

Lentes gravitacionales y modelos geométricos para el estudio de sistemas astrofísicos en el contexto cosmológico

por

Lic. Ezequiel F. Boero

A presentar ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física
como parte de los requerimientos para la obtención del grado de
Doctor en Física

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo de 2017

FAMAF-UNC

Supervisada por:

Dr. Osvaldo M. Moreschi



Lentes gravitacionales y modelos geométricos para el estudio de sistemas astrofísicos en el contexto cosmológico. Por Boero, Ezequiel Fernando. Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Argentina

Agradecimientos

El tiempo que acompañó esta tesis está sembrado de agradecimientos; y el recuerdo de todos los que han estado tan presente y constantemente sosteniendo, apoyando y compartiendo embellece esos sentimientos.

De manera especial, quisiera mencionar a Osvaldo, quien ha sido mi director y guía y a quien he reconocido innumerables veces como un gran y verdadero maestro a lo largo de estos años.

De manera también especial, a mis padres que alumbran con gran luz, mi familia, a Nadia, a mis amigos, todos ellos que son una fiesta...

A mis profesores y colegas...

Que la gran luz del amor siempre nos encuentre para construir.

Finalmente, quisiera dejar explícito mi agradecimiento a las instituciones que permitieron mi formación y realizan día a día el ideal de una educación pública y al alcance de todos; en particular a CONICET, la gente de FaMAF y el Observatorio de Córdoba.

Resumen

En esta tesis se abordan tres temáticas principales: el uso de modelos geométricos para la descripción de sistemas astrofísicos [BM16a], el desarrollo de un nuevo formalismo en la teoría de lentes gravitacionales que extiende las ideas presentadas en [GM11] al contexto cosmológico [BM16b] y, por último, la cuestión de cómo realizar promedios en el marco de la relatividad general [BM15, BM16c]. Todas ellas están relacionadas con el estudio del contenido de materia en el Universo y pretenden contribuir a la discusión que se suscita entorno a dos de los problemas más desconcertantes en la descripción del Universo en sus escalas más grandes. Ellos son, por un lado, el llamado *problema de la masa faltante* en el Universo a raíz del cual se ha postulado la existencia de un tipo de materia ‘oscura’ (DM) [PSS96, SLT⁺07] no interactuante con la radiación. Esta se manifiesta en sistemas astrofísicos de diversas escalas, además de ser necesaria dentro del modelo cosmológico actual (Λ CDM “concordance cosmology”) que se usa para describir numerosas y variadas observaciones cosmológicas [Dod03, Ell12]. Por otro lado, se encuentra el problema de la interpretación del diagrama de Hubble (magnitud vs. redshift) a redshifts altos ($z \sim 1$), basado en la observación de supernovas [R⁺98, P⁺99, R⁺04]. Este tema, conjuntamente con observaciones de los picos acústicos en el espectro de potencias de anisotropías del fondo cósmico de microondas (CMB), ha reforzado la idea de que el Universo en su etapa tardía se encuentra en una fase de expansión acelerada. Corrientemente, este hecho, se suele interpretar debido a la presencia de una componente desconocida de energía: la así llamada *energía oscura* cuyo efecto es compatible con un valor no nulo de la constante cosmológica Λ [Dod03, Ell12]. Sin embargo, la naturaleza misma de ambas componentes al día de hoy resulta totalmente evasiva dentro del marco teórico de la física [Sum02a, Car01]. Ello constituye un problema ineludible teniendo en cuenta que componen la parte más abundante del contenido de materia-energía del Universo.

En este trabajo indagamos nuevas posibilidades de descripción de la fenomenología asociada a la DM, presentando nuevas herramientas desde el área de la teoría de lentes gravitacionales sobre un fondo cosmológico. Las mismas permiten la consideración de fuentes de materia-energía mucho más generales que las usualmente empleadas y que solamente tienen en cuenta la densidad de materia. Ejemplo de ello son aquellas donde el tensor energía-momento tiene componentes espaciales no despreciables respecto de las temporales. El formalismo que aquí presentamos tiene, también, el atractivo de incluir el movimiento de la lente respecto del conjunto de observadores fundamentales de la cosmología de una manera directa en contraste con otros tratamientos [KS99, Fri03, WS04]. Complementariamente, construimos modelos geométricos para diversos sistemas astrofísicos con simetría esférica lo cual, a su vez, constituye una generalización no trivial de los modelos usuales con simetría esférica. En las aplicaciones que presentamos, los hemos empleado para el cálculo teórico de los escalares ópticos para ilustrar las ventajas y diferencias con los tratamientos convencionales [SKW06, SEF92].

Finalmente, presentamos una definición para promediar tensores y sus derivadas en relatividad general que intenta ser de uso práctico en diversos sistemas de interés. Una de las principales motivaciones para ello ha sido la de investigar el posible origen de componentes espaciales no despreciables en el tensor energía-momento, las cuales podrían surgir como términos adicionales que se obtendrían luego promediar las ecuaciones no-lineales de campo. Sin embargo, la necesidad de contar con un formalismo para realizar promedios de cantidades tensoriales tiene, además, un interés intrínseco en la descripción que uno hace de la gravedad en escalas cada vez más grandes. En particular, en el problema de cómo los modelos geométricos y la descripción del contenido de materia en sus escalas

más grandes (típicamente en términos de un fluido) surgen como consecuencia de la presencia de estructuras menores en escalas pequeñas [EB05, CELU11].

Palabras Clave: Lentes gravitacionales, Promedios de tensores, Modelos geométricos, Geometrías esferoidales, Masa faltante.

Clasificación (Pacs): 04.20.Cv, 04.90.+e, 98.80.Jk, 98.62.Sb, 95.30.Sf, 95.35.+d

Abstract

This doctorate thesis deals with three main topics: the use of geometric models for the description of astrophysical systems[BM16a], the development of a new formalism within the theory of gravitational lensing which improves and generalizes the ideas already present in [GM11] to the cosmological context[BM16b] and, finally the problem of how to perform averages in the conceptual framework of general relativity[BM15, BM16c]. All of them are related to the study of the content of matter in the Universe and they intend to contribute to the discussion that arises around two of the most disconcerting problems in the description of the Universe on its large scales. They are, on the one hand, the so-called *problem of the missing mass* in the Universe which has given origin to the concept of ‘dark’ matter (DM): a speculative kind of matter that does not interact with the radiation[PSS96, SLT⁺07]. This manifests itself in astrophysical systems of diverse scales, besides being necessary within the current cosmological model (Λ CDM) (“concordance cosmology”) which is used to describe numerous and varied cosmological observations[Dod03, Ell12]. On the other hand, there is the problem of interpretation of the Hubble diagram (Magnitude vs. redshift) to high redshifts ($z \sim 1$), based on the observation of supernovae[R⁺98, P⁺99, R⁺04]. This topic, together with observations of the acoustic peaks of the temperature power spectrum of the cosmic microwave background (CMB), has reinforced the idea that the Universe in its late stage is in a phase of accelerated expansion. This fact is usually interpreted in terms of the presence of an additional unknown energy component: the so-called *dark energy* whose effect is compatible with a non-zero value of the cosmological constant Λ [Dod03, Ell12]. However, the very nature of both components today is totally evasive within the theoretical framework of physics [Sum02a, Car01]. This is an inescapable problem considering that they constitute the most abundant matter-energy content of the Universe.

In this work we investigate new possibilities of description of the phenomenology associated to DM presenting new tools from the area of weak gravitational lens theory on a cosmological background. These allow the consideration of sources of matter-energy much more general than those usually employed which only take into account the density of matter. Of particular interest are those where the energy-momentum tensor has non-negligible spacelike components with respect to the timelike one. The formalism presented here also has the appeal of including the movement of the lens from the set of cosmological fundamental observers in a straightforward way in contrast to other treatments [KS99, Fri03, WS04]. In addition, we construct geometric models for different astrophysical systems with spheroidal symmetry which, in turn, constitutes a non-trivial generalization of the models with spherical symmetry. In the applications we present, we have used them for the theoretical calculation of scalars to illustrate the advantages and differences with conventional treatments [SKW06, SEF92].

Finally, we present a definition of average of tensors and their derivatives in general relativity which intends to be of practical use in diverse systems of interest. One of the main motivations for this has been to investigate the possible origin of non-negligible spacelike components in the energy-momentum tensor; they could arise as extra terms after averaging the nonlinear field equations. However, the need for a formalism to perform averages of tensor quantities it also has an intrinsic interest in the description of gravity when one regards bigger and bigger scales. In particular, it plays a role in the problem of how the geometric models and the description of the content of matter on their larger scales (typically taken to be a fluid) arise as a consequence of the presence of smaller structures on small scales[EB05, CELU11].



Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
1. Introducción	1
2. Lentes gravitacionales en el contexto cosmológico	5
2.1. Introduction	5
2.2. Lentes gravitacionales	6
2.2.1. Preliminares	6
2.2.2. La congruencia de geodésicas nulas	7
2.2.3. La ecuación desviación de geodésicas	8
2.3. Geodésicas nulas en la métrica de Robertson-Walker	9
2.3.1. El cono pasado de luz de los observadores fundamentales y la tetra- asociada	10
2.3.2. El vector desviación para una congruencia radial nula	13
2.4. Diferentes nociones de distancias	13
2.4.1. El <i>redshift</i> o corrimiento al rojo	14
2.4.2. Distancia geométrica o distancia afín normalizada	14
2.4.3. Distancia diámetro angular y distancia angular futura	14
2.4.4. El teorema de Etherington y el corolario de reciprocidad	16
2.4.5. Distancia luminosa y la relación de dualidad entre distancias	16
2.5. La métrica de Robertson-Walker como una lente gravitacional	17
2.5.1. Los conceptos fundamentales en el contexto cosmológico	18
2.5.2. La convergencia cosmológica	18
2.5.3. Magnificación y magnificación cosmológica	18
2.5.4. Las magnificaciones de intensidad	19
2.5.5. Ejemplo 1: El universo de Milne	21
2.5.6. Ejemplo 2: Universos de Friedman	21
2.5.7. Valores típicos para la convergencia cosmológica y las funciones de magnificación	22
2.6. La presencia de una lente adicional sobre la cosmología	25
2.6.1. Resolviendo la ecuación matricial	27
2.6.2. Escalares ópticos	28
2.7. El caso axialmente simétrico	29
2.8. La aproximación de lente fina	30
2.8.1. Expresión alternativa para el factor \mathbf{D}_{ls}	31
2.8.2. Integración sobre la curvatura para lentes en movimiento	32
2.9. Lentes finas en movimiento cuya geometría es estacionaria y esféricamente simétrica	33
2.9.1. Ejemplos	34
2.10. Comentarios sobre este capítulo	36

3. El formalismo de lentes gravitacionales en una configuración que contiene varias lentes finas	39
3.1. Un arreglo de varias lentes finas	39
3.1.1. Arreglos con dos y tres lentes finas	41
3.2. Una configuración de dos lentes esféricamente simétricas en movimiento	42
3.2.1. Dos cúmulos de galaxias	43
3.2.2. Un cúmulo de galaxias y un void compensado	45
3.2.3. Dos voids cuasi-alineados	47
3.3. Comentarios sobre este capítulo	48
4. Nuevas geometrías esferoidales para el estudio de sistemas astrofísicos	49
4.1. Introducción	49
4.2. Esferoides en el espacio Euclídeo	49
4.2.1. Sistema de coordenadas prolado	50
4.2.2. Sistema de coordenadas oblado	50
4.3. Espaciotiempos con simetría esferoidal	51
4.4. Geometrías estáticas con simetría prolada	51
4.4.1. Tensor energía-momento	52
4.5. Algunos modelos particulares	53
4.5.1. Solución anisotrópica sin masa	53
4.5.2. Geometría peculiar con perfil de masa isotérmico	54
4.5.3. Geometrías con perfil de masa NFW	56
4.6. Comentarios sobre este capítulo	57
5. Lentes débiles en geometrías esferoidales	59
5.1. Introducción	59
5.2. Esferoides rotados	59
5.3. Lentes débiles en geometrías esferoidales estáticas	61
5.3.1. Geodésicas nulas exactas en las geometrías esferoidales	61
5.3.2. Tetrada nula adaptada a la trayectoria no perturbada de los fotones	62
5.3.3. Los escalares de curvatura Φ_{00} y Ψ_0	63
5.4. Escalares ópticos	64
5.4.1. Geometría prolada sin masa	64
5.4.2. Geometría oblada sin masa	66
5.4.3. Geometría prolada con perfil de masa isotérmico	68
5.5. Comentarios sobre este capítulo	70
6. Modelos geométricos para sistemas astrofísicos con simetría esferoidal inmersos en R-W	73
6.1. Introducción	73
6.2. Preliminares geométricos	74
6.2.1. Los spaciotiempos de R-W en coordenadas esferoidales	74
6.3. Modelos exactos de spaciotiempos para sistemas esferoidales inmersos en R-W	75
6.3.1. Geometría con simetría prolada	75
6.3.2. Geometría con simetría oblada	75
6.4. Un modelo geométrico exacto para voids con simetría esferoidal	76
6.5. Lentes débiles en voids esferoidales	77
6.5.1. Escalares ópticos para un void prolado que se encuentra inclinado a lo largo de la visual	77
6.6. Comentarios sobre este capítulo	79

