Estabilidad y límite parabólico de sistemas hiperbólicos cuasi lineales disipativos

Omar E. Ortiz

Licenciado en Física

Trabajo presentado para acceder al grado de Doctor en Física

Director de tesis: **Oscar A. Reula**

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
ARGENTINA
1996

Estabilidad y límite parabólico de sistemas hiperbólicos cuasi lineales disipativos

Omar E. Ortiz

Fa.M.A.F.

Universidad Nacional de Córdoba

Resumen

En este trabajo se estudian dos aspectos básicos del problema de Cauchy de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden; estos son el límite parabólico y la estabilidad de soluciones cercanas a equilibrio. Este estudio es de interés en física debido a que muchos procesos disipativos están descriptos mediantes sistemas ecuaciones hiperbólicas cuasi lineales y, bajo ciertos regímenes, los mismos procesos están bien descriptos por ecuaciones parabólicas. En la primera parte de este trabajo se estudia el límite parabólico del sistema hiperbólico de conducción de calor dado por las ecuaciones de conservación de la energía y la ecuación de Cattaneo. Se prueba, en el caso lineal, que las soluciones hiperbólicas tienden suavemente a las parabólicas de la teoría usual de Fourier, cuando el tiempo de relajación τ de la ecuación de Cattaneo tiende a cero. En el caso cuasi lineal (ecuaciones de Coleman, Fabrizio y Owen) se obtiene un resultado análogo pero de validez solo local en el tiempo. En segundo lugar, utilizando un funcional energía similar al introducido por Matsumura, se prueba existencia global y decaimiento exponencial a equilibrio de las soluciones del sistema cuasi lineal de conducción de calor de Morro y Ruggeri. Hasta este punto del trabajo, los estudios se centraron en sistemas de ecuaciones particulares. En la última parte del trabajo se estudia la existencia global y estabilidad cercana a equilibrio para sistemas generales, cuasi lineales, disipativos, de primer orden. Se introduce una condición de estabilidad tal que el problema de Cauchy para el caso de coeficientes constantes es una contracción en una norma equivalente a la norma L_2. Luego se encuentran condiciones de suficiencia bajo las cuales se puede construir, con el auxilo de la teoría de operadores pseudo diferenciales, una norma H tal que el problema Cauchy para el caso de coeficientes variables es una contracción en esta norma. Finalmente, a partir de los resultados previos, se trata el caso cuasi lineal general y se obtiene un teorema que puede considerarse una generalización al caso de derivadas parciales del teorema de estabilidad de Lyapunov.

A mi familia.

Agradecimientos

Muchas personas han colaborado para que este trabajo pueda ser llevado a cabo. Deseo aquí expresar mi reconocimiento:

- A Oscar Reula, ya que su dirección, claridad de pensamientos y paciencia fueron cruciales en todas las etapas del trabajo.

- A Gabriel Nagy y Heinz Kreiss, por su importantísima colaboración en la realización de diversas partes de este trabajo.

- A Carlos Kozameh, Daniel Pusiol y Guido Raggio, miembros de la comisión de tesis.

- A los miembros del Tribunal de Tesis, por el esfuerzo empeñado en la lectura del trabajo.

Indice

1 Introducción

Uno de los principios fundamentales de la física es el principio de causalidad. Este principio establece que toda teoría de la física que describa procesos de evolución debe ser consistente con las nociones de "pasado", "presente" y "futuro". Más formalmente, una teoría que presente ecuaciones de evolución para un conjunto de campos físicos debe respetar la estructura causal del espacio tiempo. Hasta principios de este siglo se creía que la estructura causal del espacio tiempo era la presentada por mecánica Newtoniana y, en este contexto, los sistemas de ecuaciones que describían evolución de distintos campos físicos eran básicamente elípticos (ecuación de Poisson para la gravedad Newtoniana), parabólicos (ecuación de difusión del calor) e hiperbólicos (ecuación de ondas).

A partir de la formulación de las ecuaciones del campo electromagnético (ecuaciones de Maxwell) y la posterior formulación de las teorías de la relatividad especial y general, quedó claramente establecida una nueva estructura causal para el espacio tiempo [1], [2]. Cualquier teoría física que describa la evolución de un campo fundamental, y que sea consistente con este nuevo marco teórico, debe presentar ecuaciones de evolución de tipo hiperbólico.

Por otro lado, innumerables procesos físicos, cuando son estudiados desde un punto de vista macroscópico, presentan disipación (por ejemplo: conducción de calor, movimiento de fluidos, etc.). Cuando las ecuaciones que describen tales procesos son hiperbólicas, la consistencia con los principios de la termodinámica resultan en la no linealidad (en general cuasi linealidad) de las mismas (ver por ejemplo: [3], [4], [5], [6], [7], y el apéndice de este trabajo).

A la luz de lo antes dicho, queda clara la importancia de comprender todos los aspectos relacionados al problema de valores iniciales para sistemas hiperbólicos cuasi lineales. En el presente trabajo se encara un estudio de dos aspectos fundamentales de este problema: el límite parabólico y la estabilidad de soluciones cercanas al equilibrio. Más concretamente, en la primera parte del trabajo se estudia el límite parabólico de sistemas hiperbólicos de condución de calor. Mientras que en la segunda parte se estudia la existencia global y estabilidad de sistemas cuasi lineales hiperbólicos. Estos estudios se realizan, en primer término y como un ejemplo simple de interés físico, para un sistema de condución de calor, y en segundo término para sistemas hiperbólicos disipativos cuasi lineales en general que, entre otros, contienen al ejemplo anterior.

A continuación describimos más detalladamente los problemas a estudiar en cada capítulo del presente trabajo. Comenzamos dando una introducción de los sistemas hiperbólicos de conducción del calor y una motivación para el estudio su límite parabólico.

Normalmente se entiende que la propagación del calor en un sólido está gobernada por la ley de Fourier

$$\vec{q} = -k(T)\nabla T, \tag{1.1}$$

donde $\vec{q}$ es el flujo de calor, T es la temperatura absoluta y k es la conductividad térmica del medio. Si suponemos que la densidad de energía interna e depende sólo de la temperatura de forma tal que $de = \gamma_0 dT$, donde γ_0 es el calor específico del cuerpo, y que k es constante, entonces la conservación de la energía

$$\frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \vec{q} \tag{1.2}$$

combinada con la ley de Fourier resultan en la ecuación para la temperatura (comunmente conocida como ecuación del calor)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T, \tag{1.3}$$

donde $\kappa = k/\gamma_0$ es la difusividad térmica.

La ecuación (1.3) es una ecuación parabólica y consecuentemente tiene la propiedad de que la información se propaga a velocidades arbitrariamente grandes. Por ejemlo, si resolvemos el problema de Cauchy para la ecuación (1.3) en la recta real con dato inicial de soporte compacto en $t = 0$, entonces la solución no será de soporte compacto para ningún $t > 0$. El primer intento para resolver este problema fué llevado a cabo por Cattaneo [8] quién sugirió reemplazar la ley de Fourier por una ley más general que hoy se conoce como la *ecuación de Cattaneo*,

$$\tau(T)\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} = -k(T)\nabla T, \tag{1.4}$$

donde τ es un tiempo de relajación que depende del material y del mecanismo de transporte del calor. Esta ecuación introdujo una idea nueva, la de considerar al flujo de calor como una nueva variable independiente, idea que mas tarde se formalizaría bajo el nombre de Termodinámica Extendida (ver por ej. [6], [7]).

En un caso simple, en el que τ y k son constantes y la densidad de energía e depende de T linealmente, la conservación de la energía (1.2) combinada con (1.4) nos conduce a la llamada *ecuación telegráfica (o del telegrafista)* para la temperatura,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T = 0. \tag{1.5}$$

Esta ecuación es hiperbólica y $c = \sqrt{\kappa/\tau}$ es su velocidad característica. Las soluciones de (1.5) son disipativas, en el sentido de que sus soluciones decaen a equilibrio, y de tipo ondulatorio en el sentido de que la información en un dado tiempo no puede propagarse con velocidad superior a c. Por ejemplo, si resolvemos el problema de Cauchy para (1.5) en la recta real con datos de soporte compacto, la solución tendrá soporte compacto para todo $t > 0$. Esta propiedad no es exclusiva de la ecuación (1.5), sino que es una propiedad del sistema (1.2) - (1.4) el cual, cuando se elige una densidad de energía e con sentido físico, es hiperbólico. Esto constituye una diferencia importante entre los problemas de Cauchy de la ecuación (1.3) y el sistema (1.2), (1.4).

Otra diferencia importante entre los problemas de Cauchy de la ecuación (1.3) y del sistema (1.2) - (1.4) se refiere a los datos iniciales. Para que el problema de Cauchy de (1.3) esté correctamente formulado, es decir que exista una solución, ésta sea única y dependa continuamente de los datos iniciales (en alguna norma apropiada), uno tiene que dar una sola función como dato inicial, $T(t=0)$. Mientras que para que el problema de Cauchy del sistema (1.2) - (1.4) esté bien formulado uno tiene que dar cuatro funciones iniciales, $T(t=0)$ y $\vec{q}(t=0)$. Fisicamente esto significa que si uno fuera a preparar un experimento (no estacionario) en el cual la temperatura fuese una variable relevante, entonces uno debería controlar no sólo la temperatura inicial sino también el flujo de calor inicial en la muestra. Esto no sería necesario si uno supiera que este dato inicial "extra" no tiene influencia apreciable en la evolución temperatura de la muestra.

Sería interesante, de acuerdo a lo antes expuesto, estudiar la relación existente entre las soluciones del sistema (1.2) - (1.4) y la solución de su límite parabólico; como así también entender que ocurre con el dato "extra", ya que es bien sabido que ecuaciones parabólicas como la (1.3) ajustan muy bien los resultados experimentales en una amplia gama de situaciones. Esto ayudaría también a entender por qué solo bajo circunstancias muy especiales se ha logrado detectar ondas de temperatura (soluciones hiperbólicas) (ver [9], [10]).

En el capítulo 2 realizamos un estudio que proporciona algunas respuestas a estas cuestiones para el caso simple en que el sistema (1.2) - (1.4) es lineal y para un caso fisicamente más interesante en que dicho sistema es no lineal. La forma en que estudiamos este problema es la siguiente. Pensamos en el sistema (1.2) - (1.4) como una familia monoparamétrica de sistemas hiperbólicos, donde τ juega el rol del parametro, de forma tal que dicha familia recupera el límite parabólico cuando $\tau \to 0$. En dicho límite la ecuación de Cattaneo se reduce a la ley de Fourier. Para realizar estos estudios utilizamos técnicas energéticas como las normalmente utilizadas para tratar problemas de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales.

El ejemplo lineal que trataremos será la teoría hiperbólica lineal más simple, cuyas ecuaciones son las (1.2) - (1.4) con coeficientes constantes y una densidad de energía lineal en la temperatura. Probaremos para este caso que, dados datos iniciales arbitrarios para la temperatura y el flujo de calor, la solución del sistema hiperbólico converge uniformemente a la solución de la ecuación parabólica límite (con igual dato inicial para la temperatura) cuando el parámetro tiende a cero. Mas aún, dado cualquier valor del parámetro, se encontrará una cota para la diferencia entre las soluciones en términos del dato inicial y el tiempo. Se verá además cómo el dato extra para el sistema hiperbólico se compone de dos términos, uno que decrece exponencialmente cuando t crece y otro que es siempre pequeño.

Algunos de los resultados mencionados para el caso lineal fueron obtenidos con anterioridad. Caffarelli y Virga [11] obtuvieron resultados limitados utilizando funciones de Green para representar las soluciones generales de (1.5); Geroch usó series de Fourier [12]. La ventaja de utilizar técnicas energéticas reside en que pueden emplearse también para ecuaciones no lineales. Esto es importante porque, como puede verse en el apéndice, la compatibilidad con la termodinámica de una teoría de propagación del calor conduce necesariamente a ecuaciones no lineales.

Muchos autores estudiaron teorías no clásicas (que no obedecen la ley de Fourier) de propagación del calor y la aparición de ondas de temperatura (ver por ejemplo [10]). Distintas motivaciones, tales como obtener una teoría causal o estudiar el fenómeno conocido como segundo sonido, promovieron estos estudios. Junto con el surgimiento de las primeras ideas de la termodinámica extendida surgieron algunas teorías de propagación del calor en sólidos. En 1982 Coleman, Fabrizio y Owen [13] propusieron una teoría que respetara las ecuaciones básicas (1.2) - (1.4) e impusieron restricciones sobre la relación constitutiva $e = e(T, \vec{q})$ con el objeto de compatibilizar la teoría con los principios de la termodinámica. Obtuvieron de esta forma una teoría hiperbólica cuasi lineal consistente con la termodinámica (que de ahora en más identificaremos con la sigla CFO).

En el capítulo 2 introducimos la teoría de CFO y realizamos un estudio de su límite parabólico. Se probará que, dada una solución cercana a equilibrio ($\vec{q} = 0$ y $T =$ const.) del sistema parabólico límite, existe siempre una solución del sistema hiperbólico que permanece cerca de la solución dada durante un intervalo de tiempo finito. Mas aún, se probará que durante este intervalo de tiempo, la diferencia de las soluciones converge uniformemente a cero cuando $\tau \to 0$. En este caso los datos iniciales del sistema hiperbólico se eligen *inicializados* [14], [15]. Esto significa que los datos extra en la teoría hiperbólica no se eligen arbitrariamente, sino en coincidencia con los valores iniciales de las variables correspondientes de la teoría parabólica límite.

Diversas teorías han sido propuestas para tratar la propagación hiperbólica del calor. En el apéndice del presente trabajo, siguiendo trabajos de Liu [3] y otros que culminaron con uno de Geroch y Lindblom [5], realizamos una deducción de las teorías hiperbólicas más simples de tipo divergencia que describen la propagación del calor en sólidos y son consistentes con los principios de la termodinámica extendida. Este apéndice formaliza las ideas de Morro y Ruggeri [16] que propusieron una teoría cuyas ecuaciones son la conservación de la energía y otra ecuación vectorial que no es la de Cattaneo.

En el capítulo 3 introducimos la teoría de Morro y Ruggeri (de ahora en más MR), y estudiamos la existencia y estabilidad de soluciones al problema de Cauchy asociado. No es difícil ver que el sistema de ecuaciones de MR es genuinamente no lineal [17]. Esto significa que si el sistema de ecuaciones no tuviese términos disipativos, las soluciones desarrollarían singularidades (ondas de choque) en un tiempo finito aún para datos iniciales pequeños. Sin embargo, como estas ecuaciones son disipativas, es posible probar existencia global de soluciones. En particular, probamos que dados datos iniciales suficientemente cerca de los datos de equilibrio, la solución existe globalmente y converge exponenciamente a equilibrio cuando $t \to \infty$.

El problema de valores iniciales para las teorías de CFO y las de MR fue estudiado por Coleman, Hrusa y Owen [18] y por Franchi y Morro [19] respectivamente, quienes demostraron la existencia de soluciones globales y la estabilidad (convergencia de las soluciones a equilibrio cuando $t \to \infty$) para datos iniciales pequeños. Ambos trabajos realizan la prueba acotando un funcional energía que involucra integrales en espacio y en tiempo de las soluciones y sus derivadas espaciales y temporales. De esta forma obtienen una cota para la energía en término de los datos iniciales la cual implica la convergencia de las soluciones a equilibrio (cuando $t \to \infty$) sin implicar mayores detalles sobre la rapidez de tal convergencia. La diferencia fundamental entre nuestra prueba, basada en un trabajo de Matsumura [20], y las recién citadas estriba en que el funcional energía que usamos en el capítulo 3 es equivalente a una norma de Sobolev sobre las variables espaciales en la cual el tiempo aparece como un parámetro. El trabajo principal es probar que, cuando los datos iniciales son suficientemente cercanos a equilibrio, la derivada temporal de tal energía (que denotamos por E) puede acotarse en la forma $\dot{E} \leq -(1/\tau)E$. De aquí se deduce que existen soluciones globales y que estas convergen exponencialmente a equilibrio cuando $t \to \infty$.

En el capítulo 4 del presente trabajo estudiamos la estabilidad lineal y no lineal de las soluciones cercanas a equilibrio de sistemas cuasi lineales hiperbólicos disipativos generales. Hay numerosos ejemplos en física de tales sistemas. El ejemplo que motivó principalmente nuestro interés en este problema es el de los fluídos disipativos relativistas [3] [5], cuya complejidad de estructura no permiten una generalización de los resultados de los capítulos anteriores. Los resultados del capítulo 4 tiene gran generalidad y pueden ser aplicados a diversos sistemas que aparecen en física.

Nos interesa estudiar el problema de Cauchy para sistemas hiperbólicos cuasi lineales de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{n} A^j(v)\frac{\partial v}{\partial x^j} + B(v)v, \\ v(t=0) &= g(x) \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde v es función (vector columna) de las variables espaciales reales $x^1, \ldots, x^n$ y el tiempo t, con componentes $v^1, \ldots, v^s$. A^j, $j = 1, \ldots, n$ y B son matrices $s \times s$, funciones suaves (C^∞) de v.

Claramente el sistema (1.6) tiene soluciones de equilibrio (estacionarias) $v_0 =$ const., $v_0 \in \ker B(v_0)$. Si el sistema (1.6) es “disipativo”, es de esperar que sus soluciones de equilibrio sean estables, es decir, que cuando los datos iniciales g son suficientemente cercanos a los datos g_0 correspondientes a v_0 en alguna norma (por ejemplo en la norma L_2), el problema de Cauchy para (1.6) posea soluciones globales (para todo tiempo) las cuales, luego de un intervalo de tiempo transitorio, decaigan a equilibrio (en la misma norma) cuando el tiempo crece.

Para estudiar la estabilidad de (1.6) es conveniente introducir un parámetro de pequeñez ε que regule la pequeñez de $g - g_0$. Escribimos pues, $v(t=0) = g_0 + \varepsilon f(x)$ e introducimos una nueva variable u tal que $v = v_0 + \varepsilon u$. Suponiendo por simplicidad que $B(v_0 + \varepsilon u)v_0 = 0$, el problema de Cauchy para u es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{n} A^j(v_0 + \varepsilon u)\frac{\partial u}{\partial x^j} + B(v_0 + \varepsilon u)u, \\ u(t=0) &= f(x). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Como las matrices A^j y B son diferenciables, pueden ser escritas en la forma:

$$A^j(\varepsilon u) = A_0^j + \varepsilon A_1^j(\varepsilon u) \qquad \text{y} \qquad B(\varepsilon u) = B_0 + \varepsilon B_1(\varepsilon u),$$

donde $A_0^j = A^j(v_0)$ y $B_0 = B(v_0)$ son matrices constantes. Las técnicas a utilizar permiten estudiar sistemas ligeramente mas generales que (1.7). Estudiaremos pues el problema de Cauchy:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}(A_0^j + \varepsilon A_1^j(x,t,\varepsilon,u))\frac{\partial u}{\partial x^j} + (B_0 + \varepsilon B_1(x,t,\varepsilon,u))u,$$

$$u(t=0) = f(x),$$

donde las matrices $A_1^j(x,t,\varepsilon,u)$ y $B_1(x,t,\varepsilon,u)$ son funciones suaves de todos sus argumentos. En el capítulo 4 se define una condición de estabilidad genérica para estos sistemas y se prueba que tal condición implica, para ε suficientemente pequeño, la estabilidad lineal y no lineal para sistemas simétrico hiperbólicos y fuertemente hiperbólicos. La idea fundamental de la prueba consiste en construir una norma, equivalente a la norma L_2, con el auxilio de la teoría de operadores pseudo diferenciales, y probar que el problema de Cauchy es una contracción en dicha norma.

Paralelamente a estos trabajos se ha realizado otro [21], en el que se aplica un método similar a sistemas mixtos simétricos hiperbólicos-parabólicos que incluyen las ecuaciones de Navier-Stokes. En este caso la norma fue construída explicítamente, sin estar esta construcción basada en una condición de estabilidad genérica como hacemos en el presente trabajo.

Notación. A lo largo del presente trabajo denotaremos por $\|u\|_r$ a la norma en el espacio de Sobolev $H^r(\Omega)$, si $u : \Omega \to \mathbf{R}^p$. Asimismo $\|u\|$ denotará la norma L_2.

2 Comportamiento de soluciones de sistemas hiperbólicos de conducción de calor en el límite parabólico

2.1 Teoría hiperbólica de conducción de calor

Coleman, Fabrizio y Owen [13] (ver Apéndice) mostraron que la ecuación de Cattaneo (1.4) es compatible con los principios de la termodinámica si la densidad de energía interna e es función no solo de la temperatura sino también del flujo de calor, obteniendo:

$$e = e_0(T) + a(T)q^2, \qquad \text{donde} \qquad a(T) = \frac{Z(T)}{T} - \frac{Z'(T)}{2}, \tag{2.1}$$

con $Z(T) = \tau(T)/k(T)$. De acuerdo a esto las ecuaciones de conservación de la energía (1.2) y de Cattaneo (1.4) quedan,

$$[\gamma_0(T) + a'(T)q^2]\dot{T} + 2a(T)\vec{q}\cdot\dot{\vec{q}} + \nabla\cdot\vec{q} = 0 \tag{2.2}$$

$$\tau(T)\dot{\vec{q}} + k(T)\nabla T + \vec{q} = 0. \tag{2.3}$$

donde $\gamma_0(T) = e_0'(T)$ es el calor específico de equilibrio.

Para realizar el estudio del límite parabólico comenzamos con un caso simple en que las ecuaciones (1.2) y (1.4) son lineales. Luego se estudiará el caso más general de las ecuaciones (2.2) y (2.3).

2.2 Ejemplo lineal y límite parabólico

Consideraremos el problema de propagación del calor en el cilindro $\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}^+$ dado por $0 \leq x \leq L$ con 0 y L identificados, y $t \geq 0$. Las ecuaciones para este ejemplo lineal son la conservación de la energía (1.2) y la ecuación de Cattaneo (1.4) con todos los coeficientes constantes, juntamente con una energía lineal en la temperatura. De esta forma las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} \gamma_0\frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial q}{\partial x} \\ \tau\frac{\partial q}{\partial t} &= -k\frac{\partial T}{\partial x} - q, \end{aligned}$$

donde γ_0 es el calor específico del sólido, k es su conductividad térmica y τ es un tiempo de relajación. Definiendo las variables $u = T$ y $v = -q/\gamma_0$, el sistema de ecuaciones queda:

$$u_t = v_x \tag{2.4}$$

$$\varepsilon^2 v_t = u_x - \frac{1}{\kappa}v, \tag{2.5}$$

donde $\kappa = k/\gamma_0$ es la difusividad térmica y $\varepsilon = \sqrt{\tau/\kappa}$ es la recíproca de la velocidad característica del sistema. El sistema (2.4) y (2.5) puede ser pensado como una familia monoparamétrica de sistemas simétrico hiperbólicos, donde $\varepsilon > 0$ juega el rol del parámetro. El límite

$\varepsilon \to 0$ es el límite parabólico. En este límite el sistema se convierte, eliminando v, en la ecuación usual de calor con coeficientes constantes:

$$\frac{1}{\kappa} u_t^0 - u_{xx}^0 = 0, \tag{2.6}$$

donde u^0 denota la temperatura parabólica usual.

