), (3.81) y (3.85), encontramos la Ec.(3.80), i.e.,

$$\Theta_{ijks} = \eta_{ij}(dA)_{ks} + \eta_{ik}(dA)_{js} - \eta_{jk}(dA)_{is}.$$

Haciendo uso de las Ecs.(3.77) y (3.79), obtenemos

$$\Psi_{ij} = \Im_{ij} - \nabla_{[i}A_{j]} - 2\{\nabla_{(i}A_{j)} + \frac{1}{2}\eta_{ij}A^2 - A_iA_i\}, \tag{3.90}$$

con

$$\Im_{ij} = -\frac{1}{2}(\Re_{(ij)} - \frac{1}{6}\Re\eta_{ij}). \tag{3.91}$$

Usando la Ec.(3.90), podemos insertar la expresión de arriba dentro de la Ec. (3.81), resultando

$$\Omega_{ijkm} = \Re_{ijkm} - \eta_{kj}\Im_{im} + \eta_{ki}\Im_{ijm} - \eta_{mi}\Im_{jk} + \eta_{mj}\Im_{ik}, \tag{3.92}$$

expresión que es independiente de los A_i. Es más, usando la Ec.(3.91), nosotros recuperamos la definición estándar del tensor de Weyl,

$$\Omega_{ijkm} = C_{ijkm}. \tag{3.93}$$

§4.2. La Segunda Curvatura de Cartan

Finalmente, nosotros definimos la segunda curvatura de Cartan (con la derivada covariante $\mathfrak{D}$) y Ψ_i como

$$\begin{aligned} \Omega_i &= d\Psi_i + \Psi_k \wedge \omega^k{}_i \equiv \mathfrak{D}\Psi_i, \\ &= \frac{1}{2}\Omega_{iJK}\theta^J \wedge \theta^K. \end{aligned} \tag{3.94}$$

haciendo uso de la Ec.(3.87) en la expresión de arriba, obtenemos, después de un largo cálculo, los simples resultados

$$\Omega_{imn} = \nabla^j C_{ijmn} + A^j C_{ijmn}, \tag{3.95}$$

y

$$\begin{aligned} \Omega_{ims} &= 0, \\ \Omega_{iss^*} &= 0. \end{aligned} \tag{3.96}$$

∇^j es nuevamente la derivada covariante de Levi-Civita.

En la sección 6, las dos curvaturas de Cartan serán usadas para construir la curvatura de una conexión conforme normal de Cartan.

§5. Sinopsis

Puesto que muchas diferentes cantidades y símbolos han sido introducidos, daremos algunos comentarios pedagógicos concernientes a la localización de diferentes variables y donde la transformación conforme actúa.

En primer lugar, retornemos a las definiciones de los θ^i, i.e., a las Ec.(3.14), y escribamos a las mismas (y a sus duales asociados) como

$$\theta^i = \Phi\,\widehat{\theta^i}, \tag{3.97}$$

$$e_i = \Phi^{-1}\,\widehat{e_i}, \tag{3.98}$$

observemos que $\triangle^i{}_{JK}$ $\widehat{\triangle}^i{}_{JK}$ y su interrelación, Ecs.(3.38) y (3.58), provienen de

$$d\,\theta^i = \frac{1}{2}\,\triangle^i{}_{JK}\,\theta^j \wedge \theta^K \;\;\&\;\; d\,\widehat{\theta^i} = \frac{1}{2}\widehat{\triangle}^i{}_{JK}\,\widehat{\theta^j} \wedge \widehat{\theta}^K. \tag{3.99}$$

La acción de Φ, tomando $\widehat{\theta^i} \Rightarrow \theta^i$, induce la transformación métrica

$$\widehat{g} = \eta_{ij}\widehat{\theta^i} \otimes \widehat{\theta^j} => g = \Phi^2\widehat{g}, \tag{3.100}$$

donde tanto g como $\widehat{g}$ dependen, en general, de (s, s^*). Sin embargo, cuando nosotros tomamos la elección especial $\Phi = \varpi\Phi_0$, Ec.(3.49), la g resultante, es entonces una función sobre $\mathfrak{M}^4$ solamente. Lo que aun se mantiene, es la libertad conforme estándar que viene dada por la elección de $\varpi(x^a)$. Cada vez que en alguna expresión, $\varpi(x^a)$, es cambiado,

$$\varpi(x^a) \Rightarrow f(x^a)\,\varpi(x^a), \tag{3.101}$$

tal cambio constituye el efecto de una transformación conforme.

Todas las demás cantidades geométricas (la conexión y diferentes curvaturas) desarrolladas y definidas via las ecuaciones de estructura, contienen a las siguientes cantidades: nuestras variables básicas (S, S^*), las cuatro componentes espacio-temporales arbitrarias de la 1-forma de Weyl $A = A_i\theta^i$, donde $A_s = 0$, y al factor conforme $\varpi(x^a)$.

Daremos un breve sumario de donde estas cantidades aparecen:

a. Todos los $\widehat{\triangle}_{ijK}$ y $\triangle_{ijs}$ dependen solamente de (S, S^*), mientras que $\triangle_{ijk}$ depende de (S, S^*, ϖ). Es una tarea fácil ver como $\triangle_{ijk}$ se transforma cuando ϖ es cambiado.

b. Puesto que $\omega_{ijs} = \triangle_{ijs}$, se concluye que estos solo dependen de (S, S^*).

c. Todas las cantidades (S, S^*, A_i, ϖ) aparecen en las 1-formas de la conexión ω_{ijk}, las cuales pueden ser desdobladas como

$$\omega_{ijk} = \gamma_{ijk} + \tilde{\omega}_{ijk}, \tag{3.102}$$

donde la parte de Levi-Civita, γ_{ijk}, solo depende de (S, S^*, ϖ) mientras que $\tilde{\omega}_{ijk}$ depende solo de A_i.

d. La curvatura $\Theta_{ij[km]}$ se desdobla en dos partes

$$\Theta_{ij[km]} = \Re_{[ij][km]} + \tilde{\Theta}_{ij[km]}, \tag{3.103}$$

donde la curvatura de Riemann (estándar) $\Re_{[ij][km]}$ depende solo de (S, S^*, ϖ) y $\tilde{\Theta}_{ij[km]}$ depende de todo.

e. La primera 2-forma de curvatura de Cartan, Ω_{ij}, *es* el tensor de Weyl, C_{ijmn}, y depende solo de (S, S^*, ϖ).

f. La segunda 2-forma de curvatura de Cartan,

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\{\nabla^m C_{imjk} + A^m C_{imjk}\}\theta^j \wedge \theta^k, \tag{3.104}$$

depende de todo, aun cuando los A_i aparecen explícitamente solo en los términos lineales.

g. Aun cuando las 1-formas de Ricci,

$$\Psi_i = \Psi_{ij}\theta^j + \Psi_{is}\theta^s + \Psi_{is^*}\theta^{s^*}, \tag{3.105}$$

dependen de todo, sus partes separadas no lo hacen. Ψ_{is} depende solamente de A_i. De

$$\Psi_{ij} = \Im_{ij} - \nabla_{[i}A_{j]} - 2\{\nabla_{(i}A_{j)} + \frac{1}{2}\eta_{ij}A^2 - A_iA_i\}, \tag{3.106}$$

tenemos que $\Im_{ij}$ depende solamente de (S, S^*, ϖ) mientras que los términos restantes dependen de todo.

Siempre y cuando una cantidad geométrica depende solamente de (S, S^*, ϖ) podremos decir que depende de la conexión de Levi-Civita obtenida de la métrica $g = \varpi^2\Phi_0^2\,\widehat{g}$, Ec.(3.22), y referirnos a dicha cantidad como covariante conforme.

§6. Unificación: La Conexión Conforme Normal de Cartan

A partir de un par de EDPs de segundo orden satisfaciendo la condición de Wünschmann, hemos derivado una rica estructura geométrica sobre el espacio solución 4-dimensional de las EDPs. Esta estructura incluye: una métrica conforme, una conexión libre de torsión y diferentes tensores de curvatura. Aun cuando no es obvio, y el punto de partida es completamente diferente, nosotros estamos siguiendo el desarrollo de Kobayashi [16] de la teoría de conexiones conformes normales de Cartan via las tres ecuaciones de estructura, Ecs.(3.29), (3.65), (3.94) y las 1-formas de Ricci, Ec.(3.87).

Mostraremos ahora, que *básicamente*, nosotros hemos, de hecho, recuperado un fibrado principal (15-dimensional) P sobre $\mathfrak{M}^4$ con grupo $H = CO(3,1) \otimes_s T^*$ y una conexión conforme normal de Cartan con valores en el álgebra de Lie de $O(4,2)$. El grupo $H = CO(3,1) \otimes_s T^*$ es un subgrupo 11-dimensional $O(4,2)$ [16] con T^* el grupo de traslaciónes especiales 4-dimensional. Más específicamente, hemos recuperado un subfibrado 6-dimensional, J^2, de este fibrado 15-dimensional de Cartan. El espacio base consiste del espacio solución 4-dimensional $\mathfrak{M}^4$ y las fibras 2-dimensionales son construidas a partir de curvas integrales de D y D^*.

Al inicio, se comenzó con un par de EDPs de 2^{do} orden (que satisface la condición de Wünschmann) y sus cuatro 1-formas asociadas, θ^i, además de las dos 1-formas asociadas a las direcciones de las fibras, (ds, ds^*), sobre el espacio 6-dimensional J^2. Entonces fue encontrada la conexión

$$\omega_{ij} = \omega_{[ij]} + A\eta_{ij},$$

satisfaciendo la primera ecuación de estructura (libre de torsión)

$$d\theta^i + \omega^i{}_j \wedge \theta^j = 0, \tag{3.107}$$

donde $A_s = A_{s^*} = 0$ y los cuatro A_i son arbitrarios. Luego, fue hallada la primera curvatura de Cartan, via la segunda ecuación de estructura

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= d\omega_{ij} + \eta^{kl}\omega_{ik} \wedge \omega_{lj} + \eta_{il}\theta^l \wedge \Psi_j + \Psi_i \wedge \theta^l \eta_{jl} - \eta_{ij}\Psi_k \wedge \theta^k & (3.108) \\ &= \frac{1}{2} C_{ijlm}\theta^l \wedge \theta^m, & (3.109) \end{aligned}$$

con una elección apropiada de las 1-formas de Ricci Ψ_i, Ec.(3.87). Finalmente, fue introducida la última ecuación de estructura y la segunda curvatura de Cartan

$$\begin{aligned} \Omega_i &\equiv \mathfrak{D}\Psi_i = d\Psi_i + \eta^{jk}\Psi_j \wedge \omega_{ki} & (3.110) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla^j C_{ijmn} + A^j C_{ijmn})\theta^m \wedge \theta^n. & (3.111) \end{aligned}$$

La cuestión que surge es la siguiente: ¿cual es el significado de estas estructuras resultantes?

Estas ecuaciones pueden ser unificadas de la siguiente manera: en primer lugar, agrupemos las quince 1-formas

$$\omega = (\theta^i,\ \omega_{[ij]},\ A,\ \Psi_j), \tag{3.112}$$

en un objeto llamado la "Conexión de Cartan", representado por la matriz 6x6 de 1-formas,

$$\omega^A_{\ B} = \begin{bmatrix} -A & \Psi_i & 0 \\ \theta^i & \eta^{ik}\omega_{[kj]} & \eta^{ij}\Psi_j \\ 0 & \eta_{ij}\theta^j & A \end{bmatrix}, \tag{3.113}$$

luego, hagamos lo mismo con las 2-formas de curvatura, (T^j es la torsión nula)

$$R = (T^j = 0, \Omega^i{}_j, \Omega_i), \tag{3.114}$$

formando la "curvatura de Cartan", representada por la matriz 6x6 de 2-formas,

$$R^A_{\ B} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_i & 0 \\ 0 & \Omega^i{}_j & \eta^{ij}\Omega_j \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.115}$$

Se puede ver entonces, por un cálculo directo, que *notablemente* las tres ecuaciones de estructura Ecs.(3.107), (3.108) y (3.110) son todas abarcadas en una *única* ecuación de estructura de Cartan

$$R^A_{\ B} = d\omega^A_{\ B} + \omega^A_{\ C} \wedge \omega^C_{\ B}. \tag{3.116}$$

Uno encuentra entonces, que las matrices de 1-formas y 2-formas ω^A_B y R^A_B toman sus valores en el álgebra de Lie del grupo 15-dimensional $O(4,2)$ [16], aun cuando, como formas, ellas "viven" en el espacio 6-dimensional J^2. El álgebra de Lie de $O(4,2)$ es gradada como

$$\mathfrak{o}(4,2)= \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

con

$$\boxed{\theta^j \ \epsilon \ \mathfrak{g}_{-1}} \tag{3.117}$$
$$\boxed{(A, \, \omega^k{}_i) \ \& \ \Omega^k{}_i \ \epsilon \ \mathfrak{g}_0},$$
$$\boxed{\Psi_i \ \& \ \Omega_i \ \epsilon \ \mathfrak{g}_1}.$$

Aparte del hecho de que el conteo de la dimensión no es correcto, i.e., las fibras son 2-dimensionales y no tienen las 11 dimensiones necesarias, nosotros tenemos *todas las condiciones* para una conexión conforme normal de Cartan $O(4,2)$ [16]. Además del álgebra de Lie correcta, nosotros tenemos: las tres ecuaciones de estructura, Ecs.(3.107), (3.108) y (3.110), torsión nula, una primer curvatura de Cartan libre de traza Ω_{ij} (el tensor de Weyl) y una segunda curvatura de Cartan Ω_i con la estructura correcta, i.e., con parte fibrosa nula. Es claro entonces, que estamos tratando con un subfibrado 6-dimensional del Fibrado 15-dimensional. Las fibras deberían ser coordenatizadas por el subgrupo 11-dimensional $H = CO(3,1) \otimes_s T^{*4}$ de $O(4,2)$. La pregunta es, ¿donde están y cuales son las coordenadas perdidas necesarias para describir H?

Las once coordenadas (o parámetros) deben ser tales que, cuando actúan sobre la métrica conforme, Ec.(3.22), ésta es dejada conformalmente inalterada. En realidad, nosotros ya tenemos siete de estos parámetros, a saber (s,s^*, ϖ, A_i); pues nosotros tenemos de la Ec.(3.50), que variaciones en s y s^* o multiplicaciones por ϖ dejan a la Ec.(3.22) conformalmente inalterada. Los A_i no tienen relación con la métrica.

Los otros cuatro parámetros pueden ser elegidos como sigue:

a) Re-escaleando θ^+ y θ^- respectivamente, por $\mathrm{e}^{i\psi}$ y $\mathrm{e}^{-i\psi}$ vemos que la Ec.(3.22) no cambia. (Los parámetros (s, s^*, ψ) describen transformaciones de $O(3)$.)

b) Uno puede tomar tres parámetros, (γ, γ^*, μ), y con ellos formar combinaciones lineales de los cuatro θ^i que constituyan transformaciones de Lorentz las cuales no alteran la métrica. Por ejemplo, podríamos tener el boost (θ^0, θ^1),

$$\theta'^0 = \mu\theta^0, \ \theta'^1 = \mu^{-1}\theta^1, \tag{3.118}$$

y las rotaciones nulas dadas por,

$$\theta'^0 = \theta^0, \tag{3.119}$$
$$\theta'^+ = \theta^+ + \gamma\theta^0, \tag{3.120}$$
$$\theta'^- = \theta^- + \gamma^*\theta^0, \tag{3.121}$$
$$\theta'^1 = \theta^1 + \gamma\theta^- + \gamma^*\theta^+ + \gamma\gamma^*\theta^{0+}. \tag{3.122}$$

Los siete parámetros $(s, s^*, \psi, \gamma, \gamma^*, \mu, \varpi)$ parametrizan el grupo conforme de Lorentz, $CO(3,1)$ mientras que A_i parametriza T^{*4}. Con la excepción de (s, s^*), todos los parámetros restantes, $(\psi, \gamma, \gamma^*, \mu, \varpi, A_i)$, son elegidos funciones arbitrarias de $\mathfrak{M}^4$.

Debería haber sido posible, comenzar con la versión generalizada de los θ^i [ver observación 3.2] tal que los once parámetros aparezcan desde el principio. En el presente capítulo nosotros hemos tomado, efectivamente, un subfibrado 6-dimensional (con fibras 2-dimensionales) por la elección $\gamma = \gamma^* = \psi = 0$, $\mu = 1$, con ϖ una arbitraria pero dada función de $\mathfrak{M}^4$ y A_i cuatro funciones arbitrarias sobre J^2. Puesto que los A_i son arbitrarios, es posible (y probablemente más atractivo) elegirlos también como funciones sobre $\mathfrak{M}^4$. Solamente, (s, s^*) pueden variar sobre cada fibra.

§7. Conclusión

En este capítulo, vimos como una geometría diferencial conforme 4-dimensional puede ser codificada dentro de un par de EDPs de segundo orden. Más específicamente, hemos mostrado como todas las conexiones conformes normales de Cartan $O(4,2)$ pueden ser construidas. Un objetivo de fondo, sin embargo, sería ir más allá, y saber como codificar a las ecuaciones de Einstein dentro de tales pares de EDPs. Esto debería significar condiciones extras, aparte de la condición de Wünschmann, sobre la elección de S y S^*. Aun cuando en el presente no conocemos los detalles de estas condiciones 'extras', resulta clara la estrategia a seguir para su determinación.

Pareciera que ellas pueden ser expresadas como la anulación de dos (o tres) funcionales diferentes $S(Z, Z_s, Z_{s^*}, Z_{ss^*}, s, s^*)$ y $S^*(Z, Z_s, Z_{s^*}, Z_{ss^*}, s, s^*)$. Estas funcionales, pueden ser derivadas de la anulación del tensor de Bach [18] y una restricción algebraica sobre la curvatura de Cartan R^A_B [20], i.e., de

$$\nabla^m \nabla^n C_{mabn} + \frac{1}{2} R^{mn} C_{mabn} = 0, \tag{3.123}$$

$$C^{efgh}[C_{efgh} \nabla^d C_{cdab} - 4 \nabla^d C_{efgd} C_{chab}] = 0. \tag{3.124}$$

Es sabido, como ya vimos en el primer capítulo, que la anulación conjunta del tensor de Bach, Ec.(3.123), y la restrición sobre la curvatura de Cartan, Ec.(3.124), nos llevan a métricas que son conformalmente relacionadas a las métricas de vacío Einstein. Surge como muy probable, que en el contexto de la conexión de Cartan, estas ecuaciones tensoriales, puedan ser reducidas a simplemente dos (o tres) ecuaciones para S y S^*.

Hasta el momento, el problema resulta algebraicamente formidable sin embargo, con álgebra de computadora, quizás resulte manejable.

Capítulo 4

Método de equivalencia de Cartan y co-marcos nulos en NSF

§1. Introducción

La construcción de la versión 3-dim de NSF, un problema técnicamente más simple que su análogo 4-dim [23], resultó ser la clave para una comprensión más profunda del formalismo. Puesto que esta construcción reveló una conexión muy fuerte entre Relatividad General y el método de equivalencia de Cartan, resulta relevante realizar un sumario del modelo 3-dim.

Dada la siguiente EDO

$$u''' = F(u, u', u'', s), \tag{4.1}$$

(donde las primas denotan derivadas con respecto al parámetro s) es fácil ver que su espacio solución es 3-dimensional. Denotando por x^a a las coordenadas locales en el espacio solución, la solución a (4.1) puede ser escrita como

$$u = Z(x^a, s), \tag{4.2}$$

Es más, uno puede construir el Pfaffiano θ^i asociado con (4.1) como

$$(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \equiv (Z_{,a}\, dx^a, Z'_{,a}\, dx^a, Z''_{,a}\, dx^a)$$

junto a una familia uni-dimensional de métricas (etiquetadas por s)

$$g(s) = \theta^1\theta^3 + \theta^3\theta^1 - \theta^2\theta^2.$$

donde $\theta^1 = \omega^1$, $\theta^2 = \omega^2$ y θ^3 es una combinación lineal de los ω^is.

Por construcción, las superficies de nivel de (4.2) son nulas. De aquí, excepto por el hecho de que la métrica inducida depende del parámetro s, la construcción de un espacio-tiempo y su estructura conforme, es contenida en la solución $Z(x^a, s)$. Puede ser demostrado, que cuando la función F satisface una condición diferencial I[F]=0, la métrica $g(s)$ satisface

$$\frac{dg(s)}{ds} \propto g(s),$$

dando, por lo tanto, una única estructura conforme al espacio-tiempo x^a. La condición de metricidad I[F]=0 es la análoga tridimensional de la ecuación mucho más complicada obtenida en 4 dimensiones.

Fue una gran sorpresa, el enterarse de que la condición diferencial $I[F]$ había sido obtenida originalmente por Wünchsmann en 1905, y que la construcción geométrica mencionada arriba, había sido ya obtenida por E. Cartan en 1942, donde el demostraba que dos EDOs de tercer orden que son equivalentes bajo transformaciones puntuales dan nacimiento a dos geometrías en sus espacios de soluciones que son isométricas [4]. Para obtener estos resultados, Cartan introdujo una estructura geométrica en un espacio fibrado 4-dim, con coordenadas (x^a, s), e impuso condiciones algebraicas y diferenciales sobre la denominada conexión métrica normal. Debido a que este enfoque es completamente diferente al *Método de Equivalencia* (uno de los métodos algorítmicos estándar hoy en día, para estudiar equivalencia), resulta útil mostrar la relación entre el enfoque original de Cartan, y el conjunto de condiciones necesarias y suficientes que provienen cuando el Método de Equivalencia es aplicado a estas EDOs. Es también digno de mención, que el enfoque de la conexión métrica normal fue publicado en una revista matemática de muy poco impacto, y que fue ignorado por la comunidad matemática puesto que esta técnica no fue desarrollada y usada para otras EDOs o EDPs. A consecuencia de esto, es muy difícil para un lector promedio, ver porqué la construcción de la así llamada conexión métrica normal, está relacionada con EDOs de tercer orden módulo transformaciones puntuales. Solo muy recientemente, la construcción plena de la estructura geométrica via el Método de Equivalencia ha sido completada para EDOs de tercer orden (ver [24] y la sección 3) y, como se hará aquí, el enfoque puede ser extendido al problema mucho más complicado de 4-dim.

Puesto que nuestra motivación principal, es comprender la estructura geométrica 4-dimensional derivada de un par de EDPs relacionadas a NSF, nosotros aplicaremos el Método de Equivalencia para desarrollar la geometría asociada con estas EDPs. Los temas principales a los que apuntan este capítulo son: obtención del grupo de simetría asociado con el problema, la construcción explícita de una tetrada nula, los invariantes asociados y la conexión asociada. En particular, mostraremos que la así llamada condición de metricidad, no es ni más ni menos que la anulación de un invariante relativo en el Método de Equivalencia. La mayoría de los resultados aquí presentados, extienden a resultados previos obtenidos utilizando un enfoque diferente [15], proveyendo una construcción con un claro significado geométrico. También generaliza nuestro trabajo reciente sobre una conexión libre de torsión con un invariante generalizado de Wünchsmann nulo [22](ver capítulo anterior). Esta construcción incluye un tensor de torsión, construido a partir de los invariantes relativos del problema de equivalencia. Sin embargo, por razones históricas y pedagógicas, brevemente desarrollaremos el caso 3-dim, antes de ir hacia el técnicamente más complejo 4-dim.

En la sección 2, brevemente revisamos el Método de Equivalencia de Cartan. En la sección 3, aplicamos este método para ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden que son equivalentes bajo transformaciones puntuales, construyendo los invariantes que serán necesitados para desarrollar las estructuras geométricas. Entonces relacionaremos estos resultados con los de la Formulación de Superficies Nulas de Relatividad General en tres dimensiones ([11, 15, 23]), y mostraremos que la condición de metricidad es la anulación de uno de los invariantes asociados al problema de equivalencia de estas EDOs. En la sección 4 obtenemos los invariantes relativos de un par de EDPs que inducen métricas Lorentzianas en cuatro dimensiones. Entonces usaremos los invariantes para construir una conexión métrica normal y demostraremos que cuando el invariante generalizado de Wünchsmann se anula, recuperamos NSF.

§2. Método de Equivalencia de Cartan

El Método de Equivalencia de Cartan, permite a uno, encontrar condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia entre co-marcos en variedades n-dimensionales $\mathfrak{N}$ y $\widetilde{\mathfrak{N}}$ respectivamente.(ver [25]).
Sea $\mathfrak{N}$ una variedad de dimensión n, y $\mathcal{F}(\mathfrak{N})$ un Fibrado de Marcos sobre $\mathfrak{N}$ con grupo de estructura $GL(n, \mathbb{R})$. Por una G-estructura $\mathcal{G}$, entenderemos un subfibrado de $\mathcal{F}(\mathfrak{N})$ sobre $\mathfrak{N}$ con grupo de estructura $G \subset GL(n, \mathbb{R})$.
Localmente se tiene que $\mathcal{G} \simeq \mathfrak{N} \times G$.

Definición 4.1: *Sea ω y $\widetilde{\omega}$ dos co-marcos en variedades n-dimensional $\mathfrak{N}$ y $\widetilde{\mathfrak{N}}$ respectivamente. El problema de equivalencia G-valuado, para estos dos co-marcos consiste en determinar si existe un difeomorfismo local $\Phi : \mathfrak{N} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{N}}$ y funciones G-valuadas $g : \mathfrak{N} \longrightarrow G$ y $\widetilde{g} : \widetilde{\mathfrak{N}} \longrightarrow G$ tales que $\Phi^* \left[\widetilde{g}(\widetilde{x})\, \widetilde{\omega}\right] = g(x)\omega$.*

Una clase particular de problemas de equivalencia, proviene de ecuaciones diferenciales de orden n, con s variables independientes y r variables dependientes. Concentrémosnos ahora, en una única EDO de orden n. En este caso, $s = r = 1$ y la EDO se lee

$$u^{(n)} = F\left(s, u, u', ..., u^{(n-1)}\right),$$

donde s es el parámetro independiente y $u^{(n)}$ denotando la n-sima derivada del parámetro dependiente u con respecto a s (s y u toman valores en conjuntos $\mathbb{X}$ y $\mathbb{U}$ respectivamente).
En este caso, $\mathfrak{N}$ es el espacio $(n-1)$-Jet $J^{n-1}(\mathbb{X}, \mathbb{U})$, con coordenadas locales $\left(s, u, u', ..., u^{(n-1)}\right)$, y su co-marco asociado ω (su sistema pfaffiano), resulta

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= du - u'ds, \\
\omega^2 &= du' - u''ds, \\
&\vdots \\
\omega^n &= du^{(n-1)} - Fds, \\
\omega^{(n+1)} &= ds.
\end{aligned}$$

Existen principalmente, tres transformaciones asociadas al problema de equivalencia de EDOs:

- Las transformaciones de contacto $\Phi : J^1(\mathbb{X}, \mathbb{U}) \longrightarrow J^1(\mathbb{X}, \mathbb{U})$, $(s, u, u') \rightarrow (\widetilde{s}, \widetilde{u}, \widetilde{u'})$, con prolongación asociada $p^{(n-1)}\Phi$ a $J^{n-1}(\mathbb{X}, \mathbb{U})$.

- Las transformaciones puntuales $\Phi : J^0(\mathbb{X}, \mathbb{U}) \longrightarrow J^0(\mathbb{X}, \mathbb{U})$, $(s, u) \rightarrow (\widetilde{s}, \widetilde{u})$, con prolongación asociada $p^{(n-1)}\Phi$ a $J^{n-1}(\mathbb{X}, \mathbb{U})$.

- Las transformaciones preservando la fibra, las cuales son un subconjunto de las transformaciones puntuales, donde el nuevo parámetro independiente $\widetilde{s}$ solo depende del parámetro s.

El problema de equivalencia para EDOs se traduce entonces en saber si dada otra ODE de la forma

$$\widetilde{u}^{(n)} = \widetilde{F}\left(\widetilde{s}, \widetilde{u}, \widetilde{u}', ..., \widetilde{u}^{(n-1)}\right),$$

existe alguna transfomación de un tipo previamente prescripta (i.e., de contacto, puntual, preservando fibra, etc) que transforme una ecuación en la otra.
El Método de Equivalencia, intenta dar una respuesta a esta problema, ayudándose de las propiedades de los co-marcos asociados a las ecuaciones.