7. Promedios en relatividad general	81
7.1. Introducción	81
7.1.1. Promedios	81
7.1.2. Las dificultades en relatividad general	81
7.1.3. Nuestro trabajo	82
7.2. Problemas y motivaciones que sustentan la necesidad de promedios en relatividad general	83
7.2.1. Promedios en la estructura en gran escala del espaciotiempo	83
7.2.2. El problema de la materia oscura	83
7.2.3. La cuestión de promediar la métrica misma	84
7.2.4. Promedio del tensor energía-momento	85
7.2.5. Promedio de la conexión	85
7.3. Definición de promedios para campos tensoriales	86
7.3.1. El caso general	86
7.3.2. El caso con regiones de integración $(n - 1)$ -dimensional	87
7.4. Derivada de los promedios	87
7.4.1. Derivada covariante	88
7.4.2. Derivada de Lie	89
7.4.3. Derivadas de promedios sobre regiones $(n - 1)$ -dimensionales	89
7.5. Comparación con otros trabajos en la literatura	89
7.6. Comentarios sobre este capítulo	90
8. Comentarios Finales	93
A.	97
A.1. Fórmula para la derivada del promedio de cantidades escalares	97
A.2. El caso de regiones de integración $(n - 1)$ -dimensionales	98
B.	99
B.1. Geometría en término de la tetrada nula asociada al sistema de coordenadas adaptado al cono pasado de los observadores fundamentales	99
B.1.1. Conexión y curvatura en términos de la tetrada nula asociada a la función nula u	99
B.2. Ecuaciones de Friedman	100
B.2.1. Parámetros de densidad	100
B.3. Una fuente distribucional de curvatura en la ecuación de desviación de geodésicas	101
B.3.1. Rederivación de las expresiones de lente fina sobre una cosmología R-W	102
C.	105
C.1. Cálculo de los escalares ópticos para un arreglo de lentes finas	105
D.	109
D.1. Curvatura de las geometrías esféricas	109
D.1.1. El tensor de Einstein para las geometrías proladas	109
D.1.2. El tensor de Einstein para las geometrías oblatas	110
E.	111
E.1. Transformación de coordenadas entre los sistemas esféricos y el Cartesiano	111
E.1.1. El caso del sistema de coordenadas prolado	111
E.1.2. El caso del sistema de coordenadas oblado	112

Capítulo 1

Introducción

La presente tesis doctoral se encuadra dentro del marco conceptual de la relatividad general y la astrofísica teórica, siendo el punto en común que motiva este trabajo el estudio del contenido de materia en el Universo.

Las cuestiones que aquí se tratan son imperantes en el contexto de sistemas de gran escala tales como galaxias, cúmulos de galaxias, voids, etc., así como también a nivel cosmológico. Es precisamente en esas escalas, cuando al inferir la cantidad de materia presente en tales sistemas, se encuentran discrepancias significativas entre los resultados que proporcionan las distintas observaciones. Para entender el origen de esta situación conviene notar que existen diversos métodos de donde se extrae esta información pero que se basan en principios distintos. Por un lado, están aquellos métodos que predicen el contenido de materia a base de la cantidad de luminosidad que proviene de los sistemas; esto es, partiendo de relaciones conocidas entre la masa de los objetos que los componen y la luminosidad típica que ellos emiten, se obtiene una estimación de la materia allí presente. Por otro lado, se encuentran los métodos que predicen el contenido de materia a base de medidas indirectas del campo gravitatorio en esas escalas, como por ejemplo a través de observaciones en la dinámica de los constituyentes de esos sistemas o mediante la técnica de lentes gravitacionales que es uno de los ejes en este trabajo. Sucede, entonces, que la cantidad de materia necesaria para explicar las observaciones del segundo método sobrepasa por mucho a la que se infiere por la radiación que se mide usando el primero de los mencionados. Esta diferencia es lo suficientemente grande como para tener una injerencia significativa incluso a nivel cosmológico[OPY74]. Una característica notable de esta situación es que se manifiesta en observaciones independientes, en diferentes sistemas y en varias escalas; y todas ellas concuerdan con valores consistentes entre sí sobre la densidad de materia que haría falta para explicar esta discrepancia. La evidencia resulta entonces muy concluyente por lo que se conoce esta situación como el *problema de la masa faltante* y ha llevado a gran parte de la comunidad científica a postular la existencia de la así llamada *materia oscura* (DM): una nueva componente de la materia no interactuante con la radiación.

El desconcierto surge, sin embargo, al tratar de explicar el origen y la naturaleza misma de tal componente.

De tratarse efectivamente de un nuevo tipo de materia, al nivel fundamental, sería natural buscar una respuesta dentro de la teoría cuántica de campos. Por tal motivo, existen al día de hoy, numerosas propuestas que intentan extender el modelo estándar de partículas fundamentales a fin de incluir una nueva componente de la materia con propiedades que den cuenta de la fenomenología asociada con la DM [BHS05]. Un ejemplo interesante son las llamadas *partículas masivas débilmente interactuantes* o más comúnmente *WIMPs* por sus siglas en inglés, las cuales serían partículas neutras y muy masivas solamente afectadas por la interacción débil y la gravedad [Sum02b]. Por otra parte, no han faltado alternativas que intenten explicar las observaciones planteando la posibilidad de que uno deba considerar modificaciones tanto en las ecuaciones de campo de Einstein como en la gravedad Newtoniana[FM12, MR13] en escalas muy grandes. Tales propuestas, sin embargo, no están exentas de dificultades desde el punto de vista teórico, y todos los intentos experimentales que se han diseñado para detectarlas no han conseguido arrojar resultados hasta el presente.

Una cuestión muy significativa, y que no suele ser lo suficientemente enfatizada, es el hecho de que, a priori, en este tipo de enfoque subyace la idea de una descripción macroscópica Newtoniana de la materia. Con esto queremos significar que únicamente se suele tener en cuenta la densidad de energía de la materia y despreciar otras contribuciones provenientes del tensor energía-momento que podrían actuar como fuentes adicionales.

Teniendo en cuenta lo elusivo que ha resultado ser el problema hasta el momento esta observación no constituye ninguna novedad; muy por el contrario, ella abre la posibilidad de explorar alternativas más amplias y tal vez más apropiadas para la descripción de las fuentes. Ejemplo de ello son modelos donde las componentes espaciales del tensor energía-momento no son despreciables. En la literatura se encuentran varios trabajos que exploran la descripción de DM recurriendo a modelos con estas características como por ejemplo [GM12] así como también aquellos que proponen modelos en términos de un campo escalar [NSS01, ALS03, MGN00]. Sorprendentemente estos trabajos sugieren fuertemente que una tal descripción puede dar cuenta de la fenomenología asociada a DM.

En esta tesis hemos tratado de evitar especulaciones acerca de la posible naturaleza de la llamada materia oscura y por ello presentamos ideas que nos permitan estudiar el problema desde una óptica más amplia.

En este sendero, el aporte del trabajo que aquí presentamos es una contribución en el desarrollo de nuevas herramientas; las cuales tienen la virtud de permitirnos estudiar aspectos de esta fenomenología sin recurrir a ideas preconcebidas acerca de las propiedades del contenido de materia.

Por un lado aquí hemos trabajado con la técnica de lentes gravitacionales la cual se ha convertido en uno de los instrumentos teóricos más poderosos para indagar en el terreno de la DM utilizado en cualquier teoría geométrica de la gravedad donde los rayos de luz se propaguen por geodésicas nulas; esto es, no sólo en relatividad general. En esta línea de trabajo, exponemos ideas que continúan la línea comenzada en [GM11] y generalizan la discusión al caso de lentes inmersas en una cosmología del tipo Robertson-Walker (RW). Las nuevas expresiones que obtenemos permiten la consideración de fuentes completamente generales; esto es, están escritas en términos de la curvatura de la geometría de la lente y por lo tanto contemplan la totalidad del tensor energía-momento de la distribución que hace de lente. Vale destacar también que las ecuaciones obtenidas son aplicables a lentes compactas, entre las cuales están, las más frecuentemente consideradas, lentes finas. El formalismo que utilizamos para ello es nuevo y cuenta, al mismo tiempo, con dos notables ventajas respecto de los tratamientos convencionales. Por un lado, contiene intrínsecamente el movimiento de la lente respecto del flujo de observadores fundamentales que caracterizan la cosmología. Por otro, demuestra que el carácter de los dos tipos de distorsiones posibles en las imágenes (expansión y shear) corresponden a contribuciones de distinto origen (Ricci y Weyl respectivamente, un hecho que parece pasar inadvertido en los tratamientos convencionales sobre lentes gravitacionales. Como ejemplo de esta situación presentamos modelos con simetría esférica que no pueden ser estudiados mediante el tratamiento convencional [SSE94b, SEF92], el cual se basa solamente en una descripción Newtoniana del contenido de materia.

En el tratamiento de lentes sobre un espaciotiempo curvo general también hemos introducido variantes a las nociones usuales de magnificación que nos permiten relacionar de manera directa las magnitudes observadas con los escalares ópticos de lentes gravitacionales en un contexto completamente general. Tales relaciones resultan de especial interés en el estudio de sistemas complejos de lentes tal como se produce en el caso de lentes alineadas así como también en la interpretación de las relaciones entre distancia y flujo que se encuentra por ejemplo en el diagrama de Hubble. Esto permite estudiar entre otras cosas la manera en la cual la presencia de inhomogeneidades en el Universo afecta las relaciones esperadas entre magnitudes y distancias en un modelo cosmológico homogéneo e isotrópico. Debido a ello surge también la motivación de presentar un formalismo extendido para lentes que sea adecuado para lidiar con un arreglo de distribuciones alineadas a lo largo de la visual que contempla lentes totalmente generales en movimiento relativo respecto del observador.

Por otro lado, en el estudio de sistemas astrofísicos es necesaria la utilización de modelos para la descripción de los mismos. La opción más explorada a tal fin ha sido el modelado a través de la geometría esférica parcialmente debido a que se observa un gran número de objetos que pueden ser considerados consistentemente esféricos en una primera aproximación como, por ejemplo, los cúmulos de galaxias. Sin embargo, también se debe aducir una motivación desde el punto de

vista práctico y es que desviaciones de la simetría esférica involucra mayores complicaciones que dificultan el análisis. Esto es especialmente cierto en el caso de modelos geométricos que intentan proveer de una caracterización más integral de las formaciones que observamos en el Universo. Mencionemos aquí los Voids: regiones de muy baja densidad respecto de la media cosmológica que se generan en la distribución observada de galaxias y que comprenden, en volumen, la mayor parte del espaciotiempo. Tales estructuras no poseen, en general, una forma bien definida; a pesar de eso, una mejor caracterización parece estar dada en términos de distribuciones elipsoidales[FN09, TK06, vdWP11]. De acuerdo a nuestro conocimiento, no nos consta que en la literatura existan métricas con tal simetría para el estudio de estas situaciones. Por tal razón, hemos construido una familia de métricas con simetrías esferoidales (obladas y proladas) que generalizan de una manera sencilla, aunque no trivial, el caso esférico. Para el caso de las estructuras más grande como los Voids, las nuevas geometrías están inmersas de una manera suave dentro de la cosmología; mientras que para sistemas más chicos como sistemas binarios, galaxias o cúmulos de galaxias, presentamos también modelos más sencillos que obvian la inmersión dentro de la cosmología. Estas construcciones las hemos empleado en el cálculo de los escalares ópticos de lentes gravitacionales para diversos casos de interés. Para ello hemos implementado la construcción teórica de lentes numéricamente para computar estos observables en los modelos que presentamos. Cuando son aplicadas a Voids, observamos que incluso en modelos que suponen pequeños apartamientos de la geometría esférica y pese a la baja amplitud de la señal que uno mide, se encuentran complejos mapas de distorsiones; en particular, el campo vectorial que cuantifica las distorsiones (shear) no copia la forma que proyectaría el esferoide en el plano de la lente.