Consideremos ahora los problemas de Cauchy para el sistema (2.4) - (2.5) y la ecuación (2.6). La ecuación (2.6) requiere una única función como dato inicial, mientras que el sistema (2.4) - (2.5) requiere dos funciones. Para estudiar la relación entre ambas soluciones, considerando a ε como un parámetro de pequeñez, bastará con elegir datos iniciales iguales a orden, hasta un orden ε^2, para ambas temperaturas (u y u^0) y tomar arbitrariamente el dato restante para el sistema hiperbólico; es decir:

$$u(t=0) = f(x) \qquad\qquad v(t=0) = g(x) \tag{2.7}$$

$$u^0(t=0) = f(x) + \kappa\varepsilon^2 (g_x(x) - \kappa f_{xx}(x)). \tag{2.8}$$

Los resultados obtenidos se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Sea $f \in C^{n+2}(\mathbf{S}^1)$ y $g \in C^{n+1}(\mathbf{S}^1)$ con $n \geq 2$. Entonces, las soluciones (u, v) y u^0 de (2.4)- (2.5) y (2.6) satisfacen:*

$$u = u^0 - \kappa\varepsilon^2 \, \Delta_x \, exp(-t/\kappa\varepsilon^2) + u_R \tag{2.9}$$

$$v = \kappa u_x^0 + \Delta \, exp(-t/\kappa\varepsilon^2) + v_R \tag{2.10}$$

donde $\Delta(x) = g(x) - \kappa f_x(x) \in C^{n+1}(\mathbf{S}^1)$, y

(i) Las normas de Sobolev de u_R y v_R pueden acotarse en términos de las normas de Sobolev de los datos iniciales como sigue:

$$\|u_R\|_m^2 + \varepsilon^2 \|v_R\|_m^2 \leq \varepsilon^4\kappa^4 \left(\|f_{xx}\|_m^2 + \varepsilon^2 \frac{3}{2} \|\Delta_{xx}\|_m^2 + \varepsilon^4\kappa^2 \|\Delta_{xxx}\|_m^2 \right) \tag{2.11}$$

con $0 \leq m \leq n-2$ y $\forall t \geq 0$.

(ii) Cuando $n \geq 3$, $u_R = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $v_R = \mathcal{O}(\varepsilon)$ puntualmente y $u, v \in C^{n-3}(\mathbf{S}^1)$ aún en el límite $\varepsilon \to 0$[1].

Prueba. Siempre se puede escribir la solución de (2.4)-(2.5) como se hizo en (2.9)-(2.10); hay que probar que las propiedades (i) y (ii) del teorema valen. Para hacer esto primero obtenemos las ecuaciones para u_R y v_R:

$$u_{Rt} = v_{Rx} \tag{2.12}$$

$$\varepsilon^2 v_{Rt} = u_{Rx} - \frac{1}{\kappa} v_R + \varepsilon^2 \rho, \tag{2.13}$$

[1] Diremos que una función $F(x,t,\varepsilon)$ es de orden ε^p en H^m ($F = \mathcal{O}(\varepsilon^p)$), si $0 \neq lim_{\varepsilon\to 0} [\varepsilon^{-p} F(x,t,\varepsilon)] \in H^m$. $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\varepsilon^0)$.

donde $\rho = -\kappa\,(\Delta_{xx} exp(-t/\kappa\varepsilon^2) + u^0_{xt})$. Definimos ahora la energía para (u_R, v_R):

$$E_R = \frac{1}{L}\int_0^L ((u_R)^2 + \varepsilon^2 (v_R)^2)\; dx = \|u_R\|^2 + \varepsilon^2 \|v_R\|^2. \tag{2.14}$$

Derivando E_R obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{E_R} &= \frac{2}{L}\int_0^L (u_R\; u_{Rt} + \varepsilon^2 v_R\; v_{Rt})\; dx, \\ &= \frac{2}{L}\int_0^L (u_R v_{Rx} + v_R u_{Rx} - \frac{1}{\kappa}(v_R)^2 + \varepsilon^2 \rho v_R)\; dx. \end{aligned}$$

Los primeros dos términos del integrando se cancelan integrando por partes, de forma que:

$$\dot{E_R} = \frac{2}{L}\int_0^L \Big(-\frac{1}{\kappa}(v_R)^2 + \varepsilon^2 \rho v_R\Big)\; dx.$$

Si desecháramos el término definido negativo obtendríamos $\dot{E_R} \leq \frac{1}{\tau} E_R + \tau \int_0^L dx \rho^2$, pero esta cota puede mejorarse; completando cuadrados obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{E_R} &= \frac{2}{L}\int_0^L \Big(-(\frac{v_R}{\sqrt{\kappa}} - \varepsilon^2 \rho \frac{\sqrt{\kappa}}{2})^2 + \frac{\kappa}{4}\varepsilon^4 \rho^2\Big)\; dx \\ &\leq \varepsilon^4 \frac{\kappa}{2L}\int_0^L dx\; \rho^2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

y la cota obtenida es de orden ε^4. Integrando esta desigualdad obtenemos

$$E_R(t) \leq E_R(0) + \varepsilon^4 \frac{\kappa}{2}\int_0^t \|\rho\|^2 (t', \varepsilon)\; dt'. \tag{2.16}$$

Debido a la elección del dato inicial $u_R(t = 0) = 0$ y $v_R(t = 0) = -\varepsilon^2 \kappa^2 \Delta_{xx}$, entonces

$$E_R(0) = \varepsilon^6 \kappa^4\; \|\Delta_{xx}\|^2$$

y la cota para la energía queda

$$E_R(t) \leq \varepsilon^6 \kappa^4\; \|\Delta_{xx}\|^2 + \varepsilon^4 \frac{\kappa}{2}\int_0^t \|\rho\|^2 (t', \varepsilon)\; dt'. \tag{2.17}$$

$\rho = \mathcal{O}(1)$ y por lo tanto $E_R = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$. De la definición de la energía se deduce que $\|u_R\|^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$ y $\|v_R\|^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Recordando la definición de ρ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^t \|\rho\|^2\; dt' &= \frac{\kappa^2}{2L}\int_0^t dt' \int_0^L \Big(\Delta_{xx} exp(-t'/\kappa\varepsilon^2) + u^0_{xt'}\Big)^2\; dx \\ &\leq \frac{\kappa^2}{L}\int_0^t dt' \int_0^L \Big((\Delta_{xx})^2 exp(-2t'/\kappa\varepsilon^2) + (u^0_{xt'})^2\Big)\; dx \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde hemos usado la desigualdad $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. Realizando la integral temporal en el primer término y desechando los términos negativos obtenemos

$$\int_0^t dt' \int_0^L (\Delta_{xx})^2 exp(-2t'/\kappa\varepsilon^2)\, dx \leq \frac{\kappa\varepsilon^2}{2} \int_0^L (\Delta_{xx})^2\, dx.$$

Usando la ecuación límite (2.6) obtenemos para el segundo término en (2.18)

$$\begin{aligned}
\int_0^t dt' \int_0^L (u^0_{xt'})^2\, dx &\leq \kappa \int_0^t dt' \int_0^L u^0_{xt'} u^0_{xxx}\, dx \\
&\leq -\kappa \int_0^t dt' \int_0^L u^0_{xxt'} u^0_{xx}\, dx \\
&\leq -\kappa \int_0^L \left[\frac{1}{2}(u^0_{xx})^2\right]_0^t\, dx \\
&\leq \kappa \int_0^L ((f_{xx})^2 + \varepsilon^4\kappa^2(\Delta_{xxx})^2)\, dx.
\end{aligned}$$

Así, reemplazando en (2.17), obtenemos

$$\|u_R\|^2 + \varepsilon^2\|v_R\|^2 \leq \varepsilon^4\kappa^4 \left(\|f_{xx}\|^2 + \varepsilon^2\frac{3}{2}\|\Delta_{xx}\|^2 + \varepsilon^4\kappa^2\|\Delta_{xxx}\|^2\right). \tag{2.19}$$

Esta es la desigualdad buscada para la norma de L_2. La validez de la desigualdad para normas H^m sigue de la linealidad de las ecuaciones como se explica a continuación. Las derivadas primeras (u_{Rx}, v_{Rx}) obedecen las mismas ecuaciones (2.4) - (2.5) reemplazando ρ por ρ_x; luego, usando una energía $E'_R = \|u_{Rx}\|^2 + \varepsilon^2\|v_{Rx}\|^2$ obtenemos la misma desigualdad (2.19) pero con todas las funciones derivadas una vez respecto de x. Sumando $1/L^2$ veces esta última desigualdad a (2.19) obtenemos la desigualdad (2.11) para $m = 1$. El mismo proceso puede continuarse para todo m tal que el lado derecho de (2.11) permanezca finito; lo cual ocurre, de acuerdo a la diferenciabilidad de los datos iniciales, para $0 \leq m \leq n-2$. Esto prueba la afirmación (i). Finalmente, la afirmación (ii) es consecuencia directa de la afirmación (i) y el teorema del embedding de Sobolev. $\square$

Analicemos ahora el significado del teorema 1. Supongamos que se resuelven los problemas de Cauchy para el sistema (2.4)-(2.5) y la ecuación del calor (2.6) con datos iniciales iguales, a menos de términos de orden ε^2, y suaves para las temperaturas u y u^0, y un "dato extra" arbitrario pero suave para el flujo de calor hiperbólico v. La ecuación (2.9) juntamente con la afirmación (i) dice que la "temperatura hiperbólica" u es igual a la temperatura usual u^0 mas términos de orden ε^2 que tienden suavemente a cero en el límite parabólico; mientras que el "flujo de calor hiperbólico" v es igual al término correspondiente a la ley de Fourier mas dos términos suaves; uno de orden cero en ε que tiende a cero exponencialmente cuando t crece y que aparece debido a que el dato inicial para esta componente es arbitrario, y el otro de orden ε^2.

Como vemos, el "dato extra" tiende a cero exponencialmente con tiempo de decaimiento corto τ. Para entender mejor el significado físico de esta afirmación consideremos lo siguiente. Dividamos la desigualdad (2.11) para $m = 0$ por la energía inicial de Sobolev y escribamos esto como

$$\frac{E_R}{E_T(0)} \leq \frac{\tau^2}{\tau_d^2}, \tag{2.20}$$

donde τ_d es un tiempo construído a partir de los datos iniciales. Para el caso en que $g(x) = \kappa f_x(x)$, ($\Delta = 0$), tenemos

$$\tau_d^2 = \frac{2}{\kappa^2} \frac{\|f\|^2 + \tau\kappa\|f_x\|^2}{\|f_{xx}\|^2}. \tag{2.21}$$

Supongamos que el dato inicial está caracterizado por una longitud típica l, por ejemplo $f(x) \approx f_0 \sin(\frac{2\pi}{l}x)$, entonces

$$\tau_d^2 \approx \frac{2l^4}{(2\pi)^4\kappa^2}, \tag{2.22}$$

y por lo tanto

$$\frac{E_R}{E_T(0)} = \frac{\tau^2}{\tau_d^2} \approx \frac{(2\pi)^4\tau^2\kappa^2}{2l^4}. \tag{2.23}$$

Como ejemplo para un material en condiciones normales consideremos un trozo de hierro a temperatura ambiente; entonces $\kappa \approx 2.1 \times 10^{-1} \frac{cm^2}{sec}$, $\varepsilon \approx \frac{1}{veloc.\ del\ sonido} \approx 2.0 \times 10^{-6} \frac{sec}{cm}$, y por lo tanto $\tau = \varepsilon^2\kappa \approx 8.4 \times 10^{-13}\ sec$. Concluimos que para que las perturbaciones cercanas al equilibrio (temperatura constante) se comporten en forma apreciablemente distinta a la que predice la disipación usual, deben tener una longitud típica $l \leq 2.2 \times 10^{-6}\ cm$.

Para otras configuraciones iniciales se pueden establecer estimaciones similares para los órdenes de magnitud. Hay que notar que mientras el flujo de calor hiperbólico v y su contrapartida en la teoría de Fourier κu_x^0 aproximan el estado de equilibrio $T = constante$ y $q = 0$ con tiempo de decaimiento τ_d, su diferencia tiende a cero (o valores de orden ε) con el tiempo de decaimiento mucho mas corto τ. El teorema pues, no dice simplemente que *"las cosas tienden a equilibrio"*, sino mas precisamente *"el defecto de la ley de Fourier se hace pequeño en un tiempo mucho mas corto que el tiempo típico en que se establece el equilibrio"*.

La solución (u, v) de un sistema hiperbólico como el (2.4)-(2.5) tiene cierto grado de diferenciabilidad que depende de la diferencialbilidad de los datos iniciales. La afirmación no trivial del teorema 1 a este respecto es que la diferenciabilidad se preserva aún en el límite parabólico, es decir la solución es regular en el parámetro ε. Mas aún, si $n \geq 3$, la temperatura hiperbólica u tiende uniformemente a la temperatura parabólica u^0 cuando $\varepsilon \to 0$, ya que

$$\begin{aligned}
|u - u^0| &= |u_R - \kappa\varepsilon^2\Delta_x exp(-t/\kappa\varepsilon^2)| \leq |u_R| + \kappa\varepsilon^2|\Delta_x| exp(-t/\kappa\varepsilon^2) \\
&\leq \sqrt{2}(\|u_R\|_1 + \varepsilon^2\kappa\|\Delta_x\|_1 exp(-t/\kappa\varepsilon^2)) \\
&\leq \sqrt{2}\varepsilon^2\kappa\Big(\kappa(\|f_{xx}\|_1^2 + \varepsilon^2\frac{3}{2}\|\Delta_{xx}\|_1^2 + \varepsilon^4\kappa^2\|\Delta_{xxx}\|_1^2)^{1/2} + \|\Delta_x\|_1 exp(-t/\kappa\varepsilon^2)\Big);
\end{aligned}$$

donde el factor entre paréntesis es regular en ε.

2.3 Limite parabólico en el caso cuasi lineal

Al igual que en el caso lineal, cosideramos la conducción de calor en un cilindro $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^+$ dado por $0 \leq x \leq L$ con 0 y L identificados, y $t \geq 0$. Consideremos las ecuaciones de Coleman, Fabrizio y Owen (2.2) y (2.3) para la temperatura T y el flujo de calor q, que al ser escritas como un sistema simétrico hiperbólico quedan

$$\begin{aligned} [\gamma_0(T) + a'(T)\, q^2]\, T_t &= -q_x + 2\frac{a(T)k(T)}{\tau(T)}\, qT_x + 2\frac{a(T)}{\tau(T)}\, q^2 && (2.24) \\ \frac{\tau(T)}{k(T)}\, q_t &= -T_x - \frac{1}{k(T)} q, && (2.25) \end{aligned}$$

donde $\gamma_0(T) > 0$ es el calor específico, $k(T) > 0$ es la conductividad térmica, $\tau(T) > 0$ es un tiempo de relajación y $a(T) = -T^2(\tau/T^2 k)'/2$. Introducimos ahora el parámetro ε haciendo $\tau(T) = \varepsilon^2 \tilde{\tau}(T)$; de forma tal que $\tau(T) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ y $\tilde{\tau}(T) = \mathcal{O}(1)$. Luego, $a(T) = \varepsilon^2 \tilde{a}(T)$ con $\tilde{a}(T) = -T^2(\tilde{\tau}/T^2 k)'/2$. Las ecuaciones (2.24)-(2.25) pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_T\, T_t &= -q_x + 2\frac{ak}{\tau}\, qT_x + 2\frac{a}{\tau}\, q^2 && (2.26) \\ \varepsilon^2 \Gamma_q\, q_t &= -T_x - \frac{1}{k} q && (2.27) \end{aligned}$$

donde

$$\Gamma_T(T, q) = \gamma_0 + \varepsilon^2 \tilde{a}'\, q^2, \qquad \Gamma_q(T) = \frac{\tilde{\tau}}{k}. \qquad (2.28)$$

Las ecuaciones (2.26)-(2.27) constituyen una familia monoparamétrica de sistemas que en el límite $\varepsilon \to 0$ conducen a un sistema parabólico. Llamando (T^0, q^0) a la solución de este sistema obtenemos,

$$\begin{aligned} \gamma_0(T^0)\, T^0_t &= -q^0_x && (2.29) \\ 0 &= -T^0_x - \frac{1}{k(T^0)} q^0. && (2.30) \end{aligned}$$

Como q^0 es en este límite una variable dependiente, podemos escribir equivalentemente

$$\gamma_0(T^0)\, T^0_t = [k(T^0)\, T^0_x]_x. \qquad (2.31)$$

Para ambos sistemas (2.26)-(2.27) y (2.29)-(2.30), $(T = \mathit{constante}, q = 0)$ es un solución de equilibrio. Mostraremos que dada una solución T^0 de la ecuación parabólica, suficientemente cercana a equilibrio, siempre existe una solución (T, q) del sistema hiperbólico que aproxima a $(T^0, -kT^0_x)$ durante un cierto intervalo de tiempo. Escribiremos el dato inicial para (2.31) como sigue

$$T^0|_{t=0} = \overline{T^0} + f(x) \qquad \text{con} \qquad \overline{T^0} = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, T^0|_{t=0} > 0 \qquad (2.32)$$

Elegiremos el dato inicial para (2.26)-(2.27) como

$$T|_{t=0} = T^0|_{t=0} = \overline{T^0} + f(x) \qquad \text{y} \qquad q|_{t=0} = -k\,\frac{df}{dx}. \tag{2.33}$$

Esta elección de los datos iniciales se conocen como *proceso de inicialización* [14] [15]. A continuación restringiremos el estudio al caso $k = constante$ para simplificar algunas cuentas, pero esta no es una restricción necesaria.

Teorema 2.2 *Sean $\gamma_0(T)$ y $\tilde{\tau}(T)$ funciones suaves definidas positivas mientras $T > 0$. Sea T^0 una solución de (2.31) con dato inicial (2.32) donde $\|f\|_5 < C\overline{T^0}$ y $C > 0$ es suficientemente pequeña. Existe un intervalo de tiempo $[0, t_0]$, $t_0 > 0$ es independiente de ε, tal que la solución (T, q) de (2.26)-(2.27), con datos iniciales (2.33), satisface*

$$T = T^0 + T_R \qquad y \qquad q = -kT^0_x + q_R \qquad t \in [0, t_0] \tag{2.34}$$

donde $T_R = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ y $q_R = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en el sentido de H^2.

<u>*Prueba*</u>. La solución (T, q) siempre puede puede escribirse como se hizo en (2.34). Tenemos que probar que $T_R = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ y $q_R = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en el sentido de H^2.

Usando las ecuaciones (2.26)-(2.27) y (2.31) encontramos las ecuaciones para (T_R, q_R),

$$\Gamma_T\, T_{Rt} = -q_{Rx} + 2\frac{\tilde{a}}{\Gamma_q} q T_{Rx} + 2k\frac{\tilde{a}}{\Gamma_q} q q_R - \varepsilon^2 \tilde{a}'' T^0_t q^2 + H \tag{2.35}$$

$$\varepsilon^2\, \Gamma_q\, q_{Rt} = -T_{Rx} - \frac{1}{k} q_R + \varepsilon^2 k \Gamma_q T^0_{xt} \tag{2.36}$$

donde

$$H(T) = -[\gamma_0(T) - \gamma_0(T^0)]\; T^0_t.$$

Derivando (2.35) y (2.36), y usando las mismas, se obtienen las ecuaciones para (T_{Rx}, q_{Rx}) y (T_{Rxx}, q_{Rxx}). La elección de los datos iniciales implica que $T_R|_{t=0} = T_{Rx}|_{t=0} = T_{Rxx}|_{t=0} = 0$ y $q_R|_{t=0} = q_{Rx}|_{t=0} = q_{Rxx}|_{t=0} = 0$.

Escribimos $T^0(x, t) = \overline{T^0} + \tilde{T}^0(x, t)$ y vemos que

$$\tilde{T}^0_t = \kappa(\tilde{T}^0)\, \tilde{T}^0_{xx} \qquad \kappa(\tilde{T}^0) := \frac{k}{\gamma_0(\overline{T^0} + \tilde{T}^0)} > 0 \tag{2.37}$$

con dato inicial $\tilde{T}|_{t=0} = f(x)$. Es sabido que la solución $\tilde{T}^0$ de una ecuación fuertemente parabólica como (2.37) satisface las estimaciones (ver [22])

$$\|\tilde{T}^0\|_s(t) \leq P(\|\kappa\|_s, \|\tilde{T}^0|_{t=0}\|_s, t) < \infty \quad t \geq 0 \quad s = 3, 4, 5, ... \tag{2.38}$$

donde P es una función regular de todos sus argumentos que se anula cuando $\|\tilde{T}^0|_{t=0}\|_s \to 0$. Podemos tomar $s = 5$ en (2.38) de forma tal que si C en la hipótesis que acota la norma H^5

de f es suficientemente pequeña, obtenemos que durante un intervalo de tiempo finito $[0, t_1]$, $|\tilde{T}^0| \leq \sqrt{2}\|\tilde{T}^0\|_1 \leq \overline{T^0}/3$ y en consecuencia,

$$\frac{2}{3}\overline{T^0} \leq T^0(x,t) \leq \frac{4}{3}\overline{T^0} \qquad t \in [0, t_1]. \tag{2.39}$$

Para construir la estimación de la energía tomamos $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, donde ε_0 se fijara mas abajo, y hacemos las siguientes suposiciones *a priori*:

(i) Existen dos constantes positivas K_T y K_q tales que $\Gamma_T > K_T$ y $\Gamma_q > K_q$.