Es una tarea fácil entonces, demostrar que las transformaciones de contacto, dan origen al problema de equivalencia $(p^{(n-1)}\Phi^*)\widetilde{\theta} = \theta$,

$$\theta = g\omega = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\frac{n^2+n+2}{2}} & a_{\frac{n^2+n+4}{2}} & 0 & \dots & \dots & a_{\frac{n^2+n+6}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^n \\ \omega^{n+1} \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

con todas las componentes diagonales diferentes de cero. Es decir, dos ODEs serán equivalentes ante transformaciones de contacto, si y solo si, existen funciones a_i, tales que se satisface la relación $(p^{(n-1)}\Phi^*)\widetilde{\theta} = \theta$.

En el caso de transformaciones puntuales, $a_{\frac{n^2+n+4}{2}} = 0$, y en el caso preservando fibra, tenemos además que $a_{\frac{n^2+n+2}{2}} = 0$.

Computemos ahora $d\theta$ y $d\widetilde{\theta}$.

$$\begin{aligned} d\theta &= dg \wedge \omega + g\, d\omega \\ &= dg\, g^{-1} \wedge g\, \omega + g\, d\omega \\ &= \Pi \wedge \theta + T_{ij}\theta^i \wedge \theta^j, \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde los coeficientes T_{ij} son conocidos como elementos de torsión, y $\Pi = dg\, g^{-1}$ es la matriz de formas de Maurer-Cartan π^A, la cual puede ser escrita $\Pi^i_k = C^i_{kA}\pi^A$, con C^i_{kA} coeficientes constantes. En esta notación, los índices latinos en minúscula corren de 1 a n mientras que los índices en mayúsculas, corren hasta la dimensión del grupo. Usando notación indicial, (4.4) puede ser escrita como

$$d\theta^i = C^i_{kA}\pi^A \wedge \theta^k + T^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k. \tag{4.5}$$

De una manera similar, se tiene

$$d\widetilde{\theta}^i = C^i_{kA}\widetilde{\pi}^A \wedge \widetilde{\theta}^k + \widetilde{T}^i_{jk}\widetilde{\theta}^j \wedge \widetilde{\theta}^k. \tag{4.6}$$

Notar que hemos escrito C^i_{kA} en vez de $\widetilde{C}^i_{kA}$ debido a que los parámetros del grupo entran de manera idéntica en g y $\widetilde{g}$.

La idea en el Método de Equivalencia consiste en obtener tantos coeficientes de grupo g $(\widetilde{g})$ como sea posible, funcionalmente dependientes del sistema Pfaffiano asociado ω $(\widetilde{\omega})$ con el fin de obtener lo que es denominado un co-marco rígido, donde la solución al problema de equivalencia es directa [25].

El primer paso en la solución del problema de equivalencia consiste en notar que si $\widetilde{\theta} = \theta$, entonces $d\widetilde{\theta} = d\theta$, donde hemos omitido los pull-backs por simplicidad.

Se sigue entonces, que

$$\left[C^i_{kA}(\pi^A - \widetilde{\pi}^A) + \left(T^i_{jk} - \widetilde{T}^i_{jk}\right)\theta^j\right] \wedge \theta^k = 0. \tag{4.7}$$

Es más, debido al lema de Cartan, existen funciones $f^i_{kj} = f^i_{jk}$ tales que

$$\left[C^i_{kA}(\pi^A - \widetilde{\pi}^A) + \left(T^i_{jk} - \widetilde{T}^i_{jk}\right)\theta^j\right] = f^i_{kj}\theta^j. \tag{4.8}$$

La ecuación de arriba, implica que existen funciones λ^A_k tales que

$$\widetilde{\pi}^A = \pi^A + \lambda^A_k\theta^k, \tag{4.9}$$

y

$$\widetilde{T}^i_{jk} = T^i_{jk} + C^i_{kA}\lambda^A_j - C^i_{jA}\lambda^A_k. \tag{4.10}$$

Las Ecs. (4.9) y (4.10), pueden ser usadas para eliminar el máximo número posible de componentes de torsión $\widetilde{T}^i_{jk}$. Esta técnica, una de las fundamentales en el Método de Equivalencia de Cartan, es conocida como absorción de la torsión. Supongamos ahora, que ninguna absorción más, es posible. Entonces (4.5) se lee

$$d\theta^i = C^i_{kA}\pi^A \wedge \theta^k + U^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \tag{4.11}$$

donde los π^A son las nuevas formas formas re-definidas de Maurer-Cartan módulo θ^i, y $U^i_{jk} = U^i_{jk}(x, g)$, son las componentes no absorbidas de la torsión, conocidas como torsiones esenciales. Este nombre, es justificado si notamos que, después de la absorción, ellas son linealmente independientes de las formas de Maurer-Cartan, y por lo tanto,

$$(p^{\,n-1}\Phi^*)\widetilde{U}^i_{jk}(\widetilde{x}, \widetilde{g}) = U^i_{jk}(x, g). \tag{4.12}$$

Por ende, las componentes esenciales de la torsión, son invariantes del problema, para cualquier elección de los parámetros de grupo.

La segunda técnica en el algoritmo de Cartan, es conocida como normalización. Siempre y cuando sea posible, nosotros podemos normalizar cada invariante a una constante (generalmente cero o uno) y usar este procedimiento para eliminar uno de los parámetros del grupo. De esta manera, reducimos el grupo de estructura por el número de parámetros "eliminados" y obtenemos un nuevo co-marco *normalizado*. A este procedimiento, se lo llama un *lazo*[4] en el método de Cartan. Si los invariantes (4.12) no dependen explícitamente de los parámetros del grupo, entonces los mismos resultan verdaderos invariantes del problema y proveen condiciones necesarias para la equivalencia de los dos co-marcos dados. Podemos continuar aplicando las técnicas de absorción y normalización al co-marco normalizado, hasta que alcancemos uno de dos posibles escenarios. En el primer caso, podemos

[4] Loop en inglés

exitosamente normalizar todos los parámetros del grupo, y el problema, es reducido a una $\{e\}$-estructura (i.e una estructura donde G tiene como único elemento a la Identidad). En tal caso, hemos obtenido un co-marco invariante, y puede ser demostrado (ver [25]) que de los invariantes verdaderos y de sus derivadas, se puede construir un conjunto maximal de invariantes funcionalmente independientes que forman un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para la resolución del problema de equivalencia.

En el segundo caso, después de un número finito de lazos en el método de Cartan, finalizamos con un sistema donde algunos parámetros no son determinados, aun cuando ya no es posible ninguna otra normalización. En este caso, debemos usar lo que es conocido como test de involución de Cartan [25]. Tal test, decide, si el problema de equivalencia en cuestión, tiene un grupo de simetría subyacente de dimensión infinita (decimos entonces, que el sistema está en involución), o si el problema tiene un grupo de simetría finita. En el último caso, podemos aplicar el método conocido como prolongación.

Asumamos, que hemos sido capaces de determinar a todos los π^A módulo algunos λ^A_j, i.e., los $\widetilde{\pi}^A$ pueden ser escritos como

$$\widetilde{\pi}^A = \pi^A + \lambda^A_{Dj}\theta^j + \lambda^A_{Fj}\theta^j, \tag{4.13}$$

donde los λ^A_{Dj} son determinados por el procedimiento de absorción y los λ^A_{Fj} (funciones libres) no son determinadas por tal procedimiento.

Se puede demostrar entonces, que resolver el problema original, a saber, encontrar el grupo de simetría junto a un conjunto maximal de invariantes asociados al problema de equivalencia, es equivalente a resolver un problema asociado donde,

1. los parámetros libres de G se vuelven coordenadas de un espacio base ampliado $\mathfrak{N}^{(1)} = \mathfrak{N} \times G$, y

2. las funciones libres λ^A_{Fj} pasan a ser parámetros de un grupo ampliado $G^{(1)}$.

Primero extendemos al co-marco original, por la inclusión de nuevas formas

$$\kappa^A = \pi^A + \lambda^A_{Dj}\theta^j, \tag{4.14}$$

luego, sobre el espacio base $\mathfrak{N}^{(1)}$ consideramos al sistema $\{\theta^i, \kappa^A\}$, con el grupo de estructura dado por

$$G^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ \lambda^A_{Fj} & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

donde $\mathbb{I}$ es la Identidad del espacio respectivo.

Si nosotros estudiamos a este problema prolongado, podemos en principio, normalizar algunas de las funciones libres, (quizás, luego de aplicar la prolongación más de una vez), y de esta forma, encontraremos invariantes necesarios y suficientes para el problema de equivalencia. Para más detalles y aplicaciones de este método nosotros referimos al libro de Olver [25].

§3. La EDO de tercer orden

En esta sección aplicaremos el Método de Equivalencia de Cartan, para encontrar la clase de equivalencia de EDOs de tercer orden bajo transformaciones puntuales. Éste es un problema no trivial, y el conjunto de condiciones necesarias y suficientes para tal clase ha sido obtenida recientemente por P. Nurowski [26]. (Un problema similar, para transformaciones de contacto y preservando fibra, ha sido atacado en la literatura([7, 24, 27, 28]). Los resultados dados en esta sección han sido derivados independientemente y en un contexto más restringido para mostrar los pasos explícitos que se generalizarán más tarde a 4 dimensiones.
Nosotros diremos que la ecuación

$$u''' = F(u, u', u'', s), \tag{4.16}$$

es equivalente a

$$\widetilde{u}''' = \widetilde{F}(\widetilde{u}, \widetilde{u}', \widetilde{u}'', \widetilde{s}), \tag{4.17}$$

si existe una transformación puntual

$$\widetilde{s} = \xi(s, u), \tag{4.18}$$

$$\widetilde{u} = \psi(s, u), \tag{4.19}$$

con prolongación

$$(s, u, w, r) \longrightarrow (\widetilde{s}, \widetilde{u}, \widetilde{w}, \widetilde{r}) = \left(\xi(s, u), \psi(s, u), \frac{\psi_s + w\psi_u}{\xi_s + w\xi_u}, \frac{w\widetilde{w}_u + \widetilde{w}_s + r\widetilde{w}_w}{w\xi_u + \xi_s}\right)$$

la cual transforma una ecuación dentro de la otra. Notar que hemos hecho uso de la siguiente notación

$$(s, u, u', u'') = (s, u, w, r), \qquad \text{y} \qquad (\widetilde{s}, \widetilde{u}, \widetilde{u}', \widetilde{u}'') = (\widetilde{s}, \widetilde{u}, \widetilde{w}, \widetilde{r}), \tag{4.20}$$

para etiquetar coordenadas de $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cuando sea apropiado, nosotros usaremos también la siguiente notación

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (s, u, w, r), \\ \widetilde{\mathbf{x}} &= (\widetilde{s}, \widetilde{u}, \widetilde{w}, \widetilde{r}), \\ \omega &= (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4), \\ \theta &= (\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4). \end{aligned}$$

El sistema Pfaffiano $\mathcal{P}$ asociado a la ecuación (4.16) es

$$\omega^1 = du - w\, ds, \tag{4.21}$$
$$\omega^2 = dw - r\, ds, \tag{4.22}$$
$$\omega^3 = dr - F\, ds, \tag{4.23}$$
$$\omega^4 = ds, \tag{4.24}$$

y soluciones locales de (4.16) están en correspondencia uno a uno con curvas integrales $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow J^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o $\mathcal{P}$ satisfaciendo $\gamma^* ds \neq 0$. Estas curvas son generadas por un campo vectorial sobre $J^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dado por

$$e_s = D = \frac{\partial}{\partial s} + w\frac{\partial}{\partial u} + r\frac{\partial}{\partial w} + F\frac{\partial}{\partial r}. \tag{4.25}$$

Nosotros restringiremos el dominio de definición de F a una vecindad abierta U de $J^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donde F es C^∞ y el problema de Cauchy es bien planteado. Se sigue entonces, del teorema de Frobenius, que el espacio de soluciones $\mathfrak{M}$ es una variedad 3-dimensional C^∞, parametrizada por las constantes de integración $x^a = (x^1, x^2, x^3)$.
La solución de la Ec. (4.16), $u = Z(s, x^a)$, induce un difeomorfismo $\zeta : \mathfrak{M} \times \mathbb{R} \longrightarrow J^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dado por $(s, x^a) \longrightarrow (s, Z, Z', Z'')$. Sobre $\mathfrak{M} \times \mathbb{R}$ el pullback de las formas Pfaffianas w^i esta dado por

$$\begin{aligned}
\beta^1 &= Z_a\, dx^a,\\
\beta^2 &= Z'_a\, dx^a,\\
\beta^3 &= Z''_a\, dx^a,\\
\beta^4 &= ds.
\end{aligned}$$

Estudiemos ahora, el problema de equivalencia de la Ec.(4.16) bajo transformaciones puntuales $\Phi : J^0 \to J^0$. Este problema da origen al siguiente problema equivalente de G-estructuras, $(p\,^2\Phi^*)\,\widetilde{\theta} = \theta$, con

$$\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \\ \theta^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & a_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \\ \omega^4 \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

y una expresión similar para $\widetilde{\theta}$. En notación compacta escribiremos a (4.26) como $\theta = g\omega$.
Diferenciando θ, obtenemos

$$d\theta = dg\ \wedge \omega + g\, d\omega \tag{4.27}$$
$$= dg\, g^{-1} \wedge g\, \omega + g\, d\omega \tag{4.28}$$
$$= \Pi \wedge \theta + T_{ij}\theta^i \wedge \theta^j, \tag{4.29}$$

donde $T_{ij}\theta^i \wedge \theta^j = g\, d\omega$ y

$$\Pi = dg\; g^{-1} = \begin{pmatrix} \pi^1 & 0 & 0 & 0 \\ \pi^2 & \pi^3 & 0 & 0 \\ \pi^4 & \pi^5 & \pi^6 & 0 \\ \pi^7 & 0 & 0 & \pi^8 \end{pmatrix},$$

con

$$\pi^1 = \frac{da_1}{a_1},\ \pi^2 = \frac{da_2}{a_1} - \frac{da_3 a_2}{a_1 a_3},\ \pi^3 = \frac{da_3}{a_3},$$
$$\pi^4 = \frac{da_4}{a_1} - \frac{da_5 a_2}{a_1 a_3} - \frac{da_6(-a_2 a_5 + a_4 a_3)}{a_1 a_3 a_6},$$
$$\pi^5 = \frac{da_5}{a_3} - \frac{da_6 a_5}{a_3 a_6},\ \pi^6 = \frac{da_6}{a_6},\ \pi^7 = \frac{da_7}{a_1} - \frac{da_8 a_7}{a_1 a_8},\ \pi^8 = \frac{da_8}{a_8}.$$

Primer lazo: De $\omega = g^{-1}\theta$, obtenemos las siguientes ecuaciones de estructura

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + T^1_{24}\theta^2 \wedge \theta^4 + T^1_{21}\theta^2 \wedge \theta^1 + T^1_{14}\theta^1 \wedge \theta^4, && (4.30) \\ d\theta^2 &= \pi^2 \wedge \theta^1 + \pi^3 \wedge \theta^2 + T^2_{24}\theta^2 \wedge \theta^4 + T^2_{21}\theta^2 \wedge \theta^1 \\ &\quad + T^2_{14}\theta^1 \wedge \theta^4 + T^2_{34}\theta^3 \wedge \theta^4 + T^2_{31}\theta^3 \wedge \theta^1, && (4.31) \\ d\theta^3 &= \pi^4 \wedge \theta^1 + \pi^5 \wedge \theta^2 + \pi^6 \wedge \theta^3 + T^3_{34}\theta^3 \wedge \theta^4 \\ &\quad + T^3_{21}\theta^2 \wedge \theta^1 + T^3_{14}\theta^1 \wedge \theta^4 + T^3_{24}\theta^2 \wedge \theta^4 + T^3_{31}\theta^3 \wedge \theta^1, && (4.32) \\ d\theta^4 &= \pi^7 \wedge \theta^1 + \pi^8 \wedge \theta^4 + T^4_{24}\theta^2 \wedge \theta^4 + T^4_{21}\theta^2 \wedge \theta^1 + T^4_{14}\theta^1 \wedge \theta^4. && (4.33) \end{aligned}$$

Usando la libertad $\pi^A \longrightarrow \pi^A + \lambda^A_j\theta^j$, muchos de los coeficientes de torsión pueden ser absorbidos. Por ejemplo, eligiendo $\lambda^1_2 = -T^1_{21}$ y $\lambda^1_4 = T^1_{14}$ es fácil notar que $\widetilde{T}^1_{21} = \widetilde{T}^1_{14} = 0$. Omitiendo los$\,\widetilde{}\,$ para simplicidad notacional, las nuevas ecuaciones se leen

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + T^1_{24}\theta^2 \wedge \theta^4, && (4.34) \\ d\theta^2 &= \pi^2 \wedge \theta^1 + \pi^3 \wedge \theta^2 + T^2_{34}\theta^3 \wedge \theta^4, && (4.35) \\ d\theta^3 &= \pi^4 \wedge \theta^1 + \pi^5 \wedge \theta^2 + \pi^6 \wedge \theta^3, && (4.36) \\ d\theta^4 &= \pi^7 \wedge \theta^1 + \pi^8 \wedge \theta^4. && (4.37) \end{aligned}$$

con $T^1_{24} = -\dfrac{a_1}{a_3 a_8}$ y $T^2_{34} = -\dfrac{a_3}{a_8 a_6}$. Normalizando $T^1_{24} = -1$ y $T^2_{34} = -1$, determinamos a_6 y a_8. Las matrices g y Π se reducen a

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & \dfrac{a_3^2}{a_1} & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & \dfrac{a_1}{a_3} \end{pmatrix}, \qquad (4.38)$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi^1 & 0 & 0 & 0 \\ \pi^2 & \pi^3 & 0 & 0 \\ \pi^4 & \pi^5 & 2\pi^3 - \pi^1 & 0 \\ \pi^7 & 0 & 0 & \pi^1 - \pi^3 \end{pmatrix}.$$

Segundo lazo: Con la nueva matriz g computemos nuevamente a las ecuaciones de estructura. Luego de usar la libertad en los π^i para eliminar coeficientes de torsión, obtenemos

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 - \theta^2 \wedge \theta^4, && (4.39)\\ d\theta^2 &= \pi^2 \wedge \theta^1 + \pi^3 \wedge \theta^2 - \theta^3 \wedge \theta^4, && (4.40)\\ d\theta^3 &= \pi^4 \wedge \theta^1 + \pi^5 \wedge \theta^2 + (2\pi^3 - \pi^1) \wedge \theta^3 + T^3_{34}\theta^3 \wedge \theta^4, && (4.41)\\ d\theta^4 &= \pi^7 \wedge \theta^1 + (\pi^1 - \pi^3) \wedge \theta^4, && (4.42) \end{aligned}$$

con $T^3_{34} = -\dfrac{3a_5a_1 + a_3^2F_r - 3a_2a_3}{a_3a_1}$. Normalizando al invariante $T^3_{34} = 0$ determinamos a_5. Las matrices g y Π se reducen a

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & \dfrac{a_3a_2}{a_1} - \dfrac{a_3^2F_r}{3a_1} & \dfrac{a_3^2}{a_1} & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & \dfrac{a_1}{a_3} \end{pmatrix}, \tag{4.43}$$

y

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi^1 & 0 & 0 & 0 \\ \pi^2 & \pi^3 & 0 & 0 \\ \pi^4 & \pi^2 - \dfrac{a_3d(F_r)}{a_1} & 2\pi^3 - \pi^1 & 0 \\ \pi^7 & 0 & 0 & \pi^1 - \pi^3 \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

Tercer lazo: Aplicando el método de Cartan una vez más, y luego de una nueva absorción de la torsión obtenemos

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 - \theta^2 \wedge \theta^4, && (4.45)\\ d\theta^2 &= \pi^2 \wedge \theta^1 + \pi^3 \wedge \theta^2 - \theta^3 \wedge \theta^4, && (4.46)\\ d\theta^3 &= \pi^4 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + (2\pi^3 - \pi^1) \wedge \theta^3 + T^3_{24}\theta^2 \wedge \theta^4, && (4.47)\\ d\theta^4 &= \pi^7 \wedge \theta^1 + (\pi^1 - \pi^3) \wedge \theta^4 + T^4_{24}\theta^2 \wedge \theta^4, && (4.48) \end{aligned}$$

con $T^3_{24} = -\dfrac{(2a_3^2F_r^2 - 9a_2^2 + 18a_4a_1 - 3a_3^2DF_r + 9F_wa_3^2)}{9a_1^2}$, $T^4_{24} = -\dfrac{(6a_7a_3 - F_{rr}a_1)}{6a_3a_1}$.

Normalizando $T^3_{24} = T^4_{24} = 0$ los elementos a_4 y a_7 en las matrices g y Π en las ecuaciones (4.43), y π^4 y π^7 en (4.44) se vuelven

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{a_3^2 DF_r}{6a_1} - \frac{F_w a_3^2}{2a_1} - \frac{F_r^2 a_3^2}{9a_1} + \frac{a_2^2}{2a_1}, \\
a_7 &= \frac{a_1 F_{rr}}{a_3}, \\
\pi^4 &= -\frac{(2a_3F_r - 3a_2)a_3 d(F_r)}{9a_1^2} - \frac{a_3^2 d(F_w)}{2a_1^2} + \frac{a_3^2 d(DF_r)}{6a_1^2}, \\
\pi^7 &= \frac{d(F_{rr})}{6a_3}.
\end{aligned}$$

Cuarto lazo: Luego de absorber las componentes no esenciales de la torsión, los $d\theta^i$ se leen

$$\begin{aligned}
d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 - \theta^2 \wedge \theta^4, && (4.49)\\
d\theta^2 &= \pi^2 \wedge \theta^1 + \pi^3 \wedge \theta^2 - \theta^3 \wedge \theta^4, && (4.50)\\
d\theta^3 &= \pi^2 \wedge \theta^2 + (2\pi^3 - \pi^1) \wedge \theta^3 + I_1\theta^1 \wedge \theta^4, && (4.51)\\
d\theta^4 &= (\pi^1 - \pi^3) \wedge \theta^4 + I_2\theta^2 \wedge \theta^1 + I_3\theta^3 \wedge \theta^1, && (4.52)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{a_3^3}{a_1^3}\left(F_u - \frac{F_r DF_r}{3} + \frac{F_r F_w}{3} + \frac{2F_r^3}{27} - \frac{DF_w}{2} + \frac{D^2F_r}{6}\right), && (4.53)\\
I_2 &= \frac{1}{a_3^2}\left(F_{rrw} + \frac{F_{rrr}F_r}{3} + \frac{F_{rr}^2}{6}\right) - \frac{a_2}{a_1} I_3, && (4.54)\\
I_3 &= \frac{a_1}{6a_3^3} F_{rrr}. && (4.55)
\end{aligned}$$

Hasta aquí, tenemos tres invariantes cuya anulación no depende de los parámetros del grupo. Para resolver el problema de equivalencia, uno debe estudiar diferentes ramas del problema, i.e., diferentes valores posibles de los invariantes. Uno entonces sigue un procedimiento conocido como prolongación con el fin de encontrar un conjunto maximal de invariantes los cuales unívocamente caractericen el problema de equivalencia. Este problema fue resuelto en [26], obteniéndose

$$\begin{aligned}
d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 - \theta^2 \wedge \theta^4, \\
d\theta^2 &= \pi^2 \wedge \theta^1 + \pi^3 \wedge \theta^2 - \theta^3 \wedge \theta^4, \\
d\theta^3 &= \pi^2 \wedge \theta^2 + (2\pi^3 - \pi^1) \wedge \theta^3 + I_1\theta^1 \wedge \theta^4, \\
d\theta^4 &= (\pi^1 - \pi^3) \wedge \theta^4 + I_2\theta^2 \wedge \theta^1 + I_3\theta^3 \wedge \theta^1, \\
d\pi^1 &= -\pi^2 \wedge \theta^4 + I_4\,\theta^1 \wedge \theta^2 + I_5\,\theta^1 \wedge \theta^3 + I_6\,\theta^1 \wedge \theta^4 - I_3\,\theta^2 \wedge \theta^3, \qquad (4.56) \\
d\pi^2 &= (\pi^3 - \pi^1) \wedge \pi^2 + I_7\,\theta^1 \wedge \theta^2 + I_8\,\theta^1 \wedge \theta^3 + I_9\,\theta^1 \wedge \theta^4 \\
&\quad + I_{10}\,\theta^2 \wedge \theta^3 + I_{11}\,\theta^2 \wedge \theta^4, \\
d\pi^3 &= \frac{I_8 + I_4}{2}\,\theta^1 \wedge \theta^2 + 2(I_5 - I_{10})\,\theta^1 \wedge \theta^3 + I_{11}\,\theta^1 \wedge \theta^4 \\
&\quad - 2I_3\,\theta^2 \wedge \theta^3.
\end{aligned}$$

con I_1 - I_{11} funcionales explícitas de F.

§3.1. La conexión métrica normal

Siguiendo a Cartan [4], en ésta sección introduciremos estructuras geométricas que son naturalmente inducidas por el sistema Pfaffiano asociado con le EDO de tercer orden. Estas nuevas estructuras dieron a Cartan un método alternativo para mostrar la equivalencia entre EDOs que son relacionadas por una transformación puntual.

Vale la pena nuevamente enfatizar, que el método usado por Cartan en [4], es muy diferente en apariencia del ya descripto Método de Equivalencia. Solo al culminar esta sección, notaremos que ambos métodos son equivalentes.

Primero, introduciremos una clase de métricas sobre el espacio solución, y luego una conexión generalizada con ciertas condiciones impuestas sobre su torsión y curvatura.

Recordemos, que luego de completar los cuatro lazos, tenemos las siguientes formas pfaffianas equivalentes a las originales:

$$\theta^1 = a_1\omega^1, \tag{4.57}$$

$$\theta^2 = a_2\omega^1 + a_3\omega^2, \tag{4.58}$$

$$\theta^3 = \left(\frac{a_2^2}{2a_1} + \frac{a_3^2}{a_1}a\right)\omega^1 + \left(\frac{a_3a_2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_1}b\right)\omega^2 + \frac{a_3^2}{a_1}\omega^3, \tag{4.59}$$

$$\theta^4 = \frac{a_1}{a_3}\left(c\omega^1 + \omega^4\right), \tag{4.60}$$

con

$$a = -\frac{1}{2}F_w - \frac{1}{9}F_r^2 + \frac{1}{6}DF_r, \quad b = -\frac{1}{3}F_r, \quad c = \frac{1}{6}F_{rr},$$

y donde a_1, a_2, a_3 son funciones arbitrarias sobre $J^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Siguiendo a Cartan, definimos la siguiente base

$$\theta_c^1 = \omega^1, \tag{4.61}$$
$$\theta_c^2 = \omega^2, \tag{4.62}$$
$$\theta_c^3 = a\,\omega^1 + b\,\omega^2 + \omega^3, \tag{4.63}$$
$$\theta_c^4 = c\,\omega^1 + \omega^4. \tag{4.64}$$

Notar que esta base, solo depende de la EDO de tercer orden asociada. En este sentido, es una base invariante con respecto al subgrupo de G con parámetros a_1, a_2, y a_3.

Las formas (4.57-4.60) pueden ser escritas como

$$\theta^1 = a_1\,\theta_c^1, \tag{4.65}$$
$$\theta^2 = a_3\left(\theta_c^2 + \frac{a_2}{a_3}\,\theta_c^1\right), \tag{4.66}$$
$$\theta^3 = \frac{a_3^2}{a_1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2\theta_c^1 + \frac{a_2}{a_3}\,\theta_c^2 + \theta_c^3\right], \tag{4.67}$$
$$\theta^4 = \frac{a_1}{a_3}\,\theta_c^4. \tag{4.68}$$

Usando las tres 1-formas $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ podemos construir una forma cuadrática diferencial sobre $J^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$h(\mathbf{x}) = 2\theta^{(1} \otimes \theta^{3)} - \theta^2 \otimes \theta^2 = \eta_{ij}\theta^i \otimes \theta^j, \tag{4.69}$$

donde

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El mapa $\zeta : \mathfrak{M} \times \mathbb{R} \longrightarrow J^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ discutido en la sección 3, introduce una forma cuadrática sobre $\mathfrak{M} \times \mathbb{R}$, a saber

$$h(x^a, s) = \zeta^*\, h. \tag{4.70}$$

Esta forma, puede ser interpretada como una familia uni-paramétrica (s siendo parámetro) de métricas conformes Lorentzianas sobre $\mathfrak{M}$. Es más, definiendo

$$h_c(x^a, s) = \zeta^*\left(\eta_{ij}\theta_c^i \otimes \theta_c^j\right), \tag{4.71}$$

tenemos que

$$h(x^a, s) = \zeta^*\left[a_3^2\, h_c(\mathbf{x})\right] = \Omega^2\, h_c(x^a, s). \tag{4.72}$$

Por lo tanto, podemos interpretar los $\zeta^* \theta^i$ como una familia de triadas nulas las cuales viven en el espacio solución $\mathfrak{M}$ asociada a la EDO de tercer orden. Más aun, podemos ver que a_1, a_2, a_3 constituyen parámetros en un grupo G que juega un rol similar al grupo de Lorentz conforme $CO(2,1)$:

- a_1 juega el rol de un boost λ en la dirección del vector nulo e_1 dual a θ^1.
- $\frac{a_2}{a_3}$ es una rotación nula γ alrededor de e_1.
- a_3 es un factor conforme Ω aplicado a la triada.

más tarde veremos que si $I_1 = 0$, entonces se tendrá que $G = CO(2,1)$, con el parámetro s siendo un rotación tipo espacial aplicada a las triadas las cuales forman métricas conformes una a otras.