Como tercer eje de este trabajo, además del estudio de lentes gravitacionales y el uso de modelos geométricos para la descripción de estructuras en el Universo, hemos abordado otra cuestión relevante relacionada con el problema del contenido de materia. Se trata de la descripción del campo gravitatorio y de sus fuentes cuando consideramos sistemas cada vez más grandes en el Universo que están constituidos a su vez por pequeños subsistemas regidos también por la gravedad. En las escalas más grandes uno suele recurrir a modelos que considera apropiados para dar cuenta de las observaciones en ese régimen donde, usualmente, se asume implícitamente que la métrica que caracteriza el sistema en su conjunto es una suerte de geometría promedio sobre la totalidad de los subsistemas menores. Sin embargo, esta suposición implícita requiere de un estudio detallado ya que sus implicaciones no son al día de hoy completamente entendidas y podrían tener una influencia significativa en la interpretación de las propiedades del sistema en gran escala. Tenemos en mente por ejemplo, el caso del modelo cosmológico estándar en donde la geometría se asume homogénea e isotrópica en las escalas más grandes y donde la dinámica de la métrica está determinada por las ecuaciones de Einstein. En tal caso surge la pregunta de cómo tratar la curvatura y el contenido de materia en ambos lados de la ecuación de Einstein cuando estamos utilizando promedios ya que la no-linealidad de las ecuaciones daría origen a términos que podrían afectar la dinámica a gran escala[EB05, Ell11]. En los últimos años se ha suscitado el debate de si este tipo de consideraciones podría arrojar nuevas luces sobre la aparente necesidad de incluir la contribución de un tipo de energía oscura totalmente desconocida para explicar algunas observaciones cosmológicas. El énfasis en este sentido se ha hecho tanto en la manera en que uno debe realizar este tipo de promedios así como en la forma en que las inhomogeneidades afectan las observaciones basadas en modelos con muchas simetrías tal como es el caso de Robertson-Walker. Nosotros hemos construido una definición de promedios adecuada para campos tensoriales sobre espaciotiempos curvos que intenta ser de aplicación fácil y directa en diversas situaciones de interés junto con una definición de derivadas para los campos promedios que resulta necesaria a la hora de trabajar con las ecuaciones de campo. Aprovechamos también para discutir de una manera más amplia el alcance de promedios en relatividad señalando, también, algunas cuestiones que consideramos muy importantes y que en la literatura no se le ha prestado demasiada atención tal como la cuestión del promedio de la conexión que interviene en el comportamiento de las geodésicas nulas de la geometría.

Para finalizar esta introducción al trabajo quizás sea pertinente resaltar que la visión que subyace detrás de la búsqueda de nuevas herramientas es la de explorar maneras alternativas pero a la vez complementarias de encarar el estudio del contenido de materia en nuestro Universo. Debido a la naturaleza de las componentes oscuras del Universo resulta ser sumamente elusiva en el presente,

es que consideramos valioso destinar esfuerzos en perfeccionar técnicas que permitan un abordaje más amplio para allanar el camino hacia un mejor entendimiento libre de prejuicios en nuestra descripción. Este es esencialmente el marco que engloba la búsqueda y constituye la amalgama de las diferentes propuestas que aquí discutimos.

No obstante, dado que las herramientas que tratamos aquí guardan cierta distancia entre sí, hemos creído conveniente anteceder a cada capítulo una introducción particular a cada tema.

Capítulo 2

Lentes gravitacionales en el contexto cosmológico

2.1. Introduction

En este capítulo generalizamos los resultados de la referencia [GM11] al marco cosmológico en el cual la geometría de R-W domina la estructura en gran escala del espaciotiempo. Presentamos nuevas expresiones para los escalares ópticos explícitamente en términos de la curvatura local generada por una distribución inmersa en la cosmología y, para el caso de lentes esféricamente simétricas, expresamos los escalares directamente en términos de las componentes de materia. Las nuevas expresiones admiten un tensor energía-momento completamente general debido a que no queremos hacer suposiciones a priori sobre la naturaleza de la lente. En particular, ellas exhiben la contribución de componentes de la distribución de materia-energía que han sido ignoradas en trabajos previos [SEF92, SSE94a, Wammb, Bar10].

Los resultados que presentamos en este capítulo constituyen una herramienta útil para estudiar con más detenimiento el problema de la masa faltante porque nos permiten describir lentes más generales en marcado contraste con la descripción Newtoniana usual de los fenómenos de materia oscura. En relación a esto existe evidencia muy sugerente que la inclusión de las componentes espaciales del tensor energía-momento, hasta ahora ignoradas, resultan importantes para el estudio de materia oscura en sistemas astrofísicos [GM12].

En este estudio también presentamos nuevas expresiones para el caso de lentes en movimiento y mostramos que el formalismo utilizado constituye una mejora a la hora de tratar estas situaciones ya que la contribución proveniente del movimiento de la lente está completamente contenida en nuestra discusión; sin necesidad de recurrir a sofisticadas elaboraciones que tratan el problema separadamente del caso estacionario [KS99, Fri03, WS04].

En varias referencias estándar en la literatura se ha sugerido que cuando uno describe los escalares ópticos de lentes gravitacionales en el contexto cosmológico uno solamente necesita reemplazar en la discusión sobre un espaciotiempo plano cualquier aparición de las distancias por distancias de área [SKW06]. Esto constituye sólo una suposición, aquí mostramos que esto impone varias restricciones sobre la clase de sistemas que uno puede tratar y proveemos con las fórmulas generales. Nuestra manera de encarar el problema ha sido deducir las ecuaciones más generales que puedan ser usadas en el contexto cosmológico. En este intento es esencial revisar los conceptos principales ligados al problema de lentes gravitacionales de tal forma de derivar las cantidades sin asumir simplificaciones iniciales. Por esta razón dedicaremos un espacio para revisar estas cuestiones que nos llevan a afirmar por ejemplo que la noción adecuada de distancia que uno debería usar para tratar los observables de lentes gravitacionales es la distancia afín definida por el observador. Esto no contradice el uso de la distancia de área en las discusiones de lentes gravitacionales, pero contrasta con la afirmación que uno debería usar solamente distancias de área en los cálculos de lentes débiles en el contexto cosmológico. Por ello, enfatizaremos a lo largo de la presentación que los conceptos

derivados en los efectos de lentes se refieren siempre a comparaciones a igual distancia afín.

Este proceder nos condujo a definir también el concepto de magnificación de intensidad que presentamos en la sección (2.5.3). No hemos encontrado una presentación similar en la literatura y discutimos su relación con la magnificación angular estándar. Esta relación resulta importante pues nos permite conectar los escalares ópticos con las observaciones de flujo usual en términos del módulo de la distancia en el caso de espaciotiempos generales. En particular discutiremos su relación a la observación de supernovas.

2.2. Lentes gravitacionales

2.2.1. Preliminares

La primera cosa que haremos es la de especificar el lenguaje que emplearemos para describir los efectos en lentes gravitacionales. La idea básica que uno tiene en mente está diagramada en la figura 2.1. Allí se ilustra la situación de un observador, situado en la parte baja del dibujo, recibiendo luz desde una fuente localizada en la superficie más alejada; en el medio la lente gravitacional afecta la trayectoria de los rayos.

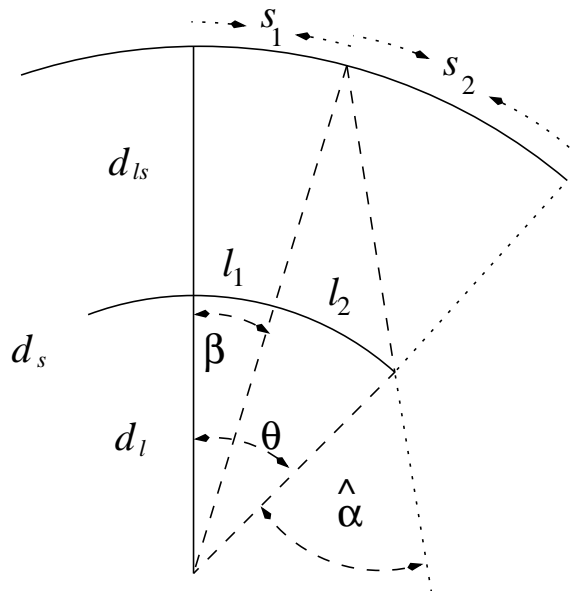


Figura 2.1: Este gráfico muestra las variables angulares básicas y familiares en términos de una geometría plana. La letra s denota a las fuentes mientras que la letra l denota la lente. El observador se asume situado en el vértice donde convergen los rayos.

En la discusión de los efectos producidos por lentes gravitacionales en un espaciotiempo homogéneo uno debería notar que la cosmología misma actúa como una lente de forma peculiar en el sentido que su efecto es de una lente que no está situada a una distancia particular ya que la totalidad del espaciotiempo actúa como una lente. A pesar de esto, uno puede retener las nociones básicas para el ángulo de observación θ y el ángulo β que el astrofísico *esperaría observar* si no existiera efecto de lentes gravitacionales y por ende tampoco curvatura.

Además, uno también puede utilizar las definiciones de *convergencia* y *deformación (shear)* que provienen de la relación de esos ángulos.

Dado un par de estas direcciones, representadas por los ángulos (β, θ) uno puede considerar pequeños apartamientos de ellos de tal forma que la diferencia esté dada por una relación lineal. En

la esfera de direcciones, ellas pueden ser expresadas como:

$$\delta\beta^a = \mathcal{A}_b^a \delta\theta^b, \quad (2.1)$$

donde la matriz \mathcal{A}_b^a está dada por

$$\mathcal{A}_b^a = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}; \quad (2.2)$$

y, donde los escalares ópticos κ , γ_1 y γ_2 , son conocidos como la convergencia κ y las componentes del shear $\{\gamma_1, \gamma_2\}$, respectivamente. En los mismos está codificada la información de la distorsión de la imagen de la fuente debido a los efectos de lente. En particular, el shear es normalmente representado por la cantidad compleja $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$.

Aquí debería ser enfatizado que la definición de $\delta\beta^a$ y $\delta\theta^b$ están referidas a dos geometrías diferentes; lo cual conlleva a que uno deba decir a qué distancia está la fuente en ambos casos.

Los cálculos de lentes gravitacionales son llevados a cabo usando la *distancia afín* λ (ver sección (2.4.2)) como variable fundamental[GM11]. Hacemos esta aclaración para distinguirla de la noción de *distancia diámetro angular* que también aparece en la discusión ya que ella está relacionada con el tamaño de las fuentes observadas. Ya que las nociones de distancia juegan un papel muy importante, estas serán discutidas con más detalle luego (2.4); por el momento usaremos la noción que una barra con longitud δl observada subtendiendo un ángulo $\delta\phi$ define una distancia diámetro angular D_A dada por:

$$\delta l = D_A \delta\phi. \quad (2.3)$$

Entonces para cada espaciotiempo uno tiene una noción de distancia diámetro angular observada. En la ecuación de arriba uno asume que el objeto observado tiene un tamaño δl ; por lo que uno tendría

$$\delta l = D_A(\eta) \delta\beta; \quad (2.4)$$

y

$$\delta l = D_A(g) \delta\theta; \quad (2.5)$$

donde η representa la métrica plana y g la métrica física real.

En el espaciotiempo de Minkowski la distancia diámetro angular coincide con la distancia afín: $D_A(\eta) = \lambda$. En un espaciotiempo general, con métrica g , uno tiene la fuente a una dada distancia afín λ_s , por lo que para hacer la comparación en la ecuación (2.1) uno toma $\lambda_s = \lambda$.

2.2.2. La congruencia de geodésicas nulas

Consideremos una función escalar u tal que sus superficies de nivel $u = \text{cte}$. demarcan una familia de hipersuperficies nulas. Definamos el campo vectorial ℓ^a a partir de la 1-forma

$$\ell_a = \nabla_a u = (du)_a; \quad (2.6)$$

la cual satisface

$$\ell^a \ell_a = 0, \quad (2.7)$$

y también

$$\ell^a \nabla_a \ell^b = 0. \quad (2.8)$$

Entonces, existe un parámetro afín ‘radial’ r dado por

$$\ell^a = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a. \quad (2.9)$$

Notemos que por construcción esta congruencia generada por ℓ^a no tiene ‘twist’.

En nuestra construcción $u = \text{cte}$. caracterizará el cono pasado de luz del observador.