Esta suposición nos permite definir el funcional energía para (T_R, q_R) como sigue:

$$\begin{aligned} E_R(t,\varepsilon) \quad = \quad & \frac{1}{\varepsilon^n L}\int_0^L \Gamma_T\left[(T_R)^2 + L^2(T_{Rx})^2 + L^4(T_{Rxx})^2\right]dx \; + \\ & + \frac{1}{\varepsilon^{(n-2)} L}\int_0^L \Gamma_q\left[(q_R)^2 + L^2(q_{Rx})^2 + L^4(q_{Rxx})^2\right]dx \end{aligned} \tag{2.40}$$

donde n es no negativo. Una consecuencia directa de la suposición (i) es que

$$\|T_R\|_2^2 \;\leq\; \frac{\varepsilon^n}{K_T} E_R \tag{2.41}$$

$$\|q_R\|_2^2 \;\leq\; \frac{\varepsilon^{(n-2)}}{K_q} E_R. \tag{2.42}$$

Estas desigualdades juntamente con el Teorema del Embedding de Sobolev implican

$$|T_R| \;\leq\; \sqrt{2}\,\|T_R\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{K_T}}\,\varepsilon^{n/2}\sqrt{E_R} \tag{2.43}$$

$$|T_{Rx}| \;\leq\; \frac{\sqrt{2}}{L}\,\|LT_{Rx}\|_1 \leq \sqrt{\frac{2}{K_T}}\frac{\varepsilon^{n/2}}{L}\sqrt{E_R} \tag{2.44}$$

$$|q_R| \;\leq\; \sqrt{2}\,\|q_R\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{K_q}}\,\varepsilon^{(n-2)/2}\sqrt{E_R} \tag{2.45}$$

$$|q_{Rx}| \;\leq\; \frac{\sqrt{2}}{L}\,\|Lq_{Rx}\|_1 \leq \sqrt{\frac{2}{K_q}}\,\frac{\varepsilon^{(n-2)/2}}{L}\sqrt{E_R}. \tag{2.46}$$

(ii) Supondremos que

$$E_R(t,\varepsilon) \leq \frac{K_T}{2\,\varepsilon_0^n}\left(\frac{\overline{T^0}}{3}\right)^2.$$

Esta suposición nos permite reescribir las cotas (2.43)– (2.46) en términos de $\overline{T^0}$, ε, ε_0 K_T y K_q:

$$|T_R| \;\leq\; \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{n/2}\frac{\overline{T^0}}{3} \tag{2.47}$$

$$|T_{Rx}| \;\leq\; \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{n/2} \frac{\overline{T^0}}{3L} \tag{2.48}$$

$$|q_R| \;\leq\; \sqrt{\frac{K_T}{K_q}}\, \frac{\varepsilon^{(n-2)/2}}{\varepsilon_0^{n/2}}\, \frac{\overline{T^0}}{3} \tag{2.49}$$

$$|q_{Rx}| \;\leq\; \sqrt{\frac{K_T}{K_q}}\, \frac{\varepsilon^{(n-2)/2}}{\varepsilon_0^{n/2}}\, \frac{\overline{T^0}}{3L} \tag{2.50}$$

Notemos que (2.39) y (2.47) implican que $0 < \overline{T^0}/3 \leq T \leq 5\overline{T^0}/3$ y por lo tanto $1/T \leq 3/\overline{T^0} < \infty$. $\tilde{\tau}(T) > 0$ y $1/\tilde{\tau}(T)$ son funciones suaves de T en este rango.

La tarea principal de la prueba consiste en encontrar una estimación (cota) para la energía que sea regular en ε. Esta estimación se obtendrá a partir de una desigualdad diferencial que obedece E_R. Comenzamos derivando (2.40) con respecto a t,

$$\begin{aligned} E_{Rt} \;=\; & \frac{1}{\varepsilon^n L}\int_0^L \Gamma_{Tt}\left[(T_R)^2 + L^2(T_{Rx})^2 + L^4(T_{Rxx})^2\right] dx \;+ \\ & + \frac{1}{\varepsilon^{(n-2)} L}\int_0^L \Gamma_{qt}\left[(q_R)^2 + L^2(q_{Rx})^2 + L^4(q_{Rxx})^2\right] dx \,+ \\ & + \frac{2}{\varepsilon^n L}\int_0^L \Gamma_T\left[T_R\, T_{Rt} + L^2 T_{Rx}\, T_{Rxt} + L^4 T_{Rxx}\, T_{Rxxt}\right] dx \;+ \\ & + \frac{2}{\varepsilon^{(n-2)} L}\int_0^L \Gamma_q\left[q_R\, q_{Rt} + L^2 q_{Rx}\, q_{Rxt} + L^4 q_{Rxx}\, q_{Rxxt}\right] dx \end{aligned} \tag{2.51}$$

Usamos ahora las ecuaciones para T_R, T_{Rx},T_{Rxx}, q_R, q_{Rx} y q_{Rxx} y las definiciones de Γ_T and Γ_q para, luego de realizar integraciones por partes para cancelar los términos simétricos y ciertos arreglos algebraicos, obtener

$$\begin{aligned} E_{Rt}(t) \;=\; & \frac{1}{\varepsilon^n L}\int_0^L \left[Q_1\,(T_R)^2 + Q_2\, L^2\,(T_{Rx})^2 + Q_3\, L^4\,(T_{Rxx})^2\right] dx \,+ \\ & + \frac{1}{\varepsilon^{(n-2)} L}\int_0^L \left[P_1\, T_R + P_2\, L\, T_{Rx} + P_3\, L^2\, T_{Rxx}\right]\; dx \quad + \\ & + \frac{1}{\varepsilon^{(n-2)} L}\int_0^L \left[Q_4\,(q_R)^2 + Q_5\, L^2\,(q_{Rx})^2 + Q_6\, L^4\,(q_{Rxx})^2\right] dx \,+ \\ & + \frac{1}{\varepsilon^{(n-2)} L}\int_0^L \left[R_1\, q_R + R_2\, L\, q_{Rx} + R_3\, L^2\, q_{Rxx}\right]\; dx \,+ \\ & + \frac{1}{\varepsilon^n L}\int_0^L \left[R_4\, q_R + R_5\, L\, q_{Rx} + R_6\, L^2\, q_{Rxx}\right]\; dx \,- \\ & - \frac{1}{\varepsilon^n L}\int_0^L \left[S_1\,(q_R)^2 + S_2\, L^2(q_{Rx})^2 + S_3\, L^4\,(q_{Rxx})^2\right]\; dx \end{aligned} \tag{2.52}$$

donde Q_i para $i = 1, ..., 6$, P_i y R_i para $i = 1, 2, 3$ son funciones suaves de T_R, T_{Rx}, q_R, q_{Rx} y ε. R_i para $i = 4, 5, 6$ son de la forma

$$R_i = R_{i1} T_R + R_{i2} T_{Rx} + R_{i3} T_{Rxx}$$

donde R_{ij}, $j = 1, 2, 3$. Cabe aclarar aquí que no damos explícitamente las expresiones de las funciones Q_i, P_i y R_i por no estar unívocamente determinadas y no ser necesario para la continuidad de la prueba, siendo su única propiedad relevante la dependencia suave en las variables como indicó. Por el contrario damos explícitamente las expresiones de S_i,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{k}\Bigg[2 + \Delta\Gamma_q L^2 T^0_{xx} - \Delta\Gamma_q L^4 T^0_{xxxx} + 2(\Delta\Gamma_q)^2 L^4 (T^0_{xx})^2 + 2(\Delta\Gamma_q)^2 L^4 T^0_x T^0_{xxx} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT} L^2 (T^0_x)^2 + 4\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT} L^4 (T^0_x)^2 T^0_{xx} + 2\left(\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT}\right)^2 L^4 (T^0_x)^4 + \\ &\quad + 6\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT}\Delta\Gamma_q L^4 (T^0_x)^2 T^0_{xx} - 4\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT} L^4 T^0_x T^0_{xxx} - 3\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT} L^4 (T^0_{xx})^2 + \\ &\quad + 2\frac{d^2\Delta\Gamma_q}{dT^2} L^4 \Delta\Gamma_q (T^0_x)^4 + 6\frac{d^2\Delta\Gamma_q}{dT^2} L^4 \Delta\Gamma_q (T^0_x)^2 T^0_{xx} - \frac{d^3\Delta\Gamma_q}{dT^3} L^4 (T^0_x)^4\Bigg] \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$S_2 = \frac{1}{k}\left[2 + \frac{3}{2}\Delta\Gamma_q L^2 T^0_{xx} - 2(\Delta\Gamma_q)^2 L^2 (T^0_x)^2 + \frac{3}{2}\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT} L^2 (T^0_x)^2\right] \tag{2.54}$$

$$S_3 = \frac{2}{k} \tag{2.55}$$

donde

$$\Delta\Gamma_q(T) = \frac{\Gamma_q'}{\Gamma_q}. \tag{2.56}$$

La ecuación (2.52) da una expresión exacta para la derivada de E_R. Comenzamos ahora a acotar los distintos términos en (2.52). La primera línea se acota como sigue

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon^n L}\int_0^L \left[Q_1\ (T_R)^2 + Q_2\ L^2\ (T_{Rx})^2 + Q_3\ L^4\ (T_{Rxx})^2\right] dx \leq \\ &\qquad \leq (|Q_1|_\infty + |Q_2|_\infty + |Q_3|_\infty)\,\frac{\|T_R\|_2^2}{\varepsilon^n} \end{aligned} \tag{2.57}$$

Las normas en L^∞ se entienden tomadas mientras las variables satisfacen (2.47) - (2.50) y $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. La segunda línea en (2.52) se acota como sigue

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon^{(n-2)}L}\int_0^L \left[P_1\ T_R + P_2\ L\ T_{Rx} + P_3\ L^2\ T_{Rxx}\right]\ dx\ = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{(n-2)}L}\int_0^L \left[(\varepsilon\sqrt{\tilde{t}}P_1)\ \left(\frac{T_R}{\varepsilon\sqrt{\tilde{t}}}\right) + (\varepsilon\sqrt{\tilde{t}}P_2)\ L\ \left(\frac{T_{Rx}}{\varepsilon\sqrt{\tilde{t}}}\right) + (\varepsilon\sqrt{\tilde{t}}P_3)\ L^2\ \left(\frac{T_{Rxx}}{\varepsilon\sqrt{\tilde{t}}}\right)\right]\ dx \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon^{(n-2)}L}\int_0^L \varepsilon^2\tilde{t}[(P_1)^2 + (P_2)^2 + (P_3)^2]\ dx\ + \\ &\qquad + \frac{1}{\varepsilon^{(n-2)}L}\int_0^L \frac{1}{\varepsilon^2\tilde{t}}[(T_R)^2 + L^2(T_{Rx})^2 + L^4(T_{Rxx})^2]\ dx \\ &\leq \frac{\varepsilon^{(4-n)}}{2}\ \tilde{t}\ (|P_1^2|_\infty + |P_2^2|_\infty + |P_3^2|_\infty) + \frac{1}{2\tilde{t}}\ \frac{\|T_R\|_2^2}{\varepsilon^n} \end{aligned} \tag{2.58}$$

donde hemos usado la desigualdad elemental $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. La constante $\tilde{t}$ tiene unidades de tiempo y se elige tal que minimice la cota en (2.58). La tercera línea en (2.52) se acota análogamente a la primera

$$\frac{1}{\varepsilon^{(n-2)}L}\int_0^L \left[Q_4\ (q_R)^2 + Q_5\ L^2\ (q_{Rx})^2 + Q_6\ L^4\ (q_{Rxx})^2\right] dx \leq$$
$$\leq (|Q_4|_\infty + |Q_5|_\infty + |Q_6|_\infty)\,\frac{\|q_R\|_2^2}{\varepsilon^{(n-2)}}. \tag{2.59}$$

Para acotar las líneas cuarta, quinta y sexta acotamos primero las funciones S_1 y S_2

$$\begin{aligned} S_1 \ \geq\ & \frac{1}{k}\Bigg\{ 2 - |\Delta\Gamma_q| L^2 |T^0_{xx}| - |\Delta\Gamma_q| L^4 |T^0_{xxxx}| - 2|\Delta\Gamma_q|^2 L^4 |T^0_{xx}|^2 - 2|\Delta\Gamma_q|^2 L^4 |T^0_x||T^0_{xxx}| - \\ & -\frac{1}{2}\left|\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT}\right| L^2 |T^0_x|^2 - 4\left|\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT}\right| L^4 |T^0_x|^2 |T^0_{xx}| - 2\left|\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT}\right|^2 L^4 |T^0_x|^4 - \\ & -6\left|\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT}\right| |\Delta\Gamma_q| L^4 |T^0_x|^2 |T^0_{xx}| - 4\left|\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT}\right| L^4 |T^0_x||T^0_{xxx}| - 3\left|\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT}\right| L^4 |T^0_{xx}|^2 - \\ & -2\left|\frac{d^2\Delta\Gamma_q}{dT^2}\right| L^4 |\Delta\Gamma_q||T^0_x|^4 - 6\left|\frac{d^2\Delta\Gamma_q}{dT^2}\right| L^4 |\Delta\Gamma_q||T^0_x|^2 |T^0_{xx}| - \left|\frac{d^3\Delta\Gamma_q}{dT^3}\right| L^4 |T^0_x|^4 \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$S_2 \ \geq\ \frac{1}{k}\left\{2 - \frac{3}{2}|\Delta\Gamma_q| L^2 |T^0_{xx}| - 2|\Delta\Gamma_q|^2 L^2 |T^0_x|^2 - \frac{3}{2}\left|\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT}\right| L^2 |T^0_x|^2\right\}. \tag{2.61}$$

Puesto que estas expresiones involucran hasta derivadas cuartas de T^0, requerimos que la constante C del enunciado del teorema sea suficientemente pequeña tal que el teorema del embedding de Sobolev y la ecuación (2.38) garanticen que

$$\begin{aligned} & |\Delta\Gamma_q|_\infty \left|L^i \frac{d^iT^0}{dx^i}\right| \leq \frac{1}{20} \qquad i \leq 4 \\ & \left|\frac{d\Delta\Gamma_q}{dT}\right|_\infty \left|L^i \frac{d^iT^0}{dx^i}\right| \left|L^j \frac{d^jT^0}{dx^j}\right| \leq \frac{1}{20} \qquad i+j \leq 4 \\ & \left|\frac{d^2\Delta\Gamma_q}{dT^2}\right|_\infty \left|L^i \frac{d^iT^0}{dx^i}\right| \left|L^j \frac{d^jT^0}{dx^j}\right| \left|L^l \frac{d^lT^0}{dx^l}\right| \leq \frac{1}{20} \qquad i+j+l \leq 4 \\ & \left|\frac{d^3\Delta\Gamma_q}{dT^3}\right|_\infty \left|L \frac{dT^0}{dx}\right|^4 \leq \frac{1}{20} \end{aligned} \tag{2.62}$$

durante el intervalo de tiempo $[0, t_1]$. Con estas condiciones, (2.60), (2.61) implican que

$$S_1 \geq \frac{1}{k} > 0 \tag{2.63}$$

y

$$S_2 \geq \frac{1}{k} > 0. \tag{2.64}$$

Además

$$S_3 = \frac{2}{k} > 0. \tag{2.65}$$

Estas tres cotas para las S_i nos dicen que la sexta línea en (2.52) es definida negativa. Acotamos las líneas cuarta, quinta y sexta como sigue

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^{(n-2)} L} \int_0^L \Big[R_1 \; q_R + R_2 \; L \; q_{Rx} + R_3 \; L^2 \; q_{Rxx} \Big] \; dx + \\
& + \frac{1}{\varepsilon^n L} \int_0^L \Big[R_4 \; q_R + R_5 \; L \; q_{Rx} + R_6 \; L^2 \; q_{Rxx} \Big] \; dx - \\
& - \frac{1}{\varepsilon^n L} \int_0^L \Big[S_1 \; (q_R)^2 + S_2 \; L^2 (q_{Rx})^2 + S_3 \; L^4 \; (q_{Rxx})^2 \Big] \; dx \leq \\
\leq \; & \frac{1}{\varepsilon^n L} \int_0^L \Big[(\varepsilon^2 R_1 + R_4) \; q_R + (\varepsilon^2 R_2 + R_5) \; L \; q_{Rx} + \\
& + (\varepsilon^2 R_3 + R_6) \; L^2 \; q_{Rxx} - \frac{1}{k} (q_R)^2 - \frac{L^2}{k} (q_{Rx})^2 - \frac{2L^4}{k} (q_{Rxx})^2 \Big] \; dx \\
\leq \; & \frac{1}{\varepsilon^n L} \int_0^L \frac{k}{4} \Big[(\varepsilon^2 R_1 + R_4)^2 + (\varepsilon^2 R_2 + R_5)^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon^2 R_3 + R_6)^2 \Big] \; dx \\
\leq \; & \frac{\varepsilon^{(4-n)}}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \Big[(R_1)^2 + (R_2)^2 + \frac{1}{2} (R_3)^2 \Big] + \frac{1}{\varepsilon^n L} \int_0^L \frac{1}{2} \Big[(R_4)^2 + (R_5)^2 + \frac{1}{2} (R_6)^2 \Big] \; dx \leq \\
\leq \; & \frac{\varepsilon^{(4-n)}}{2} \Big[|R_1^2|_\infty + |R_2^2|_\infty + \frac{1}{2} |R_3^2|_\infty \Big] + \frac{1}{\varepsilon^n L} \int_0^L \frac{3}{2} \Big\{ \Big[(R_{41})^2 + (R_{51})^2 + \frac{1}{2} (R_{61})^2 \Big] (T_R)^2 + \\
& + L^2 \Big[(R_{42})^2 + (R_{52})^2 + \frac{1}{2} (R_{62})^2 \Big] (T_{Rx})^2 + L^4 \Big[(R_{43})^2 + (R_{53})^2 + \frac{1}{2} (R_{63})^2 \Big] (T_{Rxx})^2 \Big\} \\
\leq \; & \frac{\varepsilon^{(4-n)}}{2} \Big[|R_1^2|_\infty + |R_2^2|_\infty + \frac{1}{2} |R_3^2|_\infty \Big] + \frac{3}{2} \Big[|R_{41}^2|_\infty + |R_{51}^2|_\infty + \frac{1}{2} |R_{61}^2|_\infty + \\
& + |R_{42}^2|_\infty + |R_{52}^2|_\infty + \frac{1}{2} |R_{62}^2|_\infty + |R_{43}^2|_\infty + |R_{53}^2|_\infty + \frac{1}{2} |R_{63}^2|_\infty \Big] \frac{\|T_R\|_2^2}{\varepsilon^n}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

donde hemos usado (2.63), (2.64) y (2.65) para obtener la primera desigualdad; completamos cuadrados y tiramos los términos negativos para obtener la segunda.

Usamos ahora las cotas (2.57), (2.58), (2.59) y (2.66) juntamente con (2.41) y (2.42) para obtener

$$E_{Rt}(t) \leq \varepsilon^{(4-n)} P(t, \varepsilon) + Q(t, \varepsilon) E_R \tag{2.67}$$

donde $P(t, \varepsilon), \; Q(t, \varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ estan dadas por

$$P(t, \varepsilon) \;\; = \;\; \frac{1}{2} \; [\tilde{t} \; (|P_1^2|_\infty + |P_2^2|_\infty + |P_3^2|_\infty) + |R_1^2|_\infty + |R_2^2|_\infty + |R_3^2|_\infty]$$

$$
\begin{aligned}
Q(t,\varepsilon) \quad = \quad & |Q_1|_\infty + |Q_2|_\infty + |Q_3|_\infty + |Q_4|_\infty + |Q_5|_\infty + |Q_6|_\infty + \frac{1}{2\tilde{t}} + \\
& + \frac{3}{2}\Big(|R^2_{41}|_\infty + |R^2_{51}|_\infty + \frac{1}{2}|R^2_{61}|_\infty + |R^2_{42}|_\infty + |R^2_{52}|_\infty + \\
& + \frac{1}{2}|R^2_{62}|_\infty + |R^2_{43}|_\infty + |R^2_{53}|_\infty + \frac{1}{2}|R^2_{63}|_\infty \Big)
\end{aligned}
$$

A partir de (2.67) es obvio que el máximo valor de n en (2.40) para que la cota de la energía sea regular en ε es $n = 4$. Concluímos que la energía E_R está acotada por la solución de una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$
y_t(t,\varepsilon) = F(y,t,\varepsilon), \qquad y|_{t=0} = E_R(t=0,\varepsilon) = 0 \tag{2.68}
$$

donde F es una función regular de todas las variables. Por lo tanto, existe un intervalo de tiempo finito durante el cual la solución de esta ecuación existe y es regular (suave) en t y ε.

Para concluir la prueba sólo falta verificar que las suposiciones a priori (i) y (ii) valen. La positividad de $\gamma_0|_{t=0}$ implica que existe una constante positiva K_T tal que $\gamma_0|_{t=0} > 2K_T > 0$; por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\Gamma_T|_{t=0} > (3/2)K_T$. Por otra parte la positividad de $\tilde{\tau}/k|_{t=0}$ garantiza la existencia de $K_q > 0$ tal que $\Gamma_q|_{t=0} > (3/2)K_q$. Además $E_R(t=0) = 0$. Todo esto asegura las suposiciones a priori (i) y (ii) valen inicialmente (en $t = 0$). Además como la solución de (2.68) es suave en un intervalo finito de tiempo, existe otro intervalo no mayor $[0, t_0]$ ($t_0 \leq t_1$) tal que las suposiciones (i) y (ii) valen y por lo tanto E_R es una función suave de t y ε durante ese intervalo. El resultado del teorema sigue entonces de las desigualdades (2.41) y (2.42). □

3 Existencia global y decaimiento exponencial para sistemas simétrico hiperbólicos cuasi lineales de conducción de calor

3.1 Conceptos previos

Morro y Ruggeri encontraron un sistema hiperbólico de ecuaciones (alternativo al de CFO) para describir la conducción de calor en sólidos consistente con los principios de la termodinámica (ver apéndice). Nos interesa estudiar la estabilidad de las soluciones del problema de Cauchy para dicho sistema de ecuaciones. Las variables más convenientes para escribir este sistema son la densidad de energía e y el flujo de calor $\vec{q}$. Con estas variables la conservación de la energía (1.2) es, en este caso, una ecuación lineal. Al igual que en el capítulo 2 estudiaremos el problema de valores iniciales en el caso unidimensional y periódico, es decir, para $e(x,t)$ y $q(x,t)$ con $(x,t) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$. En este caso las ecuaciones de MOrro y Ruggeri, (A.36) y (A.37), escritas como un sistema simétrico hiperbólico, quedan:

$$
\begin{aligned}
e_t &= -q_x && (3.1)\\
\frac{1}{v^2}\, q_t &= -e_x - \frac{1}{\kappa}\, q + \delta\, q\, q_x, && (3.2)
\end{aligned}
$$

donde $v = v(e) > 0$ es la velocidad de las ondas de temperatura, $\kappa = \kappa(e) > 0$ es la difusividad térmica y $\delta = \delta(e)$ es función del calor específico del sólido.