Observación 4.1: *En lo sucesivo, con el fín de simplificar las expresiones, no escribiremos el pull-back ζ^*. Por ejemplo, escribiremos θ^i en vez de $\zeta^* \theta^i$.*

Hasta aquí hemos construido una familia uni-paramétrica de métricas conformes sobre el espacio solución de una EDO de tercer orden. Vayamos más allá, y adicionemos más estructuras geométricas compatibles con esta familia conforme de métricas. En particular, definiremos de una manera unívoca una conexión generalizada sobre $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ asociada con las formas nulas θ^i con $i = 1, 2, 3$ que caracterizan la EDO de tercer orden bajo transformaciones puntuales. Esta conexión generalizada satisface tres condiciones:

I) Es una conexión tipo Weyl, i.e:

$$\omega_{ij} = \eta_{ik}\omega^k_j = \omega_{[ij]} + \eta_{ij}A, \tag{4.73}$$

con A una 1-forma

$$A = A_i\, \theta^i + A_4\, \theta^4. \tag{4.74}$$

II) Su torsión asociada tiene una proyección sobre el espacio base, (con coordenadas x^a).

III) Su parte fibrosa (coordenatizada por los parámetros s) depende solamente de los invariantes no triviales del problema de equivalencia, i.e.,

$$\begin{aligned} T^1 &= d\theta^1 + \omega^1_j \wedge \theta^j = 0, & (4.75)\\ T^2 &= d\theta^2 + \omega^2_j \wedge \theta^j = 0, & (4.76)\\ T^3 &= d\theta^3 + \omega^3_j \wedge \theta^j = I_1\, \theta^1 \wedge \theta^4. & (4.77)\end{aligned}$$

El lector debería distinguir entre la torsión de la conexión introducida en las ecuaciones precedentes, y los coeficientes de torsión definidos en las secciones previas. Estos no tienen relación inmediata, pero reciben el mismo nombre en la literatura matemática.

Observación 4.2: *Notar que los ω^i_j tienen componentes en todos los θ^A, i.e.:*

$$\omega^i_j = \omega^i_{jh}\theta^h + \omega^i_{j4}\theta^4. \qquad (4.78)$$

Por lo tanto, estamos tratando con una conexión no estándar sobre $\mathfrak{M}$.

Observación 4.3: *Todos los invariantes pueden ser escritos en términos de a, b, c como sigue:*

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{a_3^3}{a_1^3}\left(F_u + 2ab + Da\right), & (4.79)\\ I_2 &= \frac{1}{a_3^2}\left(c_w - c_r b + c^2\right) - \frac{a_2}{a_1} I_3, & (4.80)\\ I_3 &= \frac{a_1}{a_3^3}\, c_r. & (4.81)\end{aligned}$$

De hecho, pueden ser escritos solamente en términos de a y b, pero usando a, b y c, las expresiones lucen más compactas.

Puesto que a_1, a_2, a_3 parametrizan al grupo G, la conexión puede ser escrita módulo un gauge inducido por este grupo. Si tomamos $a_2 = 0$ y $a_1 = a_3 = 1$, entonces la correspondiente 1-forma de la conexión, será denotada por $\widetilde{\omega}$. Si quisiéramos escribir la conexión en algún otro gauge, usamos

$$\omega = g{-}1\, \widetilde{\omega}\, g + g^{-1} dg, \qquad (4.82)$$

donde g es un elemento de G. En este gauge, los invariantes se leen:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\left(F_u + 2ab + Da\right), & (4.83)\\ I_2 &= c_w - c_r b + c^2, & (4.84)\\ I_3 &= c_r. & (4.85)\end{aligned}$$

La conexión que satisface estas tres condiciones está dada por,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{[12]} &= (-b_u - 3ca + a_w - a_r b)\,\theta_c^1 + (cb + A_1)\,\theta_c^2 + (c + A_2)\,\theta_c^3 + a\,\theta_c^4, \\
\widetilde{\omega}_{[13]} &= (a_r - 2cb - A_1)\,\theta_c^1 - c\,\theta_c^2 + A_3\,\theta_c^3 + b\,\theta_c^4, \\
\widetilde{\omega}_{[23]} &= (-2c - A_2)\,\theta_c^1 - A_3\,\theta_c^2 + \theta_c^4, \\
A &= A_1\,\theta_c^1 + A_2\,\theta_c^2 + A_3\,\theta_c^3 + b\,\theta_c^4. \qquad (4.86)
\end{aligned}
$$

Notar que las componentes espaciales de A se encuentran aun indeterminadas, y que los restantes invariantes I_2, I_3 (que aparecen en $d\theta^4$) todavía necesitan ser incluidos en la geometría. De la expresión de arriba para $\widetilde{\omega}_{[ij]}$ es fácil ver que la correspondiente 2-forma de curvatura

$$\widetilde{\Omega}_{ij} = d\widetilde{\omega}_{ij} + \widetilde{\omega}_{ik} \wedge \widetilde{\omega}_j^k,$$

incluirá I_2, I_3. Entonces, imponiendo

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Omega}_{23} &= d\widetilde{\omega}_{23} + \eta^{3i}\widetilde{\omega}_{ih} \wedge \widetilde{\omega}_{h2} \qquad (4.87)\\
&= I_2\,\theta_c^2 \wedge \theta_c^1 + I_3\,\theta_c^3 \wedge \theta_c^1, \qquad (4.88)
\end{aligned}
$$

inmediatamente obtenemos $A_1 = Dc - 2cb + a_r, A_2 = -2c, A_3 = 0$.

En resumen, nosotros hemos construido de manera unívoca una conexión ω_{ij} tal que

$$
\begin{aligned}
T^1 &= 0, \qquad (4.89)\\
T^2 &= 0, \qquad (4.90)\\
T_3 &= I_1\,\theta_c^1 \wedge \theta_c^4, \qquad (4.91)\\
\widetilde{\Omega}_{23} &= I_2\,\theta_c^2 \wedge \theta_c^1 + I_3\,\theta_c^3 \wedge \theta_c^1. \qquad (4.92)
\end{aligned}
$$

La parte antisimétrica de esta conexión se lee,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{[12]} &= (-3ca + a_w - a_r b - b_u)\,\theta_c^1 + (-cb + Dc + a_r)\,\theta_c^2 - c\,\theta_c^3 + a\,\theta_c^4, \\
\widetilde{\omega}_{[13]} &= -Dc\,\theta_c^1 - c\,\theta_c^2 + b\,\theta_c^4, \\
\widetilde{\omega}_{[23]} &= \theta_c^4, \qquad (4.93)
\end{aligned}
$$

con la forma de Weyl,

$$A = (Dc + a_r - 2cb)\,\theta_c^1 - 2c\,\theta_c^2 + b\,\theta_c^4. \qquad (4.94)$$

El conjunto completo de formas de torsión y curvatura puede ser re-escrito como

$$
\begin{aligned}
T^1 &= 0,\\
T^2 &= 0,\\
T^3 &= I_1\theta^1 \wedge \theta^4,\\
\widetilde{\Omega}_{23} &= I_2\,\theta^2_c \wedge \theta^1_c + I_3\,\theta^3_c \wedge \theta^1_c,\\
\widetilde{\Omega}_{13} &= I_4\,\theta^1 \wedge \theta^2 + I_5\,\theta^1 \wedge \theta^3 + I_6\,\theta^1 \wedge \theta^4 - I_3\,\theta^2 \wedge \theta^3,\\
\widetilde{\Omega}_{12} &= I_7\,\theta^1 \wedge \theta^2 + I_8\,\theta^1 \wedge \theta^3 + I_9\,\theta^1 \wedge \theta^4 + I_{10}\,\theta^2 \wedge \theta^3 + I_{11}\,\theta^2 \wedge \theta^4,\\
\widetilde{\Omega}_{22} &= \frac{I_8 + I_4}{2}\,\theta^1 \wedge \theta^2 + 2(I_5 - I_{10})\,\theta^1 \wedge \theta^3 + I_{11}\,\theta^1 \wedge \theta^4 - 2I_3\,\theta^2 \wedge \theta^3.
\end{aligned}
\tag{4.95}
$$

Esta conexión fue introducida por primera vez por Cartan en ([6]), y fue llamada conexión métrica normal. En dicho trabajo, los pasos seguidos para construir tal conexión no fueron claros a priori, solo a posteriori, uno podía ver su significado intrínsico. Ahora, con la ayuda del Método de Equivalencia de Cartan y sus invariantes asociados (ver Ec. 4.56), resulta claro que la conexión métrica normal está en correspondencia uno a uno con EDOs de tercer orden que son equivalentes ante transformaciones puntuales.

En particular, la anulación del invariante I_1, conocido como invariante de Wunschmann [8], nos lleva a una clase especial de EDOs que están relacionadas a Gravedad Conforme, como es demostrado en la formulación de Superficies Nulas de Relatividad General([9, 10, 13, 15, 23, 32]) o a espacios Einstein-Weyl en 3-dim [29], como brevemente resumiremos en la próxima sección.

§3.2. NSF y espacios Einstein-Weyl en 3-dim

Ahora, brevemente revisaremos algunos casos especiales de estas geometrías asociadas a las EDOs.
Calculemos la derivada de Lie de h_c en la dirección de e_s. Si tenemos un espacio con una conexión métrica, es fácil demostrar que podemos re-escribir la derivada de Lie como:

$$\pounds_{e_s} h_c = -2A_4 h_c + 2\eta_{k(i}T^k_{j)4}\theta^i \otimes \theta^j. \tag{4.96}$$

Entonces, en el caso de una conexión métrica normal, como la presentada en la sección precedente, tenemos

$$\pounds_{e_s} h_c = -2b\, h_c + I_1\theta^1_c \otimes \theta^1_c, \tag{4.97}$$

y si restringimos la clase de EDOs a aquellas que satisfacen

$$I_1 = F_u + 2ab + \frac{da}{ds} = 0, \tag{4.98}$$

tendremos un espacio solución donde todas las métricas Lorentzianas $g = (\zeta^{-1})^* h$ en la familia uni-paramétrica son equivalentes entre sí, i.e., es posible elegir al factor conforme $\Omega = (\zeta^{-1})^* a_3$ como

$$D\Omega = -[(\zeta^{-1})^* b]\,\Omega, \tag{4.99}$$

y tendremos entonces que $\widetilde{h} = \Omega^2 h$ satisface

$$\pounds_{e_s}\widetilde{h} = 0. \tag{4.100}$$

En tal caso $G = CO(2,1)$. La condición diferencial $I_1 = 0$ provee la cinemática de la formulación de Superficies Nulas de los espacios Weyl. Esta condición es conocida como "condición de metricidad" e I_1 es conocido como invariante de Wunschmann [8]. Soluciones $F(u,w,r,s)$ a la condición de metricidad nos permiten construir una clase difeomorfa de métricas conformes Lorentzianas, y soluciones $u = Z(x^a, s)$ a $u''' = F(u,w,r,s)$, tienen la propiedad de que sus superficies de nivel $Z(x^a, s) =$ const, son superficies nulas de estas métricas conformes. En particular, podemos seleccionar una conexión Levi-Civita si requerimos que F sea tal que podamos encontrar una función f tal que $A_i = grad\, f$, $i = 1, 2, 3$.

Finalmente, fue probado por Tod [29] siguiendo a Cartan que si se requiere que las superficies nulas sean totalmente geodésicas, entonces se tendrá otra condición (además de $I_1 = 0$) sobre la EDO tal que a partir de cualquier solución de estas condiciones podemos construir automáticamente todos los espacios Einstein-Weyl. Esta nueva condición sigue de

$$e_s \lrcorner\, dA = 0, \tag{4.101}$$

y se lee

$$J(F) = 2\frac{d^2\, c}{ds^2} + \frac{d}{ds}\,(b_w) - b_u = 0. \tag{4.102}$$

Soluciones particulares a estas EDOs que nos llevan a espacios Einstein-Weyl pueden ser encontradas en [29]. En particular, Tod demostró que si $F_{rrr} = 0$, entonces $dA = 0$, y de esto, tenemos todos los espacios Einstein conformes. Es importante observar que si hubiésemos usado transformaciones de contacto en vez de transformaciones puntuales, entonces deberíamos haber obtenido una conexión conforme normal de Cartan([11]). El mismo resultado es obtenido en el caso de transformaciones de contacto si comenzamos con un par de EDPs de segundo orden y en tal caso obtenemos todas las geometrías conformes de tipo Lorentz-Weyl en 4-dim [22], como vimos en el capítulo anterior y extenderemos en las siguientes secciones.

§4. Par de ecuaciones diferenciales parciales

En esta sección estudiaremos la geometría asociada con el siguiente par de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} Z_{ss} &= S(Z, Z_s, Z_{s^*}, Z_{ss^*}, s, s^*), \\ Z_{s^*s^*} &= S^*(Z, Z_s, Z_{s^*}, Z_{ss^*}, s, s^*), \end{aligned} \tag{4.103}$$

donde s es una variable compleja y $S(Z, Z_s, Z_{s^*}, Z_{ss^*}, s, s^*)$ satisface la condición de integrabilidad

$$D^2 S^* = D^{*2} S, \tag{4.104}$$

y la desigualdad débil

$$1 - S_R S_R^* > 0. \tag{4.105}$$

Los símbolos D, D^* en las expresiones de arriba denotan derivadas totales en las direcciones s y s^* respectivamente y su acción sobre una función arbitraria $H = H(Z, W, W^*, R, s, s^*)$, es definida como

$$\frac{dH}{ds} \equiv DH \equiv H_s + WH_Z + SH_W + RH_{W^*} + TH_R, \tag{4.106}$$

$$\frac{dH}{ds^*} \equiv D^*H \equiv H_{s^*} + W^*H_Z + RH_W + S^*H_{W^*} + T^*H_R, \tag{4.107}$$

donde

$$T = D^*S, \qquad T^* = DS^*.$$

Del teorema de Frobenius, se puede demostrar que soluciones $Z = Z(x^a, s, s^*)$ de (4.103) dependen de cuatro parámetros, x^a. Por lo tanto el espacio solución (el espacio de constantes de integración) es un espacio 4-dimensional.

Consideremos ahora el problema de equivalencia de EDPs de segundo orden bajo transformaciones puntuales.

Sea $\mathbf{x} = (Z, Z_s, Z_{s^*}, Z_{ss^*}, s, s^*) \equiv (Z, W, W^*, R, s, s^*)$. Como fue hecho en la sección precedente, identificaremos los espacios $(x^a) \Leftrightarrow (Z, W, W^*, R)$ para cualquier valor de (s, s^*) y trataremos a esta relación como una transformación de coordenadas entre los dos conjuntos. Sus derivadas exteriores

$$\begin{aligned} dZ &= Z_a dx^a + W ds + W^* ds^*, \\ dW &= W_a dx^a + S ds + R ds^*, \\ dW^* &= W_a^* dx^a + R ds + S^* ds^*, \\ dR &= R_a dx^a + T ds + T^* ds^*, \end{aligned} \tag{4.108}$$

pueden ser re-escritas como las formas Pfaffianas de seis 1-formas

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= dZ - W ds - W^* ds^*,\\
\omega^2 &= dW - S ds - R ds^*,\\
\omega^3 &= dW^* - R ds - S^* ds^*,\\
\omega^4 &= dR - T ds - T^* ds^*,\\
\omega^5 &= ds,\\
\omega^6 &= ds^*.
\end{aligned} \tag{4.109}$$

La anulación de las cuatro $\omega^i, i = 1-4$ resulta equivalente a las EDPs de las Ecs. (4.103). La transformación puntual $\bar{\mathbf{x}} = \phi(\mathbf{x})$ da $\theta = g\,\omega$, donde

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0\\ a_2^* & a_4^* & a_3^* & 0 & 0 & 0\\ a_5 & a_6 & a_6^* & a_7 & 0 & 0\\ a_8 & 0 & 0 & 0 & a_9 & a_{10}\\ a_8^* & 0 & 0 & 0 & a_{10}^* & a_9^* \end{pmatrix},$$

con a_1, a_5 y a_7 funciones reales. Diferenciando θ, obtenemos

$$\begin{aligned}
d\theta &= dg \wedge \omega + g\, d\omega && (4.110)\\
&= dg\, g^{-1} \wedge g\,\omega + g\, d\omega && (4.111)\\
&= \Pi \wedge \theta + T_{ij}\theta^i \wedge \theta^j, && (4.112)
\end{aligned}$$

donde $T_{ij}\theta^i \wedge \theta^j = g\, d\omega$,

$$\Pi = dg\, g^{-1} = \begin{pmatrix} \pi^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \pi^2 & \pi^3 & \pi^4 & 0 & 0 & 0\\ \pi^{*2} & \pi^{*4} & \pi^{*3} & 0 & 0 & 0\\ \pi^5 & \pi^6 & \pi^{*6} & \pi^7 & 0 & 0\\ \pi^8 & 0 & 0 & 0 & \pi^9 & \pi^{10}\\ \pi^{*8} & 0 & 0 & 0 & \pi^{*10} & \pi^{*9} \end{pmatrix}.$$

Luego de absorber ciertas componentes de torsión, obtenemos

$$\begin{aligned}
d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + I_1\, \theta^3 \wedge \theta^6 - I_2\, \theta^3 \wedge \theta^5 + I_1^*\, \theta^2 \wedge \theta^5 - I_2^*\, \theta^2 \wedge \theta^6,\\
d\theta^2 &= \pi^2 \wedge \theta^1 + \pi^3 \wedge \theta^2 + \pi^4 \wedge \theta^3 + I_3\theta^4 \wedge \theta^6 - I_4\, \theta^4 \wedge \theta^5,\\
d\theta^3 &= \pi^{*2} \wedge \theta^1 + \pi^{*3} \wedge \theta^3 + \pi^4 \wedge \theta^2 + I_3^*\, \theta^4 \wedge \theta^5 - I_4^*\, \theta^4 \wedge \theta^6,\\
d\theta^4 &= \pi^7 \wedge \theta^4 + \pi^5 \wedge \theta^1 + \pi^6 \wedge \theta^2 + \pi^{*6} \wedge \theta^3,\\
d\theta^5 &= \pi^{10} \wedge \theta^6 + \pi^9 \wedge \theta^5 + \pi^8 \wedge \theta^1,\\
d\theta^6 &= \pi^{*10} \wedge \theta^5 + \pi^{*9} \wedge \theta^6 + \pi^{*8} \wedge \theta^1.
\end{aligned} \tag{4.113}$$

con

$$I_1 = \frac{a_1(a_4a_{10} + a_3a_9)}{(a_9^*a_9 - a_{10}a_{10}^*)(a_4^*a_4 - a_3^*a_3)}, \qquad I_2 = \frac{a_1(a_4a_9^* + a_3a_{10}^*)}{(a_9^*a_9 - a_{10}a_{10}^*)(a_4^*a_4 - a_3^*a_3)},$$

$$I_3 = \frac{a_4a_{10} - a_3a_9 + a_3a_{10}S_R - a_4a_9S_R^*}{a_7(a_9^*a_9 - a_{10}a_{10}^*)}, \quad I_4 = \frac{a_4a_9^* - a_3a_{10}^* + a_3a_9^*S_R - a_4a_{10}^*S_R^*}{a_7(a_9^*a_9 - a_{10}a_{10}^*)}.$$

Normalizando los invariantes $I_1 = I_3 = 0$ e $I_2 = I_4 = 1$, la matriz g viene dada por

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_3b & 0 & 0 & 0 \\ a_2^* & a_3^*b^* & a_3^* & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_6 & a_6^* & \frac{a_3^*a_3}{\alpha^2\, a_1} & 0 & 0 \\ a_8 & 0 & 0 & 0 & \frac{-ba_1}{a_3^*(1-bb^*)} & \frac{a_1}{a_3^*(1-bb^*)} \\ a_8^* & 0 & 0 & 0 & \frac{a_1}{a_3(1-bb^*)} & \frac{-b^*a_1}{a_3(1-bb^*)} \end{pmatrix},$$

donde $b = \dfrac{\sqrt{1 - S_RS_R^*} - 1}{S_R^*}$ y $\alpha^2 = \dfrac{1 + bb^*}{(1 - bb^*)^2}$.

Entonces, π^4, π^7, π^9 y π^{10} resultan funcionales de a_1, a_2, a_3, y S.

Después de absorber los coeficientes de torsión no esenciales, el segundo lazo da las siguientes ecuaciones de estructura

$$\begin{aligned}
d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 - \theta^3 \wedge \theta^5 - \theta^2 \wedge \theta^6, \\
d\theta^2 &= \pi^2 \wedge \theta^1 + \pi^3 \wedge \theta^2 - \theta^4 \wedge \theta^5 + I_5\, \theta^4 \wedge \theta^3 + I_6\, \theta^3 \wedge \theta^5 + I_7\, \theta^3 \wedge \theta^6, \\
d\theta^3 &= \pi^{*2} \wedge \theta^1 + \pi^{*3} \wedge \theta^3 - \theta^4 \wedge \theta^6 + I_5^*\theta^4 \wedge \theta^2 + I_6^*\, \theta^2 \wedge \theta^6 + I_7^*\, \theta^2 \wedge \theta^5, \\
d\theta^4 &= -\pi^1 \wedge \theta^4 + \pi^3 \wedge \theta^4 + \pi^{*3} \wedge \theta^4 + \pi^5 \wedge \theta^1 + \pi^6 \wedge \theta^2 + \pi^{*6} \wedge \theta^3 \\
&\quad +2I_6^*\, \theta^5 \wedge \theta^4 + 2I_6\, \theta^6 \wedge \theta^4, \\
d\theta^5 &= \pi^1 \wedge \theta^5 - \pi^{*3} \wedge \theta^5 + \pi^8 \wedge \theta^1 + I_5\, \theta^4 \wedge \theta^6 + I_8\, \theta^2 \wedge \theta^5 + I_8^*\, \theta^2 \wedge \theta^6 \\
&\quad +I_9\, \theta^3 \wedge \theta^6, \\
d\theta^6 &= \pi^1 \wedge \theta^6 - \pi^3 \wedge \theta^6 + \pi^{*8} \wedge \theta^1 + I_5^*\, \theta^4 \wedge \theta^5 + I_8^*\, \theta^3 \wedge \theta^6 + I_8\, \theta^3 \wedge \theta^5 \\
&\quad +I_9^*\, \theta^2 \wedge \theta^5.
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Los invariantes son

$$
\begin{aligned}
I_5 &= \frac{a_1\alpha^2 b_R}{(a_3^*)^2(1-bb^*)}, \\
I_6 &= \frac{1}{1-bb^*}\left(\frac{a_6^*}{a_3^*} - \frac{a_6 b}{a_3^*} - \frac{a_2(1-bb^*)}{a_1} - \frac{a_3(a^*-ab)}{a_1}\right), \\
I_7 &= -\frac{a_3^2\,\mathcal{W}}{a_1 a_3^*}, \\
I_8 &= \frac{a_2\,\alpha^2 b_R^*}{(a_3)^2\,(1-bb^*)} + \frac{b_W^* b - b_{W^*}^*}{a_3\,(1-bb^*)^2} + \frac{\alpha^2 b_R^*(a^*-ab)}{a_3\,(1-bb^*)^2} - \frac{a_8^*}{a_1}, \\
I_9 &= \frac{a_2\alpha^2 b_R}{(a_3^*)^2\,(1-bb^*)} + \frac{b_W b - b_{W^*}}{(1-bb^*)^2} + \frac{a_3\alpha^2 b_R(a^*-ab)}{a_3^*(1-bb^*)^2},
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
a &= b^* S_W + b S_W^* + \frac{Db^* + bD^*b^* + (b^*)^2 Db + b^* D^* b}{1-bb^*}, \\
\mathcal{W} &= \frac{1}{1-bb^*}\left(Db - bS_W + S_{W^*} + b(D^*b + bS_{W^*}^* - b^2 S_W^*)\right).
\end{aligned}
$$

La expresión $\mathcal{W}$ es conocida como invariante de Wünschmann generalizado.

Eligiendo $I_6 = I_8 = 0$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
a_6 &= \frac{aa_3a_3^* + a_3a_2^* + b^*a_3^*a_2}{a_1}, \\
a_8 &= \frac{a_1a_2^*\,\alpha^2 b_R}{(a_3^*)^2(1-bb^*)} + \frac{a_1(b_{W^*}b^* - b_W)}{a_3^*\,(1-bb^*)^2} + \frac{a_1\,\alpha^2 b_R(a - a^*b^*)}{a_3^*\,(1-bb^*)^2}.
\end{aligned}
$$

Entonces las ecuaciones de estructura pueden ser escritas como

$$
\begin{aligned}
d\theta^1 &= \pi^1\wedge\theta^1 - \theta^3\wedge\theta^5 - \theta^2\wedge\theta^6, \\
d\theta^2 &= \pi^2\wedge\theta^1 + \pi^3\wedge\theta^2 - \theta^4\wedge\theta^5 + I_5\,\theta^4\wedge\theta^3 + I_7\,\theta^3\wedge\theta^6, \\
d\theta^3 &= \pi^{*2}\wedge\theta^1 + \pi^{*3}\wedge\theta^3 - \theta^4\wedge\theta^6 + I_5^*\theta^4\wedge\theta^2 + I_7^*\,\theta^2\wedge\theta^5, \\
d\theta^4 &= -\pi^1\wedge\theta^4 + \pi^3\wedge\theta^4 + \pi^{*3}\wedge\theta^4 + \pi^5\wedge\theta^1 + \pi^6\wedge\theta^2 + \pi^{*6}\wedge\theta^3, \\
d\theta^5 &= \pi^1\wedge\theta^5 - \pi^{*3}\wedge\theta^5 + \pi^8\wedge\theta^1 + I_5\,\theta^4\wedge\theta^6 + I_9\,\theta^3\wedge\theta^6, \\
d\theta^6 &= \pi^1\wedge\theta^6 - \pi^3\wedge\theta^6 + \pi^{*8}\wedge\theta^1 + I_5^*\,\theta^4\wedge\theta^5 + I_9^*\,\theta^2\wedge\theta^5.
\end{aligned}
\tag{4.115}
$$

El reemplazo a_6 y a_8 en la matriz g fija π^6 y π^8.