La forma en la cual u crece a lo largo de la línea mundo del observador es normalmente establecida mediante la condición

$$v^a \ell_a = 1; \quad (2.10)$$

donde v^a es 4-velocidad del observador. Esta condición implica que estamos eligiendo ℓ^a apuntando hacia el futuro y que hemos fijado la libertad de escala en la parametrización afín. Permanece, no obstante, la libertad asociada a la elección del origen o, equivalentemente, la posibilidad de realizar una traslación en el valor de r para cada dirección nula en la congruencia. Nosotros escogeremos la elección natural que corresponde a tomar $r = 0$ en el vértice del cono.

En lo que sigue, será útil referir la discusión a una tetrad nula adaptada al cono de luz pasado del observador. El primer vector nulo de la tetrad será ℓ^a definido previamente. Los otros vectores serán: dos vectores de carácter espacial m^a y \bar{m}^a que serán tangentes a las superficies $r = \text{cte.}$ y $u = \text{cte.}$ y que deben satisfacer:

$$m^a \bar{m}_a = -1. \quad (2.11)$$

El último vector será denotado por n^a el cual es elegido ortogonal a m^a y \bar{m}^a satisfaciendo además

$$n^a \ell_a = 1. \quad (2.12)$$

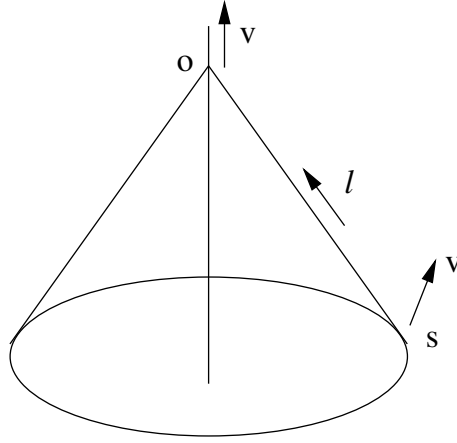


Figura 2.2: La figura muestra el cono pasado de un observador situado en el punto “o” con su 4-velocidad v y la trayectoria de un fotón con vector tangente nulo ℓ .

2.2.3. La ecuación desviación de geodésicas

El objeto fundamental que cuantifica las distorsiones en las imágenes es el vector desviación de geodésicas, ζ^a , el cual describe el comportamiento de la congruencia registrando la separación local de las diferentes geodésicas. Por definición satisface la condición

$$\mathcal{L}_\ell \zeta^a = 0; \quad (2.13)$$

es decir, su derivada de Lie a lo largo de ℓ^a se anula.

La ecuación que nos provee la información de cómo las imágenes se distorsionan debido a la curvatura es la *ecuación desviación de geodésicas* para el vector ζ^a a lo largo de ℓ^a :

$$\ell^a \nabla_a (\ell^b \nabla_b \zeta^d) = R_{abc}{}^d \ell^a \zeta^b \ell^c, \quad (2.14)$$

donde $R_{abc}{}^d$ denota el tensor de Riemann como se estila habitualmente.

En términos de una tetrad nula (2.2.2) el vector desviación se puede expresar como

$$\zeta^a = \zeta \bar{m}^a + \bar{\zeta} m^a. \quad (2.15)$$

Sin embargo, para el trabajar usaremos la siguiente descripción equivalente en términos de un vector \mathcal{X} construido a partir de las componentes $\{\varsigma, \bar{\varsigma}\}$ de la ecuación (2.15); esto es:

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \varsigma \\ \bar{\varsigma} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

De esta manera la ecuación (2.13) toma la forma

$$\ell(\mathcal{X}) = -P\mathcal{X}, \quad (2.17)$$

donde la matriz P viene dada del siguiente modo

$$P = \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ \bar{\sigma} & \bar{\rho} \end{pmatrix}; \quad (2.18)$$

ρ y σ son los coeficientes de spin en la notación del formalismo GHP[GHP73] que se corresponden respectivamente con la expansión y el shear de la congruencia de geodésicas nulas.

La matriz P satisface

$$\ell(P) = P^2 + Q; \quad (2.19)$$

donde Q es la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \Phi_{00} & \Psi_0 \\ \bar{\Psi}_0 & \Phi_{00} \end{pmatrix}; \quad (2.20)$$

cuyos elementos son las componentes de la curvatura

$$\Phi_{00} = -\frac{1}{2}R_{ab}\ell^a\ell^b, \quad (2.21)$$

y

$$\Psi_0 = C_{abcd}\ell^a m^b \ell^c m^d; \quad (2.22)$$

donde R_{ab} es el tensor de Ricci y C_{abcd} el tensor de Weyl.

Esto nos permite escribir la ecuación de desviación de geodésicas como

$$\ell(\ell(\mathcal{X})) = -Q\mathcal{X}. \quad (2.23)$$

La ventaja de trabajar directamente con esta ecuación es que está explícitamente en término de las componentes de la curvatura.

2.3. Geodésicas nulas en la métrica de Robertson-Walker

Como bien se sabe las métricas de R-W son geometrías homogéneas e isotrópicas [Rob33, Wal44, Wal84] y juegan un papel fundamental en nuestra descripción estándar del Universo en su escala más grande.

El elemento de línea puede ser escrito de la siguiente manera:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)dL_k^2; \quad (2.24)$$

donde t es el *tiempo cosmológico*, esto es, el tiempo propio asociado a la familia de observadores fundamentales que perciben la isotropía y, dL_k^2 es el elemento de línea para las superficies de homogeneidad ortogonales a la familia de observadores fundamentales. Como consecuencia de las simetría dL_k^2 debe ser una de las tres posibles métricas Riemannianas de curvatura constante en tres dimensiones. Como es usual, las distinguiremos por el subíndice k que puede tomar los valores $k = 1$, $k = 0$ y $k = -1$ que se corresponden respectivamente con una 3-esfera, un plano en 3-D y un 3-hiperboloide. Suele ser útil tener en cuenta las siguiente tres formas de escribir dL_k^2 :

$$dL_k^2 = d\chi^2 + f_k^2(\chi)d\Sigma^2, \quad (2.25)$$

$$dL_k^2 = \frac{d\mathbf{r}^2}{1 - k\mathbf{r}^2} + \mathbf{r}^2 d\Sigma^2, \quad (2.26)$$

$$dL_k^2 = \frac{1}{(1 + \frac{k}{4}\mathbf{r}^2)^2} (d\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^2 d\Sigma^2); \quad (2.27)$$

donde en la ecuación (2.25) $f_k(\chi)$ está dada por

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sinh(\chi), & \text{for } k = -1, \quad 0 \leq \chi < \infty, \\ \chi, & \text{for } k = 0, \quad 0 \leq \chi < \infty, \\ \sin(\chi), & \text{for } k = 1, \quad 0 \leq \chi \leq \pi. \end{cases} \quad (2.28)$$

Para el elemento de línea bi-dimensional $d\Sigma^2$ que corresponde a la métrica de la 2-esfera unidad uno frecuentemente encuentra que es conveniente expresarlo en una de las siguientes dos maneras:

$$d\Sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2, \quad (2.29)$$

$$d\Sigma^2 = \frac{4}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2} d\zeta d\bar{\zeta} \equiv \frac{1}{P_0^2} d\zeta d\bar{\zeta}; \quad (2.30)$$

donde (θ, ϕ) son las coordenadas angulares usuales y $(\zeta, \bar{\zeta})$ son coordenadas estereográficas complejas sobre el plano complejo \mathbb{C} .

2.3.1. El cono pasado de luz de los observadores fundamentales y la trada nula asociada

Todos los observables en el cono pasado de luz son construidos a partir de las geodésicas nulas que alcanzan el observador. Por tanto es necesario tener a disposición una descripción adecuada del mismo para los observadores fundamentales.

Asociado a cualquier observador uno puede considerar su tiempo propio τ , el cual para observadores co-móviles coincide con la coordenada t . La 4-velocidad del observador, entonces puede ser expresada de la siguiente manera:

$$v^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a. \quad (2.31)$$

A continuación introduciremos un sistema de coordenadas apropiado para la discusión de esta subsección. Comenzamos considerando la función u que toma valores constantes sobre los conos pasados de luz del observador. En particular, esto indica que los valores de u pueden estar dados por el tiempo propio τ ; esto es, podemos tomar

$$\frac{du}{d\tau} = 1; \quad (2.32)$$

sobre la línea mundo del observador; sin embargo, uno también puede usar otra especificación para u que no esté basada en la sincronización con el tiempo propio del observador. Haremos uso de esta posibilidad debajo, en (2.3.1), donde presentaremos una definición basada en la estructura conforme de la métrica.

En cualquier caso, la congruencia de geodésicas nulas relevantes físicamente puede ser expresada en términos de esta función nula por (2.6).

La función nula conforme avanzada \tilde{u}

Aquí introducimos una función nula que resulta útil para varios cálculos en las geometrías de R-W¹.

Definamos \tilde{u} a partir de

$$d\tilde{u} = \frac{dt}{A(t)} + d\chi; \quad (2.33)$$

donde el uso de ‘tildes’ es para diferenciar de la elección natural mencionada en la sección anterior y que será presentada luego.

¹Esta elección es apropiada también para estudio del comportamiento asintótico de la geometría[Mor90] además de ser de ayuda en varios cálculos a diferencia de la elección $u = \tau$.

Lo siguiente es completar el sistema de coordenadas poniendo coordenadas sobre cada dono de luz. En este proceso una tetrada nula asociada a esta puede ser seleccionada.

Consideremos el vector $\tilde{\ell}^a$ determinado por la 1-forma

$$\tilde{\ell} = d\tilde{u}; \quad (2.34)$$

el cual es geodésico y parametrizado afín. Sea, pues \tilde{r} el parámetro afín a lo largo del cono asociado a $\tilde{\ell}^a$ y comenzando desde el observador. Esta será nuestra segunda coordenada. Entonces, seleccionaremos un par de vectores complejos nulos \tilde{m}^a y $\tilde{\bar{m}}^a$ de la forma indicada en (2.2.2), esto es, tangentes a las superficies $\tilde{u} = \text{cte.}$ y $\tilde{r} = \text{cte.}$ y satisfaciendo

$$\tilde{m}^a \tilde{\bar{m}}_a = -1. \quad (2.35)$$

Para completar nuestro sistema de coordenadas utilizaremos las coordenadas estereográficas $(\zeta, \bar{\zeta})$ para designar los generadores del cono pasado de luz. Finalmente, elegiremos nuestro último vector nulo como dijimos antes (2.2.2):

$$\tilde{n}^a \tilde{m}_a = 0, \quad (2.36)$$

$$\tilde{n}^a \tilde{\ell}_a = 1. \quad (2.37)$$

En términos de las coordenadas usuales $(t, \chi, \zeta, \bar{\zeta})$, el campo vectorial que genera las congruencias nulas sobre el cono pasado se escribe explícitamente como:

$$\tilde{\ell} = \frac{1}{A(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{1}{A^2(t)} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right); \quad (2.38)$$

mientras que los otros vectores de la tetrada:

$$\tilde{m} = \frac{\sqrt{2}P_0}{A(t)f_k(\chi)} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right), \quad (2.39)$$

$$\tilde{\bar{m}} = \frac{\sqrt{2}P_0}{A(t)f_k(\chi)} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right), \quad (2.40)$$

$$\tilde{n} = \frac{A(t)}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{1}{A(t)} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right) \right]. \quad (2.41)$$

Expresemos ahora el elemento de línea (2.24) que tiene la elección (2.25) en términos del nuevo sistema de coordenadas $(\tilde{u}, \tilde{r}, \zeta, \bar{\zeta})$. Haremos esto en varios pasos intermedios; usando la ecuación (2.33) uno puede expresar la geometría en términos del sistema de coordenadas $(\tilde{u}, \chi, \zeta, \bar{\zeta})$ y hallar

$$ds^2 = A^2(t) (d\tilde{u}^2 - 2d\tilde{u}d\chi - f_k^2 d\Sigma^2); \quad (2.42)$$

donde aquí será importante notar que el vector $\tilde{\ell}$ es expresado como

$$\tilde{\ell} = -\frac{1}{A^2(t(\tilde{u}, \chi))} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right). \quad (2.43)$$

Y, ya que $\tilde{\ell} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}}$, tenemos también la relación

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{r}} = -\frac{1}{A^2(t(\tilde{u}, \chi))}; \quad (2.44)$$

de tal forma que uno toma

$$\tilde{r} = -\int_0^\chi A^2(t(\tilde{u}, \chi')) d\chi' = \int_{t(\tilde{u}, \chi=0)}^{t(\tilde{u}, \chi)} A(t') dt'. \quad (2.45)$$

Esta es la relación que necesitamos para lograr escribir el elemento de línea en las coordenadas $(\tilde{u}, \tilde{r}, \zeta, \bar{\zeta})$ ya que ahora podemos diferenciar para obtener

$$d\tilde{r} = \left(A^2(t(\tilde{u}, \chi)) - A^2(t_0) \right) d\tilde{u} - A^2(t(\tilde{u}, \chi)) d\chi; \quad (2.46)$$

donde la notación $A(t_0)$ significa

$$A(t_0) \equiv A(t(\tilde{u}, \chi = 0)). \quad (2.47)$$

Notemos que $t_0 = t(\tilde{u}, \chi = 0)$ no es necesariamente el tiempo presente como sería sugerido habitualmente sino el la coordenada t evaluada en el origen.