Es fácil ver que (e, q) es una solución de equilibrio (estacionaria) de (3.1)-(3.2) si y solo si $e = \text{const.}$ y $q = 0$. Además la ecuación (3.1) es una ley de conservación, por lo tanto:

$$
\bar{e} = \frac{1}{L}\int_0^L e(x,t)\, dx = \text{const.}
$$

Redefinimos la variable e restando de la misma $\bar{e}$; de esta forma la unica solución de equilibrio para el sistema de ecuaciones es $(e = 0, q = 0)$. Esta suposción es técnicamente conveniente ya que, si e tiene integral espacial igual a cero, valen las desigualdades de Poincaré (ver [23] y [24])

$$
\|e\|_{L^\infty} \leq L\, \|e_x\|. \tag{3.3}
$$

Además, como $\|e\| \leq \|e\|_{L^\infty}$, (3.3) implica

$$
\|e\| \leq L\|e_x\|. \tag{3.4}
$$

Supondremos que $\kappa(e)$ y $v(e)$ son funciones positivas y contínuas si $e \in [-e_0, e_0]$, $e_0 > 0$. Definimos

$$
\begin{aligned}
\kappa_{min} &:= \min_{|e|\leq e_0}\{\kappa(e)\}, & v_{min} &:= \min_{|e|\leq e_0}\{v(e)\}\\
\kappa_{max} &:= \max_{|e|\leq e_0}\{\kappa(e)\}, & v_{max} &:= \max_{|e|\leq e_0}\{v(e)\}.
\end{aligned}
$$

3.2 Ejemplo lineal y construcción de la energía

Consideraremos ahora un ejemplo lineal simple que ilustrará la idea de la prueba de estabilidad y motivará la definición de la energía que usaremos en el caso no lineal. Las ecuaciones en este ejemplo son (3.1) y (3.2) donde v y κ son constantes y $\delta = 0$:

$$e_t = -q_x, \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{v^2} q_t = -e_x - \frac{1}{\kappa} q. \tag{3.6}$$

El funcional energía para un sistema simétrico hiperbólico como el (3.1) - (3.2) o el (3.5) - (3.6) se define normalmente como,

$$\tilde{E} \equiv \frac{1}{2L} \int_0^L \Big[e^2 + L^2 (e_x)^2 + L^4 (e_{xx})^2 + \frac{1}{v^2} q^2 + \frac{L^2}{v^2} (q_x)^2 + \frac{L^4}{v^2} (q_{xx})^2 \Big] \, dx. \tag{3.7}$$

Notemos que $\tilde{E}$ es equivalente a la norma en H^2 al cuadrado, $\tilde{E} \equiv \frac{1}{2} \Big(\|e\|_2^2 + \frac{1}{v^2} \|q\|_2^2 \Big)$. La solución de equilibrio tiene energía igual a cero.

Con esta definición de energía podemos probar fácilmente existencia global de soluciones.

Proposición 3.1 *Para el sistema (3.5) - (3.6),* $\tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(t = 0)$, $t \geq 0$.

Prueba. Si (e, q) es una solución de (3.5) - (3.6) entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{E}}{dt} &= \frac{1}{L} \int_0^L \Big[e(-q_x) + L^2 e_x (-q_{xx}) + L^4 e_{xx} (-q_{xxx}) + q \Big(-e_x - \frac{1}{\kappa} q \Big) + \\ &\quad + L^2 q_x \Big(-e_{xx} - \frac{1}{\kappa} q_x \Big) + L^4 q_{xx} \Big(-e_{xxx} - \frac{1}{\kappa} q_{xx} \Big) \Big] dx \\ &= -\frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{\kappa} [q^2 + L^2 (q_x)^2 + L^4 (q_{xx})^2] dx \leq 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde se ha usado la simetría del sistema (3.5) - (3.6) y la periodicidad del problema para cancelar seis términos mediante integración por partes. □

La proposición 3.1 implica que existe una solución global y acotada $(e, q) \in H^2(\mathbf{S}^1)$ para el problema de Cauchy de (3.5) - (3.6), siempre que los datos iniciales esten acotados en $H^2(\mathbf{S}^1)$. Este resultado, aunque importante, no es completamente satisfactorio ya que no implica el decaimiento de la solución a equilibrio. Mas aún, usando $\tilde{E}$, la proposición 3.1 no puede ser generalizada al sistema no lineal (3.1) - (3.2); pues ciertos términos nuevos (que provienen de las nolinealidades) rompen la no positividad de $d\tilde{E}/dt$. Por lo tanto, usando $\tilde{E}$, lo máximo que uno puede obtener para el caso no lineal es existencia local.

Para obtener existencia global y decaimiento exponencial a equilibrio, seguimos un idea de Matsumura [20] e introducimos una nueva energía.

Definición 3.1 *Sea (e,q) una solución de (3.1) - (3.2) o (3.5) - (3.6), y $0<\lambda<1$. La energía E de (e,q) se define como,*

$$\begin{aligned} E \quad &\equiv \quad \frac{1}{2L}\int_0^L \Big[e^2 + L^2(e_x)^2 + L^4(e_{xx})^2 + \frac{1}{v^2}q^2 + \frac{L^2}{v^2}(q_x)^2 + \frac{L^4}{v^2}(q_{xx})^2 + \\ &\quad +2\lambda\frac{L}{v}qe_x + 2\lambda\frac{L^3}{v}q_x e_{xx}\Big]\,dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Establezcamos primero la equivalencia entre E y el cuadrado de la norma $H^2(\mathbf{S}^1)$.

Lema 3.1 *Si $v_{min}>0$, entonces:*

$$\Big(\frac{1-\lambda}{2}\Big)\Big(\|e\|_2^2 + \frac{1}{v_{max}^2}\|q\|_2^2\Big) \le E \le \Big(\frac{1+\lambda}{2}\Big)\Big(\|e\|_2^2 + \frac{1}{v_{min}^2}\|q\|_2^2\Big).$$

<u>Prueba</u>. La energía E puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} E \quad &= \quad \frac{1}{2L}\int_0^L \Big[e^2 + \frac{1}{2}(1+\lambda)(q/v + Le_x)^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda)(q/v - Le_x)^2 + \\ &\quad +\frac{L^2}{2}(1+\lambda)(q_x/v + Le_{xx})^2 + \frac{L^2}{2}(1-\lambda)(q_x/v - Le_{xx})^2 + \frac{L^4}{v^2}(q_{xx})^2\Big]dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\lambda} \quad &= \quad \frac{1}{(1-\lambda)}\frac{1}{2L}\int_0^L \Big[e^2 + \frac{L^4}{v^2}(q_{xx})^2\Big]dx + \frac{1}{2L}\int_0^L \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)(q/v + Le_x)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(q/v - Le_x)^2 + \frac{L^2}{2}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)(q_x/v + Le_{xx})^2 + \frac{L^2}{2}(q_x/v - Le_{xx})^2\right]dx. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ahora bien, como $1/(1-\lambda)>1$ y $(1+\lambda)/(1-\lambda)>1$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\lambda} \quad &\ge \quad \frac{1}{2L}\int_0^L \Big[e^2 + L^2(e_x)^2 + L^4(e_{xx})^2 + \frac{1}{v^2}q^2 + \frac{L^2}{v^2}(q_x)^2 + \frac{L^4}{v^2}(q_{xx})^2\Big]\,dx \\ &\ge \quad \frac{1}{2}\Big(\|e\|_2^2 + \frac{1}{v_{max}^2}\|q\|_2^2\Big). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Concluimos que $E \ge \frac{1-\lambda}{2}\Big(\|e\|_2^2 + \frac{1}{v_{max}^2}\|q\|_2^2\Big)$. Un cálculo similar muestra que $E \le \frac{1+\lambda}{2}\Big(\|e\|_2^2 + \frac{1}{v_{min}^2}\|q\|_2^2\Big)$. □

Probamos ahora otra propiedad de E que será util para construir la estimación para la energía. En lo que sigue utilizaremos la hipótesis $\kappa_{max} \le Lv_{min}$ que impone una cota inferior para la longitud del intervalo L. Cabe aclarar que si bien esta hipótesis se introduce por su conveniencia técnica, no constituye una limitación seria desde el punto de vista físico. Por ejemplo, para un trozo de hierro a temperatura ambiente $\kappa/v \simeq 10^{-6}cm$; mientras que para un cristal de NaF a temperaturas entre $10K$ y $18.5K$ (condiciones para las cuales se detectaron ondas de temperatura), $\kappa_{max}/v_{min} \simeq 10^{-18}cm$.

Proposición 3.2 *Si $\kappa_{max} \le Lv_{min}$, $\lambda = (2 + 4Lv_{max}/\kappa_{min})^{-1}$ y*

$$\frac{dE}{dt} \le -\frac{1}{L}\int_0^L \Big[\frac{1}{\kappa}q^2 A + \frac{L^2}{\kappa}(q_x)^2 B + \frac{L^4}{\kappa}(q_{xx})^2 C + \lambda L v (e_x)^2 D + \lambda L^3 v (e_{xx})^2 F\Big] dx, \tag{3.13}$$

con $A,\ B,\ C,\ D,\ F \ge \alpha$, entonces $E(t) \le E(0)\exp(-t/\tau)$ $\forall t \ge 0$, con

$$\tau = \frac{1}{\alpha}\Big(3\frac{L}{v_{min}} + 4\frac{v_{max}}{v_{min}}\frac{L^2}{\kappa_{min}}\Big).$$

<u>*Prueba*</u>. (3.4) y (3.13) implican,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} \ &\le \ -\alpha\frac{1}{L}\int_0^L \Big[\frac{1}{\kappa}q^2 + \frac{L^2}{\kappa}(q_x)^2 + \frac{L^4}{\kappa}(q_{xx})^2 + \\ &\quad + \frac{\lambda v}{2L}e^2 + \frac{\lambda L v}{2}(e_x)^2 + \lambda L^3 v (e_{xx})^2\Big] dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Cada término entre corchetes puede acotarse de forma tal que (3.14) implica,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} \ &\le \ -\frac{1}{2L}\int_0^L \left[\frac{1}{\tau}e^2 + \frac{(1+\lambda)}{\tau}\frac{1}{v^2}q^2 + \frac{(1+\lambda)}{\tau}L^2(e_x)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+\lambda)}{\tau}\frac{L^2}{v^2}(q_x)^2 + \frac{(1+\lambda)}{\tau}L^4(e_{xx})^2 + \frac{1}{\tau}\frac{L^4}{v^2}(q_{xx})^2\right] dx, \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde $\tau = \frac{1}{\alpha}\left(3\frac{L}{v_{min}} + 4\frac{v_{max}}{v_{min}}\frac{L^2}{\kappa_{min}}\right)$. Finalmente, las desigualdades

$$\frac{1}{v^2}q^2 + L^2(e_x)^2 + 2\lambda\frac{L}{v}qe_x \le (1+\lambda)\left[\frac{1}{v^2}q^2 + L^2(e_x)^2\right],$$

y

$$\frac{L^2}{v^2}(q_x)^2 + L^4(e_{xx})^2 + 2\lambda\frac{L^3}{v}q_x e_{xx} \le (1+\lambda)\left[\frac{L^2}{v^2}(q_x)^2 + L^4(e_{xx})^2\right]$$

implican $dE/dt \le -(1/\tau)E$. □

Utilizando la energía E podemos probar existencia global y decaimiento exponencial a equilibrio.

Teorema 3.1 *Si (e, q) es una solución de (3.5) - (3.6) y $\kappa \le vL$, entonces*

$$\|e(\cdot,t)\|_2^2 + \frac{1}{v^2}\|q(\cdot,t)\|_2^2 \le \frac{7}{5}\left(\|e(\cdot,0)\|_2^2 + \frac{1}{v^2}\|q(\cdot,0)\|_2^2\right)\ \exp(-t/\tau);\ \ \forall t \ge 0, \tag{3.16}$$

con $\tau = 4\frac{L}{v} + \frac{16}{3}\frac{L^2}{\kappa}$.

Prueba. Supongamos que e y q son soluciones de (3.5) - (3.6), entonces

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{L}\int_0^L \Big[-\frac{1}{\kappa}q^2 - \frac{L^2}{\kappa}(q_x)^2 - \frac{L^4}{\kappa}(q_{xx})^2 - \lambda Lv(e_x)^2 - \lambda\frac{Lv}{\kappa}qe_x - \\ &\quad -\lambda\frac{L}{v}qq_{xx} - \lambda L^3v(e_{xx})^2 - \lambda\frac{L^3v}{\kappa}q_xe_{xx} - \lambda\frac{L^3}{v}q_xq_{xxx}\Big]; \qquad (3.17) \end{aligned}$$

donde hemos usado la simetría del sistema de ecuaciones. Luego integramos por partes el último término en (3.17) y usamos las desigualdades:

$$-\lambda\frac{Lv}{\kappa}qe_x \le \frac{\lambda vT}{2\kappa L}q^2 + \frac{\lambda L^3v}{2\kappa T}(e_x)^2, \qquad -\lambda\frac{L}{v}qq_{xx} \le \frac{\lambda}{2Lv}q^2 + \frac{\lambda L^3}{2v}(q_{xx})^2$$

y

$$-\lambda\frac{L^3v}{\kappa}q_xe_{xx} \le \frac{\lambda vTL}{2\kappa}q_x^2 + \frac{\lambda L^5v}{2\kappa T}(e_{xx})^2,$$

donde T es una constante positiva arbitraria con unidades de tiempo, la ecuación (3.17) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &\le \frac{1}{L}\int_0^L \Bigg[-\frac{1}{\kappa}\Big(1 - \frac{\lambda vT}{2L} - \frac{\lambda\kappa}{2Lv}\Big)q^2 - \frac{L^2}{\kappa}\Big(1 - \frac{\lambda vT}{2L}\Big)(q_x)^2 - \\ &\quad -\frac{L^4}{\kappa}\Big(1 - \frac{3\lambda\kappa}{2Lv}\Big)(q_{xx})^2 - \lambda Lv\Big(1 - \frac{L^2}{2\kappa T}\Big)(e_x)^2 - \\ &\quad -\lambda L^3v\Big(1 - \frac{L^2}{2\kappa T}\Big)(e_{xx})^2\Bigg]\,dx. \qquad (3.18) \end{aligned}$$

Ahora elegimos $T = 2L^2/\kappa > 0$ y $\lambda = \Big(2 + 4\frac{Lv}{\kappa}\Big)^{-1}$ (notemos que $\lambda \le 1/6$ ya que $\kappa \le Lv$). Asi (3.18) se convierte en:

$$\frac{dE}{dt} \le -\frac{3}{4}\frac{1}{2L}\int_0^L \Big[\frac{1}{\kappa}q^2 + \frac{L^2}{\kappa}(q_x)^2 + \frac{L^4}{\kappa}(q_{xx})^2 + \frac{\kappa}{2}(e_x)^2 + \frac{\kappa}{2}L^2(e_{xx})^2\Big]dx. \qquad (3.19)$$

La proposición 3.2 implica que $E(t) \le E(0)\exp(-t/\tau)$ con $\tau = 4\frac{L}{v} + \frac{16}{3}\frac{L^2}{\kappa}$. Finalmente, el lema 3.1 con $v_{max} = v_{min} = v$ y $\lambda \le 1/6$ implica (3.16). □

3.3 Existencia global y decaimiento exponencial

Será útil para lo que sigue, tener cotas para $|e|$, $|e_x|$, $|q|$ y $|q_x|$ en términos de la energía E. Integrando la desigualdad

$$L^2(e_x)^2 \le \frac{1}{1-\lambda}\left[\frac{1}{2}(1+\lambda)(q/v + Le_x)^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda)(q/v - Le_x)^2\right],$$

y usando la desigualdad de Poincaré (3.3) obtenemos:

$$|e| \leq \sqrt{\frac{2}{1-\lambda}}\sqrt{E}. \tag{3.20}$$

Analogamente obtenemos:

$$|e_x| \leq \frac{1}{L}\sqrt{\frac{2}{1-\lambda}}\sqrt{E} \tag{3.21}$$

y

$$|q_x| \leq \sqrt{2}\frac{v_{max}}{L}\sqrt{E}. \tag{3.22}$$

Para acotar $|q|$ aplicamos el Teorema del Embedding de Sobolev,

$$|q|^2 \leq 2\|q\|_1^2 = \frac{2}{L}\int_0^L [q^2 + L^2(q_x)^2]dx$$

y obtenemos

$$|q| \leq v_{max}\frac{2}{\sqrt{1-\lambda}}\sqrt{E}. \tag{3.23}$$

A continuación enunciamos y probamos el principal resultado de este capítulo.

Teorema 3.2 *Si κ, v, $\delta \in H^3([-e_0, e_0])$ y $\kappa_{max} \leq Lv_{min}$; entonces existe una constante positiva $C < (5/7)e_0^2$, tal que, si los datos iniciales para (3.1) - (3.2) satisfacen $\|e(\cdot,0)\|_2^2 + v_{min}^{-2}\|q(\cdot,0)\|_2^2 \leq C$, existe una solución global $(e(x,t), q(x,t)) \in H^2(\mathbf{S}^1)$ cuya norma tiende a cero exponencialmente según se indica a continuación,*

$$\|e(\cdot,t)\|_2^2 + \frac{1}{v_{max}}\|q(\cdot,t)\|_2^2 \leq \frac{7}{5}\left(\|e(\cdot,0)\|_2^2 + \frac{1}{v_{min}}\|q(\cdot,0)\|_2^2\right)\exp(-t/\tau), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.24}$$

donde

$$\tau = 6\frac{L}{v_{min}} + 8\frac{v_{max}}{v_{min}}\frac{L^2}{\kappa_{min}}.$$

<u>Prueba</u>. Supongamos que $|e| \leq e_0$. Para construir la desigualdad energética tomamos derivada temporal de (3.9) y usamos (3.1) y (3.2). La simetría del sistema de ecuaciones y la periodicidad del problema permiten cancelar varios términos integrando por partes. Así obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} \;=\; & \frac{1}{L}\int_0^L \left\{ -\frac{1}{\kappa}q^2 - \frac{L^2}{\kappa}(q_x)^2 - \frac{L^4}{\kappa}(q_{xx})^2 - \lambda L v(e_x)^2 - \lambda L^3 v(e_{xx})^2 + \right.\\
& + \left(\delta + \frac{v'}{v^3}\right)q^2 q_x - 2L^2\frac{v'}{v}q_x(e_x)^2 + L^2 g q q_x e_x + L^2 f q(q_x)^2 e_x + L^2\left(\delta + \frac{v'}{v^3}\right)(q_x)^3 + \\
& + L^2\delta q q_x q_{xx} + L^4\delta q q_{xx} q_{xxx} + L^4\left(3\delta + \frac{v'}{v^3}\right)q_x(q_{xx})^2 - 6L^4\frac{v'}{v}e_x q_{xx} e_{xx} -
\end{aligned}$$

$$-2L^4\left[\frac{v''}{v}+\left(\frac{v'}{v}\right)^2\right](e_x)^3q_{xx}+L^4fqq_xq_{xx}e_{xx}+2L^4f(q_x)^2e_xq_{xx}+$$
$$+2L^4fqe_x(q_{xx})^2+L^4gqq_{xx}e_{xx}+2L^4gq_xe_xq_{xx}+L^4\left(f'+2\frac{v'}{v}f\right)qq_x(e_x)^2q_{xx}+$$
$$+L^4\left(g'+2\frac{v'}{v}g\right)q(e_x)^2q_{xx}+\lambda L\frac{v'}{v^2}qq_xe_x-\lambda L\frac{v}{\kappa}qe_x+\lambda Lv\delta qq_xe_x-$$
$$-\lambda\frac{L}{v}qq_{xx}+\lambda L^3\frac{v'}{v^2}(q_x)^2e_{xx}-\lambda L^3\frac{v}{\kappa}q_xe_{xx}-2\lambda L^3v'(e_x)^2e_{xx}+\lambda L^3vgqe_xe_{xx}+$$
$$+\lambda L^3vfqq_xe_xe_{xx}+\lambda L^3v\delta(q_x)^2e_{xx}+\lambda L^3v\delta qq_{xx}e_{xx}-\lambda L^3\frac{1}{v}q_xq_{xxx}\Big\}\,dx \qquad (3.25)$$

donde $f=\delta'+2\frac{v'}{v}\delta$, $g=\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\kappa'}{\kappa}-2\frac{v'}{v}\right)$ y las cantidades primadas están derivadas respecto de e. El único término en (3.25) que contiene derivadas terceras de q se integra por partes,

$$\int_0^L L^4\delta qq_{xx}q_{xxx}\,dx=-\int_0^L\frac{L^4}{2}\delta'qe_x(q_{xx})^2\,dx-\int_0^L\frac{L^4}{2}\delta q_x(q_{xx})^2\,dx.$$

Usando la desigualdad algebraica $ab\le(1/2)(Ta^2+b^2/T)$ $a,b,T\in\mathbf{R}$, $T>0$ acotamos todos los términos de (3.25) que no son definidos negativos. Asi obtenemos:

$$\frac{dE}{dt}\le-\frac{1}{L}\int_0^L dx\left[\frac{1}{\kappa}q^2A+\frac{L^2}{\kappa}(q_x)^2B+\frac{L^4}{\kappa}(q_{xx})^2C+\lambda Lv(e_x)^2D+\lambda L^3v(e_{xx})^2F\right] \qquad (3.26)$$

donde

$$\begin{aligned}A &= 1-\frac{\lambda vT}{2L}-\frac{\lambda\kappa}{2Lv}-\kappa\left(\frac{3}{2}|\delta|+\frac{1}{v^2}\left|\frac{v'}{v}\right|\right)|q_x|-\frac{\kappa}{2}\left(L|g|+\lambda v|\delta|+\lambda vT|g|+\frac{\lambda}{v}\left|\frac{v'}{v}\right|\right)|e_x|-\\ &\quad-\frac{L^2\kappa}{2}\left|g'+2\frac{v'}{v}g\right|(e_x)^2 \qquad (3.27)\\ B &= 1-\frac{\lambda vT}{2L}-\kappa\left(|\delta|+\frac{\lambda vT}{2L}|\delta|+\frac{1}{v^2}\left|\frac{v'}{v}\right|+\frac{\lambda T}{2Lv}\left|\frac{v'}{v}\right|\right)|q_x|-\kappa\left(\frac{T}{L}\left|\frac{v'}{v}\right|+\frac{L}{2}|g|+\right.\\ &\quad\left.+L\left|g-\frac{\lambda}{2Lv}\frac{v'}{v}\right|+\frac{\lambda v}{2}|\delta|+\frac{\lambda}{2v}\left|\frac{v'}{v}\right|\right)|e_x|-\kappa\left(\frac{\lambda vT}{2L}+1\right)|f||q||e_x|-\\ &\quad-\kappa L|f||q_x||e_x| \qquad (3.28)\\ C &= 1-\frac{3\lambda\kappa}{2Lv}-\frac{\kappa T}{2L}\left(|g|+\frac{\lambda v}{L}|\delta|\right)|q|-\kappa\left(3|\delta|+\frac{1}{v^2}\left|\frac{v'}{v}\right|\right)|q_x|-\kappa\left(\frac{3T}{L}\left|\frac{v'}{v}\right|+\right.\\ &\quad\left.+L\left|g-\frac{\lambda}{2Lv}\frac{v'}{v}\right|\right)|e_x|-\kappa\left|2f-\frac{\delta'}{2}\right||q||e_x|-\frac{\kappa T}{2L}|f||q||q_x|-L\kappa|f||q_x||e_x|-\end{aligned}$$

$$-\kappa\left[\frac{L^2}{2}\left|g'+2\frac{v'}{v}g\right|+T\left|\frac{v''}{v}+\left(\frac{v'}{v}\right)^2\right|\right]|e_x|^2-\frac{L\kappa}{2}\left|f'+2\frac{v'}{v}f\right||q||e_x|^2 \tag{3.29}$$

$$D = 1-\frac{L^2}{2\kappa T}-\left(\frac{L^2}{\lambda vT}+L\right)\left|\frac{v'}{v}\right||e_x|-\frac{L^3}{\lambda vT}\left|\frac{v''}{v}+\left(\frac{v'}{v}\right)^2\right||e_x|^2 \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} F &= 1-\frac{L^2}{2\kappa T}-\frac{L}{2T}\left(\frac{L}{\lambda v}|g|+|\delta|\right)|q|-\frac{L^2}{2T}\left(|\delta|+\frac{1}{v^2}\left|\frac{v'}{v}\right|\right)|q_x|- \\ &\quad -L\left(\frac{3L}{\lambda vT}\left|\frac{v'}{v}\right|+\left|\frac{v'}{v}\right|+\frac{L^2}{2T}|g|\right)|e_x|-\frac{L^2}{2\lambda vT}|f||q||q_x|-\frac{L^2}{2T}|f||q||e_x|. \end{aligned} \tag{3.31}$$

El siguiente paso consiste en acotar A, B, C, D y F por una constante positiva para poder utilizar la proposición 3.2. Eligiendo $T=2L^2/\kappa_{min}$ y $\lambda=(2+4Lv_{max}/\kappa_{min})^{-1}\leq 1/6$, acotando todas las funciones de e en (3.27) - (3.31) por sus normas L^∞ y $|e_x|$, $|q_x|$ y $|q|$ con las cotas (3.21), (3.22) y (3.23) en términos de $E^{1/2}$, obtenemos, luego de algunas manipulaciones algebraicas, que todos los coeficientes A, B, C, D y F están acotados por expresiones de la forma $3/4-C_1E^{1/2}-C_2E-C_3E^{3/2}$. Las constantes C_1, C_2 y C_3 son cotas para las normas L^∞ de las diversas funciones de e, y que involucran hasta derivadas segundas de v, κ y δ. Estas constantes son finitas, en virtud de Teorema del Embedding de Sobolev, pues $v,\kappa,\delta\in H^3([-e_0,e_0])$. Concluímos que existe una constante $\tilde{C}$ tal que $E(t)\leq\tilde{C}$ implica $A,B,C,D,F\geq 1/2$. Como $\kappa_{max}\leq Lv_{min}$, la proposición 3.2 implica que $E(t)\leq E(0)\exp(-t/\tau)$ con $\tau=6\frac{L}{v_{min}}+8\frac{v_{max}}{v_{min}}\frac{L^2}{\kappa_{min}}$. Finalmente, la cota (3.20) y el lema 3.1 con $\lambda\leq 1/6$ implican que existe una constante $0<C\leq(5/7)e_0^2$ tal que (3.24) y la suposición a priori hecha al comienzo de la prueba valen $\forall t\geq 0$. Dada la estimación (3.24) para la energía, la solución del sistema (3.1) - (3.2) se puede construir con un proceso iterativo estandar (ver por ejemplo [14]). $\square$

Cabe enfatizar que, bajo las hipótesis del teorema 3.2, la solución de (3.1) - (3.2) tiende uniforme y exponencialmente a cero, lo cual se deduce de (3.24) y las desigualdades (3.20) y (3.23).