Computando el tercer lazo, luego de la absorción de la torsión, surgen las siguientes ecuaciones de estructura para las $d\theta^i$, $i = 1\ldots 4$ (las derivadas exteriores restantes han sido omitidas puesto que ellas no serán usadas para obtener la tetrada nula y el tensor torsión),

$$\begin{aligned}
d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 - \theta^3 \wedge \theta^5 - \theta^2 \wedge \theta^6, \\
d\theta^2 &= \pi^2 \wedge \theta^1 + \pi^3 \wedge \theta^2 - \theta^4 \wedge \theta^5 + I_5\, \theta^4 \wedge \theta^3 + I_7\, \theta^3 \wedge \theta^6, \\
d\theta^3 &= \pi^{*2} \wedge \theta^1 + \pi^{*3} \wedge \theta^3 - \theta^4 \wedge \theta^6 + I_5^* \theta^4 \wedge \theta^2 + I_7^*\, \theta^2 \wedge \theta^5, \qquad (4.116) \\
d\theta^4 &= -\pi^1 \wedge \theta^4 + \pi^2 \wedge \theta^2 + \pi^{*2} \wedge \theta^3 + \pi^3 \wedge \theta^4 + \pi^{*3} \wedge \theta^4 + \pi^5 \wedge \theta^1 \\
&\quad + I_{10}\, \theta^2 \wedge \theta^6 + I_{10}^*\, \theta^3 \wedge \theta^5 + I_{11}\, \theta^3 \wedge \theta^6 + I_{11}^*\, \theta^2 \wedge \theta^5,
\end{aligned}$$

donde

$$I_{10} = 2\left(\frac{a_5}{a_1} - \frac{a_2 a_2^*}{a_1^2} - \frac{a_3 a_3^*}{\alpha^2 a_1^2}\, c\right) + i\,\mathrm{Im}[I_{10}], \qquad (4.117)$$

$$I_{11} = \frac{a_3^* a_3^2}{a_1^2} \frac{(1 - bb^*)}{(1 + bb^*)} (b^2 \Delta^* - \Delta) - 2\mathcal{W} \frac{a_3^2}{a_1^2} \left(a_2^* - \frac{a_3^* b^* (a^* - ab)}{1 - (bb^*)^2} \right), \qquad (4.118)$$

con c una función real

$$\begin{aligned}
c &= -\frac{Da + D^* a^* + T_W + T_{W^*}^*}{4} - \frac{aa^*(1 + 6bb^* + b^2 b^{*2})}{2(1 + bb^*)^2} \\
&\quad + \frac{(1 + bb^*)(bS_Z^* + b^* S_Z)}{2(1 - bb^*)^2} + \frac{a(2ab - b^* S_{W^*}) + a^*(2a^* b^* - bS_W^*)}{2(1 + bb^*)} \\
&\quad + \alpha^4 \left[2b^* (a - a^* b^*) \mathcal{W} + 2b (a^* - ab) \mathcal{W}^*\right], \qquad (4.119)
\end{aligned}$$

y $\mathrm{Im}[I_{10}]$, la parte imaginaria de I_{10},

$$\begin{aligned}
i\,\mathrm{Im}[I_{10}] &= \frac{a_3 a_3^* \alpha^2}{a_1^2} \left[2b^* (a - a^* b^*) \mathcal{W} - 2b (a^* - ab) \mathcal{W}^* \right. \qquad (4.120) \\
&\quad \left. + (1 - bb^*)^2 (\Gamma - \Gamma^*) - 2\left(1 - (bb^*)^2\right) (b^* \Delta - b\Delta^*)\right], \qquad (4.121)
\end{aligned}$$

en donde Δ y Γ son funciones explícitas de $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}^*$ y sus derivadas, a saber

$$\begin{aligned}
\Delta &= -\alpha^2 b \mathcal{W} \mathcal{W}^* + 2(1 + bb^*)^{-1} \left\{\rho(1 - bb^*) + \nu[a^* b^* + a(1 - bb^* - b^2 b^{*2})] \right. \\
&\quad \left. + b^2 \rho^* (1 - bb^*) + b^2 \nu^* [ab + a^*(1 - bb^* - b^2 b^{*2})]\right\} \\
\Gamma &= -b^* \left[4\rho + 2\nu(2abb^* + a^* b^* + 3a)\right],
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{\alpha^2}{2(1 - bb^*)} \left\{b^* D\mathcal{W} + D^* \mathcal{W} + \mathcal{W}(b^{*2} S_{W^*} - 2b^* S_W - 2bS_W^* + S_{W^*}^*)\right\}, \\
\nu &= \frac{\mathcal{W}}{1 - (bb^*)^2}.
\end{aligned}$$

De (4.117) y teniendo en cuenta que a_5 debe ser un parámetro real, podemos resolver para a_5 demandando que la anulación de la parte real de I_{10}, i.e., haciendo $\mathrm{Re}\,[I_{10}] = 0$. Encontramos entonces, que

$$a_5 = \frac{1}{a_1} \left(a_2 a_2^* + \frac{a_3 a_3^*}{\alpha^2}\, c \right). \qquad (4.122)$$

Observación 4.4: *Notar que con esta elección de a_5, tenemos que tanto I_{10} como I_{11} dependen solamente de $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}^*$ y sus derivadas.*

Observación 4.5: *Luego del tercer lazo, hemos logrado fijar algunos parámetros, pero otros aun se mantienen libres. Los parámetros libres son $a_1, a_2, a_2^*, a_3, a_3^*$, y los fijos:*

$$
\begin{aligned}
a_4 &= b a_3, \\
a_5 &= \frac{1}{a_1}\left(a_2 a_2^* + \frac{a_3 a_3^*}{\alpha^2}\, c\right), \\
a_6 &= \frac{a a_3 a_3^* + \alpha^2\left(a_3 a_2 + b^* a_3^* a_2\right)}{\alpha^2 a_1}, \\
a_7 &= \frac{a_3 a_3^*}{\alpha^2 a_1}, \\
a_8 &= \frac{a_1 a_2^*\, \alpha^2 b_R}{(a_3^*)^2(1-bb^*)} + \frac{a_1(b_{W^*} b^* - b_W)}{a_3^*\,(1-bb^*)^2} + \frac{a_1\, \alpha^2 b_R (a - a^* b^*)}{a_3^*\,(1-bb^*)^2} \\
a_9 &= \frac{-b a_1}{a_3^*(1-bb^*)}, \\
a_{10} &= \frac{a_1}{a_3^*(1-bb^*)}.
\end{aligned}
\tag{4.123}
$$

Podríamos continuar aplicando el Método de Equivalencia de Cartan, prolongando y estudiando las diferentes ramas, pero para nuestros propósitos, esto no será necesario.

Observación 4.6: *Es importante enfatizar, que con el método de Cartan, hemos demostrado que $\mathcal{W}$ es un invariante relativo bajo transformaciones puntuales (un subconjunto de las transformaciones de contacto). Se sigue también de nuestra construcción, que $\mathcal{W}$ es un invariante relativo ante transformaciones de contacto puesto que la prueba es idéntica hasta el lazo presentado en este capítulo.(Para una prueba diferente ver [10]).*

Notar que a_1 es un parámetro real, mientras que a_2 y a_3 son complejos. Su significado geométrico, puede ser aclarado si ellos son re-escritos como

$$a_1 = \mu, \;\; a_2 = \Omega\, \gamma\, e^{i\psi}, \;\; a_3 = \Omega\, \alpha\, e^{i\psi}.$$

con parámetros reales μ, Ω y ψ y uno complejo, γ.

§5. Co-marcos nulos

Siguiendo a la última sección, escribiremos

$$a_1 = \mu, \quad a_2 = \Omega\,\gamma\,e^{i\psi}, \quad a_3 = \Omega\,\alpha\,e^{i\psi}, \quad a_4 = \Omega\,\alpha\,e^{i\psi} b,$$

$$a_5 = \frac{\Omega^2}{\mu}\left(\gamma\gamma^* + c\right), \quad a_6 = \frac{\Omega^2}{\mu}\left(\alpha\gamma + \alpha b^*\gamma + a\right), \quad a_7 = \frac{\Omega^2}{\mu}.$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \theta_c^1 &= \omega^1, && (4.124)\\ \theta_c^2 &= \alpha(\omega^2 + b\omega^3), && (4.125)\\ \theta_c^3 &= \alpha(\omega^3 + b^*\omega^2), \\ \theta_c^4 &= \omega^4 + a\omega^2 + a^*\omega^3 + c\,\omega^1. && (4.126) \end{aligned}$$

podemos escribir las formas θ^i de una manera similar a lo hecho en 3-dim,

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \mu\theta_c^1, && (4.127)\\ \theta^2 &= \Omega e^{i\psi}\left(\theta_c^2 + \gamma\theta_c^1\right), && (4.128)\\ \theta^3 &= \Omega e^{-i\psi}\left(\theta_c^3 + \gamma^*\theta_c^1\right), && (4.129)\\ \theta^4 &= \frac{\Omega^2}{\mu}\left(\theta_c^4 + \gamma\theta_c^3 + \gamma^*\theta_c^2 + \gamma\gamma^*\theta_c^1\right). && (4.130) \end{aligned}$$

Nosotros definimos la forma cuadrática sobre $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,

$$h(\mathbf{x}) = 2\theta^{(1} \otimes \theta^{4)} - 2\theta^{(2} \otimes \theta^{3)} = \eta_{ij}\theta^i \otimes \theta^j, \qquad (4.131)$$

con

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.132)$$

Esta forma cuadrática, induce una familia bi-paramétrica de métricas conformes Lorentzianas en el espacio solución $\mathfrak{M}$. Las formas θ^i dan origen a una tretada nula, y los parámetros Ω, μ, ψ y γ adquieren significado geométrico:

- μ juega el rol de un boost en la dirección del vector nulo e_1 dual a θ^1.

- γ ay γ^* parametrizan una rotación nula alrededor de e_1.

- $e^{i\psi}$ es una rotación tipo espacial alrededor de un eje fijo en la esfera celeste.

- Ω es un factor conforme aplicado a la tetrada.

Observación 4.7: *Usando la definición de la forma cuadrática junto a las derivadas exteriores de los θ^i, es directo demostrar que*

$$\pounds_{e_s} h \propto h + F[\mathcal{W}, \mathcal{W}^*], \quad \pounds_{e_s^*} h \propto h + F^*[\mathcal{W}, \mathcal{W}^*], \tag{4.133}$$

donde el tensor F es una funcional de $\mathcal{W}$ y sus derivadas, que se anula cuando $\mathcal{W} = 0$. Entonces, si $\mathcal{W} = \mathcal{W}^* = 0$, G se reduce al grupo de Lorentz conforme $CO(3,1)$, con s y s^* parámetros de rotación. Todas las métricas en la familia, son conformes entre sí.

De forma equivalente al problema 3-dimensional, podemos introducir una conexión con torsión asociada, satisfaciendo los requerimientos I, II y III. Resulta directo, demostrar que tal torsión, tiene la forma

$$\begin{aligned} T^1 &= 0, \\ T^2 &= I_7\, \theta^3 \wedge \theta^6, \\ T^3 &= I_7^*\, \theta^2 \wedge \theta^5, \\ T^4 &= I_{10}\, \theta^2 \wedge \theta^6 + I_{10}^*\, \theta^3 \wedge \theta^5 + I_{11}\, \theta^3 \wedge \theta^6 + I_{11}^*\, \theta^2 \wedge \theta^5. \end{aligned} \tag{4.134}$$

Observación 4.8: *Se sigue de las ecuaciones precedentes, que la anulación de $\mathcal{W}$, el invariante de Wünschmann generalizado, nos da una conexión libre de torsión. Es más, usando la observación 4.7, recuperamos NSF.*

Notar, que como en el caso 3-dim, la parte antisimétrica de la conexión es completamente determinada de (4.134). También podríamos, en principio, determinar la parte de Weyl de la conexión siguiendo un procedimiento similar al utilizado en el caso 3-dim. Asociado con los cinco a_i indeterminados, tendremos los correspondientes π_i. Las siete 2-formas $(d\pi_i, d\theta_5, d\theta_6)$ pueden ser usadas para construir las siete componentes de la curvatura $(\Omega_{[ij]}, dA)$. En tal caso, la restricción algebraica sobre las componentes de la curvatura, proviene de los invariantes contenidos en $(d\theta_5, d\theta_6)$ de una manera equivalente a la Ec.(4.88). Asumiendo que este programa puede ser llevado a cabo, deberíamos entonces tener el resultado de que una conexión métrica normal en 4-dim se halla en correspondencia uno a uno con pares de EDPs de la forma (4.103) que son equivalentes bajo transformaciones puntuales.

Notar también que si consideramos el problema de transformaciones de contacto deberíamos finalizar con un grupo de estructura de mayor dimensión, que incluye a las traslaciones especiales. En este último caso, la parte espacial de la forma de Weyl quedará completamente indeterminada.

§6. Conclusiones

En este capítulo hemos usado el potente método desarrollado por Cartan para estudiar el problema de equivalencia de EDOs de tercer orden, y de pares de EDPs bajo transformaciones puntuales. A partir de primeros principios, hemos obtenido las tetradas nulas, le métrica conforme y la conexión métrica normal asociada con estas ecuaciones. Estos resultados complementan y dan una más clara comprensión sobre el origen de la geometría conforme subyacente en estas ecuaciones diferenciales.

En particular, se sigue de esta construcción que toda geometría conforme de un espacio-tiempo en tres y cuatro dimensiones, es contenida en una subclase de ecuaciones diferenciales definidas por la anulación de un invariante relativo conocido como invariante de Wünschmann. En este caso particular, las tetradas asociadas a las dos EDPs son relacionadas por una transformación conforme y de aquí, esta estructura conforme es única.

Resulta interesante y sorprendente al mismo tiempo, que la Relatividad General, o más precisamente la Gravedad Conforme, están contenidas en una subclase especial de ecuaciones diferenciales, i.e., aquellas con invariante de Wünschmann nulo. Notar, que desde este punto de vista, el espacio-tiempo emerge como el espacio solución de las ecuaciones diferenciales. Claramente, esta es una prescripción no estándar de la Relatividad General.

Uno podría preguntarse cual es el significado físico de estas ecuaciones diferenciales de partida sobre un espacio fiducial. Al menos en NSF nosotros sabemos la respuesta. La intersección de un cono de luz futuro de un punto en un espacio asintóticamente plano con la frontera nula, es llamado el corte de luz en la infinidad nula. Puede ser demostrado, que este corte satisface las ecuaciones diferenciales presentadas aquí y que los puntos del espacio fiducial, son los puntos de la frontera nula[9]. Usando estos resultados, podemos fácilmente mostrar que soluciones de las ecuaciónes del corte del cono de luz definida salvo transformaciones de punto o de contacto, nos llevan a una única estructura conforme sobre el espacio-tiempo.

Finalmente, debería ser muy interesante investigar todas las ramas del problema de equivalencia asociado a estas ecuaciones. De esta manera, podríamos encontrar todas las simetrías de estas EDOs y EDPs, y tendríamos a nuestra disposición una potente técnica para generar nuevas soluciones a estas ecuaciones, de soluciones ya conocidas.

Capítulo 5

Geometrías 2-dim a partir de EDOs de segundo orden

§1. Introducción

Ya hemos visto, como se oculta la geometría conforme 3-dimensional, dentro de una ecuación diferencial de tercer orden, y la geometría 4-dimensional dentro de un par de EDPs. A simple vista, uno podría pensar que estos son casos excepcionales, y que es difícil encontrar geometrías métricas en diferentes dimensiones obtenidas de otras ecuaciones diferenciales. Sin embargo, en un par de trabajos recientes, García-Godínez, Newman y Silva-Ortigoza (GNS), presentaron las geometrías (pseudo)-riemannianas que subyacen ocultas en cierta clase de ecuaciones diferenciales (aquellas que satisfacen una condición tipo Wünschmann, $I_{GNS} = 0$). En el primero de estos trabajos [30], ellos estudiaron como obtener todas las métricas Riemannianas y Lorentzianas a partir de EDOs de segundo orden. Y en [31], ellos extendieron su trabajo previo y mostraron como se pueden obtener todas las métricas 3-dimensionales a partir de cierta clase de tres EDPs de segundo orden y también de una clase de EDOs de tercer orden. De ahora en adelante, diremos que estas ecuaciones se encuentran el la clase GNS.

Una característica especial de estas EDOs y EDPs, es que ellas se encuentran en dualidad con la ecuación de Hamilton-Jacobi. Por ejemplo, si tenemos una EDO de segundo orden en la clase GNS,

$$u'' = \Lambda(u, u', s), \tag{5.1}$$

y si conocemos una solución $u = Z(x^a, s)$, con $x^a = (x^1, x^2)$ constantes de integración, entonces, esta solución automáticamente satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi 2-dimensional:

$$g^{ab}\nabla_a Z \nabla_b Z = 1, \tag{5.2}$$

donde ∇_a significa una diferenciación con respecto a x^a, y g^{ab}, es una métrica (pseudo)-riemanniana construida a partir de Λ y sus derivadas.

Todos estos problemas comparten características similares al problema de la formulación de Superficies Nulas de la Relatividad General en tres y cuatro dimensiones([9, 23]). Como ya hemos visto en capítulos anteriores, en NSF, a partir de cierta clase de ecuaciones diferenciales, conocida como la clase de Wünschmann, uno puede construir todas las métricas Lorentzianas conformes 3 y 4-dimensionales.

Estas ecuaciones, también están en dualidad con otra ecuación, a saber, la ecuación de la Eikonal,

$$g^{ab}\nabla_a Z \nabla_b Z = 0. \tag{5.3}$$

y las superficies de nivel de la solución $u = Z(x^a, s)$ en el caso 3-dim, o $u = Z(x^a, s, s^*)$ en 4-dim, son superficies nulas de las respectivas métricas que ellas generan.

En NSF, la condición de Wünschmann puede ser obtenida de varias maneras [9, 15, 32, 22]. Dos de estas, fueron usadas por GNS para obtener una condición tipo Wünschmann para las ecuaciones diferenciales en dualidad con la ecuación de Hamilton-Jacobi. Un tercer método es el que fue presentado en el capítulo 3 de esta tesis, el método de conexión libre de torsión, y del cual uno puede obtener no solo la clase de Wünschmann y sus métricas respectivas, sino también estructuras geométricas extras, en particular todas las conexiones conformes normales de Cartan [11, 22]. En este capítulo, mostraremos que dicho método puede también ser aplicado con éxito al problema de métricas (pseudo)-riemannianas discutidas por GNS. En particular, mostraremos que la condición de conexión libre de torsión, restringe la clase de EDOs de segundo orden a aquellas que pertenecen a la clase GNS y tal que no solo se obtienen naturalmente todas las métricas 2-dimensionales Riemannianas y Lorentzianas sino también sus respectivas conexiones de Cartan.

En la sección 2 brevemente presentamos la geometría de estas EDOs de segundo orden. En la sección 3, mostraremos como se puede obtener la clase GNS a partir de la condición de torsión nula, y construimos las conexiones de Cartan asociadas.

§2. la EDO de segundo orden

Sea una EDO de segundo orden

$$u'' = \Lambda(u, u', s) \tag{5.4}$$

donde $s \in \mathbb{R}$ es la variable independiente, y las "primas" denotan derivadas de la variable dependiente u con respecto a s.

Sobre el espacio jet J^1 con coordenadas locales (s, u, u') consideremos el sistema Pfaffiano $\mathcal{P}$

$$\omega^1 = du - u'\,ds, \tag{5.5}$$
$$\omega^2 = du' - \Lambda\,ds. \tag{5.6}$$

Soluciones locales de (5.4) están en correspondencia uno a uno con curvas integrales $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow J^1$ de $\mathcal{P}$ satisfaciendo $\gamma^*\,ds \neq 0$. Estas curvas son generadas por el campo vectorial sobre J^1 dado por

$$e_s \equiv D = \frac{\partial}{\partial s} + u'\frac{\partial}{\partial u} + \Lambda\frac{\partial}{\partial u'}. \tag{5.7}$$

Nosotros, restringiremos el dominio de definición de Λ a una vecindad abierta U de J^1 donde Λ es C^∞ y el problema de Cauchy es bien planteado. Entonces, se sigue del teorema de Frobenius, que el espacio solución $\mathfrak{M}$ es una variedad 2-dimensional C^∞, y denotaremos a un dado sistema de coordenadas locales sobre este por $x^a = (x^1, x^2)$. Esto significa, que podemos construir un mapa $Z : \mathfrak{M}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u = Z(x^a, s)$, tal que para un dado $x_0^a \in \mathfrak{M}$ el mapa $u = Z(x_0^a, s)$ es una solución de (5.4).

Entonces, si sobre $\mathfrak{M} \times \mathbb{R}$ definimos un sistema pfaffiano $\mathcal{S}$ generado por

$$\beta^1 = Z_a\,dx^a,$$
$$\beta^2 = Z'_a\,dx^a,$$

(donde "primas" significan derivadas con respecto a s, y $Z_a = \partial_a Z$), se sigue que existe un difeomorfismo $\zeta : J^1 \to \mathfrak{M} \times \mathbb{R}$ que permite un pull-back del sistema pfaffiano $\mathcal{S}$ sobre el sistema $\mathcal{P}$, i.e.

$$\zeta^*\mathcal{S} = \mathcal{P}. \tag{5.8}$$

Nosotros, haremos uso de este difeomorfismo más tarde.

§3. Geometrías Riemannianas y Lorentzianas de EDOs

De ω^1, ω^2, (generadores el sistema pfaffiano $\mathcal{P}$), construyamos las siguientes 1-formas:

$$\theta^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\omega^1 + a\,\omega^2\right), \tag{5.9}$$
$$\theta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\omega^1 - a\,\omega^2\right), \tag{5.10}$$

donde $a = a(s, u, u')$ es una función no nula a ser determinada. Como próximo paso, construyamos una métrica degenerada sobre J^1,

$$h(u, u', s) = 2\theta^{(1} \otimes \theta^{2)} = \eta_{ij}\theta^i \otimes \theta^j, \tag{5.11}$$

donde

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notar que si $a^2 > 0$, entonces θ^1 y θ^2 se comportan como vectores nulos reales, y si $a^2 < 0$, ellos son vectores nulos complejos.

Sea ω^i_j una conexión tal que:

A. La conexión es antisimétrica

$$\omega_{ij} = \omega_{[ij]}, \tag{5.12}$$

donde $\omega_{ij} = \eta_{ik}\omega^k{}_j$.

B. Las 1-formas θ^1 y θ^2 satisfacen las primeras ecuaciones de estructura de Cartan libre de torsión,

$$T^i \equiv d\theta^i + \omega^i{}_j \wedge \theta^j = 0. \tag{5.13}$$

Ahora, establecemos y probamos el siguiente teorema:

Teorema 5.1: *La condición libre de torsión sobre la conexión antisimétrica:*

1. Unívocamente determina a la conexión, con la única componente no nula dada por

$$\omega_{[12]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\ln a)_u\theta^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\ln a)_u\theta^2 + \frac{1}{a}ds. \tag{5.14}$$

2. Unívocamente determina a la función a en términos de Λ:

$$a^2 = \frac{1}{\Lambda_u}. \tag{5.15}$$

3. Impone una condición tipo Wünschmann sobre Λ:

$$I_{GNS} = Da + a\Lambda_{u'} = 0. \tag{5.16}$$

Prueba: De (5.9) y (5.10) tenemos:

$$\begin{aligned}
d\theta^1 = &-\frac{1}{\sqrt{2}a}a_u\theta^1\wedge\theta^2 - \frac{1}{2a}\left(1+Da+a^2\Lambda_u+a\Lambda_{u'}\right)\theta^1\wedge ds\\
&-\frac{1}{2a}\left(-1-Da+a^2\Lambda_u-a\Lambda_{u'}\right)\theta^2\wedge ds, \qquad (5.17)\\
d\theta^2 = &\frac{1}{\sqrt{2}a}a_u\theta^1\wedge\theta^2 + \frac{1}{2a}\left(-1+Da+a^2\Lambda_u+a\Lambda_{u'}\right)\theta^1\wedge ds\\
&+\frac{1}{2a}\left(1-Da+a^2\Lambda_u-a\Lambda_{u'}\right)\theta^2\wedge ds. \qquad (5.18)
\end{aligned}$$

La condición de torsión nula (5.13) se escribe

$$d\theta^1 - \omega_{[12]}\wedge\theta^1 = 0, \qquad (5.19)$$

$$d\theta^2 + \omega_{[12]}\wedge\theta^2 = 0, \qquad (5.20)$$

y, resolviendo estas ecuaciones obtenemos:

$$\omega_{[12]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\ln a)_u\theta^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\ln a)_u\theta^2 + \frac{1}{2a}\left(1+Da+a^2\Lambda_u+a\Lambda_{u'}\right)ds, \qquad (5.21)$$

junto a las tres condiciones:

$$\begin{aligned}
\left(-1-Da+a^2\Lambda_u-a\Lambda_{u'}\right) &= 0, \qquad (5.22)\\
\left(-1+Da+a^2\Lambda_u+a\Lambda_{u'}\right) &= 0, \qquad (5.23)\\
\left(Da+a\Lambda_{u'}\right) &= 0. \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

Finalmente, de (5.21), y las condiciones (5.22), (5.23), (5.24) obtenemos los resultados establecidos en el teorema. Q.E.D.

Notar ahora, que con la ayuda del mapa $\zeta : J^1 \to \mathfrak{M}\times\mathbb{R}$ discutido en la sección 2, tenemos una familia uni-paramétrica de métricas (pseudo)-riemannianas sobre el espacio solución $\mathfrak{M}$ (riemannianas si resultase $\Lambda_u < 0$, y Lorentzianas si $\Lambda_u > 0$), i.e., tenemos la siguiente familia de métricas:

$$g(x^a,s) = (\zeta^{-1})^*\,h, \qquad (5.25)$$

o escritas en coordenadas:

$$g(x^a,s) = \beta^1\otimes\beta^1 - \frac{1}{\Lambda_u}\,\beta^2\otimes\beta^2 = \left[Z_aZ_b - \frac{1}{\Lambda_u}\,Z'_aZ'_b\right]dx^adx^b. \qquad (5.26)$$

Es más; todas ellas son equivalentes, debido a que es fácil probar que h satisface:

$$\pounds_{e_s}h = 0. \qquad (5.27)$$

Finalmente, coleccionemos las 1-formas θ^i y ω^i_j dentro de una 1-forma valuada matricialmente

$$\omega_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \theta^1 & -\omega_{[12]} & 0 \\ \theta^2 & 0 & \omega_{[12]} \end{pmatrix},$$

y estudiemos dos casos posibles:

a). $\Lambda_u > 0$: En tal caso, tenemos una métrica Lorentziana, y ω_c toma sus valores en el álgebra de Lie de $\mathrm{SO}(1,1) \rtimes \mathrm{R}^2$.

La 1-forma matriz-valuada puede ser considerada como una $\mathrm{SO}(1,1) \rtimes \mathrm{R}^2$ conexión de Cartan [33] sobre el fibrado principal $\mathrm{SO}(1,1) \to \mathrm{P} \to \mathfrak{M}$ con curvatura asociada $\Omega_c = d\omega_c + \omega_c \wedge \omega_c$ dada por

$$\Omega_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T^1 & \Omega^1_1 & \Omega^1_2 \\ T^2 & \Omega^2_1 & \Omega^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

donde $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$ es la curvatura estándar, y

$$R = -\frac{1}{a}\, a_{uu} \theta^1 \wedge \theta^2. \tag{5.29}$$

b). $\Lambda_u < 0$: En este caso, tenemos una métrica riemanniana, y ω_c toma sus valores en el álgebra de Lie de $\mathrm{SO}(2) \rtimes \mathrm{R}^2$.

Esta construcción da una $\mathrm{SO}(2) \rtimes \mathrm{R}^2$ conexión de Cartan sobre el fibrado principal $\mathrm{SO}(2) \to \mathrm{P} \to \mathfrak{M}$ con curvatura asociada $\Omega_c = d\omega_c + \omega_c \wedge \omega_c$ dada por una fórmula similar a (5.28).

§4. Conclusiones

Hemos visto, que como sucede en NSF, se pueden obtener todas las métricas 2-dimensionales tanto Lorentzianas como Riemannianas, a partir de la condición geométrica de conexión libre de torsión. Es más, al igual que en [22] se pueden construir las respectivas conexiones de Cartan.

Cabe destacar, que el estudio de geometrías pseudo-riemanianas provenientes de ecuaciones en dualidad con la de Hamilton-Jacobi, fue generalizado recientemente no solo al caso 3-dim [31], sino también a 4-dim en [35]. Como veremos en el próximo capítulo, esto puede inclusive ser generalizado a cualquier variedad de dimensión arbitraria.

Sería interesante poder estudiar todos estos problemas utilizando el método de Cartan [25, 37]; en tal caso, las transformaciones permisibles para estudiar equivalencia de ecuaciones, serían las transformaciones canónicas. Con este método algorítmico en mano, el grupo de simetría subyacente y los invariantes relacionados, pueden ser obtenidos sin mas suposiciones que decir cuales transformaciones son permisibles en el estudio de equivalencia.

Capítulo 6

Geometrías N-dim y Relatividad General a partir de EDPs

§1. Introducción

Luego de haber analizado los casos 2-dim y 3-dim, Newman, Silva-Ortigoza y Montiel-Piña, presentaron una extensión del trabajo de ecuaciones en dualidad a H-J en bajas dimensiones, al caso de 4-dim [35], resultando un nuevo enfoque a la Relatividad General 4-dimensional, el cual comparte muchas características similares a NSF, pero en donde ahora, en vez de usar una integral completa a la ecuación de la Eikonal, se utiliza una integral completa a la ecuación de Hamilton-Jacobi. El objetivo de este capítulo es generalizar dichos resultados al caso de espacios N-dimensionales.