De esta forma uno arriba a la expresión deseada para la métrica:

$$ds^2 = \left(2A^2(t_0) - A^2(t) \right) d\tilde{u}^2 + 2d\tilde{u}d\tilde{r} - A^2(t) f_k^2(\chi) d\Sigma^2. \quad (2.48)$$

Para finalizar aquí incluiremos por completitud las relaciones entre los diferenciales del viejo sistema de coordenadas en término de las nuevas coordenadas:

$$dt = \frac{A^2(t_0)}{A(t)} d\tilde{u} + \frac{1}{A(t)} d\tilde{r}, \quad (2.49)$$

$$d\chi = \left(1 - \frac{A^2(t_0)}{A^2(t)} \right) d\tilde{u} - \frac{1}{A^2(t)} d\tilde{r}. \quad (2.50)$$

La función nula inercial avanzada u

Consideremos aquí la elección $u = \tau$ la cual será expuesta de manera similar a como tratamos la función nula conforme avanzada \tilde{u} . Esto ayudará en la lectura así como también nos permitirá llegar a los expresiones principales de una manera sencilla utilizando lo de arriba.

En efecto, encontremos la relación entre ambas funciones notando que

$$v(\tilde{u}) = \frac{d\tilde{u}}{du}; \quad (2.51)$$

a lo largo de la línea mundo de un observador fundamental. Luego, debido a que u está normalizada con t en el origen, usando (2.33) uno obtiene

$$du = A(t_0) d\tilde{u} = A(t(\tilde{u}, \chi = 0)) d\tilde{u}; \quad (2.52)$$

y nos conduce a definir el primer vector nulo ℓ como

$$\ell = du. \quad (2.53)$$

Esto nos da una congruencia de geodésicas nulas dirigidas hacia el futuro, parametrizadas afín que alcanzan al observador. El parámetro afín en este caso será indicado por r y constituye nuestra segunda coordenada. Las coordenadas estereográficas denotarán a los generadores de la congruencia como antes.

El vector nulo ℓ puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\ell = \frac{A(t_0)}{A(t)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{1}{A(t)} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right) \right]; \quad (2.54)$$

mientras que los demás vectores de la tetrad pueden ser tomados de la siguiente forma

$$m = \frac{\sqrt{2}P_0}{A(t)f_k(\chi)} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right), \quad (2.55)$$

$$\bar{m} = \frac{\sqrt{2}P_0}{A(t)f_k(\chi)} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right), \quad (2.56)$$

$$n = \frac{1}{2} \frac{A(t)}{A(t_0)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{1}{A(t)} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right) \right]. \quad (2.57)$$

La métrica en las coordenadas avanzadas $(u, \chi, \zeta, \bar{\zeta})$ adquiere la siguiente expresión

$$ds^2 = A^2(t) \left(\frac{du^2}{A^2(t_0)} - 2 \frac{dud\chi}{A(t_0)} - f_k^2(\chi) d\Sigma^2 \right). \quad (2.58)$$

El parámetro afín r asociado a ℓ y el diferencial dr se ve que son

$$r(u, \chi) = \frac{1}{A(t_0)} \int_{t(u, \chi=0)}^{t(u, \chi)} A(t') dt', \quad (2.59)$$

y

$$dr = -\frac{A^2(u, \chi)}{A(t_0)} d\chi - \left(1 - \frac{A^2(u, \chi)}{A^2(t_0)} + rH(t_0) \right) du; \quad (2.60)$$

donde hemos introducido en este lugar la *función de Hubble* sobre la línea mundo del observador

$$H(t_0) \equiv \frac{1}{A(t_0)} \frac{dA(t(u, \chi=0))}{du}. \quad (2.61)$$

Uno puede, finalmente transformar a un sistema de coordenadas en el cual la coordenada radial es r en vez de χ ; de forma tal que ahora $t = t(u, r)$ y $\chi(u, r)$. Notemos, en particular, que ahora $t_0 = t(u, r = 0)$. Reuniendo todas estas expresiones uno obtiene la métrica en coordenadas $(u, r, \zeta, \bar{\zeta})$:

$$ds^2 = 2 \left(1 - \frac{A^2(t)}{2A^2(t_0)} + rH(t_0) \right) du^2 + 2dudr - A^2(t) f_k^2(\chi) d\Sigma^2. \quad (2.62)$$

2.3.2. El vector desviación para una congruencia radial nula

En las geometrías de R-W el comportamiento del vector desviación de geodésicas es fácilmente hallado considerando solamente la ecuación (2.13) sobre el cono nulo pasado:

$$\ell(\mathcal{X}) = -\rho \mathcal{X}. \quad (2.63)$$

Notemos que en este caso uno puede usar ℓ^a ó $\tilde{\ell}^a$ como campo vectorial tangente a la congruencia debido a que la descripción es independiente de la parametrización afín.

En las coordenadas (u, r) presentadas en (2.3.1) la convergencia ρ toma la sencilla expresión:

$$\rho = -\frac{1}{A(t) f_k(\chi)} \ell(A(t) f_k(\chi)). \quad (2.64)$$

Esto significa que el vector desviación de geodésicas está dado por:

$$\mathcal{X} = A(t) f_k(\chi) \mathcal{V}_0; \quad (2.65)$$

donde la constante de integración \mathcal{V}_0 tiene el significado del ángulo medido por el observador fundamental subtendido por una pequeña porción de la imagen subtendida entre dos geodésicas nulas vecinas.

Este factor aparecerá frecuentemente, por lo cual lo definiremos como

$$D_A(t, \chi) \equiv A(t) f_k(\chi); \quad (2.66)$$

y luego será identificado con la distancia diámetro angular.

2.4. Diferentes nociones de distancias

Debido a que las nociones de distancia juegan un rol central en la discusión de lentes gravitacionales incluiremos aquí una revisión de las diferentes nociones que usualmente aparecen en espaciotiempos curvos.

2.4.1. El *redshift* o corrimiento al rojo

El observador o define el redshift asociado con el evento s por la expresión

$$1 + z = \frac{(l^a v_a)_s}{(l^a v_a)_o}; \quad (2.67)$$

donde l^a es el vector tangente a la geodésica nula conectando los dos eventos y v^a es la 4-velocidad de la fuente s o la del observador o según como se indica.

A pesar de que el redshift es un indicador de diferencia en las medidas de tiempo propio, es también usado como indicador de distancia cuando existe familia de observadores preferenciales tal como es el caso de R-W. Cuando la fuente y el observador son ambos observadores fundamentales en R-W uno tiene que

$$1 + z = \frac{A(t_0)}{A(t)}. \quad (2.68)$$

En otras palabras, el redshift puede ser usado como una noción de distancia si uno tiene a disposición una dada familia de objetos cosmológicos cuyo movimiento es conocido.

2.4.2. Distancia geométrica o distancia afín normalizada

Dado un observador con una 4-velocidad v^a , existe una noción natural de distancia: λ definida sobre cualquier geodésica nula pasada y sobre cualquier espaciotiempo; ésta es identificada con el parámetro afín que tiene en cuenta la normalización (2.10) y se anula en la posición del observador. En el caso que nos compete de R-W, esta distancia está relacionada con la coordenada afín r definida previamente:

$$\lambda = -r. \quad (2.69)$$

Para diferenciarla de las otras definiciones de distancia la llamaremos en este trabajo *distancia geométrica* ó *distancia afín normalizada*. Por definición, su valor incrementa monotónicamente a lo largo de toda dirección nula pasada desde el observador.

Como mencionamos en (2.2.1) en el estudio de lentes gravitacionales es crucial comparar las imágenes en la presencia de lentes con la situación en la cual la misma no se ve afectada. Y esta es esencialmente la razón por la cual la definición de distancia es importante; nosotros afirmamos que la noción apropiada para el tratamiento de lentes gravitacionales es la que definimos en esta subsección. Este es el concepto que aparece como parámetro dinámico en la ecuación fundamental (2.23) y puede ser aplicado a cualquier espaciotiempo en cualquier situación. En consecuencia remarcaremos su uso en el formalismo que desarrollamos en nuestro trabajo.

2.4.3. Distancia diámetro angular y distancia angular futura

Distancia diámetro angular y distancia de área

La ‘distancia diámetro angular’, D_A , está definida como

$$dl = D_A d\theta; \quad (2.70)$$

donde dl es el tamaño proyectado en la dirección perpendicular a la visual, en el lugar del emisor, del objeto que se observa y, $d\theta$ es el ángulo subtendido que mide el observador en su cielo.

Esta definición está estrechamente relacionada a la *distancia de área*, la cual es definida mediante la siguiente relación:

$$dA = |D_+ D_-| d\Omega; \quad (2.71)$$

donde dA es el área proyectada en la dirección perpendicular a la visual, en el lugar del emisor, del objeto observado; D_+ y D_- son las distancias diámetro angular correspondientes a las direcciones principales del área [Per04] y $d\Omega$ es el ángulo sólido que ve el observador. La distancia de área se define entonces como

$$D_{\text{area}} = \sqrt{|D_+ D_-|}; \quad (2.72)$$

de tal forma que uno ahora puede escribir

$$dA = D_{\text{area}}^2 d\Omega. \quad (2.73)$$

Notemos que esta medida de distancia no depende de la velocidad peculiar del emisor aunque sí depende de la 4-velocidad del observador[Per04].

En los espaciotiempos de R-W, la distancia de área coincide con la distancia diámetro angular; por esta razón a lo largo del trabajo usaremos solamente $D_A (= D_{\text{area}})$ para denotar ambas distancias en el caso de R-W.

Para observadores fundamentales sobre R-W esta noción de distancia toma la forma explícita presentada en la ecuación (2.66):

$$D_A = A(t(u, r)) f_k(\chi(u, r)). \quad (2.74)$$

Partiendo de la definición uno nota que la distancia de área está relacionada con la expansión de un manojito de geodésicas que parten desde el observador y alcanzan la fuente; en R-W uno puede ver esto explícitamente observando la ecuación (2.64). En este particular caso uno tiene

$$\frac{dD_A}{dr} = -\rho D_A; \quad (2.75)$$

junto con la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2 D_A}{dr^2} = -\Phi_{00} D_A. \quad (2.76)$$

En general, se ve que ρ tiene un valor r^* en el cual se anula y a partir de ahí cambia de signo. Entonces, el valor de D_A alcanza un valor estacionario en r^* ; el cual es un máximo, ya que Φ_{00} es positiva cuando las condiciones de energía usuales se consideran válidas.

Por esta razón esta noción de distancia no es realmente una distancia; ya que, en particular, tiende a cero cuando la fuente se encuentra muy lejana; como por ejemplo, cerca del comienzo del Universo donde $A \rightarrow 0$. De todas formas, es un concepto útil que aparece en la discusión de lentes gravitacionales.

Distancia diámetro angular futura y distancia de área futura

Existe también una noción de *distancia diámetro angular futura* d_A , que está relacionada a la distancia diámetro angular calculada por el emisor para alcanzar un objeto de tamaño proyectado dl_o perpendicular a la dirección de la trayectoria de los fotones y situado en la posición del observador. Más concretamente, uno define d_A por la relación

$$dl_o = d_A d\theta_s; \quad (2.77)$$

donde $d\theta_s$ es el ángulo medido por un observador fiduciario en la fuente con la mismas 4-velocidad que la fuente.

Uno puede generalizar esta noción a la de *distancia de área futura*; la cual se define a partir de:

$$dA_o = |d_+ d_-| d\Omega_s; \quad (2.78)$$

donde dA_o es el área proyectada del objeto en el sitio del observador y $d\Omega_s$ es el ángulo sólido generado en la posición de la fuente; d_+ y d_- son las distancias diámetro angular futuras a lo largo de las direcciones principales del área y, la distancia de área futura d_{area} es entonces definida por

$$d_{\text{area}} = \sqrt{|d_+ d_-|}. \quad (2.79)$$

En el caso de R-W la distancia de área futura coincide con la distancia diámetro angular futura, por lo cual en lo sucesivo utilizaremos $d_A (= d_{\text{area}})$ para denotar ambas nociones en R-W.