4 Estabilidad de sistemas hiperbólicos cuasi lineales disipativos

4.1 Enunciado del poblema y resultado principal

En este capítulo queremos estudiar la estabilidad lineal y no lineal de las soluciones estacionarias al problema de Cauchy de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que describen evolución. La estabilidad de tales sistemas estará caracterizada mediante una condición impuesta a los autovalores del símbolo asociado al sistema de ecuaciones.

Consideremos el problema de valores iniciales para el siguiente sistema cuasilineal de primer orden (utilizamos la convención de suma sobre los índices repetidos),

$$\begin{aligned} u_t &= \Big(A_0^j + \varepsilon A_1^j(x,t,u,\varepsilon)\Big)\frac{\partial u}{\partial x^j} + \Big(B_0 + \varepsilon B_1(x,t,u,\varepsilon)\Big)u. \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde u es una función (vector columna) de las variables espaciales reales $(x^1,\ldots,x^n)$ y el tiempo t con componentes $u_1,\ldots,u_s$. A_0^j y B_0 son matrices $s\times s$ constantes. A_1^j y B_1 son matrices $s\times s$ suaves como función de todos sus argumentos y ε es un parámetro de pequeñez. $f(x)$ es una función vectorial de las variables espaciales.

Vamos a estudiar el problema periódico en x de período 2π; aunque los resultados son generalizables al espacio $\mathbf{R}^n$ completo (cambiando las series de Fourier por transformadas de Fourier).

Necesitamos especificar mas precisamente la condición de regularidad de los coeficientes de (4.1).

Condición 4.1. *Para todo $p = 0,1,2,3,\ldots$ y todo $c>0$, existe una constante K_p tal que la norma supremo de las p–ésimas derivadas de A_1^j, B_1 con respecto a x,t,ε y u son acotadas por K_p si se cumple $|u|_\infty \le c$. Para $f(x)$ se cumplen las cotas correspondientes.*

Definición 4.1 *Diremos que el sistema (4.1) satisface la* **condición de estabilidad** *si existe una constante $\delta>0$ tal que, para todo $\omega\in\mathbf{R}^n$ los autovalores λ del símbolo*

$$\hat{P}_0(i\omega) + B_0 := iA_0^j\omega_j + B_0 \tag{4.2}$$

satisfacen

$$\operatorname{Re}\lambda \le -\delta. \tag{4.3}$$

Debemos definir lo que entendemos por estabilidad para el sistema (4.1)

Definición 4.2 *El sistema (4.1) es estable si, para toda f, existe un ε_0 tal que para $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, la solución de (4.1) converge a cero para $t\to\infty$, y existe un entero p_0 tal que ε_0 depende solo de las constantes K_p con $p\le p_0$.*[2]

[2] Nos referimos aquí a convergencia uniforme.

En este trabajo buscaremos condiciones de suficiencia bajo las cuales la condición de estabilidad 4.1 implica estabilidad.

Estudiaremos el problemas en tres etapas. Primero consideraremos el problema en el caso de coeficientes constantes ($\varepsilon = 0$). Construiremos entonces un operador autoadjunto definido positivo H_0 tal que todas las soluciones del problema (4.1) satisfagan:

$$\frac{d}{dt}(u, H_0 u) \leq -\delta(u, H_0 u),$$

siempre que el problema de valores iniciales esté correctamente formulado en L_2 y se satisfaga la condición de estabilidad. Diremos entonces que el sistema de ecuaciones es una *contracción* en la nueva norma definida por H_0.

Luego consideraremos el problema de coeficientes variables, es decir cuando A_1^j y B_1 dependen de x y t pero no de u. Procederemos entonces a construir un operador H (para definir una nueva norma) utilizando la teoría de operadores pseudo diferenciales. Es decir, construiremos un símbolo $\hat{H}(x, t, \omega)$ y definiremos el operador H mediante la expresión:

$$Hu = \sum_{\omega} e^{i\langle\omega, x\rangle} \hat{H}(x, t, \omega)\hat{u}(\omega) \qquad \text{para todo} \qquad u = \sum_{\omega} e^{i\langle\omega, x\rangle}\hat{u}(\omega).$$

El símbolo $\hat{H}$ dependerá de los símbolos,

$$\hat{P}_0(i\omega) := \sum_{j=1}^{n} A_0^j i\omega_j, \qquad \hat{P}_1(x, t, \varepsilon, i\omega) := \sum_{j=1}^{n} A_1^j(x, t, \varepsilon) i\omega_j,$$

y de la matriz B_0.

Para poder utilizar los resultados del álgebra de operadores pseudodiferenciales, necesitamos que el símbolo $\hat{H}$ sea función suave de todos sus argumentos. Probaremos que este es el caso si vale alguna de las siguientes condiciones.

Condición 4.2. *El sistema (4.1) satisface la condición de estabilidad, el símbolo* $\hat{P}_0(i\omega') + \varepsilon\hat{P}_1(x, t, \varepsilon, i\omega')$ *tiene un conjuto completo de autovectores y la multiplicidad de sus autovalores no depende de* $x, t, \omega', \varepsilon$*; donde* $|\omega'| = 1$.

Condición 4.3. *Los coeficientes* A_0^j *y* A_1^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, *y* B_0 *son matrices hermíticas y el sistema (4.1) satisface la condición de estabilidad.*

En la tercera etapa consideramos el sistema no lineal completo (4.1) y probamos el resultado principal de este capítulo, expresado en el siguiente teorema.

Teorema 4.1 *Si las condiciones 4.1 y 4.2 o 4.3 se satisfacen entonces, para* ε *suficientemente pequeño, el problema es una contracción en una norma* H *apropiada y el sistema (4.1) es estable.*

En una sección final de este capítulo se relaja la condición de estabilidad de forma que el teorema sea aplicable a ciertos problemas físicos de interés (tales como los fluidos disipativos relativistas).
Notación: Dada una matriz cuadrada A, definimos

$$\operatorname{Re} A := \frac{1}{2}(A + A^{\dagger}).$$

4.2 Sistemas de coeficientes constantes

Nos concentraremos ahora en el problema de Cauchy para sistemas de coeficientes constantes (sistema (4.1) con $\varepsilon = 0$)

$$\begin{aligned} y_t &= A_0^j \frac{\partial y}{\partial x^j} + B_0 y =: \Big(P_0(\frac{\partial}{\partial x}) + B_0\Big) y, \\ y(x,0) &= f(x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Se dice que el problema de Cauchy (4.4) está bien puesto, en el sentido de L_2, si para toda constante T existe otra constante $K(T)$ tal que las soluciones del mismo satisfacen la estimación

$$\|y(\cdot,t)\| \leq K(T)\|y(\cdot,0)\|, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Se puede caracerizar a los problemas bien puestos mediantes condiciones algebraicas sobre el símbolo $\hat{P}_0(i\omega)$. Es un resultado conocido (ver [14], Capítulo 2, en particular el Lema 2.3.5 y el Teorema 2.4.1) que el problema (4.4) está bien puesto si y solo si el sistema de ecuaciones es fuertemente hiperbólico, es decir, si los autovalores del símbolo $\hat{P}_0(i\omega)$ son imaginarios puros y, para todo $\omega' = \omega/|\omega|$, existe un conjunto completo de autovectores $t_1, \ldots, t_s$ que es uniformemente linealmente independiente, es decir, existe una constante K tal que $\forall\, \omega'$

$$|T^{-1}| + |T| \leq K, \quad T = (t_1, \ldots, t_s).$$

Expandiendo la solución de (4.4) en serie de Fourier

$$y(x,t) = \sum_{\omega} \hat{y}(\omega,t) e^{i\langle \omega, x\rangle}, \tag{4.5}$$

podemos considerar el sistema transformado

$$\hat{y}_t = \Big(iA_0^j \omega_j + B_0\Big)\hat{y} =: \Big(\hat{P}_0(i\omega) + B_0\Big)\hat{y}. \tag{4.6}$$

Supongamos ahora que el sistema (4.4) es fuertemente hiperbólico y que satisface la condición de estabilidad. Nos proponemos construir una nueva métrica $\hat{H}(\omega)$ en el espacio de Fourier tal que el problema transformado sea una contracción en la norma correspondiente. Usaremos, para construir $\hat{H}(\omega)$, algunos resultados de Kreiss y Lorenz ([14], Cap. 2). Como el sistema

(4.4) es fuertemente hiperbólico, y por lo tanto tiene el problema de Cauchy bien puesto, se cumple que

$$\left|e^{(\hat{P}_0(i\omega)+B_0)t}\right| \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

Por lo tanto, de acuerdo al Teorema 2.3.2 de [14], existen dos constantes C_1 y C_2 tales que para todo ω existe $S(\omega)$ tal que

$$|S(\omega)| + |S^{-1}(\omega)| \leq C_1 \tag{4.7}$$

y

$$S^{-1}(\omega)(\hat{P}(i\omega)+B_0)S(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & b_{2s} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_s \end{pmatrix}$$

con la diagonal ordenada $\mathrm{Re}\{\lambda_1\} \geq \mathrm{Re}\{\lambda_2\} \geq \dots \geq \mathrm{Re}\{\lambda_s\}$ y con los b_{ij} que satisfacen $|b_{ij}| \leq C_2 \mathrm{Re}\{\lambda_i\} \quad j > i$. Utilizamos ahora una idea de Lyapunov para achicar los b_{ij}. Sea $G = diag(1, \gamma, \dots, \gamma^{(s-1)})$, con $0 < \gamma \leq 1$ y $\gamma \leq 1/(s\, C_2)$. Entonces

$$C(\omega) := G^{-1}S^{-1}(\omega)(\hat{P}(i\omega)+B_0)S(\omega)G \tag{4.8}$$

es

$$C(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & c_{2s} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_s \end{pmatrix}$$

con

$$|c_{ij}| \leq \gamma |b_{ij}| = \frac{|\mathrm{Re}\{\lambda_i\}|}{s} \leq \frac{|\mathrm{Re}\{\lambda_j\}|}{s}, \quad j > i,$$

donde hemos usado que la diagonal está ordenada. Ahora bien, para todo $v \in \mathbf{R}^s$,

$$\langle v, Cv \rangle = \sum_i \lambda_i \, |v^i|^2 + \sum_i \sum_{j>i} c_{ij} v^i v^j,$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle v, (C + C^\dagger)v \rangle &= \sum_i 2\mathrm{Re}\{\lambda_i\} \, |v^i|^2 + \sum_i \sum_{j>i} (c_{ij} + \bar{c}_{ji}) v^i v^j \\ &\leq \sum_i 2\mathrm{Re}\{\lambda_i\} \, |v^i|^2 + \sum_i \sum_{j>i} |c_{ij}|(|v^i|^2 + |v^j|^2). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Pero,

$$\sum_i \sum_{j>i} |c_{ij}||v^i|^2 \leq \sum_i (s-i) \frac{|\mathrm{Re}\{\lambda_i\}|}{s} |v^i|^2,$$

y

$$\sum_i \sum_{j>i} |c_{ij}||v^j|^2 \leq \sum_i (i-1)\frac{|\mathrm{Re}\{\lambda_i\}|}{s}|v^i|^2,$$

y por lo tanto (4.9) queda

$$\begin{aligned} \langle v, (C+C^\dagger)v\rangle &= \sum_i \Big(2\mathrm{Re}\{\lambda_i\} + \frac{s-1}{s}|\mathrm{Re}\{\lambda_i\}|\Big)\ |v^i|^2 \\ &\leq -\delta\langle v, v\rangle, \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde hemos usado la condición de estabilidad. La arbitrariedad de v implica $C + C^\dagger \leq -\delta I$.

Definimos ahora

$$\hat{H}(\omega) := \Big((S(\omega)D)^{-1}\Big)^\dagger\ (S(\omega)D)^{-1}.$$

Utilizando lo hecho anteriormente podemos establecer dos importantes propiedades de $\hat{H}(\omega)$. Por un lado, usando (4.10),

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\Big\{\hat{H}(\omega)(P_0(i\omega)+B_0)\Big\} &= \Big((S(\omega)D)^{-1}\Big)^\dagger (C(\omega)+C^\dagger(\omega))(S(\omega)D)^{-1} \\ &\leq -\delta\hat{H}(\omega). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Por otro lado, para todo $v \in \mathbf{R}^s$, y de acuerdo a (4.7) y (4.8)

$$\begin{aligned} \langle v, \hat{H}(\omega)v\rangle &= \langle v, (S^{-1}(\omega))^\dagger G^{-2} S^{-1}(\omega)v\rangle \\ &\leq |G^{-2}||S(\omega)v|^2 \\ &\leq \frac{C_1^2}{\gamma^{2(s-1)}}|v|^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Además (4.7) implica $\langle S(\omega)u, S(\omega)u\rangle \leq C_1^2\langle u, u\rangle$; y, ecribiendo $u = S^{-1}(\omega)v$,

$$\langle v, \hat{H}(\omega)v\rangle \geq \langle u, u\rangle \geq \frac{1}{C_1^2}\langle v, v\rangle. \tag{4.13}$$

Por lo tanto, usando (4.12) y (4.13), obtenemos

$$\frac{1}{K}I \leq \hat{H}(\omega) \leq KI, \quad \text{con} \quad K = \frac{C_1^2}{\gamma^{2(s-1)}}. \tag{4.14}$$

Usando la serie de Fourier de $u(x,t)$ podemos definir un operador H mediante

$$Hu = \sum_\omega \hat{H}(\omega)\hat{u}(\omega)e^{i\langle\omega,x\rangle}. \tag{4.15}$$

Utilizando la realción de Parseval

$$(u, v) = \sum_\omega \langle\hat{u}(\omega), \hat{v}(\omega)\rangle,$$

podemos probar las siguientes propiedades de H.

1) H es hermítico. Pues, como $\hat{H}(\omega)$ es hermítico,

$$(u, Hv) = \sum_{\omega} \langle \hat{u}(\omega), \hat{H}(\omega)\hat{v}(\omega)\rangle = \sum_{\omega} \langle \hat{H}(\omega)u(\omega), \hat{v}(\omega)\rangle = (Hu, v). \tag{4.16}$$

2) $2\mathrm{Re}\{H(P_0 + B_0)\} \leq -\delta H$. Pues para toda u con desarrollo de Fourier, usando (4.11),

$$\begin{aligned}(u, 2\mathrm{Re}\{H(P_0 + B_0)\}u) &= \sum_{\omega} \langle \hat{u}(\omega), 2\mathrm{Re}\Big\{\hat{H}(\omega)(\hat{P}_0(\omega) + B_0)\Big\}\hat{u}(\omega)\rangle \\ &\leq -\delta \sum_{\omega} \langle \hat{u}(\omega), \hat{H}(\omega)\hat{u}(\omega)\rangle = -\delta(u, Hu).\end{aligned} \tag{4.17}$$

3) (u, Hv) define un producto interno cuya norma es equivalente a la norma L_2. En efecto, de acuerdo con (4.14),

$$K^{-1}\|u\|^2 = K^{-1}\sum_{\omega} \langle \hat{u}(\omega), \hat{u}(\omega)\rangle \leq \sum_{\omega} \langle \hat{u}(\omega), \hat{H}(\omega)\hat{u}(\omega)\rangle = (u, Hu) \leq K\|u\|^2. \tag{4.18}$$

Llegado este punto podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 4.2 *Supongamos que el sistema de ecuaciones (4.4) es fuertemente hiperbólico y que el símbolo $P_0(i\omega) + B_0$ satisface la condición de estabilidad. Entonces, el problema de Cauchy (4.4) es una contracción en una norma H equivalente a la norma L_2.*

Prueba. Como ya se mencionó, el problema de Cauchy de (4.4) está bien puesto en L_2. Podemos, por lo tanto, construir un operador H con las propiedades (4.16), (4.17) y (4.18). Utilizando la norma H, $\|u\|_H = (u, Hu)^{1/2}$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(y, Hy) &= 2\mathrm{Re}(y, H(P_0 + B_0)y) \\ &= (y, 2\mathrm{Re}\{H(P_0 + B_0)\}y) \\ &\leq -\delta(y, Hy)\end{aligned} \tag{4.19}$$

y el problema (4.4) es una contracción en la norma H. □

Veamos ahora que ocurre con una norma de Sobolev de y. Para ello introducimos el operador pseudo-diferencial Λ^p,

$$\Lambda^p u = \sum_{\omega} (1 + |\omega|^2)^{p/2}\hat{u}(\omega)e^{i\langle\omega,x\rangle}.$$

De esta forma Λ^p es un operador acotado de $H^r(T^n)$ en $H^{r-p}(T^n)$, y la norma de Sobolev de $H^r(T^n)$ puede escribirse como

$$\|u\|_r = (\Lambda^r u, \Lambda^r u)^{1/2}.$$

Usando la norma H, podemos definir

$$\|u\|_{H,r} = (\Lambda^r u, H\Lambda^r u)^{1/2}.$$

Esta norma, de acuerdo a (4.18), es equivalente a la norma H^r. Es fácil ver que $[H, \Lambda^r] = 0$, y por lo tanto (4.19) implica:

$$\frac{d}{dt}\|y\|^2_{H,r} \leq -\delta\|y\|^2_{H,r}. \tag{4.20}$$

El problema (3) es pues una contracción en cualquier norma $\|\cdot\|_{H,r}$. Notemos que (4.20) implica:

$$\|y(t)\|^2_{H,r} \leq \|f\|^2_{H,r} e^{-\delta t},$$

y usando la equivalencia (4.18)

$$\|y(t)\|^2_r \leq K^2\|f\|^2_r e^{-\delta t}.$$

Podemos observar, a modo de conclusión, que la condición de estabilidad garantiza que la solución del sistema hyperbólico (4.4) no solo existe globalmente y es única, lo cual es bien sabido, sino que además converge exponencialmente a equilibrio ($y = 0$) en cualquier norma de Sobolev.

4.3 Sistemas lineales de coeficientes variables

En esta sección generalizaremos los resultados de la sección previa a sistemas de la forma:

$$u_t = \Big(A_0^j + \varepsilon A_1^j(x,t,\varepsilon)\Big)\frac{\partial u}{\partial x^j} + \Big(B_0 + \varepsilon B_1(x,t,\varepsilon)\Big)u. \tag{4.21}$$

Al igual que en el caso de coeficientes constantes construiremos un norma H tal que el problema (4.21) sea una contracción en esta norma. Para ello construiremos un operador pseudo diferencial H de la forma:

$$H(t) = H_0 + S + \varepsilon H_1(t) \tag{4.22}$$

con las siguientes propiedades.
(1) $H_0, S, H_1(t)$ son operadores hermíticos acotados. H_0 y S no dependen de t. dH_1/dt existe y es también un operador acotado. Es decir, existe una constante K tal que:

$$\|H_0\| + \|S\| + \|H_1(t)\| + \|\frac{dH_1}{dt}\| \leq K.$$

(2) $H_0 + S$ es definido positivo con K tal que

$$\|H_0 + S\| + \|(H_0 + S)^{-1}\| \leq K.$$

(3) $$2\mathrm{Re}\, H_0 P_0 = H_0 P_0 + P_0^\dagger H_0 \equiv 0.$$

$$(4) \qquad 2\mathrm{Re}(H_0+S)(P_0+B_0) = 2\mathrm{Re}(SP_0+H_0B_0) \leq -\delta(H_0+S).$$

(5) S es un operador de regularización, es decir

$$\|SP_1\| \leq K.$$

$$(6) \qquad \|\mathrm{Re}(H_0+\varepsilon H_1(t))(P_0+\varepsilon P_1)\| = \varepsilon\|\mathrm{Re}(H_0P_1+H_1P_0+\varepsilon H_1P_1)\| \leq \varepsilon K.$$

Una vez construído tal operador , es fácil probar que el problema (4.21) es una contracción en la norma H. Establecemos este resultado en el siguiente teorema.