En la sección 2, comenzamos con una variedad n-dimensional, $\mathfrak{M}$, sin ninguna estructura extra, y entonces investigamos familias $(n-1)$-paramétricas de superficies $\mathfrak{Z}$ dadas por

$$u = \text{constante} = Z(x^a, s^i). \tag{6.1}$$

Las x^a son coordenadas locales sobre $\mathfrak{M}$ y los s^i parametrizan las familias y pueden tomar valores sobre una vecindad abierta de una variedad $\mathcal{N}$ de dimensión $(n-1)$. Más específicamente, nosotros queremos saber cuando tales superficies, definen una métrica n-dimensional, $g_{ab}(x^a)$, tal que

$$g^{ab}\nabla_a Z(x^a, s^i)\nabla_b Z(x^a, s^i) = 1. \tag{6.2}$$

Aquí, hemos tomado la masa en la ecuación de H-J a ser igual a 1, o alternativamente, se ha absorbido en la definición de g^{ab} (como un factor).
Tomando derivadas con respecto a (s^i) de la Ec. (6.1) y eliminando las x^a, demostraremos que $u = Z(x^a, s^i)$ debe satisfacer un sistema de $\frac{n(n-1)}{2}$ EDPs de

segundo orden

$$\partial_{s^i s^j} Z = \Lambda_{ij}(u, w^i, s^i) = \Lambda_{ij}(u, \partial_{s^i} Z, s^i), \tag{6.3}$$

donde los Λ_{ij}, son restringidos a satisfacer ciertas condiciones de metricidad o condiciones tipo 'Wünschmann'.

Aquí ∂_{s^i}, denota la derivada parcial con respecto a los parámetros s^i. Observar que en las soluciones a las Ecs. (6.3) $u = Z(x^a, s^i)$, las x^a son n constantes de integración para las Ecs. (6.3), mientras que los 's^i' son $n-1$ constantes de integración para la Ec. (6.2). Notar que $u = Z(x^a, s^i)$ es una integral completa a la ecuación de Hamilton-Jacobi (6.2).

En esta sección, también observaremos que la métrica n-dimensional $g_{ab}(x^a)$ asociada al sistema de ecuaciones diferenciales parciales, (6.3), es invariante ante un subconjunto de transformaciones de contacto de las ecuaciones diferenciales.

En la sección 3, revisamos el caso 4-D debido a su potencial aplicación física, y como ejemplo, veremos como obtener el sitema de EDPs, y la familia de superficies asociadas a la solución de Schwarzschild.

En la sección 4, presentaremos una nueva formulación de la Relatividad General n-dimensional. Para este propósito, sustituiremos la métrica n-dimensional ya obtenida en la sección 2, dentro de las ecuaciones de Einstein. De nuestros resultados, concluiremos que las ecuaciones de Einstein, en n dimensiones pueden ser reformuladas como ecuaciones para familias de superficies $(n-1)$-dimensionales dadas por las superficies de nivel de $u = Z(x^a, s^i)$.

Como en cuatro dimensiones, este nuevo punto de vista, puede ser dado en dos versiones. En la primer versión, las variables son las $\frac{n(n-1)}{2}$ funciones, Λ_{ij}, de las $2n-1$ variables (u, w^i, s^i), i.e., el lado derecho de las Ecs. (6.3). Estas funciones deben satisfacer cuatro conjuntos de ecuaciones; las condiciones de integrabilidad, las condiciones de signatura Lorentziana, las condiciones tipo Wünschmann, y una condición extra obtenida de las ecuaciones de Einstein. La métrica, sobre una variedad n-dimensional, puede ser escrita directamente en términos de estas $\frac{n(n-1)}{2}$ funciones y sus derivadas. *No hay necesidad de utilizar el conjunto de Ecs. (6.3).* En la segunda versión, uno usa el mismo conjunto de las Λ_{ij} en el lado derecho de las Ecs. (6.3) y resuelve para los $Z(x^a, s^i)$. La métrica, es entonces escrita en términos de las $Z(x^a, s^i)$ y sus derivadas.

La ventaja de la primera versión es que uno no necesita resolver las Ecs. (6.3), pero uno tiene que extraer (algebraicamente) la n-variedad de las $(u, \partial_i u)$, mientras que en la segunda versión, la n-variedad es explícitamente dada por las cuatro constantes de integración, x^a.

Es importante destacar, que ninguna proclamación es hecha, de que este enfoque a las ecuaciones de Einstein en n-dimensiones, brinde obvias ventajas sobre el enfoque métrico usual. Éste, sin embargo, da cierta comprensión matemática sobre la geometría diferencial asociada con Relatividad General en n dimensiones.

§2. Métrica N-dim y las condiciones tipo Wünschmann

Comencemos con una variedad n-dimensional $\mathfrak{M}$ (con coordenadas locales $x^a = (x^0, ..., x^{n-1})$) y asumamos que son dadas una familia $(n-1)$-parámetrica de funciones $u = Z(x^a, s^i)$. Como ya hemos dicho, los parámetros s^i pueden tomar sus valores sobre una vecindad abierta de una variedad $\mathcal{N}$ de dimensión $(n-1)$. Asumamos además, que para valores fijos de los parámetros s^i, las superficies de nivel

$$u = \text{constante} = Z(x^a, s^i), \tag{6.4}$$

folian localmente a la variedad $\mathfrak{M}$ y que $u = Z(x^a, s^i)$ satisface la ecuación H-J

$$g^{ab}(x^a)\nabla_a Z(x^a, s^i)\nabla_b Z(x^a, s^i) = 1, \tag{6.5}$$

para alguna métrica desconocida $g_{ab}(x^a)$.

La idea básica es ahora, resolver la Ec. (6.5) para las componentes de la métrica en términos de $\nabla_a Z(x^a, s^i)$. Con tal fin, consideremos un número de derivadas en los parámetros de la condición (6.5), y entonces manipulemos tales derivadas, obteniendo simultáneamente la métrica n-dimensional, el sistema de ecuaciones diferenciales definiendo las superficies y las condiciones a las cuales estas EDPs deben obedecer. Estas últimas serán referidas como condiciones de metricidad o condiciones tipo Wünschmann.

Observación 6.1: *La notación será como sigue: habrá dos tipos de diferenciación, una con respecto a las coordenadas locales x^a de la variedad $\mathfrak{M}$, denotada por ∇_a o "coma a," la otra, con respecto a los parámetros s^i denotada por $\partial_{s^i} \equiv \partial_i$.*

De la existencia asumida de $u = Z(x^a, s^i)$, definimos n escalares parametrizados θ^A de la siguiente forma

$$\theta^A = (Z, w^i) \equiv (Z, \partial_i Z). \tag{6.6}$$

Observación 6.2: *Para cada valor de s^i, Ecs. (6.6) pueden ser pensadas como transformaciones de coordenadas entre las x^a y $(u,\, w^i)$.*

También definiremos los siguientes $\frac{n(n-1)}{2}$ importantes escalares

$$\tilde{\Lambda}_{ij} = \partial_{ij} Z(x^a, s^i). \tag{6.7}$$

En lo que sigue, asumiremos que las Ecs. (6.6) pueden ser invertidas, i.e., resueltas para x^a;

$$x^a = X^a(u, w^i, s^i).$$

Las Ecs. (6.7) puede entonces, ser re-escrita como

$$\partial_{ij} Z = \Lambda_{ij}(u, w^i, s^i). \tag{6.8}$$

Esto significa que la familia de $(n-1)$-parámetros de superficies de nivel, Ec. (6.4), puede ser obtenida como soluciones del sistema de $\frac{n(n-1)}{2}$ EDPs de segundo orden (6.8). Notar que Λ_{ij} satisface las condiciones de integrabilidad

$$D_{s^k} \Lambda_{ij} = D_{s^i} \Lambda_{kj} = D_{s^j} \Lambda_{ki}, \tag{6.9}$$

donde

Definición 6.1: *La derivada total s^i de una función $F = F(u, w^i, s^i)$ es definida por*

$$D_{s^k} F = F_{s^k} + F_{w^l} \Lambda_{lk}. \tag{6.10}$$

El espacio solución de las Ecs. (6.8) es n-dimensional. Esto puede ser visto de la siguiente forma. El sistema de EDPs (6.8) es equivalente a la anulación de las n 1-formas, $\omega^A = (\omega^0, \omega^i)$

$$\begin{aligned} \omega^0 &\equiv du - w^l ds^l, \\ \omega^i &\equiv dw^i - \Lambda_{im} ds^m. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Un simple cálculo, usando las condiciones de integrabilidad de Λ_{ij}, nos lleva a $d\omega^A = 0$ (módulo ω^A) de lo cual, via el teorema de Frobenius, nos hace concluir que el espacio solución de las Ecs. (6.8) es n-dimensional.

De los n escalares, θ^A, tenemos su base gradiente asociada $\theta^A{}_{,a}$ dada por

$$\theta^A{}_{,a} = \nabla_a \theta^A = \{Z_{,a}, w^i_{,a}\}, \tag{6.12}$$

y su base dual vectorial $\theta_A{}^a$, tal que

$$\theta_A{}^a \theta^B{}_{,a} = \delta_A{}^B, \quad \theta_A{}^a \theta^A{}_{,b} = \delta_b{}^a. \tag{6.13}$$

Es más fácil para llevar a cabo nuestros objetivos, trabajar con las componentes de le métrica n-dimensional en la base gradiente en vez de la base coordenada original. Es más, es preferible utilizar las componentes contravariantes de la métrica en vez de las componentes covariantes; i.e., queremos determinar

$$g^{AB}(x^a, s^i) = g^{ab}(x^a)\theta^A{}_{,a}\theta^B_{,b}. \tag{6.14}$$

Las componentes de la métrica y las condiciones tipo Wünschmann son obtenidas por operar repetidamente con ∂_i sobre la Ec. (6.5), la cual, por definición es,

$$g^{00} = g^{ab} Z_{,a} Z_{,b} = 1. \tag{6.15}$$

Aplicando ∂_i a la Ec. (6.15) resulta $\partial_i g^{00} = 2g^{ab}\partial_i Z_{,a}\, Z_{,b} = 0$, i.e.,

$$g^{i0} = 0. \tag{6.16}$$

Un cómputo directo muestra que

$$\begin{aligned} \partial_{ji}(g^{00}/2) &= g^{ab}\partial_{ji}Z_{,a}\, Z_{,b} + g^{ab}\partial_i Z_{,a}\, \partial_j Z_{,b} \\ &= g^{ab}\Lambda_{ij,a} Z_{,b} + g^{ij} = 0. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Puesto que debido a la asumida independencia lineal de $(Z_{,a}\, , \partial_i Z_{,a}\,)$,

$$\Lambda_{ij,a} = \Lambda_u Z_{,a} + \Lambda_{ij,w^k}\partial_k Z_{,a}\,, \tag{6.18}$$

la Ec. (6.17), usando las Ecs. (6.15)-(6.18), es equivalente a

$$g^{ij} = -\Lambda_{ij,u}. \tag{6.19}$$

Por lo tanto, el resultado final es

$$(g^{AB}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_{ij,u} \end{pmatrix}. \tag{6.20}$$

Observación 6.3: *Nosotros requerimos que* $\det(g^{ij}) = \Delta$ *sea diferente de cero, con*

$$\Delta \equiv \det(-\Lambda_{ij,u}). \tag{6.21}$$

Finalmente, las condiciones de metricidad o tipo Wünschmann, son obtenidas de las derivadas terceras, i.e., de $\partial_{lji} g^{00} = 0$. Por un cálculo directo, obtenemos que

$$D_{s^k}\left[\Lambda_{mn,u}\right] = \Lambda_{ln,u}\Lambda_{km,w^l} + \Lambda_{lm,u}\Lambda_{kn,w^l}. \tag{6.22}$$

En n dimensiones, con $n \geq 2$, habrá $\frac{n(n^2-1)}{6}$ condiciones tipo Wünschmann. Por ejemplo, para $n = 2$ tendremos una EDO de segundo orden, (ver capítulo anterior) y una condición tipo Wünschmann, para $n = 3$ tenemos un sistema de tres EDPs de segundo orden y cuatro condiciones de Wünschmann y para $n = 4$ tenemos un sistema de seis EDPs de segundo orden, y diez condiciones de Wünschmann.

En resumen:

a) Si comenzamos con una integral completa, $u = Z(x^a, s^i)$ de la ecuación H-J, (6.5), entonces, ésta satisface un sistema de $\frac{n(n-1)}{2}$ EDPs de segundo orden (6.8), con Λ_{ij} satisfaciendo las Ecs. (6.9) y las condiciones tipo Wünschmann(6.22). En otras palabras, en el espacio solución de las Ecs. (6.8) existe una métrica naturalmente definida

$$g^{ab} = g^{AB}\theta^a_A\theta^b_B, \tag{6.23}$$

donde g^{AB} esta dada por la Ec. (6.20).

b) Si comenzamos con un sistema de $\frac{n(n-1)}{2}$ EDPs de segundo orden (6.8), donde los Λ_{ij} satisfacen las Ecs. (6.22) y las condiciones de integrabilidad, (6.9), entonces, en el espacio solución existe una métrica natural n-dimensional dada por la Ec. (6.20). Aun cuando podría parecer que las componentes de la métrica dependen de los parámetros s^i, las condiciones tipo Wünschmann garantizan que ellas realmente no lo hacen. Es más, las soluciones $u = Z(x^a, s^i)$ satisface la ecuación H-J

$$g^{ab}\nabla_a Z(x^a, s^i)\nabla_b Z(x^a, s^i) = 1,$$

con la métrica recién determinada, Ec. (6.23).

Observación 6.4: *De los resultados precedentes, concluimos que resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi n-dimensional, en un espacio tiempo de background n-dimensional, es equivalente a resolver un sistema de $\frac{n(n-1)}{2}$ EDPs de segundo orden.*

En trabajos previos sobre la ecuación de la Eikonal en tres y cuatro dimensiones, y como vimos en el capitulo precedente, se puede demostrar que la clase de métricas conformes asociadas a EDOs de tercer orden y pares de EDPs de segundo orden satisfaciendo las condiciones de Wünschmann, es preservada cuando las ecuaciones diferenciales son transformadas por una transformación de contacto. Para nuestro caso presente, existe un resultado análogo dado por el siguiente teorema:

Teorema 6.1: *Sean las Ecs. (6.8) un sistema de* $\frac{n(n-1)}{2}$ *EDPs de segundo orden, con* Λ_{ij} *satisfaciendo las condiciones (6.9) y (6.22), y sea*

$$\overline{\partial}_{ij}\overline{Z} = \overline{\Lambda}_{ij}(\overline{u}, \overline{w}^i, \overline{s}^i), \tag{6.24}$$

un sistema de EDPs de segundo orden $\frac{n(n-1)}{2}$ *localmente equivalente a las Ecs. (6.8) bajo un subconjunto de transformaciones de contacto generado por la función generatriz*

$$H(s, s^*, \gamma, u, \bar{s}, \bar{s}^*, \bar{\gamma}, \bar{u}) = \bar{u} \mp u - G(s^i, \overline{s}^j). \tag{6.25}$$

Entonces bajo este subconjunto de transformaciones de contacto, la métrica dada por las Ec. (6.23) es preservada.

La prueba de este teorema es exactamente la misma que la presentada en la Ref. [10] para un sistema de dos EDPs de segundo orden tal que sobre su espacio de soluciones existe una única métrica conforme 4-dimensional, g^{ab}, tal que $g^{ab}u_{,a}u_{,b} = 0$. La justificación de la forma de la función generatriz (6.25) puede ser establecida como en las Refs. [30, 31, 35].

Antes de dar por terminada a esta sección, notemos que para, $n = 2$ y $n = 3$, nuestros resultados generales se reducen a los reportados en Refs. [30, 31, 36].

§3. El caso 4-dimensional

Como un caso particular, veamos como se leen las ecuaciones en el caso 4-dim. Estas, fueron obtenidas por primera vez en [35]. Notar que en $n = 4$, tendremos $4 - 1 = 3$ parámetros, s^1, s^2 y s^3. Además nuestro sistema de EDPs estará conformado por $\frac{4(4-1)}{2} = 6$ ecuaciones de segundo orden.

Con el fin de utilizar la misma notación de [35], re-denominaremos a las distintas variables que aparecen el la teoría. Los parámetros s^i se etiquetarán:

$$s^1 = s, \quad s^2 = s^*, \quad s^3 = \gamma.$$

y con ellas tendremos a las w^i:

$$\begin{aligned} w^1 &= w = \partial_s Z, \\ w^2 &= w^* = \partial_{s^*} Z, \\ w^3 &= R = \partial_\gamma Z. \end{aligned}$$

Las funciones Λ_{ij} se denotarán:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{11} &= \Lambda, \\
\Lambda_{22} &= \Lambda^*, \\
\Lambda_{33} &= \mathcal{Y}, \\
\Lambda_{12} &= \Phi, \\
\Lambda_{13} &= \Psi, \\
\Lambda_{23} &= \Psi^*.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, nuestro sistema de EDPs (Ecs.(6.8)), se escribirá:

$$\partial_{ss}Z = \Lambda(u, w, w^*, R, s, s^*, \gamma), \tag{6.26}$$

$$\partial_{s^*s^*}Z = \Lambda^*(u, w, w^*, R, s, s^*, \gamma), \tag{6.27}$$

$$\partial_{\gamma\gamma}Z = \mathcal{Y}(u, w, w^*, R, s, s^*, \gamma), \tag{6.28}$$

$$\partial_{ss^*}Z = \Phi(u, w, w^*, R, s, s^*, \gamma), \tag{6.29}$$

$$\partial_{s\gamma}Z = \Psi(u, w, w^*, R, s, s^*, \gamma), \tag{6.30}$$

$$\partial_{s^*\gamma}Z = \Psi^*(u, w, w^*, R, s, s^*, \gamma). \tag{6.31}$$

Las condiciones tipo Wünschmann necesarias para la existencia de una métrica sobre el espacio solución surgen de las Ecs.(6.22):

$$\begin{aligned}
\Lambda_{us} + \Lambda_{uu}w + \Lambda_{uw}\Lambda + \Lambda_{uw^*}\Phi + \Lambda_{uR}\Psi &= 2[\Lambda_w\Lambda_u + \Lambda_{w^*}\Phi_u + \Lambda_R\Psi_u], \\
\Lambda_{us^*} + \Lambda_{uu}w^* + \Lambda_{uw}\Phi + \Lambda_{uw^*}\Lambda^* + \Lambda_{uR}\Psi^* &= 2[\Phi_w\Lambda_u + \Phi_{w^*}\Phi_u + \Phi_R\Psi_u], \\
\Lambda^*_{us} + \Lambda^*_{uu}w + \Lambda^*_{uw^*}\Phi + \Lambda^*_{uw}\Lambda + \Lambda^*_{uR}\Psi &= 2[\Phi_{w^*}\Lambda^*_u + \Phi_w\Lambda_u + \Phi_R\Psi^*_u], \\
\Lambda^*_{us^*} + \Lambda^*_{uu}w^* + \Lambda^*_{uw^*}\Lambda^* + \Lambda^*_{uw}\Phi + \Lambda^*_{uR}\Psi^* &= 2[\Lambda^*_{w^*}\Lambda^*_u + \Lambda^*_w\Phi_u + \Lambda^*_R\Psi^*_u], \\
\Lambda_{u\gamma} + \Lambda_{uu}R + \Lambda_{uw}\Psi + \Lambda_{uw^*}\Psi^* + \Lambda_{uR}\mathcal{Y} &= 2[\Psi_w\Psi_u + \Psi_{w^*}\Phi_u + \Psi_R\Psi_u], \\
\Lambda^*_{u\gamma} + \Lambda^*_{uu}R + \Lambda^*_{uw}\Psi + \Lambda^*_{uw^*}\Psi^* + \Lambda^*_{uR}\mathcal{Y} &= 2[\Psi^*_{w^*}\Lambda^*_u + \Psi^*_w\Phi_u + \Psi^*_R\Psi^*_u], \\
\mathcal{Y}_{us} + \mathcal{Y}_{uu}w + \mathcal{Y}_{uw}\Lambda + \mathcal{Y}_{uw^*}\Phi + \mathcal{Y}_{uR}\Psi &= 2[\Psi_w\Psi_u + \Psi_{w^*}\Psi^*_u + \Psi_R\mathcal{Y}_u], \\
\mathcal{Y}_{u\gamma} + \mathcal{Y}_{uu}R + \Lambda_{uw}\Psi + \mathcal{Y}_{uw^*}\Psi^* + \mathcal{Y}_{uR}\mathcal{Y} &= 2[\mathcal{Y}_w\Psi_u + \mathcal{Y}_{w^*}\Psi^*_u + \mathcal{Y}_R\Psi_u], \\
\mathcal{Y}_{us^*} + \mathcal{Y}_{uu}w^* + \mathcal{Y}_{uw}\Phi + \mathcal{Y}_{uw^*}\Lambda^* + \mathcal{Y}_{uR}\Psi^* &= 2[\Psi^*_{w^*}\Psi^*_u + \Psi^*_w\Psi_u + \Psi^*_R\mathcal{Y}_u], \\
D_s\Psi^*_u = \Psi_u\Lambda^*_w + \Psi^*_u\Lambda^*_{w^*} + \Upsilon_u\Lambda^*_R &+ \Phi_u\Psi_w + \Lambda^*_u\Psi_{w^*} + \Psi^*_u\Psi_R.
\end{aligned}$$

Luego, si nosotros comenzamos con un sistema de EDPs cuyas $\Lambda, \Lambda^*, \Psi, \Psi^*, \Phi$ y $\mathcal{Y}$ satisfacen las condiciones de metricidad, (y por supuesto, las condiciones de integrabilidad) sabemos que sobre el espacio solución existe una familia tri-paramétrica de méricas, todas difeomorfas entre si:

$$\begin{aligned}
g_{ab} &= u_{,a}u_{,b} + \frac{1}{\Delta}[(\Lambda^*_u\mathcal{Y}_u - (\Psi^*_u)^2)w_{,a}w_{,b} + (\Psi_u\Psi^*_u - \mathcal{Y}_u\Phi_u)(w_{,a}w^*_{,b} + w^*_{,a}w_{,b}) \\
&\quad + (\Lambda_u\mathcal{Y}_u - \Psi^2_u)w^*_{,a}w^*_{,b} + (\Phi_u\Psi^*_u - \Lambda^*_u\Psi_u)(w_{,a}R_{,b} + R_{,a}w_{,b}) \\
&\quad + (\Phi_u\Psi_u - \Lambda_u\Psi^*_u)(w^*_{,a}R_{,b} + R_{,a}w^*_{,b}) + (\Lambda_u\Lambda^*_u - \Phi^2_u)R_{,a}R_{,b}].
\end{aligned}$$

§3.1. Ejemplo: El espacio-tiempo de Schwarzschild

Como ejemplo, reproduciendo a [35], veamos como construir el sistema de EDPs asociados a una métrica de Schwarzschild. La ecuación de H-J para una partícula de masa m inmersa en un espacio-tiempo de Schwarzschild es:

$$\frac{1}{m^2}\left[\frac{u_t^2}{(1-\frac{r_g}{r})} - (1-\frac{r_g}{r})u_r^2 - \frac{u_\theta^2}{r^2} - \frac{u_\phi^2}{r^2 sen^2\theta}\right] = 1, \tag{6.32}$$

Una integral completa a esta ecuación, obtenida por el método estándar de separación de variables es:

$$\begin{aligned} u = Z(x^a,\alpha,\beta,\gamma) &= -\gamma t + \beta\phi + \int \sqrt{\alpha^2 - \beta^2\csc^2\theta}\,d\theta \\ &\quad + \int \sqrt{\frac{\gamma^2 r^3 - (m^2 r^2 + \alpha^2)(r-r_g)}{r(r-r_g)^2}}\,dr, \end{aligned} \tag{6.33}$$

con α, β y γ tres constantes de integración (interpretadas como la energía, el momento angular sobre el eje polar, y el módulo del momento angular total, respectivamente).

Nos proponemos obtener el sistema de EDPs dual a dicha ecuación de H-J. Con tal fin, hagamos el cambio de variables $\alpha = s + s^*$ y $\beta = -i(s - s^*)$. Entonces la integral completa, parametrizada ahora por s, s^* y γ se lee

$$\begin{aligned} u = Z(x^a,s,s^*,\gamma) &= -\gamma t - i(s-s^*)\phi + \int \sqrt{(s+s^*)^2 + (s-s^*)^2\csc^2\theta}\,d\theta \\ &\quad + \int \sqrt{\frac{\gamma^2 r^3 - [m^2 r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)}{r(r-r_g)^2}}\,dr, \end{aligned} \tag{6.34}$$

de la cual podemos deducir,

$$\begin{aligned} w &= \int \frac{-(s+s^*)dr}{\sqrt{r}\sqrt{\gamma^2 r^3 - [m^2 r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)}} \\ &\quad + \int \frac{[(s+s^*) + (s-s^*)\csc^2\theta]d\theta}{\sqrt{(s+s^*)^2 + (s-s^*)^2\csc^2\theta}} - i\phi \end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned} w^* &= \int \frac{-(s+s^*)dr}{\sqrt{r}\sqrt{\gamma^2 r^3 - [m^2 r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)}} \\ &\quad + \int \frac{[(s+s^*) - (s-s^*)\csc^2\theta]d\theta}{\sqrt{(s+s^*)^2 + (s-s^*)^2\csc^2\theta}} + i\phi \end{aligned} \tag{6.36}$$

$$R = -t + \int \frac{r^{3/2}\gamma dr}{(r-r_g)\sqrt{\gamma^2 r^3 - [m^2 r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)}} \tag{6.37}$$

Es a partir de estas ecuaciones entonces, que resolviendo para r, t, θ, ϕ en función de u, w, w^*, R uno obtiene el sistema de EDPs. Más concretamente, primero uno calcula

$$\begin{aligned}
\partial_{ss}Z &= A(r,s,s^*,\gamma) + s^{*2}B(\theta,s,s^*), \\
\partial_{s^*s^*}Z &= A(r,s,s^*,\gamma) + s^{2}B(\theta,s,s^*), \\
\partial_{\gamma\gamma}Z &= C(r,s,s^*,\gamma), \\
\partial_{ss^*}Z &= A(r,s,s^*,\gamma) - ss^*B(\theta,s,s^*), \\
\partial_{s\gamma}Z &= D(r,s,s^*,\gamma), \\
\partial_{s^*\gamma}Z &= D(r,s,s^*,\gamma), \qquad (6.38)
\end{aligned}$$

donde

$$A(r,s,s^*,\gamma) = \int \frac{-r^{3/2}[\gamma^2 r - m^2(r-r_g)]dr}{[\gamma^2 r^3 - [m^2r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)]^{3/2}} \qquad (6.39)$$

$$B(\theta,s,s^*) = \int \frac{-r^{3/2} 4\csc^2\theta d\theta}{[(s+s^*)^2 + (s-s^*)^2\csc^2\theta]^{3/2}} \qquad (6.40)$$

$$C(r,s,s^*,\gamma) = \int \frac{-r^{3/2}[m^2r^2 + (s+s^*)^2]dr}{[\gamma^2 r^3 - [m^2r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)]^{3/2}} \qquad (6.41)$$

$$D(r,s,s^*,\gamma) = \int \frac{r^{3/2}(s+s^*)\gamma dr}{[\gamma^2 r^3 - [m^2r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)]^{3/2}}. \qquad (6.42)$$

Entonces, si de las Ecs.(6.37), uno resuelve para r, t, θ, ϕ,

$$r = r(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma) \qquad (6.43)$$

$$t = t(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma) \qquad (6.44)$$

$$\theta = \theta(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma) \qquad (6.45)$$

$$\phi = \phi(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma) \qquad (6.46)$$

se puede obtener el sistema final de EDPs (a partir de las Ecs.(6.38)),

$$\begin{aligned}\partial_{ss}Z \quad &= \Lambda = \quad A\left(r(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma),s,s^*,\gamma\right)\\ &\qquad +s^{*2}B(\theta(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma),s,s^*),\end{aligned} \tag{6.47}$$

$$\begin{aligned}\partial_{s^*s^*}Z \quad &= \Lambda^* = \quad A(r(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma),s,s^*,\gamma)\\ &\qquad +s^2B(\theta(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma),s,s^*),\end{aligned} \tag{6.48}$$

$$\partial_{\gamma\gamma}Z \quad = \mathcal{Y} = \quad C(r(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma),s,s^*,\gamma), \tag{6.49}$$

$$\begin{aligned}\partial_{ss^*}Z \quad &= \Phi = \quad A(r(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma),s,s^*,\gamma)\\ &\qquad -ss^*B(\theta(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma),s,s^*),\end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\partial_{s\gamma}Z \quad = \Psi = \quad D(r(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma),s,s^*,\gamma), \tag{6.51}$$

$$\partial_{s^*\gamma}Z \quad = \Psi^* = \quad D(r(u,w,w^*,R,s,s^*,\gamma),s,s^*,\gamma), \tag{6.52}$$

Por construcción, $\Lambda, \Lambda^*, \mathcal{Y}, \Psi, \Psi^*$ y Φ, satisfacen las condiciones de integrabilidad, y las condiciones tipo Wünschmann.