En la siguiente subsección 2.4.4 discutiremos la relación existente entre la distancia de área futura d_A y la distancia de área D_A . Aquí, queremos aprovechar para mencionar que en el caso más general de una fuente radiante no-isotrópica y no resoluble a redshift z emitiendo con una luminosidad $L(\theta_s, \phi_s)$ en la dirección (θ_s, ϕ_s) que apunta hacia el observador uno predice que el flujo $\mathcal{F}(\theta_o, \phi_o)$ medido por el observador está dado por ²

$$\mathcal{F}(\theta_o, \phi_o) dA_o = \frac{1}{(1+z)^2} L(\theta_s, \phi_s) d\Omega_s. \quad (2.80)$$

La igualdad es esencialmente consecuencia de la conservación de energía. En efecto, el lado izquierdo es la expresión para la energía medida por el observador por unidad de tiempo en la dirección de la fuente (θ_o, ϕ_o) , la cual es recibida en el elemento de superficie dA_o ; el lado derecho es la expresión para la energía emitida por la fuente por unidad de tiempo (local) en la dirección del observador dentro del ángulo sólido $d\Omega_s$ y, donde el factor de redshift toma en cuenta las diferencias de tiempos propios y las medidas locales de energía.

Notemos entonces que utilizando (2.78) en la siguiente forma

$$dA_o = d_{\text{area}}^2 d\Omega_s; \quad (2.81)$$

uno tiene

$$\mathcal{F}(\lambda, z) = \frac{L(\theta_s, \phi_s)}{(1+z)^2 d_{\text{area}}^2(\lambda)}; \quad (2.82)$$

donde estamos enfatizando que el flujo depende de la distancia λ y del estado de movimiento de la fuente, caracterizado en este caso por el factor de redshift de la expresión (2.67).

Para finalizar aquí notemos nuevamente que (2.82) es válida en un espaciotiempo general y que lo que nosotros llamamos distancia diámetro angular futura es lo que otros autores usualmente llaman ‘corrected luminosity distance’[Per04]. Sin embargo, aquí preferimos usar esta terminología ya que resulta más natural en la discusión del *teorema de reciprocidad* que presentamos debajo.

2.4.4. El teorema de Etherington y el corolario de reciprocidad

Es importante señalar que las definiciones de distancia de área D_{area} y distancia de área futura d_{area} han sido presentadas para un espaciotiempo cualquiera. Y en este caso general existe un resultado puramente geométrico debido a Etherington[Eth33] que establece lo siguiente[Ell71]:

$$dA_o d\Omega = (1+z)^2 dA d\Omega_s; \quad (2.83)$$

el cual es conocido como el *teorema de Etherington*. Un corolario interesante de este resultado se deriva de (2.73) y (2.81), en la que uno prueba la siguiente relación entre distancias

$$d_{\text{area}} = (1+z) D_{\text{area}}. \quad (2.84)$$

Esto constituye una relación fundamental entre la distancia de área futura d_{area} y la distancia de área D_{area} (observada); la misma se conoce como la *relación de reciprocidad* y es deducida solamente a partir de consideraciones que involucran un manojito de geodésicas conectando la fuente con el observador.

Este corolario (2.84) está íntimamente relacionado a la más conocida *relación de dualidad entre distancias* que repasamos a continuación.

2.4.5. Distancia luminosa y la relación de dualidad entre distancias

Retomemos la relación entre el flujo observado $\mathcal{F}(\theta_o, \phi_o)$ y la luminosidad $L(\theta_s, \phi_s)$ para una fuente que no se puede resolver mostrada en la ecuación (2.82). Esta relación da origen a la noción

²Para clarificar la notación, remarquemos que si llamamos con L_0 la luminosidad total y la fuente radiara isotrópicamente entonces uno tendría $L = L_0/(4\pi)$.

de *distancia luminosa* D_L la cual se define análogamente a como se conoce en el espacio plano, esto es:

$$D_L \equiv \sqrt{\frac{L(\theta_s, \phi_s)}{\mathcal{F}(\theta_o, \phi_o)}}; \quad (2.85)$$

de aquí uno puede ver que:

$$D_L = (1 + z) d_{\text{area}}. \quad (2.86)$$

Aunque lo hemos definido para fuentes que no son resolubles, las estimaciones de distancias para fuentes extendidas pueden ser basadas en el mismo principio. En tales casos el problema de inferir distancias involucra la consideración de las nociones de *intensidad* y *brillo superficial*.

Relación de dualidad entre distancias

La combinación de la ecuación (2.86) junto con el corolario de reciprocidad establecido por (2.84) permiten deducir la *relación de dualidad entre distancias*:

$$D_L(z) = (1 + z)^2 D_{\text{area}}; \quad (2.87)$$

que vincula la distancia luminosa con la distancia de área.

Nuevamente remarquemos que esta relación es válida para cualquier espaciotiempo y ha sido derivada a partir de unas pocas hipótesis; ellas son: que el número de fotones es conservado a lo largo de su trayectoria y que la misma es a través de geodésicas. Ya que el movimiento geodésico de los fotones está fundamentado en el principio de equivalencia, cualquier desviación de la relación (2.87) debería ser atribuida en principio a la no-conservación del número medio de fotones a lo largo de geodésicas nulas[BK04].

2.5. La métrica de Robertson-Walker como una lente gravitacional

Señalemos nuevamente que la noción básica de una lente gravitacional está contenida en la ecuación (2.1) donde el ángulo de desviación $\delta\beta^a$ está referido a un espaciotiempo sin efecto de lentes y por tanto Minkowski; mientras que el ángulo de desviación $\delta\theta^b$ se refiere al espaciotiempo real; que en este caso será R-W. Entonces, cuando uno considera esta geometría como una lente gravitacional, uno nota que ésta no se sitúa a una distancia particular, en cambio comprende todo el espaciotiempo. Es por esta razón que uno tiene que ser muy cuidadoso con la interpretación de los escalares ópticos definidos en por la ecuación (2.2).

Aquí, estamos pensando en el caso de un observador dentro de una geometría R-W que, cuando estime ángulos de desviación, él debe relacionar el ángulo observado $\delta\theta^a$ con el ángulo no perturbado $\delta\beta^a$ cuando la fuente se encuentra situada a la ‘misma’ *distancia*. Por lo tanto, es crucial tener un claro entendimiento de la noción de la *distancia* que uno debe usar. De todas las nociones de distancia que son empleadas en la literatura y que mencionamos anteriormente en la sección (2.4), la más fundamental de todas y que a su vez requiere de un mínimo de estructura es la *distancia geométrica* λ ; ya que solamente usa la información de la 4-velocidad del observador y la geodésica nula que proviene de la fuente. De hecho puede ser aplicada a cualquier espaciotiempo y a cualquier geodésica nula pasada además de ser el parámetro dinámico en la ecuación (2.23). En consecuencia constituye la noción natural de distancia en tal contexto.

Entonces, para una fuente de tamaño \mathcal{X} a distancia λ a lo largo del cono pasado de luz, este observador esperaría ver, en ausencia de efectos gravitacionales, que la fuente subtendería un ángulo $\delta\beta$:

$$\delta\beta = \frac{\mathcal{X}}{\lambda}. \quad (2.88)$$

Sin embargo, en R-W la ecuación (2.65) nos dice que

$$\mathcal{X} = A(t) f_k(\chi) \delta\theta. \quad (2.89)$$

Entonces, de la ecuación (2.66) uno tiene la relación

$$\delta\beta = \frac{D_A}{\lambda} \delta\theta. \quad (2.90)$$

La relación entre el ángulo observado $\delta\theta$ y $\delta\beta$ es entendida como el efecto de lente producido por la cosmología. En el lenguaje usual de lentes débiles esto constituye una lente muy peculiar ya que la lente no está a una distancia dada. Además, para la lente de R-W no existe noción de ángulo de desviación debido a que se trata de un Universo homogéneo e isotrópico. A pesar de esto uno obtiene una noción de los escalares ópticos no trivial.

Es conveniente remarcar esto ya que es fuente de confusión normalmente. Por ejemplo, el diagrama de la figura 2.1 proviene de la situación habitual que uno encuentra para una lente gravitacional localizada. Sin embargo, en el caso donde el espaciotiempo actúa como lente (la cual es no localizada) el diagrama debe ser entendido en forma conceptual usando las definiciones de $\delta\beta$ y $\delta\theta$ como ángulos medidos sin lente y con lente, respectivamente. Esta cuestión no es usualmente mencionada en los enfoques que se basan en el concepto de ángulo de desviación [SEF92, SKW06].

Otro punto importante que debe ser notado es que las ecuaciones (2.89) y (2.90) son válidas también para valores grandes de $\delta\theta$. Esto significa que uno puede considerar la lente de R-W en una forma no perturbativa [FKN00b, FKN00a].

2.5.1. Los conceptos fundamentales en el contexto cosmológico

2.5.2. La convergencia cosmológica

La ecuación (2.90) está indicando que no existe el efecto de shear cosmológico en R-W y que la *convergencia cosmológica*, κ_c , puede deducirse de

$$\delta\beta = (1 - \kappa_c) \delta\theta; \quad (2.91)$$

de tal forma que uno obtiene

$$\kappa_c = 1 - \frac{D_A(\lambda)}{\lambda}. \quad (2.92)$$

Recordemos nuevamente que esta convergencia κ_c no puede ser definida usando el esquema usual de lentes gravitacionales basado en el concepto de ángulo de deflección.

En general, la desigualdad $D_A(\lambda) < \lambda$ se cumple para todos los valores de λ y para objetos cercanos uno tiene que $\kappa_c \ll 1$. De hecho, esta es la situación más común que uno encuentra en la discusión de lentes débiles, en la cual los valores de los escalares ópticos son siempre mucho menores que 1 y la ecuación (2.1) representa una aproximación para desviaciones angulares pequeñas. Sin embargo, como se indicó arriba, en las geometrías de R-W la convergencia cosmológica está dada exactamente por (2.92) la cual se aproxima al valor unidad cerca de la singularidad inicial.

El comportamiento de κ_c cerca del observador puede ser investigado tomando una expansión de D_A en términos de λ ; donde encontramos:

$$\kappa_c = \kappa_c^{(2)} \lambda^2 + \kappa_c^{(3)} \lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4); \quad (2.93)$$

con las definiciones

$$\kappa_c^{(2)} = \frac{1}{3!} \Phi_{00} \Big|_{\lambda=0}, \quad (2.94)$$

$$\kappa_c^{(3)} = -\frac{2}{4!} \ell(\Phi_{00}) \Big|_{\lambda=0}. \quad (2.95)$$

2.5.3. Magnificación y magnificación cosmológica

En un espaciotiempo general la *magnificación* μ es definida como el cociente entre el ángulo sólido subtendido por la imagen ‘lenteada’ y la imagen sin ‘lenteada’. Usando las direcciones principales de la imagen uno tiene las siguientes relaciones

$$\delta\beta_- = (1 - \kappa - \gamma) \delta\theta_-, \quad (2.96)$$

y

$$\delta\beta_+ = (1 - \kappa + \gamma) \delta\theta_+; \quad (2.97)$$

de donde uno puede también deducir que

$$\mu = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2}; \quad (2.98)$$

siendo γ el módulo del shear.

Para la mayoría de las situaciones astrofísicas uno tiene $\kappa \ll 1$ y $\gamma \ll 1$. Multiplicando (2.96) por λ un obtiene

$$dl_- = \lambda \delta\beta_- = \lambda (1 - \kappa - \gamma) \delta\theta_- = D_- \delta\theta_-, \quad (2.99)$$

y de manera similar con el caso con “+”. Entonces, uno deduce que

$$\mu = \left(\frac{\lambda}{D_{\text{area}}(\lambda)} \right)^2; \quad (2.100)$$

ya que la distancia de área en el espaciotiempo plano es λ . Esta expresión es válida para espaciotiempos generales y coincide con la ecuación (42) de la referencia [Per04].

Para la *magnificación cosmológica* μ_c , se tiene que

$$\mu_c = \frac{1}{(1 - \kappa_c)^2} = \left(\frac{\lambda}{D_A(\lambda)} \right)^2. \quad (2.101)$$

Como uno puede ver μ_c diverge cuando la fuente es considerada cerca de la singularidad inicial, lo cual indica a su vez que κ_c se aproxima al valor unidad y en consecuencia no puede ser considerada pequeña para grandes distancias.