Teorema 4.3 *Supongamos que existe un operador H de la forma (4.22) con las propiedades (1)–(6). Entonces, para ε suficientemente pequeño, el producto escalar (u, Hv) define una norma que es equivalente a la norma L_2 y el sistema (4.21) es una contracción en dicha norma.*

Prueba. Las propiedades (1) y (2) implican que (u, Hv) define una norma equivalente a la norma L_2. Podemos acotar la derivada temporal de la norma H de u.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(u, Hu) &= \varepsilon(u, H_{1t}u) + 2\mathrm{Re}\Big(u, (H_0+S+\varepsilon H_1)(P_0+B_0+\varepsilon(P_1+B_1))u\Big) \\
&= \varepsilon(u, H_{1t}u) + 2\mathrm{Re}\Big(u, (H_0+S)(P_0+B_0)u\Big) + 2\mathrm{Re}\Big(u, (H_0+\varepsilon H_1)(P_0+\varepsilon P_1)u\Big) \\
&\quad +2\varepsilon\mathrm{Re}\Big(u, (H_0B_1+S(P_1+B_1)+H_1(B_0+\varepsilon B_1))u\Big) \\
&\leq -(\delta+\mathcal{O}(\varepsilon))(u, Hu).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para ε suficientemente pequeño, (4.21) es una contracción. □

Para probar que el sistema (4.21) es una contracción fue necesario disponer de los teoremas del álgebra de los operadores pseudo diferenciales. De aquí que, a diferencia del caso de coeficientes constantes donde no se presentaban problemas de suavidad del símbolo $\hat{H}(\omega)$, es necesario construir los operadodores H_0, S y H_1 como operadores pseudo diferenciales. En la construcción de los símbolos $\hat{H}_0(x,\omega)$, $\hat{S}(x,\omega)$ y $\hat{H}_1(x,\omega,t)$ la mayor dificultad que se presenta es la obtención de la suavidad.

Probaremos en primer lugar el siguiente resultado.

Teorema 4.4 *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*
a) Existe una matriz hermítica definida positiva $\tilde{H}_0(\omega')$ *que es una función suave de* $\omega' = \omega/|\omega|$ *tal que:*

$$2\mathrm{Re}\, \tilde{H}_0(\omega')\hat{P}_0(i\omega) = \tilde{H}_0(\omega')\hat{P}_0(i\omega) + \hat{P}_0^\dagger(i\omega)\tilde{H}_0(\omega') \equiv 0. \tag{4.23}$$

b) Para $|\omega| \geq C$, C *suficientemente grande, existe una matriz hermítica* $\tilde{S} = \tilde{S}(\omega', 1/|\omega|)$ *que es función suave de* ω' *y* $1/|\omega|$ *tal que:*

$$2\mathrm{Re}\Big(\tilde{H}_0(\omega') + \frac{1}{|\omega|}\tilde{S}(\omega', 1/|\omega|)\Big)(|\omega|\hat{P}_0(i\omega') + B_0) \leq -\delta(\tilde{H}_0(\omega') + \frac{1}{|\omega|}\tilde{S}(\omega', 1/|\omega|)); \tag{4.24}$$

mientras que para $|\omega| \leq C + 1$, *existe una matriz hermítica definida positiva* $\tilde{S}^{(1)}(\omega)$ *que es función suave de* ω *tal que:*

$$2\mathrm{Re}\tilde{S}^{(1)}(\omega)\Big(\hat{P}(i\omega) + B_0\Big) \leq -\delta\tilde{S}^{(1)}(\omega), \quad |\omega| \leq C + 1. \tag{4.25}$$

c) Existe una matriz hermítica $\tilde{H}_1(x, t, \omega', \varepsilon)$ *que es función suave de* $x, t, \omega', \varepsilon$ *tal que:*

$$2\mathrm{Re}\Big(\tilde{H}_0(\omega') + \varepsilon\tilde{H}_1(x, t, \omega', \varepsilon)\Big)\Big(\hat{P}_0(i\omega') + \varepsilon\hat{P}_1(x, t, i\omega')\Big) = 0. \tag{4.26}$$

Entonces podemos construir el operador pseudo diferencial (4.22) con las propiedades (1)–(6). Además existe un entero p_0 *tal que la constante* K *depende solo de las primeras* p_0 *derivadas de los coeficientes de (4.21). Por lo tanto, el problema (4.21) es una contracción en la norma* H.

Prueba. Construimos los símbolos de los operadores pseudo diferenciales

$$\begin{aligned} H_0 u &= \sum_\omega e^{i\langle\omega, x\rangle}\hat{H}_0(\omega)\hat{u}(\omega), \\ Su &= \sum_\omega e^{i\langle\omega, x\rangle}\hat{S}(\omega)\hat{u}(\omega), \\ H_1 u &= \sum_\omega e^{i\langle\omega, x\rangle}\hat{H}_1(x, t, \omega, \varepsilon)\hat{u}(\omega), \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde $\hat{H}_0(\omega)$, $\hat{S}(\omega)$ no dependen de x, t, de la siguiente forma.

Sea $\varphi(|\omega|) \in C^\infty$ una función monótona de corte (cut- off) tal que:

$$\varphi(|\omega|) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\omega| \geq C + 1, \\ 0 & \text{for } |\omega| \leq C. \end{cases}$$

Definimos

$$\begin{aligned} &\hat{H}_0(\omega) = \varphi(|\omega|)\tilde{H}_0(\omega'), \\ &\hat{S}(\omega) = \frac{\varphi(|\omega|)}{|\omega|}\tilde{S}(\omega', 1/|\omega|) + (1 - \varphi(|\omega|))\tilde{S}^{(1)}(\omega). \end{aligned}$$

Notemos que los símbolos $\hat{P}_0(i\omega)$, $\hat{H}_0(\omega)$ y $\hat{S}(\omega)$ son funciones suaves de $\omega \in \mathbf{R}^n$. Además, recordando la definición de las clases de Hörmander (ver por ejemplo [25] y [26]), $\hat{P}_0(i\omega) \in S^1_{1,0}$, $\hat{H}_0(\omega) \in S^0_{1,0}$ y $\hat{S}(\omega) \in S^{-1}_{1,0}$. Por lo tanto, aplicando los teoremas del producto y adjunto de operadores pseudo diferenciales, no es difícil ver que H_0 y S satisfacen las propiedades (1)–(5) si se elige C suficientemente grande. Como B_0, $\hat{P}_0$, $\hat{H}_0$ y $\hat{S}$ no dependen de x, t, las propiedades (1)–(4) pueden verificarse directamente usando la relación de Parseval (para esto es importante notar que tanto ω' como $1/|\omega|$ toman valores sobre conuntos compactos). Por otra parte el símbolo

$$\varphi(|\omega|)\Big(\tilde{H}_0(\omega') + \varepsilon \tilde{H}_1(\omega', x, t)\Big)$$

define un operador pseudo diferencial $H_0 + \varepsilon H_{11} \in OPS^0_{1,0}$ (no autoadjunto). No obstante, usando una vez mas los resultados del álgebra de operadores pseudo diferenciales, se puede ver que el operador hermítico

$$H_0 + \varepsilon H_1 = H_0 + \frac{\varepsilon}{2}(H_{11} + H_{11}^\dagger) \tag{4.28}$$

satisface las propiedades (1) y (6). Finalmente, los mismos resultados sobre el álgebra de operadores pseudo diferenciales garantizan que la constante K puede acotarse como indica el teorema. □

A continuación veremos dos casos concretos de como construir los símbolos de las condiciones (a),(b) y (c) del teorema 4.4 a partir de distintas condiciones algebraicas sobre los símbolos $\hat{P}_0$, $\hat{P}_1$ y B_0. Estos son los dos casos en que podemos probar que el sistema (4.21) es una conracción en la noram H. El primer caso está enunciado en el siguiente teorema. Notemos que podemos escribir $\hat{P}_0(i\omega) + \varepsilon \hat{P}_1(x, t, i\omega) = |\omega| \hat{P}_0(i\omega') + \varepsilon \hat{P}_1(x, t, i\omega')$ con $\omega' = \omega/|\omega|$.

Teorema 4.5 *Si el sistema (4.21) satisface la condición de estabilidad, el símbolo $\hat{P}_0(i\omega') + \varepsilon \hat{P}_1(x, t, i\omega')$ tiene un conjuto completo de autovectores y la multiplicidad de sus autovalores no depende de $x, t, \omega', \varepsilon$; entonces pueden construirse los símbolos del teorema 4.4 cuyas derivadas pueden acotarse en términos de las derivadas de los coeficientes de (4.21). Por lo tanto, para ε suficientemente pequeño, (4.21) es una contracción.*

Prueba. Para construir los símbolos separamos la construcción en dos partes, $|\omega| \leq C + 1$ y $|\omega| > C$, donde la constante C será elegida mas abajo.

Sea $\omega = \omega_k$, $|\omega_k| \leq C + 1$. Existe una matriz unitaria U_k que lleva a $\hat{P}_0(i\omega_k) + B_0$ a forma triangular superior (Lemma de Schur, ver por ejemplo [27]). Asi obtenemos

$$U_k^\dagger(\hat{P}_0(i\omega_k) + B_0)U_k = \begin{pmatrix} \lambda_{1k} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ 0 & \lambda_{2k} & \dots & c_{2s} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_{sk} \end{pmatrix}.$$

Luego, siguiendo una idea de Lyapunov, realizamos una transformación de semejanza con una matriz diagonal $D = diag(1, \alpha, \ldots, \alpha^{s-1}),\ \ 0 < \alpha \leq 1$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} D^{-1}U_k^\dagger(\hat{P}_0(i\omega_k) + B_0)U_k D &= \begin{pmatrix} \lambda_{1k} & \alpha c_{12} & \ldots & \alpha^{s-1}c_{1s} \\ 0 & \lambda_{2k} & \ldots & \alpha^{s-2}c_{2s} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_{sk} \end{pmatrix} \\ &= diag(\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{sk}) + \alpha\Delta_k(\alpha), \end{aligned}$$

donde $\Delta_k(\alpha)$ es una matriz $(s-1)$-nilpotente regular en α. Definiendo la matriz hermítica $S_k = ((U_k D)^{-1})^\dagger\ (U_k D)^{-1}$ obtenemos, para todo $v \in \mathbf{R}^s$,

$$\begin{aligned} \langle v, 2\mathrm{Re}\{S_k(\hat{P}_0(i\omega_k) + B_0)\}v\rangle &= \langle v, ((U_k D)^{-1})^\dagger \Big(D^{-1}U_k^\dagger(\hat{P}_0(i\omega_k) + B_0)U_k D\Big)(U_k D)^{-1}v\rangle \\ &\quad +C.C. \\ &\leq 2\langle (U_k D)^{-1}v, diag(\mathrm{Re}\lambda_{1k}, \ldots, \mathrm{Re}\lambda_{sk})(U_k D)^{-1}v\rangle \\ &\quad +\alpha\langle (U_k D)^{-1}v, (\Delta_k(\alpha) + \Delta_k^\dagger(\alpha))(U_k D)^{-1}v\rangle. \end{aligned} \tag{4.29}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permite acotar el segundo término

$$\begin{aligned} \langle (U_k D)^{-1}v, \Delta_k(\alpha)(U_k D)^{-1}v\rangle + C.C. &\leq \langle (U_k D)^{-1}v, (U_k D)^{-1}v\rangle^{1/2} \\ &\quad \langle \Delta_k(\alpha)(U_k D)^{-1}v, \Delta_k(\alpha)(U_k D)^{-1}v\rangle^{1/2} + C.C. \\ &\leq 2|\Delta_k(\alpha)|^2\langle (U_k D)^{-1}v, (U_k D)^{-1}v\rangle \\ &\leq 2|\Delta_k(\alpha)|^2\langle v, S_k v\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la condición de estabilidad, otenemos

$$\langle v, \Big((\hat{P}_0(i\omega_k) + B_0)^\dagger S_k + S_k(\hat{P}_0(i\omega_k) + B_0)\Big)v\rangle \leq -2(\delta - \alpha|\Delta_k(\alpha)|^2)\langle v, S_k v\rangle;$$

y elegiendo α suficientemente pequeño obtenemos

$$(\hat{P}_0(i\omega_k) + B_0)^\dagger S_k + S_k(\hat{P}_0(i\omega_k) + B_0) \leq -\frac{3}{2}\delta S_k. \tag{4.30}$$

Notemos ademas que $S_k = U_k D^{-2} U_k^\dagger$, y como U_k es hermítica obtenemos,

$$I \leq S_k \leq \frac{1}{\alpha^{(s-1)}} I. \tag{4.31}$$

Ahora bien, la continuidad de $\hat{P}_0(i\omega) + B_0$ nos permite extender (4.30) a un entorno (bola) $B_k = \{\omega : |\omega - \omega_k| \leq r_k\}$ suficientemente pequeño de ω_k. Es decir, existe $r_k > 0$ tal que

$$(\hat{P}_0(i\omega) + B_0)^\dagger S_k + S_k(\hat{P}_0(i\omega) + B_0) \leq -\delta S_k.\ \ \forall\ |\omega - \omega_k| \leq r_k. \tag{4.32}$$

Como $B = \{\omega : |\omega| \leq C + 1\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbf{R}^n$, (por el teorema de Heine-Borel) pueden elegirse una cantidad finita de ω_k's con sus correspondientes entornos B_k's tal que el conjunto $\{B_k\}$ cubre B. Para cada ω_k se obtiene la correspondiente matriz S_k que satisface (4.32). Existe una partición de la unidad (ver [28]) adaptada a este cubrimiento de B. Es decir, un conjunto de funciones $\{\psi_k(\omega)\}$ tal que:

i) $0 \leq \psi(\omega) \leq 1$ para todo k;

ii) $\psi_k(\omega) \in C_0^\infty(B_k)$ para todo k;

iii) $\sum_k \psi_k(\omega) = 1$ para todo $\omega \in B$.

Usando esta partición de la unidad definimos:

$$\tilde{S}^{(1)}(\omega) = \sum_k \psi(\omega_k) S_k.$$

Claramente, por las propiedades de los S_k y de la partición de la unidad, este símbolo es hermítico y suave como función de ω. Además, de acuerdo a las propiedades i) y ii), la desigualdad (4.32) puede ser multiplicada por $\psi_k(\omega)$ en ambos miembros y (4.32) vale ahora para todo $\omega \in B$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\tilde{S}^{(1)}(\omega)(\hat{P}_0(i\omega) + B_0) &= \sum_k \psi_k(\omega)(\hat{P}_0(i\omega) + B_0)^\dagger S_k + S_k(\hat{P}_0(i\omega) + B_0) \\ &\leq \sum_k \psi_k(\omega)(-\delta S_k) \\ &\leq -\delta \tilde{S}^{(1)}(\omega). \end{aligned}$$

Haciendo un cálculo similar se obtiene, apartir de (4.31), $I \leq \tilde{S}^{(1)}(\omega), \ \ \forall\, |\omega| \leq C + 1$. De esta forma la $\tilde{S}^{(1)}(\omega)$ satisface lo requerido por la condición (b) del teorema 4.4.

Consideremos ahora el símbolo $P_0(i\omega) + B_0 = |\omega| P_0(i\omega') + B_0$ para $|\omega| \geq C$ en un entorno del punto $\omega'_0 \in S^{n-1}$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los autovalores *distintos* de $P_0(i\omega')$. Es conocido que, debido a la constancia de la multiplicidad de los autovalores de $P_0(i\omega')$, (ver por ej. [29]) existe una transformación suave, no singular $\tilde{T}_0(\omega')$ tal que

$$\tilde{T}_0^{-1}(\omega') P_0(i\omega') \tilde{T}_0(\omega') = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r \end{pmatrix}; \tag{4.33}$$

donde todos los autovalores de Λ_j son iguales a λ_j y, como hay un conjuto completo de autovectores,

$$\Lambda_j = \lambda_j I$$

es diagonal.

$\tilde{T}_0$ no es única, podemos reemplazarla por

$$T_0 = \tilde{T}_0 \begin{pmatrix} T_{01} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_{0r} \end{pmatrix}; \tag{4.34}$$

donde las T_{0j} son sub-matrices arbitrarias no singulares que oportunamente elegiremos como matrices constantes. De (4.33) obtenemos

$$\tilde{T}_0^{-1}(|\omega|P_0(i\omega')+B_0)\tilde{T}_0 =: |\omega|\begin{pmatrix}\Lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\tilde{B}_{11} & \cdots & \tilde{B}_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{B}_{r1} & \cdots & \tilde{B}_{rr}\end{pmatrix}.$$

Mientras que de (4.34) obtenemos:

$$T_0^{-1}(|\omega|P_0(i\omega')+B_0)T_0 = |\omega|\begin{pmatrix}\Lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}T_{01}^{-1}\tilde{B}_{11}T_{01} & \tilde{\tilde{B}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{B}}_{1r}\\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\ \tilde{\tilde{B}}_{r1} & \tilde{\tilde{B}}_{r2} & \cdots & T_{0r}^{-1}\tilde{B}_{rr}T_{0r}\end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Para C grande (y por lo tanto $|\omega|$ grande) podemos considerar a la segunda matriz en (4.35) como una perturbación de la primera. Por lo tanto, (ver [14]), existe una matriz $T_1(\omega', 1/|\omega|)$, función suave de ω' y $1/|\omega|$, tal que

$$(I+\frac{1}{|\omega|}T_1)^{-1}T_0^{-1}(|\omega|P_0(i\omega')+B_0)T_0(I+\frac{1}{|\omega|}T_1)$$

$$= |\omega|\begin{pmatrix}\Lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}T_{01}^{-1}\tilde{B}_{11}T_{01}+\frac{1}{|\omega|}\tilde{\tilde{B}}_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & T_{0r}^{-1}\tilde{B}_{rr}T_{0r}+\frac{1}{|\omega|}\tilde{\tilde{B}}_{rr}\end{pmatrix}.$$

La condición de estabilidad implica que los autovalores de $\tilde{B}_{jj}$ tienen partes reales negativas. Por lo tanto podemos elegir las T_{0j} tales que

$$2\mathrm{Re}(T_{0j}^{-1}\tilde{B}_{jj}T_{0j}) \leq -\frac{3\delta}{2}I, \text{ para } |\omega'-\omega'_0| \text{ suficientemente pequeño.}$$

Las matrices

$$\tilde{H}_0 = (T_0^{-1})^{\dagger}T_0$$

y,

$$\tilde{H}_0+\frac{1}{|\omega|}\tilde{S} = \left(\left((I+\frac{1}{|\omega|}T_1)T_0\right)^{-1}\right)^{\dagger}\left((I+\frac{1}{|\omega|}T_1)T_0\right)^{-1},$$

satisfacen (4.23) y (4.24) para C suficientemente grande y $\omega' = \omega'_0$. Como ω' se mueve en un conjunto compacto, podemos utilizar el argumento de la partición de la unidad para extender las definiciones de $\tilde{H}_0$ y $\tilde{S}$ a todo ω' en forma suave. De esta forma las condiciones (a) y (b) en el teorema 4.4 se satisfacen.

Consideremos ahora el símbolo matricial

$$\hat{P}_0(i\omega') + \varepsilon \hat{P}_1(x, t, i\omega'). \tag{4.36}$$

Como los autovalores de (4.36) son imaginarios puros y sus multiplicidades no cambian podemos encontrar una matriz de transformación $T_2(x, t, \omega', \varepsilon)$, que es función suave de todos sus argumentos, tal que

$$(I + \varepsilon T_2)^{-1} T_0^{-1} (\hat{P}_0 + \varepsilon \hat{P}_1) T_0 (I + \varepsilon T_2) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\Lambda}_r \end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

donde $\tilde{\Lambda}_j = \tilde{\lambda}_j I$. Definiendo $\tilde{H}_1(x, t, \omega', \varepsilon)$ de la forma

$$\tilde{H}_0 + \varepsilon \tilde{H}_1 = (T^{-1})^{\dagger} T^{-1}, \quad T = T_0(I + \varepsilon T_2),$$

vemos que tiene la propiedad (4.26) y la condición (c) en el teorema 4.4 se satisface. Por lo tanto, el teorema 4.5 es consecuencia del teorema 4.4. $\square$

El segundo caso en que podemos mostrar que el sistema (4.21) es una contracción es mas simple. Es el caso de los sistemas simétrico hiperbólicos. Si la condición 4.3 se satisface, la condición de estabilidad, para $\omega = 0$, implica

$$\mathrm{Re} B_0 \leq -\delta\, I, \tag{4.38}$$

y por lo tanto

$$\mathrm{Re}(u, (P_0 + B_0)u) \leq -\delta(u, u);$$

en consecuencia, podemos mostrar que (4.21) es una contracción en la norma L_2 ($H = I$). Otro caso, no contenido en el anterior, en que se demuestra que (4.21) es una contracción en la norma L_2, es cuando (4.38) se satisface y B_0 no es simétrica, (la única diferencia en este caso es que (4.38) no es consecuencia de la condición de estabilidad). En la sección 4.5 relajaremos la condición de estabilidad a ciertos casos de interés físico donde la condición (4.38) no vale. Por lo tanto nos interesa dar aquí una demostración, que no dependa de tal condición, de que (4.21) es una contracción. Para hacer esto construiremos un $H \neq I$, y a tal fin utilizamos la condición 4.3 completa (incluyendo la hermiticidad de B_0).

Teorema 4.6 *Si los coeficientes A_0^j, A_1^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, y B_0 pero no necesariamente B_1 son matrices hermíticas y el sistema (4.21) satisface la condición de estabilidad; entonces valen los resultados del teorema 4.5*

Antes de probar este teorema probaremos uno análogo al teorema 4.4.

Teorema 4.7 *Supongamos que, para $|\omega|$ suficientemente grande, existe una matriz hermítica $\tilde{H}(\omega) = I + \frac{1}{|\omega|}\tilde{S}$ donde $\tilde{S} = \tilde{S}(\omega', 1/|\omega|)$ es una función suave de ω' y $1/|\omega|$ tal que*

$$2\mathrm{Re}\tilde{H}(\omega)(|\omega|\hat{P}_0(i\omega') + B_0) \leq -\delta\tilde{H}(\omega). \tag{4.39}$$

Entonces, para ε suficientemente pequeño, el sistema (4.21) es una contracción.