Uno podría entonces, reconstruir la métrica de Schwarzschild a partir de este sistema de EDPs. Si bien es cierto que uno no ha calculado explícitamente a las funciones A, B, C y D, para la obtención de la métrica, dichas expresiones explícitas, no son necesarias, ya que lo que uno necesita computar es Λ_u, Λ^*_u, $\mathcal{Y}_u$, Ψ_u, Ψ^*_u y Φ_u.

Por ejemplo,

$$\Lambda_u = \frac{\partial\Lambda}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} \tag{6.53}$$

con

$$\frac{\partial r}{\partial u} \quad = \quad -\sqrt{\frac{\gamma^2r^3 - [m^2r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)}{m^4r^3}}, \tag{6.54}$$

$$\tag{6.55}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} \quad = \quad -\sqrt{\frac{(s+s^*)^2 + (s-s^*)^2\csc^2\theta}{m^4r^4}}. \tag{6.56}$$

Con expresiones similares a ésta en mano, uno puede obtener las componentes tetrádicas de la métrica:

$$g^{00} = 1, \tag{6.57}$$
$$g^{0+} = 0, \tag{6.58}$$
$$g^{0-} = 0, \tag{6.59}$$
$$g^{01} = 0, \tag{6.60}$$
$$g^{++} = \frac{s^*2f(r,\theta,s,s^*) - h(r,s,s^*,\gamma)}{m^2}, \tag{6.61}$$
$$g^{+-} = \frac{ss^*f(r,\theta,s,s^*) + h(r,s,s^*,\gamma)}{m^2}, \tag{6.62}$$
$$g^{+1} = \frac{r(s+s^*)\gamma}{m^2[\gamma^2r^3 - [m^2r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)]}, \tag{6.63}$$
$$g^{11} = \frac{-r[m^3r^2 + (s+s^*)^2]}{m^2[\gamma^2r^3 - [m^2r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)]}, \tag{6.64}$$
$$g^{--} = (g^{++})^* \tag{6.65}$$
$$g^{-1} = g^{+1}, \tag{6.66}$$

con

$$f(r,\theta,s,s^*) = \frac{4\csc^2\theta}{(s+s^*)^2 + (s-s^*)^2\csc^2\theta}, \tag{6.67}$$
$$h(r,s,s^*,\gamma) = \frac{\gamma^2r - m^2(r-r_g)}{\gamma^2r^3 - [m^2r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)}. \tag{6.68}$$

Por último, a partir de la Ec.(6.34) y Ec.(6.37), podemos obtener

$$\begin{aligned} du = u_{,a}dx^a &= -\gamma dt + \sqrt{\frac{\gamma^2r^3 - [m^2r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)}{r(r-r_g)^2}}dr \\ &+ \sqrt{(s+s^*)^2 + (s-s^*)^2\csc^2\theta}d\theta - i(s-s^*)d\phi, \end{aligned} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned} dw = w_{,a}dx^a &= -\frac{(s+s^*)}{\sqrt{r}\sqrt{\gamma^2r^3 - [m^2r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)}}dr - id\phi \\ &+ \frac{(s+s^*) + (s-s^*)\csc^2\theta}{\sqrt{(s+s^*)^2 + (s-s^*)^2\csc^2\theta}}, \end{aligned} \tag{6.70}$$

$$\begin{aligned} dw^* = w_{,a}dx^a &= -\frac{(s+s^*)}{\sqrt{r}\sqrt{\gamma^2r^3 - [m^2r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)}}dr + id\phi \\ &+ \frac{(s+s^*) - (s-s^*)\csc^2\theta}{\sqrt{(s+s^*)^2 + (s-s^*)^2\csc^2\theta}}, \end{aligned} \tag{6.71}$$

$$dR = R_{,a}dx^a = -dt + \frac{r^{3/2}\gamma}{(r-r_g)\sqrt{\gamma^2r^3 - [m^2r^2 + (s+s^*)^2](r-r_g)}}dr, \tag{6.72}$$

con las cuales podemos re-obtener la métrica de Schwarzschild a partir de las EDPs,

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = m^2 \left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (6.73)$$

§4. Las ecuaciones de Einstein

Ahora, adoptaremos un nuevo punto de vista hacia la geometría de una variedad n-dimensional. En vez de una métrica Lorentziana $g^{ab}(x^a)$ sobre $\mathfrak{M}$, como la variable fundamental, nosotros consideraremos como variable básica de la teoría, a una familia de superficies sobre $\mathfrak{M}$ dadas por $u = constante = Z(x^a, s^i)$ o, preferiblemente, sus derivadas segundas con respecto a s^i. De este punto de vista, estas superficies son básicas, y la métrica es un concepto derivado. Encontremos entonces, las condiciones sobre $u = Z(x^a, s^i)$ o más precisamente, sobre el sistema de ecuaciones de segundo orden, tal que la métrica n-dimensional, Ec. (6.20), sea una solución de las ecuaciones de Einstein.

Comencemos con las ecuaciones de Einstein en n dimensiones, las cuales son dadas por (ver por ejemplo [40, 41]).

$$R_{ab} = 8\pi G \left(T_{ab} - \frac{1}{n-2} g_{ab} T \right), \quad (6.74)$$

con el tensor de Ricci dado por

$$R_{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^c} (\Gamma^c_{ab}\sqrt{-g}) - \frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x^b} \ln \sqrt{-g} - \Gamma^c_{ad}\Gamma^d_{bc}, \quad (6.75)$$

$g = \det(g_{ab})$ y donde

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(\frac{\partial g_{da}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{db}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^d} \right), \quad (6.76)$$

son los símbolos de Christoffel.

Como en la formulación de superficies nulas de la Relatividad General, en el caso presente, las ecuaciones de Einstein son dadas por

$$R^{ab} Z_{,a} Z_{,b} = 8\pi G \left(T^{ab} Z_{,a} Z_{,b} - \frac{T}{n-2} \right). \quad (6.77)$$

Esto es, para obtener las ecuaciones de Einstein en este caso, necesitamos computar $R^{00} \equiv R^{ab} Z_{,a} Z_{,b}$, la cual es *una* de las componentes de $R^{AB} \equiv R^{ab}\theta^A_{,a}\theta^B_{,b}$. De la Ec. (6.20) tenemos que $R^{00} = R_{00}$. Usando la métrica dada por la Ec. (6.20) con coordenadas $\theta^A = (\theta^0, \theta^i)$ en la Ec. (6.75) computando R_{00}, encontramos que la Ec. (6.77) es equivalente a

$$\frac{1}{2\Delta}\Delta_{,uu} - \frac{1}{2\Delta^2}\Delta^2_{,u} - \frac{1}{4}\Lambda_{ch,u}\Lambda_{dl,u}g_{hd,u}g_{lc,u} = 8\pi G\left(T^{ab}Z_{,a}Z_{,b} - \frac{T}{n-2}\right), \quad (6.78)$$

donde las componentes covariantes de la métrica $g_{hc} = g_{hc}[\Lambda_{mn,u}]$ son obtenidas como funciones de Λ_{ij}'s a partir de la Ec. (6.20).

A primera vista, pareciera que la Ec. (6.78) no puede ser equivalente a las $\frac{n(n+1)}{2}$ componentes de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, la Ec. (6.78) es válida para cualquier valor de los s^i. De aquí, si sumamos a la Ec. (6.78), la condiciones de metricidad, obtenemos un conjunto de ecuaciones consistentes equivalentes a las ecuaciones estándar de Einstein en n dimensiones.

Las ecuaciones finales se leen

$$\frac{1}{2\Delta}\Delta_{,uu} - \frac{1}{2\Delta^2}\Delta^2_{,u} - \frac{1}{4}\Lambda_{ch,u}\Lambda_{dl,u}g_{hd,u}g_{lc,u} = 8\pi G\left(T^{ab}Z_{,a}Z_{,b} - \frac{T}{n-2}\right),$$

$$D_{s^k}[\Lambda_{mn,u}] = \Lambda_{ln,u}\Lambda_{km,w^l} + \Lambda_{lm,u}\Lambda_{kn,w^l}, \quad (6.79)$$

más las condiciones de integrabilidad, Ec.(6.9).

Como fue dicho en la introducción, podemos ahora ver a las ecuaciones de Einstein de dos maneras íntimamente relacionadas:

Por un lado, podemos considerar a las Ecs. (6.79) como $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ecuaciones diferenciales (de alto orden) para *la única función Z*. En este caso, las condiciones de integrabilidad no son relevantes. Alternativamente, las ecuaciones de Einstein pueden ser consideradas como las $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ecuaciones, Ecs. (6.79), para las $\frac{n(n-1)}{2}$ variables independientes Λ_{ij}. En este caso, las condiciones de integrabilidad, Ec. (6.9), deben ser incorporadas, pero el orden de las ecuaciones es mucho más bajo.

§5. Conclusión

En la primera parte de este capítulo, hemos demostrado que las ideas y procedimientos desarrollados en trabajos recientes [30, 31, 35, 36], sobre la ecuación de H-J pueden ser generalizados a la ecuación H-J n-dimensional sobre una variedad arbitraria $\mathfrak{M}$. Esto es, hemos mostrado que sobre una variedad n-dimensional $\mathfrak{M}$, una métrica definida o no definida, g_{ab}, es equivalente a una familia de foliaciones

$\mathfrak{Z}$, dependiente de $(n-1)$ parámetros s^i, descriptas por $u = Z(x^a, s^i)$ que satisfacen las condiciones tipo Wünschmann, Ecs. (6.22). Es más, de las Ecs. (6.22) observamos que uno puede adoptar otros puntos de vista, donde los Λ_{ij} son las variables básicas y $u = Z(x^a, s^i)$ es una variable auxiliar. De este segundo punto de vista, las Ecs. (6.22), son más simples, pero requieren que se agreguen las condiciones de integrabilidad (6.9) para que exista una Z.

En la segunda parte de este capítulo, hemos reformulado a las ecuaciones de Einstein en n dimensiones como ecuaciones para familias de superficies. Si Z es tomado como la variable básica, entonces las ecuaciones de Einstein son equivalentes a a las Ecs. (6.78). Pero si los Λ_{ij} son las variables básicas, las ecuaciones de Einstein son equivalentes a las Ecs. (6.78) y (6.9). En ambos casos, las ecuaciones de Wünschmann son necesarias.

Para establecer nuestros resultados principales, hemos usado una integral completa de la ecuación de H-J sobre una variedad n-dimensional.

Capítulo 7

Hacia NSF en N dimensiones

§1. Introducción

El propósito de este capítulo, es demostrar, que la formulación de Superficies Nulas de Relatividad General, no es intrínsica a 3 y 4 dimensiones. En particular, demostraremos, que a partir de cierto sistema de EDPs, siempre pueden ser construidas métricas conformes no definidas,(en particular de tipo Lorentzianas), que se encuentran en dualidad con la ecuación de la Eikonal.

Para lograr este objetivo, usaremos la misma técnica que fue desarrollada en 1983 por Kozameh y Newman para obtener NSF en su versión 4-dim.

Solo presentaremos los resultados esenciales y veremos como por imponer las ecuaciones de Einstein al sistema, se obtiene una única métrica n-dimensional. Y si bien, via la construcción emergente, se puede inferir la existencia de conexiones conformes de Cartan asociadas a estas ecuaciones, el programa de su construcción explícita, pareciera que solo es posible en principio, ya que a los fines prácticos los cálculos se vuelven tediosos.

§2. Métricas conformes N-dimensionales

Comencemos, con una variedad n-dimensional $\mathfrak{M}$ (con coordenadas locales $x^a = (x^0, ..., x^{(n-1)})$ y asumamos que son dadas un conjunto de funciones dependientes de $(n-2)$-parámetros, $u = Z(x^a, s, s^*, \gamma^m)$, con $m = 1, ..., (n-4)$. Los parámetros s, s^* y γ^m pueden tomar valores sobre una vecindad abierta de una variedad $\mathcal{N}$ de dimensión $(n-2)$. Asumiremos también, que para valores fijos de los parámetros s, s^* y γ^m, las superficies de nivel

$$u = \text{constante} = Z(x^a, s, s^*, \gamma^m), \tag{7.1}$$

folian localmente a $\mathfrak{M}$, y que $Z(x^a, s, s^*, \gamma^m)$ satisface la ecuación de la Eikonal

$$g^{ab}(x^a)\nabla_a Z(x^a, s, s^*, \gamma^m)\nabla_b Z(x^a, s, s^*, \gamma^m) = 0 \tag{7.2}$$

para alguna métrica $g_{ab}(x^a)$ aun desconocida.

La idea básica, al igual que en el capítulo anterior, es resolver la Ec. (7.2) para las componentes de la métrica en términos de $Z(x^a, s, s^*, \gamma^m)$. Con tal fín, consideraremos un número de derivadas en los parármetros de la condición (7.2), y entonces por medio de manipulación de dichas derivadas obtendremos no solamente la métrica n-dimensional sino también, $[n(n-3)]/2$ ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, definiendo las superficies, y además las condiciones que estas ecuaciones deben satisfacer. Nuevamente, nos referiremos a estas condiciones como condiciones tipo Wünschmann.

Observación 7.1: *Como en capítulos anteriores, diferenciación con respecto a x^a, serán denotadas por ∇_a o "coma a," y aquellas con respecto a los parámetros s, s^*, y γ^m, se denotarán ∂_s, ∂_{s^*} y $\partial_{\gamma^m} = \partial_m$.*

De la asumida existencia de $Z(x^a, s, s^*, \gamma^m)$, definimos los n escalares parametrizados θ^A, con $(A = 0, +, -, R, m)$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\theta^0 &= u = Z, \\
\theta^+ &= w^+ = \partial_s Z. \\
\theta^- &= w^- = \partial_{s^*} Z, \\
\theta^R &= R = \partial_{ss^*} Z, \\
\theta^m &= w^m = \partial_{\gamma^m} Z = \partial_m Z.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Observación 7.2: *Nuevamente, para cada valor de s, s^* y γ^m, las Ecs.(7.3) pueden ser pensadas como transformaciones de coordenadas entre las x^a y las θ^A.*

También definimos los siguientes escalares

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{++}(x^a, s, s^*, \gamma^m) &= \partial_{ss} Z(x^a, s, s^*, \gamma^m), \\
\tilde{\Lambda}_{--}(x^a, s, s^*, \gamma^m) &= \partial_{s^*s^*} Z(x^a, s, s^*, \gamma^m), \\
\tilde{\Lambda}_{+m}(x^a, s, s^*, \gamma^m) &= \partial_{sm} Z(x^a, s, s^*, \gamma^m), \\
\tilde{\Lambda}_{-m}(x^a, s, s^*, \gamma^m) &= \partial_{s^*m} Z(x^a, s, s^*, \gamma^m), \\
\tilde{\Lambda}_{lm}(x^a, s, s^*, \gamma^m) &= \partial_{lm} Z(x^a, s, s^*, \gamma^m).
\end{aligned} \tag{7.4}$$

En lo que sigue asumiremos que las Ecs. (7.3) pueden ser resultas para las x^a; esto es,

$$x^a = X^a(u, w^+, w^-, R, w^m, s^1, s^2),$$

de tal forma que el sistema de EDPs dual a la ecuación de la Eikonal esta dado por

$$\begin{aligned}
\partial_{ss} Z &= \Lambda_{++}(u, w^+, w^-, R, w^m, s, s^*, \gamma^m), \\
\partial_{s^*s^*} Z &= \Lambda_{--}(u, w^+, w^-, R, w^m, s, s^*, \gamma^m), \\
\partial_{sm} Z &= \Lambda_{+m}(u, w^+, w^-, R, w^m, s, s^*, \gamma^m), \\
\partial_{s^*m} Z &= \Lambda_{-m}(u, w^+, w^-, R, w^m, s, s^*, \gamma^m), \\
\partial_{lm} Z &= \Lambda_{lm}(u, w^+, w^-, R, w^m, s, s^*, \gamma^m). \qquad (7.5)
\end{aligned}$$

Esto significa que la familia $(n-1)$-paramétrica de superficies de nivel, Ec. (7.1), pueden ser obtenidas como soluciones al sistema de $n(n-3)/2$ EDPs de segundo orden (7.5). En este caso $(\Lambda_{++}, \Lambda_{--}, \Lambda_{+m}, \Lambda_{--}, \Lambda_{lm})$ automáticamente satisfacen condiciones de integrabilidad, por ejemplo:

$$D_{ss}\Lambda_{--} = D_{s^*s^*}\Lambda_{++} \qquad (7.6)$$

Definición 7.1: *Las derivadas totales en s, s^* y γ^* de una función $F = F(u, w^+, w^-, R, w^m, s, s^*, \gamma^m)$ son definidas por*

$$\begin{aligned}
D_s F &\equiv F_s + F_u w^+ + F_{w^+}\Lambda_{++} + F_{w^-} R + F_R T + F_{w^m}\Lambda_{+m}, \\
D_{s^*} F &\equiv F_{s^*} + F_u w^- + F_{w^-}\Lambda_{--} + F_{w^+} R + F_R T^* + F_{w^m}\Lambda_{-m}, \\
D_m F &\equiv F_m + F_u w^m + F_{w^+}\Lambda_{+m} + F_{w^-}\Lambda_{-m} + F_{w^k}\Lambda_{km} + F_R Q^m. \qquad (7.7)
\end{aligned}$$

respectivamente, donde

$$\begin{aligned}
T &= q\Big[\Lambda_{++s^*} + \Lambda_{++u} w^- + \Lambda_{++w^-}\Lambda_{--} + \Lambda_{++w^+} R \\
&\quad + \Lambda_{++w^w}\Lambda_{-m} + \Lambda_{++R}\Big(\Lambda_{--s} + \Lambda_{--u} w^+ + \Lambda_{--w^+}\Lambda_{++} \\
&\quad + \Lambda_{--w^-} R + \Lambda_{--w^m}\Lambda_{+m}\Big)\Big], \qquad (7.8) \\
Q^m &= \Lambda_{+ms^*} + \Lambda_{+mu} w^- + \Lambda_{+mw^-}\Lambda_{--} + \Lambda_{+mw^+} R + \Lambda_{+mR} T^* \\
&\quad + \Lambda_{+mw^k}\Lambda_{-k}, \qquad (7.9)
\end{aligned}$$

con

$$q = \frac{1}{1 - \Lambda_{++R}\Lambda_{--R}}. \qquad (7.10)$$

El espacio solución de las Ecs. (7.5) es n-dimensional. Esto puede ser visto de la misma manera que se observó en el capítulo anterior para el caso de ecuaciones en dualidad con la de Hamilton-Jacobi.

A partir de los n escalares, θ^A, podemos construir su base gradiente asociada ${\theta^A}_{,a}$ dada por

$$ {\theta^A}_{,a} = \nabla_a \theta^A = \{Z_{,a}, \partial_s Z_{,a}, \partial_{s^*} Z_{,a}, \partial_{ss^*} Z_{,a}, \partial_m Z_{,a}\}, \tag{7.11} $$

y su base vectorial dual ${\theta_i}^a$, tal que

$$ {\theta_A}^a {\theta^B}_{,a} = {\delta_A}^B, \quad {\theta_A}^a {\theta^A}_{,b} = {\delta_b}^a. \tag{7.12} $$

Prosiguiendo de la misma manera que en 3-dim y 4-dim, puede ser visto, que es más fácil encontrar las componentes de la métrica n-dimensional en la base gradiente, en vez de la base coordenada original y también resulta preferible trabajar con las componentes contravariantes en vez de las covariantes de la métrica; esto es,

$$ g^{AB}(x^a, s, s^*, \gamma^m) = g^{ab}(x^a) {\theta^A}_{,a} \theta^B_{,b}. \tag{7.13} $$

Las componentes de la métrica, y las condiciones tipo Wünschmann son obtenidas por operar repetidamente con ∂_s, ∂_{s^*} y ∂_m sobre la Ec. (7.2). Por definición, se tiene

$$ g^{00} = g^{ab} Z_{,a} Z_{,b} = 0. \tag{7.14} $$

Aplicando ∂_s a la Ec. (7.14) resulta $\partial_s g^{00} = 2g^{ab}\partial_s Z_{,a}\, Z_{,b} = 0$, i.e.,

$$ g^{+0} = 0. \tag{7.15} $$

Del mismo modo, obtenemos que $\partial_{s^*} g^{00} = 2g^{ab}\partial_{s^*} Z_{,a}\, Z_{,b} = 0$,
y $\partial_m g^{00} = 2g^{ab}\partial_m Z_{,a}\, Z_{,b} = 0$. Por lo tanto,

$$ \begin{aligned} g^{-0} &= 0, && (7.16) \\ g^{m0} &= 0. && (7.17) \end{aligned} $$

Computando las segundas derivadas parciales, obtenemos que

$$ \begin{aligned} \partial_{ss}(g^{00}/2) &= g^{ab}(x^a)\partial_{ss} Z_{,a} Z_{,b} + g^{ab}\partial s Z_{,a} \partial_s Z_{,b} = 0 \\ &= \Lambda_{++,R} g^{R0} + g^{++} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{g^{++} = -\Lambda_{++,R} g^{R0}} && (7.18) \\ \partial_{ss^*}(g^{00}/2) &= g^{ab}(x^a)\partial_{ss^*} Z_{,a} Z_{,b} + g^{ab}\partial s^* Z_{,a} \partial_s Z_{,b} = 0 \\ &= g^{R0} + g^{+-} = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \boxed{g^{+-} = -g^{R0}} && (7.19) \\ \partial_{ms}(g^{00}/2) &= g^{ab}(x^a)\partial_{ms} Z_{,a} Z_{,b} + g^{ab}\partial_m Z_{,a} \partial_s Z_{,b} = 0 \\ &= \Lambda_{+m,R} g^{R0} + g^{+m} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{g^{+m} = -\Lambda_{+m,R} g^{R0}} && (7.20) \\ \partial_{ms^*}(g^{00}/2) &= g^{ab}(x^a)\partial_{ms^*} Z_{,a} Z_{,b} + g^{ab}\partial_m Z_{,a} \partial_{s^*} Z_{,b} = 0 \\ &= \Lambda_{-m,R} g^{R0} + g^{-m} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{g^{-m} = -\Lambda_{-m,R} g^{R0}} && (7.21) \\ \partial_{nm}(g^{00}/2) &= g^{ab}(x^a)\partial_{nm} Z_{,a} Z_{,b} + g^{ab}\partial n Z_{,a} \partial_m Z_{,b} = 0 \\ &= \Lambda_{nm,R} g^{R0} + g^{nm} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{g^{nm} = -\Lambda_{nm,R} g^{R0}}. && (7.22) \end{aligned} $$

Para realizar estos cálculos, hemos usado el hecho de que

$$S_{,a} = S_u Z_{,a} + S_{w^+}\partial_s Z_{,a} + S_{w^-}\partial_{s^*} Z_{,a} + S_{w^m}\partial_m Z_{,a} + S_R \partial_{ss^*} Z_{,a}. \tag{7.23}$$

De las derivadas terceras $\partial_{sss^*}(g^{00}/2)$ y $\partial_{ss^*s^*}(g^{00}/2)$, obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned}
&(T_R - \Lambda_{++,w^+} - \Lambda_{++,w^-}\Lambda_{--,R} - \Lambda_{++,w^m}\Lambda_{m-,R})g^{0R} + 2g^{+R} + \Lambda_{++,R}g^{-R} = 0\\
&(T^*_R - \Lambda_{--,w^-} - \Lambda_{--,w^+}\Lambda_{++,R} - \Lambda_{--,w^m}\Lambda_{m+,R})g^{0R} + 2g^{-R} + \Lambda_{--,R}g^{+R} = 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto encontramos que,

$$\begin{aligned}
g^{+R} &= -\frac{g^{0R}}{4-\Lambda_{++,R}\Lambda_{--,R}}[2(T_R - \Lambda_{++,w^+} - \Lambda_{++,w^-}\Lambda_{--,R} - \Lambda_{++,w^m}\Lambda_{m-,R})\\
&\quad +\Lambda_{++}(T^*_R - \Lambda_{--,w^-} - \Lambda_{--,w^+}\Lambda_{++,R} - \Lambda_{--,w^m}\Lambda_{m+,R})] \qquad (7.24)\\
g^{-R} &= -\frac{g^{0R}}{4-\Lambda_{++,R}\Lambda_{--,R}}[2(T^*_R - \Lambda_{--,w^-} - \Lambda_{--,w^+}\Lambda_{++,R} - \Lambda_{--,w^m}\Lambda_{m+,R})\\
&\quad +\Lambda_{--}(T_R - \Lambda_{++,w^+} - \Lambda_{++,w^-}\Lambda_{--,R} - \Lambda_{++,w^m}\Lambda_{m-,R}).] \qquad (7.25)
\end{aligned}$$

Computando $\partial_{ms^*s^*}(g^{00}/2)$ encontramos g^{mR},

$$\begin{aligned}
g^{mR} &= -\Lambda_{m-,R}g^{+R} - \Lambda_{m+,R}g^{-R} - g^{0R}(Q^m_R - \Lambda_{m+,w^+} - \Lambda_{m+,w^-}\Lambda_{--,R}\\
&\quad -\Lambda_{m+,w^n}\Lambda_{n-,R} - \Lambda_{m-,w^+}\Lambda_{++,R} - \Lambda_{m-,w^-} - \Lambda_{m-,w^n}\Lambda_{n+,R}) \qquad (7.26)
\end{aligned}$$

Finalmente, de $\partial_{ss^*ss^*}(g^{00}/2)$ resulta la útima componente de la métrica g^{RR},

$$\begin{aligned}
g^{RR} &= -\frac{1}{2-\Lambda_{++,R}\Lambda_{--,R}}(-U_R + 2T_{w^+} + 2T_{w^-}\Lambda_{--,R} + 2T_{w^m}\Lambda_{m-,R}\\
&\quad +2T^*_{w^+}\Lambda_{++,R} + 2T^*_{w^-} + 2T^*_{w^m}\Lambda_{m+,R})g^{0R} + 2T_R g^{-R} - 2T^*_R g^{++}\\
&\quad +g^{\alpha\beta}\Lambda_{++,\alpha}\Lambda_{--,\beta} \qquad (7.27)
\end{aligned}$$

con $U = D_{s^*}T$, y los índices griegos $(\alpha, \beta) \equiv \{0, +, -, m\}$.

Con esto, hemos sido capaces de hallar todas las componentes contravariantes de la métrica, a excepción de un factor conforme $g^{0R} = \Omega^2$.

La métrica obtenida tiene la forma:

$$g^{ab} = \Omega^2 h^{ab} = \Omega^2 \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1\\
0 & -\Lambda_{++,R} & -1 & ... & -\Lambda_{+m,R} & h^{+R}\\
0 & -1 & -\Lambda_{--,R} & ... & -\Lambda_{-m,R} & h^{-R}\\
\vdots & \vdots & \vdots & [-\Lambda_{nm,R}] & \vdots & \vdots\\
0 & -\Lambda_{+m,R} & -\Lambda_{-m,R} & ... & -\Lambda_{mm,R} & h^{mR}\\
1 & h^{+R} & h^{-R} & \dots & h^{mR} & h^{RR}
\end{pmatrix}. \tag{7.28}$$

Como veremos en la siguiente sección el termino Ω^2 puede ser obtenido por imponer las ecuaciones de Einstein sobre g_{ab}.