2.5.4. Las magnificaciones de intensidad

En esta subsección presentamos la magnificación de intensidad física que denotaremos con $\tilde{\mu}$ y que llamaremos simplemente *magnificación de intensidad*. Además introduciremos la *magnificación de intensidad cosmológica* $\mu'_c(z)$ que resulta conveniente por su empleo en estudios astrofísicos.

Denotemos nuevamente con \mathcal{F} el flujo observado de un objeto no resoluble a distancia λ y movimiento relativo determinado por el redshift z en un espaciotiempo general. Usaremos \mathcal{F}_0 para designar el flujo que uno esperaría coleccionar proveniente del mismo objeto a la misma distancia λ y con el mismo movimiento relativo en Minkowski.

Entonces, definimos la magnificación de intensidad $\tilde{\mu}$ como el cociente de esos dos flujos:

Definición 2.5.1 Magnificación en Intensidad

$$\tilde{\mu}(\lambda) \equiv \frac{\mathcal{F}(\lambda, z)}{\mathcal{F}_0(\lambda, z)} = \left(\frac{d_{\text{area}0}(\lambda)}{d_{\text{area}}(\lambda)} \right)^2; \quad (2.102)$$

donde tomando en cuenta la ecuación (2.82) uno puede ver que $\tilde{\mu}$ depende solamente de la distancia λ . Notemos que estamos usando el subíndice 0 para referirnos a cantidades en Minkowski.

Señalemos que la definición es consistente con la misma filosofía que uno aplica a las nociones básicas de lentes gravitacionales en la ecuación (2.1) donde uno compara ángulos en la esfera de direcciones entre la situación ‘lenteada’ y la situación sin lente (el caso plano).

El corolario de reciprocidad que vimos en (2.4.4) nos permite probar el siguiente teorema válido en un espaciotiempo general:

Teorema 2.5.1 *La magnificación de intensidad coincide con la magnificación angular usual; es decir:*

$$\tilde{\mu} = \mu. \quad (2.103)$$

Prueba: Recurriendo al corolario de reciprocidad podemos reemplazar, en la expresión para la magnificación de intensidad, las distancias de área futura por las distancias de área observadas:

$$\tilde{\mu}(\lambda) = \left(\frac{D_{\text{area}0}(\lambda)}{D_{\text{area}}(\lambda)} \right)^2 = \left(\frac{\lambda}{D_A(\lambda)} \right)^2 = \mu; \quad (2.104)$$

donde hemos usado la ecuación (2.100).

En el caso particular de una cosmología de R-W la definición y el teorema nos permiten escribir la igualdad

$$\tilde{\mu}_c = \frac{1}{(1 - \kappa_c)^2} = \left(\frac{\lambda}{D_A(\lambda)} \right)^2 = \mu_c. \quad (2.105)$$

Dado que en la práctica corriente, trabajar con distancias afines no suele ser lo usual es útil definir otra noción de magnificación que involucre el cociente de los flujos en función del redshift tal como se acostumbra en los trabajos observacionales. Por eso definimos la siguiente:

Definición 2.5.2 Magnificación en Intesidad Comsológica

$$\begin{aligned} \mu'_c(z) &\equiv \frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}_{\text{Milne}}(z)} = \left(\frac{1+z}{1+z} \right)^4 \left(\frac{D_{A0}(z)}{D_A(z)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\lambda_{\text{Milne}}(z)}{D_A(z)} \right)^2; \end{aligned} \quad (2.106)$$

donde en este caso, más específicamente, uno utiliza el modelo de Universo plano de Milne de tal forma de tener una relación $\lambda(z)$.

Remarquemos que aunque esta definición involucra el mismo cociente de flujos, la definición (2.102) da una función diferente debido a que posee una parametrización distinta de los escalares. Es por ello, que el lado derecho de (2.106) no coincide con la magnificación μ_c de (2.101).

En particular, esto es evidenciado por el hecho que uno hace uso del modelo de Milne, ya uno necesita una relación entre la distancia λ y el redshift z en el espaciotiempo plano.

La razón por la cual uno introduce la magnificación de intensidad $\tilde{\mu}$ es debido a que está directamente relacionada a las observaciones a través de las medidas relativas de magnitudes aparentes [Bra04] :

$$m_2 - m_1 = -\frac{5}{2} \log \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1}. \quad (2.107)$$

El aparato colector normalmente no recibe todos los fotones sino solamente aquellos limitados en una dada banda. Por razones de simplicidad en la discusión asumiremos que uno mide todo el espectro, ya que de todos modos uno puede generalizar esos conceptos en una situación realista.

Para obtener información intrínseca, uno también puede usar la llamada *magnitud absoluta* M , la cual está definida como la magnitud del objeto si estuviera situado a una distancia estándar de 10 parsecs. La relación de la magnitud aparente y la magnitud absoluta está dada por

$$\begin{aligned} m - M &= -\frac{5}{2} \log \frac{\mathcal{F}(\lambda, z)}{\mathcal{F}(\lambda_{10}, z_{10})} = 5 \log \frac{D_L(\lambda, z)}{D_L(\lambda_{10}(z_{10}), z_{10})} \\ &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{\mathcal{F}(\lambda, z)}{\mathcal{F}_0(\lambda, z)} \frac{\mathcal{F}_0(\lambda, z)}{\mathcal{F}_0(\lambda_{10}, z_{10})} \frac{\mathcal{F}_0(\lambda_{10}, z_{10})}{\mathcal{F}(\lambda_{10}, z_{10})} \right) \\ &= -\frac{5}{2} \log \tilde{\mu}(\lambda) + 5 \log \left(\frac{\lambda(1+z)^2}{\lambda_{10}} \right); \end{aligned} \quad (2.108)$$

donde el primer término en la última línea corresponde al primer factor en el logaritmo; el segundo término corresponde al segundo factor en logaritmo y, donde hemos despreciado la contribución proveniente del cociente $\frac{\mathcal{F}_0(\lambda_{10})}{\mathcal{F}(\lambda_{10})}$; ya que la incidencia de la curvatura cosmológica para distancias del orden de 10pc puede ser ignorada completamente.

El lado izquierdo de la ecuación (2.108) se conoce también como el *módulo de la distancia* y puede ser expresado completamente en término de los escalares ópticos de lentes gravitacionales como consecuencia del teorema 2.5.1. Esto es, podemos escribir:

$$m - M = -\frac{5}{2} \log \mu(\lambda) + 5 \log \left(\frac{\lambda(1+z)^2}{\lambda_{10}} \right); \quad (2.109)$$

donde la magnificación $\mu(\lambda)$ puede ser entendida en términos de las ecuación (2.98) ó (2.100), válidas para un espaciotiempo general. Debe notarse por lo tanto que el segundo término en el lado derecho de (2.109) posee información cinemática y no tiene ninguna referencia a modelo cosmológico alguno.

Ahora procedamos de forma similar y expresemos la relación entre las magnificaciones cuando el redshift es usado como variable para denotar distancias. La expresión previa que contiene la magnificación absoluta será ahora:

$$\begin{aligned} m - M &= -\frac{5}{2} \log \frac{\mathcal{F}(\lambda(z), z)}{\mathcal{F}(\lambda_{10}(z_{10}), z_{10})} = 5 \log \frac{D_L(\lambda(z), z)}{D_L(\lambda_{10}(z_{10}), z_{10})} \\ &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{\mathcal{F}(\lambda(z), z)}{\mathcal{F}_{\text{Milne}}(\lambda(z), z)} \frac{\mathcal{F}_{\text{Milne}}(\lambda_{10}(z_{10}), z_{10})}{\mathcal{F}_{\text{Milne}}(\lambda_{10}(z_{10}), z_{10})} \frac{\mathcal{F}_{\text{Milne}}(\lambda_{10}(z_{10}), z_{10})}{\mathcal{F}(\lambda_{10}(z_{10}), z_{10})} \right) \\ &= -\frac{5}{2} \log \mu'_c(z) + 5 \log \left(\frac{\lambda_{\text{Milne}}(z) (1+z)^2}{\lambda_{10}} \right); \end{aligned} \quad (2.110)$$

donde nuevamente, hemos despreciado los efectos cosmológicos a la distancia cercana de 10pc. Vemos aquí la aparición de la magnificación de intensidad $\mu'_c(z)$.

El comportamiento de las magnificaciones que hemos presentado aquí será discutido más abajo, luego de la introducción de un par de ejemplos representativos.

2.5.5. Ejemplo 1: El universo de Milne

Como una ilustración sencilla de la familia de lentes cosmológicas del tipo R-W consideraremos el caso más simple que corresponde al Universo de Milne ya que se trata de una cosmología vacía. La misma se puede interpretar como el caso límite de un modelo de polvo cuya densidad de energía tiende a cero. Debido a esto, el Universo de Milne, es idéntico desde el punto de vista de la geometría a una porción del espaciotiempo de Minkowski. El elemento de línea está caracterizado por $k = -1$ y $A(t) = t$.

En términos de coordenadas co-móviles las distancias relevantes para la discusión de lentes son:

$$\lambda_{\text{Milne}} = \frac{1}{2} \frac{A^2(t_0) - A^2(t)}{A(t_0)} = A(t_0) z \frac{1 + \frac{z}{2}}{(1+z)^2}, \quad (2.111)$$

$$D_A = \lambda, \quad (2.112)$$

$$D_L = \left(\frac{A(t_0)}{A(t)} \right)^2 \lambda; \quad (2.113)$$

las cuales producen como resultado que la convergencia cosmológica se anule tal como es esperado:

$$\kappa_c = 0, \quad (2.114)$$

$$\mu_c = \tilde{\mu}_c = \mu'_c = 1. \quad (2.115)$$

2.5.6. Ejemplo 2: Universos de Friedman

En esta subsección nos concentraremos en los Universos de Friedman que involucran solamente polvo, radiación y una constante cosmológica. En los apéndices (B.2) el lector podrá encontrar algunas relaciones conocidas sobre las geometrías de Friedmann junto con otras cantidades basadas en el uso del formalismo GHP[GHP73].

Por conveniencia, en esta sección y en todos nuestros resultados finales reintroduciremos las contantes universales apropiadamente.

En general, expresiones analíticas para las cantidades ópticas no pueden ser obtenidas; sin embargo nos contentaremos con el estudio del comportamiento de ellas en una vecindad de los observadores fundamentales.

Necesitaremos pues conocer la componente Φ_{00} y su derivada respecto a ℓ , las cuales pueden comprobarse que son:

$$\Phi_{00} = \frac{4\pi G}{c^2} \frac{A^2(t_0)}{A^2(t)} \left(\varrho(t) + \frac{P(t)}{c^2} \right); \quad (2.116)$$

$$\ell(\Phi_{00}) = \frac{4\pi G}{c^3} \frac{A^3(t_0)}{A^3(t)} \left[\frac{d\varrho}{dt} + \frac{1}{c^2} \frac{dP}{dt} - 2H(t) \left(\varrho(t) + \frac{P(t)}{c^2} \right) \right]; \quad (2.117)$$

donde G es la constante de la gravitación, c la velocidad de la luz, $\varrho(t)$ y $P(t)$ la densidad de energía y la presión del fluido cósmico respectivamente y $H(t)$ es la tasa de expansión de Hubble definida como:

$$H(t) \equiv \frac{1}{A(t)} \frac{dA}{dt}. \quad (2.118)$$

Todas las funciones geométricas, como por ejemplo $H(t)$, y las cantidades caracterizando los fluidos pueden ser escritas en términos de los *parámetros de densidad* ($\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda$) (Ver apéndice (B.2)) y la *densidad crítica* ϱ_{cr} :

$$\varrho(t) = \varrho_{cr} \left(\Omega_m \frac{A^3(t_0)}{A^3(t)} + \Omega_r \frac{A^4(t_0)}{A^4(t)} + \Omega_\Lambda \right), \quad (2.119)$$

$$\frac{P(t)}{c^2} = \varrho_{cr} \left(\frac{\Omega_r}{3} \frac{A^4(t_0)}{A^4(t)} - \Omega_\Lambda \right), \quad (2.120)$$

$$\frac{H^2(t)}{H^2(t_0)} = \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_\Lambda) \frac{A^2(t_0)}{A^2(t)} + \Omega_m \frac{A^3(t_0)}{A^3(t)} + \Omega_r \frac{A^4(t_0)}{A^4(t)}. \quad (2.121)$$

Esto nos permite obtener lo siguiente

$$\Phi_{00} = \frac{4\pi G \varrho_{cr}}{c^2} \frac{A^5(t_0)}{A^5(t)} \left(\Omega_m + \frac{4}{3} \Omega_r \frac{A(t_0)}{A(t)} \right), \quad (2.122)$$

$$\ell(\Phi_{00}) = -\frac{4\pi G \varrho_{cr}}{c^3} \frac{A^6(t_0)}{A^6(t)} H(t) \left(5\Omega_m + 8\Omega_r \frac{A(t_0)}{A(t)} \right). \quad (2.123)$$

Entonces, la convergencia cosmológica, κ_c , se comporta en la vecindad del observador en la siguiente manera:

$$\kappa_c(\lambda) = \frac{4\pi G \varrho_{cr}}{3!c^2} \left(\Omega_m + \frac{4}{3} \Omega_r \right) \lambda^2 + \frac{8\pi G \varrho_{cr}}{4!c^3} H_0 \left(5\Omega_m + 8\Omega_r \right) \lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (2.124)$$

Notemos aquí un hecho que resulta interesante tener en cuenta: el único escalar óptico que aparece en la caracterización de R-W como una lente gravitacional es independiente de la contribución Ω_Λ proveniente de la constante cosmológica.