Prueba. No escribiremos la prueba ya que es totalmente análoga a la del teorema 4.4 aunque, en este caso, es mucho mas simple pues se construye un operador pseudo diferencial H, independiente del tiempo, de la forma:

$$H = I + S$$

el cual tiene las propiedades requeridas por el teorema 4.3. □

Prueba del Teorema 4.6. Consideremos el símbolo $|\omega|\hat{P}_0(i\omega')+B_0$ para $|\omega|$ grande. Sea $\omega' = \omega_0'$ fijo. Como los coeficientes A_0^j son matrices hermíticas, existe una matriz de transformación unitaria tal que

$$U^*(\omega_0')\Big(|\omega|\hat{P}_0(i\omega_0') + B_0\Big)U(\omega_0') = i|\omega| \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \cdots & \tilde{B}_{1r} \\ \tilde{B}_{12}^* & \tilde{B}_{22} & \cdots & \tilde{B}_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{B}_{1r}^* & \cdots & \tilde{B}_{r-1\,r}^* & \tilde{B}_{rr} \end{pmatrix}, \tag{4.40}$$

donde

$$\Lambda_j = \lambda_j I$$

son matrices múltiplo de la matriz identidad con autovalores distintos. Como las $\tilde{B}_{jj}$ son también hermíticas, podemos suponer que son diagonales. De lo contrario, aplicando una transformación unitaria diagonal por bloques, podemos llevarlas a esta forma. Para $|\omega|$ grande consideramos la segunda matriz en (4.40) como una pequeña perturbación de la primera. Por lo tanto podemos construir una transformación $I + \frac{1}{|\omega|}T(\omega_0')$ tal que

$$\begin{aligned} &\Big(I + \frac{1}{|\omega|}T(\omega_0')\Big)^{-1}U^*(\omega_0')\Big(|\omega|\hat{P}_0(i\omega_0') + B_0\Big)U(\omega_0')\Big(I + \frac{1}{|\omega|}T(\omega_0')\Big) \\ &= i|\omega| \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{B}_{rr} \end{pmatrix} + \frac{1}{|\omega|}\tilde{\tilde{B}} \\ &=: i|\omega|\Lambda + \tilde{B} + \frac{1}{|\omega|}\tilde{\tilde{B}}. \end{aligned}$$

La condición de estabilidad implica que $\tilde{B}_{jj} \leq -\delta I$ para todo j y, para $|\omega|$ suficientemente grande,

$$2\mathrm{Re}(i|\omega|\Lambda + \tilde{B} + \frac{1}{|\omega|}\tilde{\tilde{B}}) \leq -\frac{3}{2}\delta I.$$

Mostraremos ahora que existe un entorno de ω_0' donde la matriz $\tilde{H}(\omega)$ de (4.39) está dada por

$$\tilde{H}(\omega) = U(\omega_0')(I + \frac{1}{|\omega|}T^\dagger(\omega_0'))^{-1}(I + \frac{1}{|\omega|}T(\omega_0'))^{-1}U^\dagger(\omega_0') =: I + \frac{1}{|\omega|}\tilde{S}(\omega_0', \frac{1}{|\omega|}).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
&2\mathrm{Re}\,\tilde{H}(\omega)(|\omega|P_0(i\omega') + B_0)\\
&= 2\mathrm{Re}\,\tilde{H}(\omega')(|\omega|P_0(i\omega_0') + B_0) + |\omega|2\mathrm{Re}\,\tilde{H}(\omega)P_0(i(\omega' - \omega_0'))\\
&\leq -\frac{3}{2}\delta\tilde{H}(\omega) + |\omega| \cdot \frac{1}{|\omega|}2\mathrm{Re}\,\tilde{S}(\omega_0', \frac{1}{|\omega|})P_0(i(\omega' - \omega_0'))\\
&\leq \Big(-\frac{3}{2}\delta + \text{const.}|\omega' - \omega_0'|\Big)\tilde{H}(\omega).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $|\omega' - \omega_0'|$ suficientemente pequeño, la desigualdad (4.39) se satisface. Nuevamente, utilizando el argumento de la partición de la unidad, podemos construir el $\tilde{H}(\omega)$ para todo ω' y el teorema 3.4 es consecuencia del teorema 3.5. □

4.4 Sistemas cuasi lineales

Consideraremos ahora el sistema no lineal completo (4.1). Comenzaremos considerando el caso en que las matrices $A_0^j, A_1^j,\ j = 1, \ldots, n$, son reales simétricas y

$$\mathrm{Re}\,B_0 \leq -\delta\, I. \tag{4.41}$$

Los argumentos aquí desarrollados siguen aquellos en [14] (Capítulos 5,6) y se supone al lector familiarizado con este material.

Deduciremos estimaciones a priori usando las siguientes notaciones: $j = (j_1, \ldots, j_n),\ j_l$ multi-índice de números naturales; $|j| = \sum_l j_l,\ D^j = \partial^{j_1}/\partial x_1^{j_1} \cdots \partial^{j_s}/\partial x_n^{j_n}$ denotan derivadas espaciales y

$$\|u\|_p^2 = \sum_{|j|\leq p} \|D^j u\|^2$$

denota la norma de Sobolev de orden p.

Para comenzar supondremos que $\varepsilon = 0$ y deduciremos las estimaciones para

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Big(P_0(\frac{\partial}{\partial x}) + B_0\Big)u,$$
$$u(x,0) = f(x). \tag{4.42}$$

Diferenciando (4.42) obtenemos

$$(D^j u)_t = P_0(\frac{\partial}{\partial x})D^j u + B_0 D^j u.$$

Por lo tanto, por (4.41),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\|D^j u\|^2 &= 2\mathrm{Re}\Big(D^j u, P_0(\frac{\partial}{\partial x})D^j u\Big) + 2\mathrm{Re}(D^j u, B_0 D^j u)\\ &= 2\mathrm{Re}(D^j u, B_0 D^j u) \leq -2\delta\|D^j u\|^2.\end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades para todo j con $|j| \leq p$ obtenemos, para todo p,

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_p^2 \leq -2\delta\|u\|_p^2, \tag{4.43}$$

i.e.,

$$\|u(\cdot,t)\|_p^2 \leq e^{-2\delta t}\|u(\cdot,0)\|_p^2.$$

Consideraremos ahora los sistemas no lineales (4.1) y deduciremos una estimación para el caso $p \geq s+2$. En este caso hay resultados bien conocidos de existencia local. Existe un intervalo $0 \leq t \leq T,\ T > 0$, donde la solución existe y

$$\|u(\cdot,t)\|_p^2 \leq 2\|u(\cdot,0)\|_p^2. \tag{4.44}$$

Caben dos posibilidades:

$$\text{O bien} \quad T = \infty \quad \text{o} \quad T < \infty \text{ y } \|u(\cdot,T)\|_p^2 = 2\|u(\cdot,0)\|_p^2. \tag{4.45}$$

Mostraremos ahora que, para ε suficientemente pequeño, $T = \infty$ y que el problema de valores iniciales es una contracción.

Derivando el sistema (4.1) obtenemos

$$(D^j u)_t = \Big(P_0(\frac{\partial}{\partial x}) + B_0\Big)(D^j u) + \varepsilon P_1(x,t,u,\frac{\partial}{\partial x})(D^j u) + \varepsilon R_j,$$

donde R_j denota términos de menor orden, es decir con derivadas hasta orden $|j|$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|D^j u\|_t^2 &= 2\mathrm{Re}\Big(D^j u, \Big(P_0(\frac{\partial}{\partial x}) + B_0\Big)D^j u\Big)\\ &\quad +2\mathrm{Re}\,\varepsilon\Big(D^j u, P_1(x,t,u,\frac{\partial}{\partial x})D^j u\Big) + 2\varepsilon\mathrm{Re}(D^j u, R_j).\end{aligned} \tag{4.46}$$

Por (4.41),

$$2\text{Re}\Big(D^j u, (P_0(\frac{\partial}{\partial x}) + B_0)D^j u\Big) \leq -2\delta \|D^j u\|^2. \tag{4.47}$$

Integrando por partes obtenemos:

$$\begin{aligned}
\text{Re}\Big(D^j u, P_1(x,t,u,\frac{\partial}{\partial x})D^j u\Big) &= -\frac{1}{2}\Big(D^j u, \frac{\partial A_1^i}{\partial x^i} D^j u\Big) \\
&\leq \text{const. } K_1\Big(1 + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x^i}\right|_\infty\Big)\|D^j u\|^2 \\
&\leq M_1 \|u\|_p^2. \qquad (4.48)
\end{aligned}$$

Los M_j son polinomios en $\|u\|_p$ de grado $|j|$ cuyos coeficientes dependen solo de las constantes $K_0, \ldots, K_{|j|}$ de la condición 4.1. Usando las desigualdades de Sobolev obtenemos las cotas

$$\|(D^j u, R_j)\| \leq M_j \|u\|_j^2. \qquad \text{(índices no sumados)}$$

Sumando todas estas desigualdades obtenemos,

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_p^2 \leq -2\delta\|u\|_p^2 + \varepsilon M \|u\|_p^2, \quad M = \max_j M_j.$$

Asi, para todo ε con $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ y ε_0 suficientemente pequeño, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_p^2 \leq -\delta\|u\|_p^2.$$

Por lo tanto $T = \infty$ y el problema de valores iniciales es una contracción.

Consideramos ahora el caso general suponiendo que las condiciones del teorema 4.5 o el teorema 4.6 se satisfacen. Comenzamos nuevamente con el caso $\varepsilon = 0$. Entonces, existe un operador pseudo diferencial

$$\tilde{H} = H_0 + S$$

que define una norma equivalente a la norma L_2 tal que,

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_{\tilde{H}}^2 = \frac{\partial}{\partial t}(u, \tilde{H}u) = 2\text{Re}(u, \tilde{H}\Big(P_0 + B_0)u\Big) \leq -\delta(u,u)_{\tilde{H}}.$$

Asi,

$$\|u(\cdot,t)\|_{\tilde{H}}^2 \leq e^{-\delta t}\|u(\cdot,0)\|_{\tilde{H}}^2,$$

y por lo tanto también se cumple

$$\|u(\cdot,t)\|_{\tilde{H},p}^2 \leq e^{-\delta t}\|u(\cdot,0)\|_{\tilde{H},p}^2, \quad \|u\|_{\tilde{H},p}^2 = \sum_{|j|\leq p} \|D^j u\|_{\tilde{H}}^2.$$

Consideremos ahora el sistema general (4.1). Procediendo en la misma forma que el caso previo obtenemos las estimaciones para $p \geq s+2$. La única diferencia es que las estimaciones se obtienen en la norma H.

También es este caso la existencia local es bien conocida y existe un intervalo $0 \leq t \leq T,\ T > 0$ donde

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{\tilde{H},p} \leq 2\|u(\cdot,0)\|^2_{\tilde{H},p}.$$

Para T, la alternativa (4.45) vale. En este intervalo podemos estimar la solución y sus derivadas hasta orden $p-[s/2]-1$ en la norma supremo en términos de $\|u(\cdot,0)\|^2_{\tilde{H},p}$. Por lo tanto, podemos pensar en el sistema (4.1) como en un sistem lineal y construir el operador pseudo diferencial (4.22) y estimar la solución y sus derivadas en la norma H que difiere de la $\tilde{H}$ solo en términos de orden ε. El símbolo depende de la solución pero, por el teorema 4.4, si p es suficientemente grande, entonces la constante K del teorema 4.3 también puede ser estimada en términos de $\|u(\cdot,0)\|^2_{\tilde{H},p}$. El resto de la prueba continúa como antes. Tomando derivadas espaciales de (4.1) obtenemos, en la norma H,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(D^j u, HD^j u) &= \varepsilon(u, H_{1t}u) + \Big(D^j u, H((P_0 + B_0 + \varepsilon(P_1 + B_1))D^j u\Big) \\ &\quad + 2\varepsilon \mathrm{Re}(D^j u, HR_j).\end{aligned}$$

Usando el teorema 4.3 obtenemos la desigualdad (4.4) pero esta vez en la norma H. Hemos probado de esta forma el teorema principal 4.1.

4.5 Relajación de la condición de estabilidad

En esta sección relajaremos la condición de estabilidad 4.1 al caso en que algunos de los autovalores de B_0 tienen parte real igual a cero. Llevamos a cabo esto solo para el caso 2π–periódico.

Definición 4.3 *Diremos que el sistema (4.1) satisface la* **condición de estabilidad relajada** *si satisface las siguientes condiciones:*

1) Existe una constante $\delta > 0$ tal que los autovalores λ del símbolo $\hat{P}_0(i\omega) + B_0$ satisfacen

$$\mathrm{Re}\,\lambda \leq -\delta \tag{4.49}$$

para todos los $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \neq 0$, ω_j entero.

2) Los autovalores $\lambda(0)$ de B_0 satisfacen $\mathrm{Re}\lambda(0) \leq -\delta$ *o $\lambda = 0$. Además, si la multiplicidad del autovalor cero es r, entonces le corresponden r autovectores linealmente independientes.*

3) El núcleo de B_1 contiene al núcleo de B_0.

Podemos encontrar una transformación S tal que

$$S^{-1}B_0 S = \begin{pmatrix} B_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{01} \text{ nonsingular.} \tag{4.50}$$

Si B_0 es simétrica, podemos elegir S unitaria. Por lo tanto podemos suponer que el sistema (4.1) ya está escrito en una base tal que B_0 ya tiene la forma (4.50). Entonces, por la tercera parte de la suposición, B_1 tiene la forma

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{12} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

Sea

$$u(x,t) = \begin{pmatrix} \hat{u}^I(0,t) \\ \hat{u}^{II}(0,t) \end{pmatrix} + \sum_{\omega \neq 0} e^{i\langle \omega, x\rangle} \hat{u}(\omega, t).$$

Aquí la partición de $\hat{u}(0,t)$ corresponde a la de B_0 y B_1. Denotemos por Q la proyección

$$Qu(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{u}^{II}(0,t) \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, introduciendo la notación:

$$Qu(x,t) =: u^{(0)}(t), \quad (I-Q)u(x,t) =: v(x,t),$$

podemos escribir el sistema (4.1) como sigue:

$$\begin{aligned} u_t^{(0)} &= Q(P_0 + B_0)(u^{(0)} + v) + \varepsilon Q(P_1 + B_1)(u^{(0)} + v) \\ &= \varepsilon Q(P_1 + B_1)v. \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned} v_t &= (I-Q)(P_0 + B_0)(u^{(0)} + v) + \varepsilon(I-Q)(P_1 + B_1)(u^{(0)} + v) \\ &= (P_0 + B_0)v + \varepsilon(I-Q)(P_1 + B_1)v. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Al igual que antes, sólo es necesario considerar el caso lineal. Entonces, (4.53) se desacopla completamente de (4.52). Este es un sistema de ecuaciones en el subespacio $(I-Q)L_2$. Los resultados de las secciones anteriores pueden aplicarse y dicen que, para ε suficientemente pequeño, v converge exponencialmente a cero. Además, como

$$u^{(0)}(t) = u^{(0)}(0) + \varepsilon \int_0^t Q(P_1 + B_1)v(x,\xi)d\xi,$$

concluímos también que $u^{(0)}(t)$ converge para $t \to \infty$.

Resumimos los resultados de esta sección en el siguiente teorema.

Teorema 4.8 *Supongamos que se cumple la condición 4.1 y la condición 4.2 o la 4.3 pero, en ambos casos, con la condición de estabilidad reemplazada por la condición de estabilidad relajada. Entonces, para ε suficientemente pequeño, el problema es una contracción, en una norma H apropiada, para la parte no trivial v de la solución de (4.1) y $u^{(0)} \to$ const. cuando $t \to \infty$. El sistema (4.1) es por lo tanto estable en este sentido generalizado.*

5 Conclusiones

Resumimos aquí brevemente los aspectos mas importantes de los resultados hallados en los capítulos 2, 3 y 4. Mencionamos también algunos problemas relacionados a este trabajo cuya solución está todavía pendiente.

En el capítulo 2 se estudió el límite parabólico de las teorías hiperbólicas lineales y cuasi lineales de conducción del calor dadas por la ecuación de conservación de la energía (1.2) y la ecuación de Cattaneo (1.4).

En el caso lineal se probó que cualquier solución del sistema hiperbólico converge a la solución de la ecuación del calor usual (obtenida de (1.2) y la Ley de Fourier (1.1)), con el mismo dato inicial para la temperatura, cuando el tiempo de relajación de Cattaneo τ tiende a cero. La convergencia mencionada tiene lugar en cualquier cualquier norma de Sobolev H^n con n suficientemente grande. Por lo tanto, la convergencia también vale puntualmente para las soluciones y sus derivadas espaciales de cualquier orden. Utilizado este resultado se muestra además cómo la corrección que la ecuación de Cattaneo introduce a la Ley de Fourier se hace despreciable, en circunstancias ordinarias, en un tiempo mucho mas corto que el tiempo típico en que se establece el equilibrio. Se destaca, además que para que los efectos hiperbólicos sean apreciables, es necesario dar datos iniciales cuyas variaciones espaciales tengan una longitud típica del orden de c/τ, donde c es la velocidad de propagación de las ondas de temperatura (del orden de la temperatura del sonido en el medio [10]).

El resultado principal del capítulo 2, expresado en el teorema 2.2, establece que las soluciones del sistema hiperbólico cuasi lineal de CFO [13] convergen, cuando $\tau \to 0$, a la solución del sistema parabólico límite de la teoría usual de Fourier, siempre que los datos iniciales del sistema hiperbólico estén inicializados y sean suficientemente pequeños. Una limitación importante a la que están sujetos estos resultados es el hecho de que el análisis del límite parabólico es válido solo durante un tiempo finito. Esto se debe a que el funcional energía utilizado no permite obtener una cota global para la solución debido a la no linealidad de las ecuaciones. Los resultados de este capítulo dieron origen a una publicación en el *J. Math. Phys.* [30]. Cabe aclarar, como se muestra mas adelante, que el límite parabólico puede ser pensado de una manera más general, y pueden obtenerse, como consecuencia de los resultados del capítulo 4, resultados más fuertes.

En el capítulo 3 de este trabajo se estudió la estabilidad del sistema cuasi lineal de conducción del calor de Morro y Rugeri [16]. Siguiendo un trabajo de Matsumura, introdujimos una energía dependiente del tiempo con la cual se probó que, cuando los datos iniciales son suficientemente cercanos a los datos de equilibrio, el sistema de Morro y Ruggeri es una contracción en esta nueva norma. De aquí se concluyó que no solo que existen soluciones globales estables cercanas a equilibrio (lo cual ya fue probado por Franchi y Morro [19]), sino también que la convergencia a equilibrio es exponencial. Cabe destacar que la única condición que el teorema impone sobre los datos iniciales es su cercanía a los datos de equilibrio, no siendo necesario que estén inicializados. Por otro lado, en una comunicación personal el profesor R. Geroch nos hizo notar que la idea de la energía de Matsumura no puede ser generalizada a sistemas tales como los de fluidos disipativos relativistas de tipo divergencia. Por lo tanto, para atacar con éxito los problemas anteriores, en el caso de estos fluidos, fue necesario usar nuevas ideas.

En el capítulo 4 se estudió el problema de la estabilidad cercana a equilibrio, para sistemas cuasi lineales de primer orden, mediante la introducción de una norma que permitió tratar sistemas muy generales (sin la limitación antes mencionada para el tratamiento con la energía de Matsumura), tanto como para incluir a los fluidos disipativos relativistas, por lo menos en el casos en que el dominino es acotado con condiciones de contorno periódicas.

El resultado principal de este trabajo está enunciado en los teoremas 4.1 y 4.8, y constituye una generalización al caso de sistemas en derivadas parciales del teorema de estabilidad de Lyapunov para ecuaciones diferenciales ordinarias. Muchos sistemas disipativos que aparecen en física son sistemas compuestos por leyes de conservación y ecuaciones disipativas. Para tales sistemas la relación de estabilidad 4.1 no se satisface. No obstante dichos sistemas satisfacerán, en general, la condición de estabilidad relajada y por lo tanto, en muchos casos de interés físico podemos aplicar el teorema 4.8. Los resultados expuestos en el capítulo 4 fueron realizados en colaboración con H.O. Kreiss y O.A. Reula y dieron origen a un trabajo que fue enviado para su publicación.

Para realizar una comparación directa entre la estabilidad obtenida mediante el uso de la energía de Matsumura y los resultados del capítulo 4, aplicaremos aquí el teorema 4.8 a la teoría de conducción de calor de MR que estudiamos en el capítulo 3.

Consideramos el problema de Cauchy, en el caso L-periódico, para el sistema (3.1), (3.2),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ q \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \delta q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ q \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ q \end{pmatrix}.$$

Donde v, δ y κ son funciones suaves de e y q, con $v^2, \kappa > 0$. Este sistema puede ser tratado con el caso simétrico del teorema 4.8, redefiniendo el producto para vectores de s componentes usando la matriz en frente de la derivada temporal. No obstante, nosotros usaremos aquí, con propósito ilustrativo, el caso no simétrico del teorema reescribiendo el sistema en la forma:

$$\begin{pmatrix} e \\ q \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -v^2 & v^2\delta q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ q \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -v^2/\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ q \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Debemos verificar que la matriz

$$i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -v^2 & v^2\delta q \end{pmatrix} \omega'$$

tiene un conjunto completo de autovectores y que sus autovalores son imaginarios puros y tienen multiplicidad constante. Calculando los autovalores obtenemos,

$$\alpha_\pm = \frac{i}{2}\Big(v^2\delta q\omega' \pm \sqrt{(v^2\delta q)^2 + v^2}\Big).$$

Puesto que ω' toma solo los valores ± 1 y que $v \neq 0$, simpre existen dos autovalores distintos, imaginarios puros, y dos autovectores linealmente independientes. Debemos ahora verificar que se satisface la condición de estabilidad relajada. Una solución de equilibrio es de la forma $e = e_0 = \text{const.}$ y $q = 0$. Por lo tanto el símbolo del sistema en equilibrio es:

$$P_0(i\omega) + B_0 = i\omega A_0 + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\omega \\ -v_0^2 i\omega & -v_0^2/\kappa_0 \end{pmatrix},$$

donde ω puede tomar los valores $2\pi n/L$, $n \in \mathbf{Z}$. Los autovalores de este símblo matricial son:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{v_0^2}{\kappa_0} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{\kappa_0}\right)^2 - 4v_0^2\omega^2}\right).$$

Para acotar los autovalores, para $\omega \neq 0$, hay que distinguir dos casos.

$$\mathrm{Re}\{\lambda_\pm\} \leq -\delta = \begin{cases} -\frac{v_0^2}{2\kappa_0} & \text{si } v_0 L \leq 4\pi\kappa_0. \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{\kappa_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{\kappa_0}\right)^2 - 4v_0^2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2}\right) & \text{si } v_0 L > 4\pi\kappa_0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Según lo dicho en el capítulo 2, los casos de interés físico satisfacen $vL \gg \kappa$, por lo que tenemos que considerar el segundo caso en (5.2). Para datos iniciales suficientemente pequeños el tiempo de decaimiento puede considerarse igual a $2/\delta$ con lo que obtenemos $\tau_d \simeq L^2/(2\pi^2\kappa_0)$ mientras que el tiempo de decaimiento obtenido en el capítulo 3 (ver teorema 3.2) es $\tau_d \geq 8L^2/\kappa_0$. Una comparación directa nos indica que el tiempo obtenido a partir del teorema 4.8 es unas 150 veces menor que el dado por el teorema 3.2.

Consideremos ahora el límite parabólico de las teorías hiperbólicas de conducción del calor. En el capítulo 2, el estudio del límite parabólico se realizó comparando en forma directa la solución del sistema hiperbólico con la solución del sistema parabólico límite. Es decir, se estudió la evolución temporal de la variable $q - q^0 = q + kT_x^0$, que, en términos de la densidad de energía parabólica e^0, se puede expresar $q - q^0 = q + \kappa e_x^0$. Este método es apropiado para tratar casos simples como las ecuaciones de conducción del calor, sin embargo no puede ser generalizado a casos mas complejos como el de las ecuaciones del fluidos disipativos relativistas. El problema básico que se presenta en este caso es que el sistema parabólico límite (Ecuaciones de Eckart) no tienen un problema de valores iniciales correctamente formulado [5], y en consecuencia, carece de soluciones con las cuales realizar una comparación.