Si computamos el resto de las derivadas parciales terceras, obtenemos relaciones que automáticamente son satisfechas por Z, pero si nosotros comenzamos con el punto de vista de que queremos construir una métrica conforme a partir del sistema de EDPs, entonces estas relaciones son convertidas en condiciones tipo Wünschmann, las cuales deben ser satisfechas por nuestro sistema con el fin de asegurar la existencia de la métrica conforme sobre el espacio solución. Estas condiciones se leen (siguen de aplicar $\partial_{sss}, \partial_{s^*s^*s^*}, \partial_{kmn}, \partial_{s^*s^*m}, \partial_{ssm}, \partial_{smn}, \partial_{s^*nm}$ a g^{00}),

$$\begin{aligned}
\partial_s[\Lambda_{++} \cdot Z] + 2[\Lambda_{++} \cdot \partial_s Z] &= 0 \\
\partial_{s^*}[\Lambda_{--} \cdot Z] + 2[\Lambda_{--} \cdot \partial_{s^*} Z] &= 0 \\
\partial_k[\Lambda_{mn} \cdot Z] + [\Lambda_{km} \cdot \partial_n Z] + [\Lambda_{kn} \cdot \partial_m Z] &= 0 \\
\partial_m[\Lambda_{--} \cdot Z] + 2[\Lambda_{m-} \cdot \partial_{s^*} Z] &= 0 \\
\partial_m[\Lambda_{++} \cdot Z] + 2[\Lambda_{m+} \cdot \partial_s Z] &= 0 \\
\partial_s[\Lambda_{mn} \cdot Z] + [\Lambda_{m+} \cdot \partial_n Z] + [\Lambda_{n+} \cdot \partial_m Z] &= 0 \\
\partial_{s^*}[\Lambda_{mn} \cdot Z] + [\Lambda_{m-} \cdot \partial_n Z] + [\Lambda_{n-} \cdot \partial_m Z] &= 0
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Además, si uno aplica las derivadas $\partial_s, \partial_s^*, \partial_m$ a la componente $g^{0R} = \Omega^2$ de la métrica, i.e., al factor conforme, se obtendrán ecuaciones del tipo

$$\begin{aligned}
\partial_s \Omega &= F_s(\Lambda_{++}, \Lambda_{--}, ..., \Lambda_{mn})\Omega, \\
\partial_s^* \Omega &= F_{s^*}(\Lambda_{++}, \Lambda_{--}, ..., \Lambda_{mn})\Omega, \\
\partial_m \Omega &= F_m(\Lambda_{++}, \Lambda_{--}, ..., \Lambda_{mn})\Omega,
\end{aligned} \tag{7.30}$$

con F_s, F_{s^*}, F_m funcionales de los Λ_{mn} y sus derivadas. Nuevamente, si comenzamos con el punto de vista de que queremos construir una métrica conforme a partir del sistema de EDPs, estas resultan en relaciones a satisfacer con el fin de asegurar la existencia de métricas conformes.

Si nosotros proseguimos aplicando derivadas de mayor orden sobre g^{00}, entonces, como sucede en la versión 4-dim de NSF, no se obtiene ninguna nueva información. De estas derivadas solo obtendremos identidades automáticamente satisfechas debido a las relaciones previas.

Observación 7.3: *Cabe aclarar, que las métricas construidas, pueden ser del tipo Lorentzianas o incluso de cualquier otra signatura (salvo Riemannianas). Si* *uno quisiera restringir aun más las métricas con el fin de obtener solo métricas Lorentzianas, entonces uno debería al igual que en 4-dim imponer condiciones sobre los Λ_{ij}. Por ejemplo en 4-dim, dicha condición se lee $1 - S_R S_R^* > 0$, la cual proviene de solicitar que det$(g^{ab}) < 0$.*

De este modo, hemos probado que todo espacio-tiempo n-dimensional, puede ser considerado como proveniente del espacio solución a un sistema de $n(n-3)/2$ EDPs. Notar que en el caso 4-dim, el sistema es relativamente simple comparado a su cercano de 5-dim donde uno ya debe considerar un sistema de 5 EDPs.

Uno puede llegar a construir las ecuaciones de Einstein (como se verá en la siguiente sección), a partir de la condición $R^{00} = 0$. Estas ecuaciones determinan el factor conforme necesario para convertir a los distintos espacios conformes en espacios físicos.

De manera análoga, se podrían construir las conexiones conformes normales de Cartan relacionadas a estas EDPs, y a partir de ellas, poder reducir el sistema, a aquellas ecuaciones que nos llevan a Espacios Einstein. Sin embargo, si bien en principio dicha generalización es directa; en la practica pareciera que resulta bastante ardua la tarea de manipulación algebraica de las ecuaciones, incluso para programas como Maple.

§3. Las ecuaciones de Einstein

Adoptaremos entonces, un punto de visión global hacia la geometría de una variedad n-dimensional. En vez de considerar a una métrica conforme $g^{ab}(x^a)$ sobre $\mathcal{M}$, como la variable fundamental, nosotros consideraremos como variables básicas, a una familia de superficies sobre $\mathcal{M}$ dadas por $u = constant = Z(x^a, s^i)$ o preferiblemente, sus derivadas segundas con respecto a (s, s^*, γ^i). De este nuevo punto de vista, estas superficies son fundamentales, y la métrica es un concepto derivado. Ahora, hallemos las condiciones que $u = Z(x^a, s^i)$ o mas precisamente, el sistema de EDPs de segundo orden, debe satisfacer, con el fin de que la métrica n-dimensional, sea una solución de las ecuaciones de Einstein.

Como se vio en el capítulo anterior, las ecuaciones de Einstein en n dimensiones, vienen dadas por

$$R_{ab} = 8\pi G \left(T_{ab} - \frac{1}{n-2} g_{ab} T \right), \tag{7.31}$$

con

$$R_{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^c} (\Gamma^c_{ab} \sqrt{-g}) - \frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x^b} \ln \sqrt{-g} - \Gamma^c_{ad} \Gamma^d_{bc}, \tag{7.32}$$

$g = \det(g_{ab})$ y

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(\frac{\partial g_{da}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{db}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^d} \right), \tag{7.33}$$

los símbolos de Christoffel.

Al igual que en 4-dim, las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$R^{ab} Z_{,a} Z_{,b} = 8\pi G \left(T^{ab} Z_{,a} Z_{,b} \right). \tag{7.34}$$

Es decir, para obtener las ecuaciones de Einstein, se requiere computar solamente $R^{00} \equiv R^{ab} Z_{,a} Z_{,b}$, la cual es *una* de las componentes de $R^{AB} \equiv R^{ab} \theta^A_{,a} \theta^B_{,b}$. De la Ec. (7.28) se ve que $R^{00} = R_{RR}$.

Antes de calcular la ecuación para el factor Ω^2, haremos la siguientes convenciones:

1) A las componentes contravariantes de la métrica g^{ab} la escribiremos $g^{ab} = \Omega^2 h^{ab}$, del mismo modo escribiremos $g_{ab} = \Omega^{-2} h_{ab}$.

2) Indices latinos $a, b...k$, etc. pertenecen al conjunto $\{0, +, -, m, r\}$, mientras que los indices pertenecientes a $\{+, -, m\}$ serán del tipo griego:$\{\alpha, \beta, \kappa\}$.

3) Nosotros descompondremos los determinantes de g^{ab} y g_{ab} como:

$$det(g^{ab}) = \Omega^{2n} q, \tag{7.35}$$

$$det(g_{ab}) = \Omega^{-2n} \frac{1}{q} = \Omega^{-2n} \Delta. \tag{7.36}$$

4) A la derivada $\frac{\partial}{\partial R}$ la denotaremos D.

Dicho esto, pasemos a calcular R_{RR}:

$$R_{RR} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^c} (\Gamma^c_{RR} \sqrt{-g}) - D^2 \left[\ln \sqrt{-g} \right] - \Gamma^c_{Rd} \Gamma^d_{Rc}, \tag{7.37}$$

Ahora, notar que el único termino no nulo de Γ^c_{RR}, es $\Gamma^R_{RR} = -2\frac{D\Omega}{\Omega}$. por lo tanto el primer termino de R_{RR} resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^c} (\Gamma^c_{RR} \sqrt{-g}) = -2 \frac{D^2 \Omega}{\Omega} - \frac{D\Omega}{\Omega} \frac{D\Delta}{\Delta} + 2(n+1) \frac{(D\Omega)^2}{\Omega^2}. \tag{7.38}$$

Para el segundo termino tenemos:

$$D^2 \left[\ln \sqrt{-g} \right] = -n \frac{D^2 \Omega}{\Omega} + n \frac{(D\Omega)^2}{\Omega^2} + \frac{D^2 \Delta}{2\Delta} - \frac{(D\Delta)^2}{2\Delta^2}. \tag{7.39}$$

Finalmente, calculemos los términos restantes de R_{RR}, i.e.:

$$\Gamma^c_{Rd}\Gamma^d_{Rc} = \Gamma^0_{Rd}\Gamma^d_{R0} + \Gamma^\alpha_{Rd}\Gamma^d_{R\alpha} + \Gamma^R_{Rd}\Gamma^d_{RR}. \tag{7.40}$$

Debido a que uno puede ver que $\Gamma^0_{Rd} = \Gamma^\alpha_{R0} = 0$ y que el único termino no nulo de la forma Γ^d_{RR} es Γ^R_{RR}, dicha expresión se reduce a

$$\Gamma^c_{Rd}\Gamma^d_{Rc} = \Gamma^\alpha_{R\beta}\Gamma^\beta_{R\alpha} + \left(\Gamma^R_{RR}\right)^2. \tag{7.41}$$

Utilizando la descomposición $g^{ab} = \Omega^2 h^{ab}$, $g_{ab} = \Omega^{-2}h_{ab}$, uno encuentra que:

$$\Gamma^\alpha_{R\beta} = -\frac{D\Omega}{\Omega}\delta^\alpha_\beta - \frac{1}{2}D[h^{\alpha\kappa}]h_{\beta\kappa}. \tag{7.42}$$

Entonces se tiene:

$$\Gamma^\alpha_{R\beta}\Gamma^\beta_{R\alpha} = (n-2)\frac{(D\Omega)^2}{\Omega^2} + \frac{D\Omega}{\Omega}D[h^{\alpha\beta}]h_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}D[h^{\alpha\epsilon}]D[h^{\beta\kappa}]h_{\beta\epsilon}h_{\alpha\kappa}. \tag{7.43}$$

Juntando todos estos términos resulta:

$$\begin{aligned} R_{RR} &= (n-2)\frac{D^2\Omega}{\Omega} - \frac{D\Omega}{\Omega}\left(\frac{D\Delta}{\Delta} + D[h^{\alpha\beta}]h_{\alpha\beta}\right) \\ &\quad -\frac{D^2\Delta}{2\Delta} + \frac{(D\Delta)^2}{2\Delta^2} + \frac{1}{4}D[h^{\alpha\epsilon}]D[h^{\beta\kappa}]h_{\beta\epsilon}h_{\alpha\kappa}, \end{aligned} \tag{7.44}$$

notar que el segundo termino es nulo, ya que como es bien sabido de propiedades de determinantes,

$$\frac{D\Delta}{\Delta} + D[h^{\alpha\beta}]h_{\alpha\beta} = 0.$$

A partir de la Ec.(7.44), obtenemos finalmente *las ecuaciones de Einstein*, (ecuación que determina a Ω): con el fin de comparar con el caso ya descrito en la literatura de 4-dim, hemos reemplazado Δ por $1/q$,

$$D^2\Omega = \frac{1}{n-2}\left[8\pi G T_{00} + \frac{1}{2}\frac{(Dq)^2}{q^2} - \frac{D^2 q}{2q} + \frac{1}{4}D^2[\Lambda_{\alpha\epsilon}]D^2[\Lambda_{\beta\kappa}]h_{\beta\epsilon}h_{\alpha\kappa}\right]\Omega, \tag{7.45}$$

donde se uso el hecho de que $h^{\alpha\epsilon} = -D[\Lambda_{\alpha\epsilon}]$.

Como caso particular de esta ecuación, citamos al caso ya conocido de NSF en 4D, en donde uno tiene un sistema de 2 ecuaciones,

$$\begin{aligned} \partial_{ss}Z &= \Lambda_{++}(u, w^+, w^-, R, w^m, s, s^*, \gamma^m), \\ \partial_{s^*s^*}Z &= \Lambda_{--}(u, w^+, w^-, R, w^m, s, s^*, \gamma^m), \end{aligned}$$

(Notar que las Λ_{++} y Λ_{--}, son las funciones que en los capítulos 3 y 4 llamamos S y S^* respectivamente.)

Las componentes contravariantes de la métrica tienen la forma

$$g^{ab} = \Omega^2 h^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & b \\ 0 & -1 & a^* & b^* \\ 1 & b & b^* & c \end{pmatrix}, \tag{7.46}$$

con $a = -\Lambda_{++,R}$ y $a^* = -\Lambda_{--,R}$. (las otras expresiones no son necesarias para escribir las ecuaciones de Einstein).
De la forma de la métrica y de Ec.(7.45), se obtiene

$$\frac{1}{4} D^2[\Lambda_{\alpha\epsilon}] D^2[\Lambda_{\beta\kappa}] h_{\beta\epsilon} h_{\alpha\kappa} = \frac{1}{4}\frac{(Dq)^2}{q^2} + \frac{1}{2}\frac{DaDa^*}{q}, \tag{7.47}$$

con $q = 1 - \Lambda_{++,R}\Lambda_{--,R}$.

De esta ultima ecuación, recuperamos la ya conocida ecuación para el factor conforme obtenida por primera vez (con un error en un factor -1) en [13], (ver también la respectiva corrección en la ecuación (5) del erratum [14]).

$$D^2\Omega = \left[4\pi G T_{00} + \frac{3}{8}\frac{(Dq)^2}{q^2} - \frac{1}{4}\frac{D^2 q}{2q} + \frac{1}{4}\frac{D^2[\Lambda_{++}] D^2[\Lambda_{--}]}{q}\right]\Omega. \tag{7.48}$$

Esta ecuación en conjunto a las dos condiciones de metricidad que se desprenden de las Ec.(7.29) y a las dos relaciones a las que también debe satisfacer Ω obtenidas a partir de las relaciones Ec.(7.30) constituyen un sistema equivalente a las 10 ecuaciones de Einstein para la métrica g_{ab}.

Capítulo 8

Resumen y comentarios finales

En los distintos capítulos de esta tesis, hemos visto como se pueden codificar distintas geometrías en variadas ecuaciones diferenciales.

Esto es un hecho notable, y quizás con profundas implicaciones físicas. Por ejemplo, hemos visto que el espacio-tiempo de Relatividad General (una variedad con una métrica de tipo Lorentziana), puede ser vista como proveniente de una variedad desnuda (sin estructuras geométricas a priori extras) codificada en el espacio solución de ciertos sistemas de EDPs.

Esto implica, entre otras cosas, que en vez de considerar a la métrica como un concepto básico y local; se la vea como un concepto secundario, y donde la variable fundamental de la teoría está en las superficies Z que folian todo el (candidato a) espacio-tiempo.

Como estas superficies pueden ser imaginadas como conos de luz de puntos del espacio tiempo, significa que en una presunta teoría cuántica de las Z, los vertices de estos conos aparecerán no definidos absolutamente, i.e., en general se tendrá un espacio-tiempo donde sus puntos no conmutan, o como se lo suele llamar, un *espacio-tiempo difuso*.

También hemos visto, que no solo es posible reconstruir un espacio-tiempo conforme a partir de foliaciones nulas, sino también un espacio-tiempo completo, a partir de foliaciones de tipo temporal y/o espacial. Esto no es del todo sorprendente. Por un lado, las superficies nulas definen la estructura conforme de cualquier espacio tiempo. De allí, la sospecha de que si uno pudiera reconstruir una métrica a partir de foliaciones no nulas, estas tendrían toda la información de la métrica, sin ninguna libertad conforme. Uno también podría intentar cuantizar estos formalismos, pero en tales casos, los pasos a seguir y su interpretación parecieran ser menos claros que en NSF.

En cuanto a aspectos técnicos, hemos dado por primera vez, un significado geométrico a las condiciones de metricidad (invariantes de Wünschmann nulos).

En el momento en que éstas fueron halladas por primera vez, aparecieron como condiciones que uno sospechaba que debían existir, pero no había manera de encontrarle un significado geométrico directo. Nosotros vimos, como dichas condiciones se comprenden por el hecho de que el espacio Jet asociado a las EDPs sea libre de torsión (esta misma restricción aparece en el estudio de ecuaciones en dualidad con la de Hamilton-Jacobi, que también definen métricas del tipo Riemannianas). Dos EDPs asociadas por una transformación de punto, darán origen al mismo espacio-tiempo. En el caso de espacios asintóticamente planos, las transformaciones puntuales pueden ser consideradas como transformaciones de coordenadas en Scri.

Por otro lado, notamos que si uno no se restringe a tal condición de torsión nula, entonces la torsión asociada se puede escribir solamente en términos de los invariantes de Wünschmann. Es más, siguiendo la construcción de la conexión métrica, uno puede obtener todos los invariantes relacionados al problema. Y estos invariantes resultarían muy útiles con el fin de encontrar las simetrías asociadas a las distintas ecuaciones.

Futuros caminos a seguir

Como futuros temas de investigación, y tareas pendientes a desarrollar, planteamos:

1). Escribir las ecuaciones de Einstein Conformes en 4-dim como un par de EDPs.

2). Hallar todos los invariantes asociados al par de EDPs que nos llevan a todas las métricas 4-dimensionales, y utilizarlos para el análisis de simetrías.

3). Encontrar todas las conexiones conformes normales de Cartan asociadas a sistemas de EDPs en n-dim que determinan métricas conformes.

4). Construir a partir de estas conexiones, las Ecuaciones de Einstein Conformes, y poder así, codificar toda la información de dichos espacios, en sistemas de EDPs.

5). Comenzar a analizar una cuantización de las variables básicas asociadas al problema de EDPs, y analizar sus implicancias sobre el espacio-tiempo físico.

6) Realizar un análisis mas exhaustivo de la formulación n-dimensional de NSF, ya que hay ciertas diferencias notables entre el caso 4-dim y el de dimensiones mayores. Por ejemplo, en 4-dim, si los Λ son nulos, entonces uno obtiene métricas conformalmente minkowskianas, pero en dimensiones mayores, éste no es el caso,

(se obtienen métricas degeneradas). Esto se puede deber a que no se están eligiendo adecuadamente las parámetros libres que entran en la integral completa. Por ejemplo, si bien es cierto que en 4 dimensiones, si uno usa la coordenadas estereográficas entonces las Λ para Minkowski son cero, podría no serlo si uno elige dos parámetros reales. Uno de estos casos es

$$Z(x^a, s_1, s_2) = t - s_1 x - s_2 y - \sqrt{1 - s_1^2 - s_2^2} z,$$

con s_1 y s_2 son reales.

Por último, vale la pena destacar que si bien hoy en día, las condiciones de Wünschmann parecieran complicadas de resolver para proveer casos de gran interés físico, no implica que, ya sea utilizando técnicas perturbativas, o análisis extras de estos sistemas de EDPs, no se pueda algún día tener a mano otra herramienta potente para estudiar Relatividad General.

Apéndices

§1. Apéndice A

Las expresiones para los $\triangle's$, los G's y los $\omega's$ son fácilmente expresadas a través de sus contraparte con 'sombrero'. Las relaciones entra las cantidades con y sin 'sombrero' son dadas por:

$$\begin{aligned} \triangle_{ijs} &= \widehat{\triangle}_{ijs} - \eta_{ij}\Phi^{-1}D\Phi, & (8.1) \\ \triangle_{ijk} &= \widehat{\triangle}_{ijk}\Phi^{-1} + 2e_{[j}\Phi\,\eta_{k]\ i}\Phi^{-2}, & (8.2) \end{aligned}$$

$$G_{ij} = \widehat{G}_{ij} + 2\eta_{ij}\Phi^{-1}D\Phi, \tag{8.3}$$

$$\omega_{ijk} = \widehat{\omega}_{ijk}\Phi^{-1} + 2\widehat{e}_{[j}\Phi\cdot\eta_{i]k}\ \Phi^{-2}, \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned} \omega_{ijs} &= \widehat{\omega}_{ijs} - \eta_{ij}\Phi^{-1}D\Phi, & (8.5) \\ \omega_{ijs^*} &= \widehat{\omega}_{ijs^*} - \eta_{ij}\Phi^{-1}D^*\Phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}_s &= -\frac{1}{2}S_W + \frac{b^*S_{W^*} - 2ab}{(1+bb^*)} + \frac{a^*(1+6bb^*+b^2b^{*2})}{2(1+bb^*)^2} \Rightarrow A_s = 0. & (8.6) \\ A_i &= \widehat{A}_i\Phi^{-1} & (8.7) \end{aligned}$$

Ellas son fácilmente derivadas de sus definiciones, (Secs. 2 y 3 del Cap. 3) usando las dos diferentes elecciones de Φ, ($\Phi = 1$ y $\Phi = \varpi\Phi_0$). Notar que de la ecuación diferencial para Φ, Ec.(3.49), tenemos que

$$\Phi^{-1}D\Phi = \frac{1}{4}\widehat{\triangle}^k{}_{ks}.$$

En el próximo apéndice, las cantidades con 'sombrero' ($\widehat{\triangle}$, $\widehat{G}$, $\widehat{\omega}$) son explícitamente desplegadas como funciones de (S, S^*, $\widehat{A}_i$), resultando posible entonces, expresar ($\triangle$, G, ω) in términos de (S, S^*, $\widehat{A}_i, \varpi$).

§2. Apéndice B

Definiendo a las cantidades

$$\begin{aligned}\gamma &\equiv 1 - bb^*, & (8.8)\\ \sigma &\equiv a - b^* a^*, & (8.9)\\ \zeta &\equiv a_R - b^* a_R^*. & (8.10)\end{aligned}$$

y

$$\hat{h}_+ = \hat{e}_+ + b^* \hat{e}_-, \tag{8.11}$$

(notando que $\widehat{\triangle}^-{}_{JK}$ y $\widehat{G}^*_{ij}$ pueden ser obtenidas por conjugación compleja) tenemos los tres conjuntos, $(\widehat{\triangle}, \widehat{G}\ , \widehat{\omega})$:

I. Los $\widehat{\triangle}$'s:

$$\begin{aligned}
\widehat{\triangle}^0{}_{0+} &= \widehat{\triangle}^0{}_{0-} = \widehat{\triangle}^0{}_{01} = \widehat{\triangle}^0{}_{0s} = \widehat{\triangle}^0{}_{0s^*} = \widehat{\triangle}^0{}_{+-} = 0, \qquad (8.12)\\
\widehat{\triangle}^0{}_{+1} &= \widehat{\triangle}^0{}_{-1} = \widehat{\triangle}^0{}_{1s} = \widehat{\triangle}^0{}_{1s^*} = \widehat{\triangle}^0{}_{ss^*} = 0,\\
\widehat{\triangle}^0{}_{+s} &= \widehat{\triangle}^0{}_{-s^*} = \frac{-1}{\alpha\gamma},\\
\widehat{\triangle}^0{}_{+s^*} &= \frac{b^*}{\alpha\gamma},\\
\widehat{\triangle}^0{}_{-s} &= \frac{b}{\alpha\gamma},\\
\widehat{\triangle}^+{}_{0+} &= \hat{e}_0(\ln\alpha) - \frac{b_0^*\hat{e}(b)}{\gamma},\\
\widehat{\triangle}^+{}_{0-} &= \frac{\hat{e}_0(b)}{\gamma},\\
\widehat{\triangle}^+{}_{01} &= 0,\\
\widehat{\triangle}^+{}_{0s} &= \alpha(bc - \hat{e}_0(S)),\\
\widehat{\triangle}^+{}_{0s^*} &= \alpha(c - b\hat{e}_0(S^*)),\\
\widehat{\triangle}^+{}_{+-} &= \frac{\hat{h}_+(b)}{\gamma} - \hat{e}_-(\ln\alpha),\\
\widehat{\triangle}^+{}_{+1} &= \frac{\alpha b^* b_R - \gamma\alpha_R}{\alpha\gamma},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\triangle}^{+}{}_{+s} &= -D(\ln\alpha) + \frac{b^*Db - \alpha\gamma\hat{e}_+(S) + b\sigma}{\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{+}{}_{+s^*} &= -D^*(\ln\alpha) + \frac{b^*D^*b - \alpha\gamma b\hat{e}_+(S^*) + \sigma}{\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{+}{}_{-1} &= \frac{-b_R}{\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{+}{}_{-s} &= \frac{-Db - \alpha\gamma\hat{e}_-(S) + b\sigma^*}{\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{+}{}_{-s^*} &= \frac{-D^*b - \alpha\gamma b\hat{e}_-(S^*) + \sigma^*}{\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{+}{}_{1s} &= -\alpha(b + S_R), \\
\widehat{\triangle}^{+}{}_{1s^*} &= -\alpha(1 + bS_R^*), \\
\widehat{\triangle}^{+}{}_{ss^*} &= 0, \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{0+} &= -\hat{e}_+(c) + \frac{\hat{e}_0(a) - b_0^*\hat{e}(a^*)}{\alpha\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{0-} &= -\hat{e}_-(c) + \frac{\hat{e}_0(a^*) - b\hat{e}_0(a)}{\alpha\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{01} &= -c_R, \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{0s} &= -Dc + a^*c - \hat{e}_0(T) - a\hat{e}_0(S), \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{0s^*} &= -D^*c + ac - \hat{e}_0(T^*) - a_0^*\hat{e}(S^*), \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{+-} &= \frac{\hat{h}_+(a^*) - \hat{h}_-(a)}{\alpha\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{+1} &= \frac{-\zeta}{\alpha\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{+s} &= -(\hat{e}_+(T) + a\hat{e}_+(S)) + \frac{b^*Da^* - Da - c + a^*\sigma}{\alpha\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{+s^*} &= -(\hat{e}_+(T^*) + a_+^*\hat{e}(S^*)) + \frac{b^*(D^*a^* + c) - D^*a + a\sigma}{\alpha\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{-1} &= \frac{-\zeta^*}{\alpha\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{-s} &= -(\hat{e}_-(T) + a\hat{e}_-(S)) + \frac{b(Da + c) - Da^* + a^*\sigma^*}{\alpha\gamma}, \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{-s^*} &= -(\hat{e}_-(T^*) + a_-^*\hat{e}(S^*)) + \frac{bD^*a - D^*a^* - c + a\sigma^*}{\alpha\gamma},
\end{aligned} \tag{8.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\triangle}^{1}{}_{1s} &= -(T_R + a^* + aS_R), \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{1s^*} &= -(T_R^* + a + a^*S_R^*), \\
\widehat{\triangle}^{1}{}_{ss^*} &: = 0.
\end{aligned}
$$

II. Los $\widehat{G}$'s:

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_{00} &= 2(Dc + aS_Z + T_Z - c(aS_R + T_R + a^*)), \\
\widehat{G}_{0+} &= \alpha^{-1}(1-bb^*)^{-1}\{\alpha^2(1-bb^*)[c(1+b^*S_R) - b^*S_Z] \\
&\quad -b^*(Da^* - aa^*S_R + aS_{W^*} - (a^*)^2 + T_{W^*} - a^*T_R) \\
&\quad +Da + c + T_W + aS_W - aT_R - a^2S_R - aa^*\}, \\
\widehat{G}_{0-} &= \alpha^{-1}(1-bb^*)^{-1}\{\alpha^2(1-bb^*)[c(b+S_R) - S_Z] \\
&\quad -b(c + Da - aT_R - aa^* - a^2S_R + aS_W + T_W) \\
&\quad +Da^* + T_{W^*} + aS_{W^*} - a^*T_R - aa^*S_R - (a^*)^2\}, \\
\widehat{G}_{01} &= a^* + aS_R + T_R, \\
\widehat{G}_{++} &= -2\,(1-bb^*)^{-1}\{b^*(a^* - b^*S_{W^*} + a^*b^*S_R - aS_R + S_W) + Db^* - a\}, \\
\widehat{G}_{+-} &= \alpha^{-1}(1-bb^*)^{-1}\{(1-bb^*)[\alpha(a^* - S_W + aS_R) - 2D\alpha] + \alpha D(bb^*)\}, \\
\widehat{G}_{+1} &= \alpha^{-1}(1-bb^*)^{-1}\{1 - \alpha^2(1-bb^*)(1+b^*S_R)\}, \\
\widehat{G}_{--} &= -2\,(1-bb^*)^{-1}\{b(ab - a^* + aS_R - S_W) + Db - a^*S_R + S_{W^*}\}, \\
\widehat{G}_{-1} &= \alpha^{-1}(1-bb^*)^{-1}\{-b - \alpha^2(1-bb^*)(b+S_R)\}, \\
\widehat{G}_{11} &= 0.
\end{aligned} \tag{8.14}$$