Para ilustrar cómo debe procederse en estos casos, consideraremos el sistema de conducción dado por la conservación de la energía (1.2) y la ecuación de Cattaneo (1.4), que puede ser escrito, en el caso unidimensional, en términos de la densidad de energía e y el flujo del calor q

$$\begin{aligned} e_t &= -q_x \\ \tau(e) q_t &= -\frac{k(e)}{\gamma_0(e)} e_x - q. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Definamos la variable $s = q + \kappa e_x$ ("campo de relajación", comparar con $q - q_0$ dado mas arriba). En el límite parabólico, s es identicamente cero. Ahora bien, el conjunto de observaciones (experimentos) que confirman a la ecuación límite (ecuación del calor, en el caso lineal) como apropiada para describir procesos de conducción puede ser pensado, en vez de una verificación de las soluciones de la ecuación límite, como un conjunto de cotas para el campo de relajación. Uno estaría conforme con el sistema (5.3), en lo que hace a su límite parabólico, si la evolución temporal que predice para los campos e y q es tal que garantice que s decae rápidamente a cero (al menos bajo "condiciones normales" en que se realizan los experimentos). Estudiemos pues la evolución de s. La ecuación que satisface s es

$$s_t = -\frac{1}{\tau} s - \kappa q_{xx} - \kappa' q_x e_x, \tag{5.4}$$

y es fácil ver que la norma L_2 de s satisface,

$$\|s\|_t \leq -\frac{1}{\tau_m} \|s\| + (\|\kappa q_{xx}\| + \|\kappa' q_x e_x\|), \tag{5.5}$$

donde τ_m es una cota superior para $\tau(e)$. Lo que (5.5) nos dice es que, si e y q existen y se mantienen cercanos a equilibrio durante un tiempo suficientemente largo, de manera que el segundo término en (5.5) sea pequeño (ya que es cero en equilibrio), entonces el primer término en (5.5) garantiza que s, aunque su valor inicial sea "grande", decaiga con tiempo de decaimiento τ_m hasta que la norma de s sea "pequeña" es decir, del orden de $\tau_m(\|\kappa q_{xx}\| + \|\kappa' q_x e_x\|)$. Ahora bien, como ya se discutió en el capítulo 2, bajo condiciones normales τ_m es un tiempo de relajación muy pequeño comparado con el tiempo de decaimiento a equilibrio τ_d de la solución completa de (5.3), por lo que podemos obtener conclusiones similares a las obtenidas en el capítulo 2 para el caso lineal, pero ahora para el sistema no lineal completo. Para normas de Sobolev superiores, se pueden obtener cotas análogas a (5.5).

Los resultados del capítulo 4 son importantes, a la luz de lo antes dicho, porque garantizan que la solución de (5.4) exista durante un tiempo suficientemente largo (en realidad para todo tiempo) y permanezca cerca de equilibrio (de forma tal que el segundo término en (5.5) sea pequeño), como para que el razonamiento antes dado sea aplicable. Los resultados del capítulo 3 y la discusión recién dada dieron origen a un trabajo en colaboración con G.B. Nagy y O.A. Reula que fué enviado para su publicación.

Estudios similares, mediante la introducción de campos de relajación, para las teorías de fluidos disipativos relativistas fueron llevados a cabo por Geroch [31] y Lindblom [32], quienes dejaron pendiente el estudio de la existencia global y la estabilidad de tales sistemas. Recientemente y en colaboración con H.O. Kreiss, G.B. Nagy y O.A. Reula, se ha logrado aplicar los resultados del capítulo 4 del presente trabajo a estas teorías de fluidos disipativos relativistas para el caso de espacio-tiempos compactos y planos, mostrando la existencia global y estabilidad de las soluciones. Este resultado es importante en si mismo y cobra mayor importancia aún a la luz de lo antes expuesto. No obstante su discución merece un capítulo completo y no será presentada como parte de este trabajo.

6 Apéndice: Teorías de conducción de calor de tipo divergencia

En este apéndice daremos una formulación general de las teorías tipo divergencia de conducción de calor en un medio en reposo. Este tema ha sido estudiado por diversos autores [3], [13], [16], [5]. Usaremos aquí las ideas básicas de la termodinámica extendida [6] [7]. Nuestra deducción generaliza ligeramente a la de Morro y Ruggeri y sigue los lineamientos de [5].

En este apéndice supondremos que las propiedades del medio están bien descriptas por un tensor métrico (simétrico y definido positivo) denotado por h_{ij}. Los indices $i, j, k, ...$ recorren las componentes espaciales y supondremos que vale la convención de suma sobre los índices repetidos. Como es usual en geometría, h^{ij} denotará la inversa de la métrica ($h^{ij}h_{jk} = \delta^i_k$).

Las teorías a considerar satisfacerán los siguientes postulados.

(i) Las variables dinámicas de estas teorías son un campo escalar y un campo vectorial (por ejemplo, la temperatura absoluta T y el flujo de calor q^i) y todos los campos físicos son funciones algebraicas de estas variables dinámicas y del tensor métrico.

(ii) Una de las ecuaciones será la conservación de la energía

$$\dot{e} + \nabla_i q^i = 0, \tag{A.1}$$

y la restante será una ecuación vectorial de tipo divergencia:

$$\dot{A}^i + \nabla_j H^{ji} = I^i, \tag{A.2}$$

donde, de acuerdo al postulado (i), los cinco tensores e, q^i, A^j, H^{kl} y I^j son funciones de las variables dinámicas.

(iii) Existe una densidad de entropía s y un vector flujo de entropía s^i que satisfacen, como consecuencia de las ecuaciones (A.1) y (A.2), la ley de entropía:

$$\dot{s} + \nabla_i s^i = \sigma, \tag{A.3}$$

donde σ es una función no negativa de las variables dinámicas.

Definición 6.1 *Se llama estados de equilibrio a aquellos que tienen $\sigma = 0$ (es decir a aquellos que tienen producción de entropía igual a cero).*

Estudiemos ahora a las consequencias de estos postulados. Para que (A.3) sea consecuencia de (i) y (ii), y que σ sea función algebraica de las variables dinámicas, $\dot{s} + \nabla_i s^i$ tiene que ser combinación lineal de los miembros izquierdos de (A.1) y (A.2). Denotando los coeficientes de tal combinación con $-\xi$ y $-\xi_i$,

$$\dot{s} + \nabla_i s^i = -\xi(\dot{e} + \nabla_i q^i) - \xi_i(A^i + \nabla_j H^{ji}).$$

Las ecuaciones (A.1)-(A.2) nos dicen que $\sigma = -\xi_i I^i \geq 0$. De ahora en mas pensaremos en $\{\xi, \xi_i\}$ como el conjunto de las variables dinámicas.

Consideremos los tensores χ y χ^i definidos mediante

$$\chi = s + \xi e + \xi_i A^i, \tag{A.4}$$
$$\chi^i = s^i + \xi q^i + \xi_j H^{ij}. \tag{A.5}$$

Note que χ tiene unidades de densidad de entropía, χ^i tiene unidades de flujo de entropía, y ξ tiene unidades de $1/T$. Además,

$$e = \frac{\partial \chi}{\partial \xi}, \qquad q^i = \frac{\partial \chi^i}{\partial \xi}, \qquad A^i = \frac{\partial \chi}{\partial \xi_i} \qquad \text{y} \qquad H^{ij} = \frac{\partial \chi^i}{\partial \xi_j}. \tag{A.6}$$

Como todos los campos físicos son funciones algebraicas de ξ, ξ_i y el tensor métrico, cualquier escalar debe ser función de ξ y $\mu = h_{ij}\xi^i\xi^j/2$. Además todos los campos vectoriales deben ser proporcionales a ξ^i, y en consecuencia proporcionales entre si. Por lo tanto,

$$A^i = \lambda(\xi, \mu)\, q^i. \tag{A.7}$$

Por último, el tensor H^{ij} puede solo tener la forma

$$H^{ij} = \gamma(\xi, \mu)\, h^{ij} + \eta(\xi, \mu)\, \xi^i \xi^j; \tag{A.8}$$

por lo que H^{ij} es necesariamente un tensor simétrico. (A.6) y (A.7) implican que

$$A^i = \frac{\partial \chi}{\partial \xi_i} = \lambda q^i = \lambda \frac{\partial \chi^i}{\partial \xi},$$

pero $\chi = \chi(\xi, \mu)$, entonces,

$$q^i = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \chi}{\partial \mu}\xi^i. \tag{A.9}$$

Ahora bien, la ecuación (A.8) implica

$$\frac{\partial H^{ij}}{\partial \xi} = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} h^{ij} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi}\xi^i\xi^j, \tag{A.10}$$

mientras que las ecuaciones (A.6) y (A.9) implican

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^{ij}}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 \chi^i}{\partial \xi \partial \xi_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \chi}{\partial \mu}\xi^i\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \chi}{\partial \mu} h^{ij} + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \chi}{\partial \mu}\right)\xi^i\xi^j. \end{aligned} \tag{A.11}$$

comparando concluímos que:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \chi}{\partial \mu}\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \chi}{\partial \mu}. \tag{A.12}$$

Como consecuencia de las ecuaciones (A.4) y (A.6) obtenemos para una variación de la entropía

$$ds = -\xi de - \xi_i dA^i \tag{A.13}$$

Esta ecuación sugiere identificar a $-1/\xi$ con la temperatura absoluta T. Suponiendo esto, la transformación entre las variables dinámicas $\{\xi, \xi_i\}$ y las variables físicas $\{T, q^i\}$ está dada por

$$T = -\frac{1}{\xi}, \qquad q^i = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \chi}{\partial \mu}\xi^i. \tag{A.14}$$

El flujo de entropía s^i puede escribirse

$$s^i = \chi^i - \xi\frac{\partial \gamma}{\partial \xi}\xi^i - \gamma\xi^i - 2\mu\eta\xi^i \tag{A.15}$$

derivando respecto de ξ y usando (A.12) obtenemos,

$$\frac{\partial s^i}{\partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial \gamma}{\partial \xi} + 2\mu\frac{\partial \gamma}{\partial \mu}\right)\xi^i.$$

Integrando,

$$s^i = -(\xi\frac{\partial \gamma}{\partial \xi} + 2\mu\frac{\partial \gamma}{\partial \mu})\,\xi^i + f(\mu)\,\xi^i. \tag{A.16}$$

Derivando ambas (A.15) y (A.16) con respecto a ξ^j y comparando los resultados obtenemos las identidades:

$$f(\mu) = 0 \qquad \text{and} \qquad \eta = \frac{\partial \gamma}{\partial \mu}. \tag{A.17}$$

Usando esto, (A.16) queda

$$s^i = -\xi q^i - 2\mu\frac{\partial\gamma/\partial\mu}{\partial\gamma/\partial\xi}q^i. \tag{A.18}$$

Pero, como en estas teorías no hay movimiento de materia, el flujo de entropía y el flujo de calor deben estar relacionados mediante:

$$s^i = \frac{q^i}{T};$$

y como hemos elegido $\xi = -1/T$, (A.18) implica $\partial\gamma/\partial\mu = 0$. Podemos extraer algunas consecuencias de este hecho. En primer lugar, la ecuación (A.17) nos dice que $\eta = 0$ y por lo tanto el tensor métrico H^{ij} es proporcional al tensor métrico h^{ij}, lo cual simplifica la estructura de la ecuación (A.2). En segundo lugar como $\partial^2\gamma/\partial\mu\partial\xi = 0$, de (A.12) obtenemos

$$\frac{\partial\chi}{\partial\mu} = \lambda(\xi,\mu)\beta(\xi),$$

para alguna función $\beta(\xi)$. Integrando,

$$\chi(\xi,\xi^i) = \beta(\xi)\int_0^\mu \lambda(\xi,\tilde{\mu})\; d\tilde{\mu} + \chi_0(\xi). \tag{A.19}$$

Asi, cualquier teoría particular se obtiene dando tres funciones $\chi_0(\xi)$, $\lambda(\xi,\mu)$ y $\beta(\xi)$ y un vector $I^i(\xi,\xi^i)$. Note que la densidad de entropía está dada por

$$s = \chi - \xi\frac{\partial\chi}{\partial\xi} - 2\mu\frac{\partial\chi}{\partial\mu}. \tag{A.20}$$

6.1 Teorías cuadráticas

Consideraremos aquí las teorías dadas por las funciones generatrices χ mas simples posibles. Evidentemente no podemos tomar χ independiente de μ (ver (A.6). Podemos, no obstante, elegir χ lineal en μ (λ independiente de μ), o sea cuadrática en q^i. Obtenemos:

$$\chi = \chi_0(\xi) + \lambda(\xi)\;\beta(\xi)\;\mu. \tag{A.21}$$

Usando esta χ, los campos físicos quedan:

$$e = \frac{d\chi_0}{d\xi} + \frac{d(\lambda\beta)}{d\xi}\;\mu, \qquad q^i = \beta\;\xi^i, \qquad A^i = \lambda\beta\xi^i$$

$$H^{ij} = \gamma h^{ij}, \qquad s = \chi_0 - \mu\lambda\beta - \xi\frac{d\chi_0}{d\xi} - \mu\xi\frac{d(\lambda\beta)}{d\xi},$$
$$s^i = -\xi\beta\xi^i.$$

De manera que las ecuaciones de evolución quedan:

$$\left(\frac{d^2\chi_0}{d\xi^2} + \frac{d^2(\lambda\beta)}{d\xi^2}\mu\right)\dot{\xi} + \frac{d(\lambda\beta)}{d\xi}\xi_i\dot{\xi}^i + \nabla_i\left(\beta\xi^i\right) = 0. \tag{A.22}$$

y

$$\lambda\beta\dot{\xi}^i + \frac{d(\lambda\beta)}{d\xi}\xi^i\dot{\xi} + \beta h^{ij}\nabla_j\,\xi - I^i = 0. \tag{A.23}$$

i) Teorías de Coleman, Fabrizio y Owen [13].

Las teorías de Coleman, Fabrizio y Owen surgen de estas teorías cuadráticas si uno elige $\lambda = \text{const.}$, de forma tal que (A.22) y (A.23) se reducen a,

$$\left(\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi^2}\xi_i \xi^i\right)\dot{\xi} + \lambda \frac{\partial \beta}{\partial \xi}\xi_i \dot{\xi}^i + \nabla_i\left(\beta \xi^i\right) = 0 \tag{A.24}$$

$$\lambda \beta \dot{\xi}^i + \lambda \frac{\partial \beta}{\partial \xi}\xi^i \dot{\xi} + \beta h^{ij}\nabla_j \xi - I^i = 0. \tag{A.25}$$

Las ecuaciones de la teoría de CFO quedan fijas una vez dadas la conductividad térmica $k(T)$, la densidad de energía de equilibrio $e_0(T)$ y el tiempo de relajación $\tau(T)$ [13], mediante la elección χ_0, β e I^i en la forma

$$\chi_0(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} e_0(-1/\zeta)\, d\zeta, \quad \beta(\xi) = \lambda \frac{k(-1/\xi)}{\xi^2\, \tau(-1/\xi)} \quad \text{y} \quad I^i = -\frac{\lambda^2}{\xi^2}\frac{k(-1/\xi)}{\tau^2(-1/\xi)}\xi^i. \tag{A.26}$$

donde hemos supuesto que la densidad de energía es cero para $T = 0$. A partir de estas definiciones se obtienen las ecuaciones en términos de T y q^i (usando la notación de [13])

$$e = e_0(T) + a(T) q_i q^i, \tag{A.27}$$

$$s = s_0(T) + b(T) q_i q^i \tag{A.28}$$

donde

$$\begin{aligned} a(T) &= \frac{Z(T)}{T} - \frac{Z'(T)}{2}, \\ b(T) &= \frac{Z(T)}{2T^2} - \frac{Z'(T)}{2T} \\ s_0(T) &= \int_0^T \frac{e_0(r)}{r^2}\, dr + \frac{e_0(T)}{T} \end{aligned}$$

con $Z(T) = \tau(T)/k(T)$ y donde la prima denota derivación respecto de T. Note que $s_0'(T) = e_0'(T)/T$ como podría esperarse. Las ecuaciones de evolución quedan,

$$[\gamma_0(T) + a'(T) q_i q^i]\dot{T} + 2a(T) q_i \dot{q}^i + \nabla_i q^i = 0 \tag{A.29}$$

$$\tau(T)\dot{q}^i + k(T) h^{ij}\nabla_j T + q^i = 0. \tag{A.30}$$

donde $\gamma_0(T) = e_0'(T)$ es el calor específcifo. La fuente de entropía satisface la no negatividad,

$$\sigma = -I^i \xi_i = \frac{q_i q^i}{T^2 k} \geq 0.$$

ii) Teorías de Morro y Ruggeri [16].

Las teorías de Morro y Ruggeri surgen de las teorías cuadráticas dadas antes cuando $\lambda\beta = 1$. En este caso las ecuaciones (A.22) y (A.23) quedan,

$$\frac{d^2\chi_0}{d\xi^2}\dot{\xi} + \nabla_i \left(\frac{\xi^i}{\lambda}\right) = 0 \tag{A.31}$$

$$\dot{\xi}^i + \frac{1}{\lambda} h^{ij} \nabla_j \xi - I^i = 0 \tag{A.32}$$

Estas ecuaciones pueden ponerse explícitamente eln la forma dada por [16] si se elige χ_0, λ e I^i en términos de la conductividad térmica, el calor específico $\gamma_0(T)$ y la velocidad de los pulsos de calor $U_0(T)$ en la siguiente forma:

$$\chi_0(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\gamma_0(-1/\zeta)}{\zeta^2}\, d\zeta, \quad \lambda(\xi) = \frac{\xi}{U_0(-1/\xi)\sqrt{\gamma_0(-1/\xi)}} \quad \text{e} \quad I^i = -\frac{\xi^2 \xi^i}{\lambda^2 k(-1/\xi)}. \tag{A.33}$$

De forma tal que los campos físicos pueden ser escritos como,

$$e(T) = e_0(T) = \int_0^T \gamma_0(r)\, dr, \tag{A.34}$$

$$s(T, q^i) = \int_0^T \frac{dv}{v^2} \int_0^v \gamma_0(r)\, dr + \frac{1}{T}\int_0^T \gamma_0(r)\, dr - \frac{q^i q_i}{2\gamma_0(T) U_0^2(T) T^2} \tag{A.35}$$

Las ecuaciones (A.31) y (A.32) quedan:

$$\gamma_0(T)\dot{T} + \nabla_i q^i = 0 \tag{A.36}$$

y

$$\left(\frac{kT}{U_0\sqrt{\gamma_0}}\right) \frac{d}{dt}\left(\frac{q^i}{U_0 T\sqrt{\gamma_0}}\right) + k h^{ij}\nabla_j T + q^i = 0 \tag{A.37}$$

Finalmente, note que σ satisface la condición de no negatividad

$$\sigma = -\xi_i I^i = \frac{q_i q^i}{T^2 k} \geq 0.$$

De acuerdo a la definición 6.1, para ambas teorías (CFO y MR), los estados de equilibrio están caracterizados por la condición $q^i = 0$.

Referencias

[1] R. Wald, *General Relativity*, Chicago University Press, (1984).

[2] S.W. Hawkin y G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, (1973).

[3] I.S. Liu, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **46**, 131 (1972). Ver también: I.S. Liu, I. Müller y T. Ruggeri, *Annals of Physics*, **169**, 191 (1986).

[4] S. Pinnisi, Symposium on Kinetic Theory and Extended Thermodynamics, I. Müller y T. Ruggeri (Eds.), Pitagora Editrice, Bologna, (1989).

[5] R. Geroch y L. Lindblom; *Phys. Rev. D*, **41**, 1855 (1990).

[6] I. Muller y T. Ruggeri, *Extended Thermodynamics*, Springer Tracts in Natural Philosophy. Vol 37, Springer Verlag, (1993).

[7] D. Jou, J. Casas-Vázquez y G. Lebon, *Extended Irreversible Thermodynamics*, Springer Verlag, (1993).

[8] C. Cattaneo, *Atti de Semin. Mat. e Fis. Univ. Modena*, **3**, 3 (1948).

[9] C.C. Ackerman, B. Bertman, H.A. Fairbank y R.A. Guyer, *Phys. Rev. Letters*, **16**, 8 (1966).

[10] D.D. Joseph y L. Preziosi, *Rev. Of Modern Phys.*, **61**, 1 (1989).

[11] G. Vergara Caffarelli y E.G. Virga, *Boll. Un. Mat. Ital.* Ser. 6, **5 A**, 33 (1986).

[12] R. Geroch, Comunicación personal (1988).

[13] B.D. Coleman, M. Fabrizio y D.R. Owen, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **80**, 135 (1982).

[14] H.O. Kreiss y J. Lorentz, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*, Academic Press, (1989).

[15] G. Browning y H.O. Kreiss, *SIAM J. Appl. Math.*, **42**, 704 (1982).

[16] A. Morro y T. Ruggeri, *J. Phys. C: Solid State Phys.*, **21**, 1743 (1988).

[17] F. John, *Nonlinear Wave Equations, Formation of Singularities*, “Pitcher Lectures in the Mathematical Sciences held at Lehigh University, April 1989”. American Matematical Society, (1990).

[18] B.D. Coleman, W.J. Hrusa y D.R. Owen, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **94**, 267 (1986).

[19] F. Franchi y A. Morro, *J. Math. Anal. Appl.*, **188**, 590 (1994).

[20] A. Matsumura, *Publ. Res. Inst. Math. Science*, Kyoto Univ., **13**, 349 (1977).

[21] T. Hagstrom y J. Lorenz, *Advances in Appl. Math.*, **16**, 219 (1995).

[22] S. Kawashima; *Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics.* Thesis, Kyoto University (1983). [Chapter II].

[23] D. Gilbarg y N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (2^{nd} edition), "A Series of Comprehensive Studies in Mathematics", S. Verlag, (1983).

[24] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1975).

[25] M.E. Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton University Press, (1981).

[26] M. E. Taylor, *Pseudo-differential Operators and Nonlinear PDE*, Birkhäuser, (1991).

[27] R. Bellman, *Introducción al Analisis Matricial*, Editorial Reverté, S.A., (1965).

[28] S. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Wiley, New York, (1963).

[29] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, (1966). Ver también, G.W. Stewart y Ji-guang Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Computer Science and Scientific Computing, Academic Press Inc., (1990).

[30] G. B. Nagy, O. E. Ortiz y O. A. Reula, *J. Math. Phys.*, **35**, 4334 (1994).

[31] R. Geroch, *J. Math. Phys.*, **36**, 4226 (1995).

[32] L. Lindblom, *Ann. Phys.*, **247**, 1 (1996).