III. Los $\widehat{\omega}$'s:

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega}_{0+} &= \{\hat{e}_+(c) + \frac{b_0^*\hat{e}(a^*) - \hat{e}_0(a)}{\alpha\gamma}\}\widehat{\theta}^0 + \{\widehat{A}_+ - \frac{\zeta}{2\alpha\gamma}\}\widehat{\theta}^1 + \frac{\hat{e}_0(b^*)}{\gamma}\widehat{\theta}^+ \\
&\quad +\{\widehat{A}_0 + \frac{2\hat{e}_0(bb^*) + \alpha\gamma^2(\hat{h}_+(a^*) - \hat{h}_-(a))}{2\gamma(1+bb^*)}\}\widehat{\theta}^- \\
&\quad +\frac{\gamma c - b^*S_Z(1+bb^*)}{\alpha\gamma^2}\widehat{\theta}^s - \frac{b^*\gamma c + S_Z^*(1+bb^*)}{\alpha\gamma^2}\widehat{\theta}^{s^*},
\end{aligned} \tag{8.15}$$

$$\widehat{\omega}_{0-} = (\widehat{\omega}_{0+})^*,$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega}_{01} &= c_R^0\widehat{\theta}^0 + \{\widehat{A}_+ + \frac{\zeta}{2\alpha\gamma}\}\widehat{\theta}^+ + \{\widehat{A}_- + \frac{\zeta^*}{2\alpha\gamma}\}\theta^- + 2\widehat{A}_1\widehat{\theta}^1 \\
&\quad +2\widehat{A}_s\widehat{\theta}^s + 2\widehat{A}_{s^*}\widehat{\theta}^{s^*},
\end{aligned}$$

$$\widehat{\omega}_{10} = -\widehat{\omega}_{01} + 2\widehat{A},$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\omega}_{+-} \;=\; & \{-A_0 + \frac{b_0^*\hat{e}(b) - b\hat{e}_0(b^*)}{2\gamma} + \frac{\alpha\gamma(\hat{h}_-(a) - \hat{h}_+(a^*))}{2(1+bb^*)}\}\widehat{\theta}^0 \\
& -\{\widehat{A}_1 + \frac{bb_R^* - b^*b_R}{2\gamma}\}\widehat{\theta}^1 + \{-\frac{\hat{h}_-(b^*)}{\gamma} + \frac{(3+bb^*)\hat{e}_+(bb^*)}{2\gamma(1+bb^*)}\}\widehat{\theta}^+ \\
& -\{-\frac{\hat{h}_+(b)}{\gamma} + \frac{(3+bb^*)\hat{e}_-(bb^*)}{2\gamma(1+bb^*)} + 2\widehat{A}_-\}\widehat{\theta}^- \\
& -\{\frac{\gamma(S_W + 2A_s) + a^*(3+bb^*)}{4} - \frac{ab(1+3bb^*)}{2(1+bb^*)}\}\widehat{\theta}^s \\
& +\{\frac{\gamma S_{W^*}^* + (a - 2A_{s^*})(3+bb^*)}{4} - \frac{a^*b^*(1+3bb^*)}{2(1+bb^*)}\}\widehat{\theta}^{s^*},
\end{aligned}
$$

$$
\widehat{\omega}_{-+} = -\widehat{\omega}_{+-} - 2\widehat{A},
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\omega}_{+1} \;=\; & \{-\widehat{A}_+ + \frac{\zeta}{2\alpha\gamma}\}\widehat{\theta}^0 - \frac{b_R^*}{\gamma}\widehat{\theta}^+ - \{\widehat{A}_1 + \frac{(bb^*)_R}{\gamma(1+bb^*)}\}\widehat{\theta}^- \\
& + \frac{\alpha\gamma}{1+bb^*}\widehat{\theta}^s - \frac{\alpha\gamma b^*}{1+bb^*}\widehat{\theta}^{s^*},
\end{aligned}
$$

$$
\widehat{\omega}_{-1} = (\widehat{\omega}_{+1})^*.
$$

§3. Apéndice C

En este apéndice, el cual es largo y complicado, pero dado para completitud, obtenemos los parámetros tetrádicos y las condiciones sobre S y S^* que unívocamente determina nuestra condición de torsión nula. La anulación de la parte libre de traza de $\widehat{\triangle}_{(ij)s}$, i.e., las condiciones (3.47), nos dan

$$
\begin{aligned}
\widehat{G}_{01} + \widehat{G}_{+-} &= \widehat{G}_{01}^* + \widehat{G}_{+-}^* = 0, \quad (8.16)\\
\widehat{G}_{ij} &= \widehat{G}_{ij}^* = 0, \text{ for } (i,j) \not\in \{(0,1),(+,-)\}. \quad (8.17)
\end{aligned}
$$

Las expresiones explícitas para $\widehat{G}_{ij}$ dadas en el apéndice previo, son usadas para *i)* encontrar los parámetros tetrádicos y *ii)* derivar la condición de Wünschmann.

En lo que sigue, a menudo encontraremos pares de ecuaciones que son una el conjugado de la otra. En tales instancias, solamente escribiremos una de las ecuaciones e implicaremos a la otra. Cuando queramos referirnos a la conjugada de la ecuación listada, escribiremos el número de referencia de la ecuación listada con un superíndice (*).

Comencemos con las ecuaciones $\widehat{G}_{+1}=0$, $\widehat{G}_{-1}=0$, $\widehat{G}^*_{+1}=0$, y $\widehat{G}^*_{-1}=0$, las cuales solo dependen de b, b^*, y α. Estas son cuatro ecuaciones para tres variables que satisfacen una identidad. De $\widehat{G}_{+1}=0$ y $\widehat{G}^*_{-1}=0$, tenemos que

$$b^* S_R = b S^*_R. \tag{8.18}$$

Luego, usando $\widehat{G}^*_{-1}=0$ y $\widehat{G}_{-1}=0$ para eliminar α^2, obtenemos

$$b = \frac{-1+\sqrt{1-S_R S^*_R}}{S^*_R}. \tag{8.19}$$

(hemos elegido a la raíz positiva, puesto que queremos que b se anule cuando S lo hace.) Uno ve que b^* es el complejo conjugado de b. Es útil invertir a las Ecs.(8.19) y (8.19*), resultando

$$\begin{aligned} S_R &= \frac{-2b}{1+bb^*}\ , \\ S^*_R &= \frac{-2b^*}{1+bb^*}. \end{aligned} \tag{8.20}$$

De la Ec.(8.20) y $\widehat{G}_{+1}=0$, encontramos

$$\alpha^2 = \frac{1+bb^*}{(1-bb^*)^2}. \tag{8.21}$$

Las cuatro ecuaciones, $\{\widehat{G}_{+1}=0,\ \widehat{G}_{-1}=0,\ \widehat{G}^*_{+1}=0,\ \widehat{G}^*_{-1}=0\}$, son automáticamente satisfechas por Ecs.(8.19), (8.19*) y (8.21).

Nuestro próximo paso, es determinar a, a^*, y la condición de Wünschmann de las ecuaciones $\widehat{G}_{01}+\widehat{G}_{+-}=0$, $\widehat{G}_{++}=0$, $\widehat{G}_{--}=0$, y sus conjugadas. De este conjunto de seis ecuaciones, seremos capaces de determinar $(a,\ a^*)$, encontrar restricciones sobre $(\ S, S^*)$ y obtener identidades extras.

Primero establezcamos algunas relaciones útiles. Tomando D de la Ec.(8.21) obtenemos luego de algunas simplificaciones,

$$D\alpha = \frac{\alpha D(bb^*)(3+bb^*)}{2(1+bb^*)(1-bb^*)}. \tag{8.22}$$

Luego, (ver Ec.(3.5)) encontramos $T_R = T_R[Db, Db^*, b, S]$ y $T^*_R = T^*_R[Db, Db^*, b, S]$. Tomando primero D^* de la Ec.(8.20) y D de la Ec.(8.20*), i.e.,

$$\begin{aligned} D^*(S_R) &= D^*(\frac{-2b}{1+bb^*}), \\ D^*(S^*_R) &= D(\frac{-2b^*}{1+bb^*}), \end{aligned} \tag{8.23}$$

y entonces usando, la Ec.(3.8), para conmutar la R-derivada y la fibra-derivada, obtenemos dos ecuaciones conteniendo T_R y T^*_R . Después de simplificar con las Ecs.(8.20), se tiene

$$
\begin{aligned}
T_R &= \frac{4b(Db^* - b^{*2}Db)}{(1+bb^*)(1-bb^*)^2} + \frac{2(b^2D^*b^* - D^*b + 2b^2S^*_W)}{(1-bb^*)^2} \\
&+ \frac{S_W(1+bb^*)^2}{(1-bb^*)^2} - \frac{2(1+bb^*)(b^*S_{W^*} + bS^*_{W^*})}{(1-bb^*)^2}.
\end{aligned} \tag{8.24}
$$

Estamos ahora, en condiciones de hallar a, a^*, y la condición de Wünschmann. Primeramente, de $\widehat{G}_{01} + \widehat{G}_{+-} = 0$ y $\widehat{G}^*_{01} + \widehat{G}^*_{+-} = 0$, resolvemos para a y a^*. Con la ayuda de las Ecs.(8.22), (8.24) y sus conjugados, obtenemos

$$
a = \frac{(1+bb^*)[b^{*2}Db + Db^* + D^*(bb^*) + (1-bb^*)(b^*S_W + bS^*_W)]}{(1-bb^*)^3}. \tag{8.25}
$$

Cuando ellos son insertados dentro de $\widehat{G}_{--} = 0$, encontramos que S debe obedecer a la condición diferencial

$$
\mathcal{W} \equiv \frac{Db + bD^*b + S_{W^*} - bS_W + b^2S^*_{W^*} - b^3S^*_W}{1-bb^*} = 0, \tag{8.26}
$$

donde b es la expresión conocida en términos de S y S^*. La expresión $\mathcal{W} = \mathcal{W}[Db, D^*b, b]$ es el invariante de Wünschmann generalizado. Su anulación, es una condición sobre S y S^*, i.e., el requisito que el par original de EDPs debe satisfacer para la existencia de una conexión libre de torsión.

Esta condición, nos dice entonces que el invariante se debe anular, si nosotros queremos encontrar una conexión libre de torsión no trivial. Substituyendo Db^*, del invariante de Wünschmann y su conjugado, por las Ecs.(8.25) y (8.25*), nuestra expresión para a resulta

$$
\begin{aligned}
a &= b^{-1}b^{*-1}(1-bb^*)^{-2}(1+bb^*)\{b^{*2}(\mathcal{W} - Db + bS_W - S_{W^*}) \\
&\quad + b(\mathcal{W}^* - D^*b^* + b^*S^*_{W^*} - S^*_W)\}.
\end{aligned} \tag{8.27}
$$

o, con $\mathcal{W} = \mathcal{W}^* = 0$,

$$
\begin{aligned}
a &= b^{-1}b^{*-1}(1-bb^*)^{-2}(1+bb^*)\{b^{*2}(bS_W - Db - S_{W^*}) \\
&\quad + b(b^*S^*_{W^*} - D^*b^* - S^*_W)\}.
\end{aligned} \tag{8.28}
$$

Resumiendo los resultados hasta aquí; hemos obtenido los cinco parámetros tetrádicos, (b, b^*, α, a, a^*), tanto como la condición de Wünschmann en términos de S y S^*. La búsqueda para el último parámetro, i.e., c, es la más interesante, y al mismo tiempo la parte más dificultosa de la construcción.

Existen cuatro ecuaciones, a saber, $\widehat{G}_{0+} = 0$, $\widehat{G}_{0-} = 0$, $\widehat{G}^*_{0+} = 0$, y $\widehat{G}^*_{0-} = 0$, para c. Como veremos más abajo, tres de estas ecuaciones resultan identidades una vez que resolvamos algebraicamente para c. Sin embargo, resulta instructivo mantener el invariante de Wünschmann diferente de cero mientras resolvamos a estas ecuaciones. Entonces, demostraremos explícitamente como su anulación, nos lleva a una única solución para c. De aquí, para cálculos subsecuentes, $\mathcal{W}$ es mantenida en las ecuaciones. Comencemos por escribir

$$\begin{aligned} Db &= \mathcal{W} + bS_W - S_{W^*} + \frac{b(1-bb^*)(ab-a^*)}{1+bb^*}, \qquad (8.29) \\ Db^* &= b^*(b^*S_{W^*} - S_W) - b\mathcal{W}^* + \frac{(1-bb^*)(a-a^*b^*)}{1+bb^*}. \qquad (8.30) \end{aligned}$$

Entonces, insertemos los lados izquierdos de las Ecs. (8.29), (8.30), y sus conjugados dentro de las Ecs.(8.24) y (8.24*) para encontrar $T_R = T_R[a,b;\mathcal{W}]$ y $T_R^* = T_R^*[a,b;\mathcal{W}]$. El resultado es

$$T_R = (\tau + S_W) + \frac{2(3ab - b^*S_{W^*})}{1+bb^*} - \frac{2a^*(1+4bb^*+b^2b^{*2})}{(1+bb^*)^2}, \qquad (8.31)$$

donde $\tau = \tau[\mathcal{W}]$ (el cual se anula con $\mathcal{W}$) es dado abajo.

Tercero, usando la condición de integrabilidad, uno muestra que los vectores D y D^* conmutan. En particular,

$$\begin{aligned} DD^*b &= D^*Db, \qquad (8.32) \\ DD^*b^* &= D^*Db^*. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando las apropiadas fibra-derivadas de las cuatro ecuaciones Ecs.(8.29), (8.29*), (8.30), y (8.30*), simplificando con Ecs.(3.8), (8.29), (8.30), y sus conjugados, y usando a las Ecs.(8.32), obtenemos dos ecuaciones conteniendo Da, D^*a, Da^*, y D^*a^*. Ellas pueden ser resueltas para $Da^* = Da^*[Da, D^*a^*]$ y $D^*a = D^*a[Da, D^*a^*]$ para encontrar

$$\begin{aligned} Da^* &= (\Upsilon + a^*S_W - a^{*2} - T_{W^*}) + \frac{S_Z(1+b^2b^{*2}) + 2b^2S_Z^*}{(1-bb^*)^2} \qquad (8.33) \\ &\quad + \frac{b(Da - D^*a^* + T_W - T_{W^*}^* + 4aa^*) - 2a^*b^*S_{W^*}}{(1+bb^*)} \\ &\quad - \frac{aS_{W^*}(1+b^2b^{*2}) + 2b^2(2a^2 + a^*S_W^*)}{(1+bb^*)^2}. \end{aligned}$$

El término $\Upsilon = \Upsilon[D\mathcal{W}, D^*\mathcal{W}, \mathcal{W}]$, el cual se anula con $\mathcal{W}$, es dado abajo. Finalmente, aparte de la Ec.(8.33) de arriba, podemos usar la condición de integrabilidad para derivar otra identidad sobre las fibra-derivadas a y a^*. Comencemos por tomar D^* de la Ec.(8.31):

$$D^*(T_R) = D^*[(\tau + S_W) + \frac{2(3ab - b^*S_{W^*})}{1+bb^*} - \frac{2a^*(1+4bb^*+b^2b^{*2})}{(1+bb^*)^2}]. \qquad (8.34)$$

Sobre el lado izquierdo, usamos las Ecs.(3.8*) para conmutar la R -derivada y la fibra-derivada de tal manera que obtenemos el término $U_R = \partial_R(D^*T)$, donde

$$U \equiv D^*T = D^{*2}S = D^2S^* = DT^* \tag{8.35}$$

denota la condición de integrabilidad. Podemos entonces resolver a esta ecuación U_R. Nos referiremos a U_R obtenida de esta forma como $U_R^{(1)}$. De una manera similar, podemos obtener $U_R^{(2)}$ por tomar D de la Ec.(8.31*). Entonces igualamos $U_R^{(1)}$ y $U_R^{(2)}$, de lo cual encontramos una identidad sobre Da y D^*a^*. Con el uso de las Ecs.(3.8), (8.20), (8.29), (8.30), (8.33), y sus conjugadas, esta identidad se lee

$$\begin{aligned}&(\Gamma - \Gamma^* + Da - D^*a^* + T_W - T^*_{W^*}) + \frac{2(1+bb^*)(bS^*_Z - b^*S_Z)}{(1-bb^*)^2} \\ &+ \frac{4(a^{*2}b^* - a^2b) + 2(ab^*S_{W^*} - a^*bS^*_W)}{1+bb^*} = 0.\end{aligned} \tag{8.36}$$

Los términos $\Gamma = \Gamma[D\mathcal{W}, D^*\mathcal{W}, \mathcal{W}]$ y sus conjugados se anulan con $\mathcal{W}$ y son dados más abajo. Estamos ahora en posición de hallar c de las cuatro ecuaciones $\widehat{G}_{0+} = 0$, $\widehat{G}_{0-} = 0$, $\widehat{G}^*_{0+} = 0$, y $\widehat{G}^*_{0-} = 0$. Resolvamos algebraicamente para c cada una de estas cuatro ecuaciones c, llamando a cada solución $c^{(i)}$. Próximamente, reemplacemos S_R , α^2, T_R, y Da^* por las Ecs. (8.20), (8.21), (8.31), y (8.33), y usemos la Ec.(8.36) para simplificar. Finalmente, separemos cada $c^{(i)}$ dentro de una pieza que contenga todos los términos con el invariante de Wünschmann y sus fibra-derivadas, digamos $\xi^{(i)}$, y otra pieza que no contenga términos Wünschmann, a saber $C^{(i)}$, así que $c^{(i)}$ tiene la forma

$$c^{(i)} = C^{(i)} + \xi^{(i)},$$

para todo i. Es una tarea directa verificar que los cuatro $C^{(i)}$ son reales e iguales. Imponiendo la condición de Wünschmann, $\mathcal{W} = \mathcal{W}^* = 0$, de tal forma que $\xi^{(i)} = 0$, resulta $C^{(i)} = c^{(i)} = c$, y tenemos nuestra expresión final para c, a saber

$$\begin{aligned} c \;=\; & -\frac{Da + D^*a^* + T_W + T^*_{W^*}}{4} - \frac{aa^*(1+6bb^*+b^2b^{*2})}{2(1+bb^*)^2} \\ & + \frac{(1+bb^*)(bS^*_Z + b^*S_Z)}{2(1-bb^*)^2} + \frac{a(2ab - b^*S_{W^*}) + a^*(2a^*b^* - bS^*_W)}{2(1+bb^*)}.\end{aligned} \tag{8.37}$$

Habiendo determinado todas los parámetros tetrádicos, aun tenemos que verificar que $\widehat{G}_{00} = 0$ y $\widehat{G}^*_{00} = 0$. Por inspección, vemos que estas ecuaciones contienen fibras-derivadas de c. De hecho, por tomar explícitamente derivadas en las fibras de c, encontramos que $\widehat{G}_{00} = 0$ y $\widehat{G}^*_{00} = 0$ son idénticamente satisfechas. Vemos ésto, de la siguiente forma:

De las Ecs.(8.33), (8.33*), (8.36) y (8.37), encontramos

$$
\begin{aligned}
Da^* &= a^*S_W - aS_{W^*} - T_{W^*} + \frac{2a^*(2ab - b^*S_{W^*})}{1+bb^*} \\
&\quad + \frac{S_Z(1+bb^*)^2}{(1-bb^*)^2} - \frac{a^{*2}(1+6bb^*+b^2b^{*2})}{(1+bb^*)^2},
\end{aligned} \tag{8.38}
$$

$$
\begin{aligned}
Da &= -(2c + T_W) + \frac{2a(2ab - b^*S_{W^*})}{1+bb^*} \\
&\quad + \frac{2b^*S_Z(1+bb^*)}{(1-bb^*)^2} - \frac{aa^*(1+6bb^*+b^2b^{*2})}{(1+bb^*)^2}.
\end{aligned} \tag{8.39}
$$

Tomando D^* de la Ec.(8.38) y D de la Ec.(8.39*), substrayéndolas entre sí, y usando la conmutatividad D y D^*, tenemos que

$$
Dc = cS_W - T_Z - aS_Z + \frac{2c(2ab - b^*S_{W^*})}{(1+bb^*)} - \frac{ca^*(1+6bb^*+b^2b^{*2})}{(1+bb^*)^2}, \tag{8.40}
$$

la cual es equivalente a $\widehat{G}_{00} = 0$.

Notar que en el análisis de arriba, hemos usado las siguientes expresiones, las cuales se anulas cuando $\mathcal{W} = \mathcal{W}^* = 0$:

$$
\begin{aligned}
\tau &= 2(b^*\nu - b^2\nu^*), \\
\Upsilon &= 2b\rho + 2(1+bb^*)^{-1}\{\mu(1-bb^*) + \nu[a^*b^* + a(1-bb^* - b^2b^{*2})] \\
&\quad + b^2\mu^*(1-bb^*) + b^2\nu^*[ab + a^*(1-bb^* - b^2b^{*2})]\}, \\
\Gamma &= -b^*[4\mu + 2\nu(2abb^* + a^*b^* + 3a)],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi_4^* = b\{\mu^*(1-bb^*) + b^*\rho + \frac{1}{2}\nu^*[a^*(3 - 2b^2b^{*2}) - ab]\} \\
&\quad + \frac{1}{2}b^*\nu(a - a^*b^*),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_2 &= \xi_3^* = \frac{1}{b}\{\mu(1-bb^*) + b\rho + \frac{1}{2}\nu[a(2 + bb^* - 2b^2b^{*2}) - a^*bb^{*2}]\} \\
&\quad + \frac{1}{2}b\nu^*(a^* - ab),
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\mu &\equiv 2^{-1}(1-bb^*)^{-3}(1+bb^*)\{(b^*D\mathcal{W} + D^*\mathcal{W}) \\
&\quad + \mathcal{W}(b^{*2}S_{W^*} - 2b^*S_W - 2bS_W^* + S_{W^*}^*)\}, \\
\rho &\equiv -2^{-1}(1-bb^*)^{-2}(1+bb^*)\mathcal{W}\mathcal{W}^*, \\
\nu &\equiv (1-bb^*)^{-1}(1+bb^*)^{-1}\mathcal{W}.
\end{aligned}
$$

Bibliografía

[1] M.A.Tresse. *Determination des Invariantes Ponctuels de l'Equation Differentielle du Second Ordre* $y'' = \omega(x, y, y')$, Hirzel, Leipzig (1896).

[2] M.A. Tresse. *Sur les Invariants Differentiels des Groupes Continus de Transformations*, Acta Math 18, 1 (1894).

[3] S. Lie. *Klassifikation und Integration von gewohnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y , die eine Gruppe von Transformationen gestatten III, in Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 5, Teubner, Leipzig (1924).

[4] E. Cartan. *Sur les Varietes a Connection Projective*, Bull. Soc. Math. France 52, 205 (1924); Oeuvres III, 1, N70, 825, Paris, (1955).

[5] E. Cartan. *Les Espaces Generalises e L'integration de Certaines Classes d'Equations Differentielles*, C. R. Acad. Sci., **206** , 1425 (1938).

[6] E. Cartan. *La Geometría de las Ecuaciones Diferenciales de Tercer Orden*, Rev. Mat. Hispano-Amer. **4**, 1, (1941).

[7] S-S. Chern. *The Geometry of the Differential Equation* $y''' = F(x, y, y', y'')$, in Selected Papers, Springer-Verlag, (1978), original (1940).

[8] K. Wünschmann. *Über Berührungsbedingungen bei Integralkurven von Differentialgleichungen,* Inaug. Dissert., Teubner, Leipzig (1905).

[9] C. N. Kozameh, E.T. Newman. *Theory of Light Cone Cuts of Null Infinity*, J. Math. Phys., **24**, 2481 (1983).

[10] S. Frittelli, N. Kamran, E.T. Newman. *Differential Equations and Conformal Geometry,* Journal of Geometry and Physics, **43** , 133 (2002).

[11] S. Frittelli, C.Kozameh, E T.Newman, P. Nurowski. *Cartan Normal Conformal Connections from Differential Equations*, Class. Quantum Grav. **19**, 5235 (2002).

[12] S. Frittelli, C. Kozameh, E.T. Newman. *Dynamics of Light-Cone Cuts of Null Infinity*, Phys. Rev. D. **56**, 4729 (1997).

[13] S. Frittelli, C. N. Kozameh, E.T. Newman. *GR via Characteristic Surfaces*, J. Math. Phys. **36**, 4984 (1995).

[14] S. Frittelli, C. N. Kozameh, E.T. Newman. *Erratum: "GR via Characteristic Surfaces"*, J. Math. Phys. **40**, 1115 (1999).

[15] S. Frittelli, C. Kozameh, E.T. Newman. *Differential Geometry from Differential Equations*, Communications in Mathematical Physics, **223**, p.383 (2001).

[16] S. Kobayashi. *Transformation Groups in Differential Geometry,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1970).

[17] H. Friedrich. *Twistor Connection and Normal Cartan Connection* G.R.G, p.303-312. (1977).

[18] M. Korzynski, J. Lewandowski. *The Normal Conformal Cartan Connection and the Bach Tensor",* Class. Quantum Grav. **20**, No 16, p.3745-3764, (2003).

[19] S.A. Merkulov. *A Conformally Invariant Theory of Gravitation and Electromagnetism*, Class. Quantum. Grav **1**, p.349-354, (1984).

[20] C. Kozameh, E.T. Newman, P. Nurowski. *Conformal Einstein equations and Cartan conformal connection*, Class. Quantum Grav. **20**, No 14, p.3029-3035, (2003).

[21] C. Kozameh, E.T. Newman, K.P. Tod. *Conformal Einstein spaces*, G.R.G. **17**, p.343-353, (1985).

[22] E. Gallo, C. Kozameh, T. Newman, K. Perkins. *Cartan Normal Conformal Connections from Pairs of 2^{nd} Order PDE's*, Class. Quantum Grav. **21**, 4063 (2004).

[23] D. Forni, C. Kozameh, M. Iriondo. *Null surface formulation in 3D*, J. Math. Phys. **41**, 5517 (2000).

[24] P. Nurowski. *Conformal connection and equivalence problem for third order ODEs* , Int. J. Mod. Phys. A, **17**, N20, 2770 (2002).

[25] P. Olver. *Equivalence, Invariants and Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[26] P. Nurowski. *Differential equations and conformal structures*, math.DG/0406400.

[27] S. Neut. *Implantation et nouvelles applications de la méthode d'equivalence de Cartan*, P.H.D thesis, L'Université et Technologies de Lille I, (2003).

[28] G. Grebot. *The characterization of third order ordinary differential equations admitting a transitive fiber-preserving point symmetry group*, J. Math. Anal. Appl. **206**, no. 2, 364, (1997).

[29] K.P. Tod. *Einstein-Weyl spaces and third-order differential equations*, J. Math. Phys. **41**, 5572 (2000).

[30] P. García-Godínez, E. T. Newman, G. Silva-Ortigoza. *2-geometries and the Hamilton-Jacobi equation* , J. Math. Phys. **45**, 725 (2004).

[31] P. García-Godínez, E. T. Newman, G. Silva-Ortigoza. *3-geometries and the Hamilton-Jacobi equation* , J. Math. Phys. **45**, 2543 (2004).

[32] S. Frittelli, E.T. Newman, P. Nurowski. *Conformal Lorentzian metrics on the spaces of curves and 2-surfaces*, Class. Quantum Grav. **20** 3649, (2003).

[33] R.W. Sharpe. *Differential Geometry: Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (2000).

[34] S. Frittelli, N. Kamran, E.T. Newman. *, The Eikonal Equation, Envelopes and Contact Transformations*, Class. Quantum Grav. **20**, 1 (2003).

[35] E. Montiel-Piña, E. T. Newman, G. Silva-Ortigoza. *General relativity via complete integrals of the Hamilton-Jacobi equation*, J. Math. Phys. **46**, 032502 (2005).

[36] E. Gallo. *Two-dimensional Riemannian and Lorentzian geometries from second-order ODE's*, J. Math. Phys. **45**, p.4186-4190, (2004).

[37] E. Gallo, M. Iriondo, C. Kozameh. *Cartan's equivalence method, and null coframes in general relativity*, Class.Quant.Grav. **22**, p.1881-1901, (2005).

[38] E. Gallo, M. Marciano-Melchor, G. Silva-Ortigoza. *N-dimensional geometries from system of PDEs and Einstein equations*, En preparación, (2005). Preprint:gr-qc/0502102.

[39] E. Gallo, G. Silva-Ortigoza. *Null Surface Formulation of General Relativity in higher dimensions*, En preparación.

[40] R. Myers and R. Perry. *Black holes in higher dimensional space-times*, Ann. Phys. (N.Y) **172** 304 (1986).

[41] M. Cataldo, P. Salgado and P. Minning. *Selfdual Lorentzian Wormholes in N-dimensional Einstein Gravity*, Phys. Rev. D **66** 124004 (2002).