2.5.7. Valores típicos para la convergencia cosmológica y las funciones de magnificación

Los ejemplos anteriores nos permiten estimar el efecto de los espaciotiempos de R-W como lentes gravitacionales de manera directa. Por lo tanto en esta subsección presentaremos los valores de la convergencia cosmológica y las funciones de magnificación en algunos modelos representativos. Uno de ellos está basado en los datos reportados por la colaboración Planck mientras que el otro proviene de valores que tienen en cuenta cálculos de nucleosíntesis primordial.

Valores con los datos de la colaboración Planck

Los siguientes valores, reportados por la colaboración Planck[A⁺14], fueron usados para computar las diferentes cantidades asociadas a los efectos de lentes:

$$\Omega_m = 0,314 \pm 0,020, \quad (2.125)$$

$$\Omega_\Lambda = 0,686 \pm 0,020, \quad (2.126)$$

$$H_0 = 67,4 \pm 1,4 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}; \quad (2.127)$$

conjuntamente con la asunción $k = 0$. Debajo, en la tabla 2.1 presentamos estos resultados.

Cuadro 2.1: Modelo Λ CDM Planck

λ [Mpc]	z_0	z	κ_c	$\tilde{\mu}_c = \mu_c$	μ'_c
43.95	0.010	0.01	7.85×10^{-6}	1.00002	0.99481
169.55	0.040	0.04	0.00013	1.00025	0.98043
395.164	0.103	0.10	0.00078	1.00157	0.95642
591.27	0.167	0.16	0.00200	1.00401	0.93785
788.85	0.245	0.23	0.00411	1.00826	0.92189
935.68	0.314	0.29	0.00647	1.01307	0.91231
1179.06	0.459	0.41	0.01266	1.02581	0.90235
1311.31	0.561	0.49	0.01776	1.03649	0.90127
1474.92	0.722	0.61	0.02668	1.05557	0.90624
1735.04	1.131	0.88	0.05107	1.11055	0.93905
1915.09	1.680	1.18	0.08261	1.18821	0.99991
2121.16	3.629	1.85	0.15795	1.41034	1.19321

En la lista de arriba hemos incorporado los valores correspondientes para z_0 ; esto es, el valor que tomaría el redshift si el Universo fuera Milne, para una dada distancia geométrica λ .

Resulta curioso que mientras la magnificación de intensidad astrofísicamente conveniente μ'_c muestra un comportamiento más atenuado para este rango de valores, en acuerdo con las observaciones[R⁺98, P⁺99, R⁺04], la magnificación de intensidad más física (geométrica) $\tilde{\mu}_c$ implica un comportamiento más brillante para le mismo rango de valores. Por tanto esto enfatiza el hecho que las nociones de ‘más atenuado’ o ‘más brillante’ que son comunes en el lenguaje observacional son bastantes relativas debido a que dependen de la configuración que uno esté asignando a esos conceptos.

Valores con datos de cálculos basados en nucleosíntesis

Aquí consideraremos el conjunto de parámetros que provienen sólo de cálculos basados en nucleosíntesis primordialc y observaciones independientes del parámetro de Hubble; los mismos son:

$$\Omega_m = 0,042569, \quad (2.128)$$

$$\Omega_r = 4,7647 \times 10^{-5}, \quad (2.129)$$

$$\Omega_\Lambda = 0, \quad (2.130)$$

$$H_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}, \quad (2.131)$$

$$k = -1. \quad (2.132)$$

En la tabla 2.2 debajo presentamos los resultados del cálculo de las diferentes cantidades asociadas a los efectos de lentes usando estos valores:

Cuadro 2.2: Modelo con materia bariónica y baja densidad

λ [Mpc]	z_0	z	κ_c	$\tilde{\mu}_c = \mu_c$	μ'_c
41.04	0.010	0.01	1.06×10^{-6}	1.00000	1.00021
157.07	0.040	0.04	0.00002	1.00003	1.00087
361.12	0.100	0.10	0.00010	1.00020	1.00223
560.36	0.170	0.17	0.00028	1.00057	1.00391
748.05	0.249	0.25	0.00059	1.00118	1.00592
884.86	0.319	0.32	0.00093	1.00187	1.00776
1114.46	0.467	0.47	0.00189	1.00378	1.01191
1232.04	0.565	0.57	0.00266	1.00534	1.01483
1379.10	0.720	0.73	0.00409	1.00824	1.01969
1619.77	1.121	1.15	0.00872	1.01767	1.03341
1793.70	1.684	1.77	0.01701	1.03491	1.05540
1913.14	2.503	2.77	0.03215	1.06754	1.09353

Como es de esperar, este modelo que está prácticamente desprovisto de materia, presenta un comportamiento con pequeñas desviaciones del Universo plano de Milne. Aquí, la magnificación de intensidad μ'_c siempre es más grande que uno en todo el rango del parámetro afín.

Gráficos de los modelos previos

En esta parte se presentan los gráficos que ilustran el comportamiento de la magnificación de intensidad $\tilde{\mu}_c = \mu_c$ en términos de la distancia geométrica junto aquél de la magnificación de intensidad $\mu'_c(z)$ más apropiada en los trabajos astrofísicos.

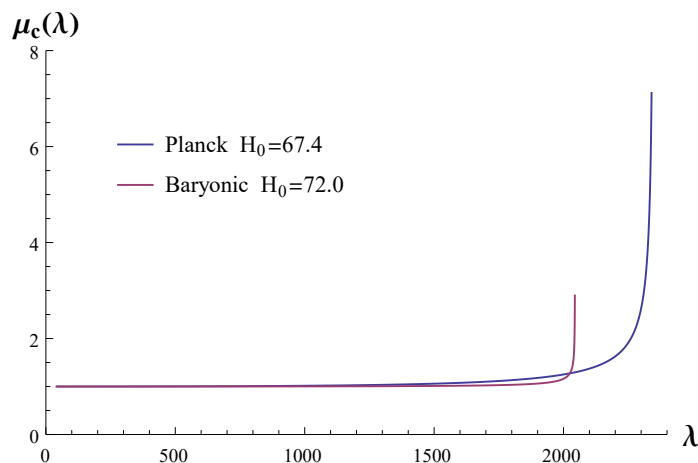


Figura 2.3: Magnificación cosmológica para ambos modelos. Ya que en general $\lambda > D_A(\lambda)$ la magnificación cosmológica es más grande que uno y divergen cerca de la singularidad inicial, excepto en el caso trivial de espaciotiempo plano.

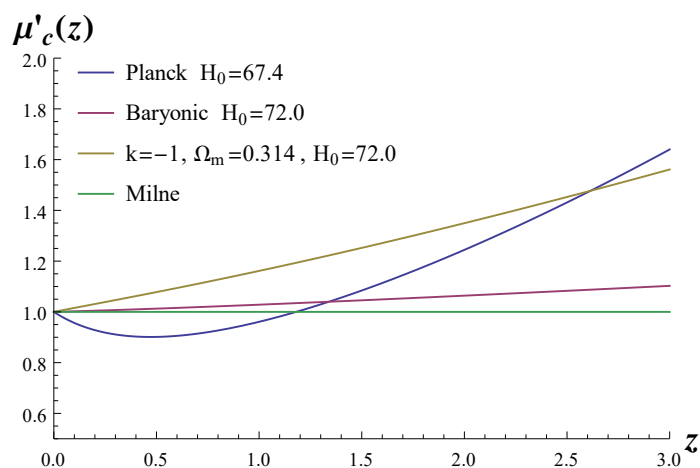


Figura 2.4: La magnificación ‘astrofísica’ $\mu'_c(z)$ es exhibida para los modelos antes discutidos y que hemos identificado como ‘Planck’ y ‘Baryonic’. El modelo de Milne y un Universo abierto con conteniendo solamente materia, $\Omega_m = 0,314$, son también mostrados.

Uno puede ver claramente aquí que las nociones de ‘más atenuado’ o ‘más brillante’ dependen de la forma en que los datos observacionales son estudiados.

2.6. La presencia de una lente adicional sobre la cosmología

En las secciones previas hemos visto que un espaciotiempo de R-W puede ser visto como una lente gravitacional y hemos calculado los escalares ópticos sin recurrir al concepto de ángulo de desviación. En la presente sección trataremos con lentes adicionales con esta geometría de fondo.

Entenderemos por esto, la alteración de la completa homogeneidad e isotropía de la cosmología, en escalas mucho más pequeñas que las escalas cosmológicas donde asumiremos que se encuentra la lente, ya que de otra manera uno estaría cambiando la cosmología que uno está discutiendo. Esto significa que normalmente el tiempo de vuelo de los fotones a través de la lente adicional será considerablemente menor respecto al tiempo de vuelo total. Por tiempo de vuelo nos referimos más precisamente a la cantidad de distancia geométrica recorrida.

Para computar las distorsiones debido a la presencia de inhomogeneidades consideraremos la ecuación (2.23) sobre la cosmología de fondo junto con un apartamiento en la curvatura de fondo; esto es:

$$\ell(\ell(\mathcal{X})) = -(Q_B + \delta Q)\mathcal{X}; \quad (2.133)$$

donde hemos optado por utilizar el subíndice B para denotar cantidades de la geometría de base y donde δQ es la matriz conteniendo la desviación a los escalares de curvatura de Q_B , la cual toma la forma:

$$\delta Q = \begin{pmatrix} \delta\Phi_{00} & \delta\Psi_0 \\ \delta\bar{\Psi}_0 & \delta\Phi_{00} \end{pmatrix}. \quad (2.134)$$

Con el objetivo de entender el significado de estas desviaciones en la ecuación (2.133) quizá sea conveniente remarcar una diferencia importante con la discusión de lentes gravitacionales en el caso de un espaciotiempo plano de fondo. Si la métrica total g^{ab} es expresada como $g^{ab} = \eta^{ab} + h^{ab}$ para una métrica plana η^{ab} , entonces uno se enfrenta con el problema de *gauge* en el cual uno podría también expresar de manera equivalente $g^{ab} = \eta'^{ab} + h'^{ab}$. Por esta razón, en tal caso uno trabaja con cantidades que resultan invariante de *gauge* [GM11] ya que involucran solamente la curvatura. En la discusión sobre espacios curvos, en contraste nosotros asumiremos que la métrica de fondo g_B^{ab} es obtenida idealmente a partir de observaciones cosmológicas como por ejemplo observaciones provenientes del CBM. Esto significa que uno puede expresar la métrica completa como $g^{ab} = g_B^{ab} + h^{ab}$ sin dar lugar a ninguna posible transformación de *gauge*. Es debido a esta razón que

eventualmente uno puede permitir expresiones en las cuales aparezca la conexión de la cosmología de fondo. En particular, haremos uso del marco de referencia utilizado en la métrica de fondo ya que calcularemos efectos de primer orden sobre las cantidades comprendidas en δQ .

Notemos que la ecuación (2.133) es una ecuación exacta válida a lo largo de la nueva trayectoria perturbada de los fotones. Sin embargo, de tal manera de hallar soluciones debemos recordar que en los cálculos de lentes débiles a lo largo de distribuciones compactas mucho más pequeñas que las escalas cosmológicas, uno realiza la integración a lo largo de la trayectoria no perturbada del espaciotiempo de fondo. Esto se debe a que los efectos lineales están contenidos en esta clase de inhomogeneidades de la curvatura. Desde el punto de vista físico, uno integra la ecuación (2.133) desde la posición del observador a lo largo del cono pasado nulo. Entonces, aunque uno podría comenzar con valores finitos de \mathcal{X} , en realidad uno está interesado en solamente en condiciones iniciales que tengan información del cono pasado y por tanto nuestro \mathcal{X} comenzará con un comportamiento divergente dictado por el ángulo de observación. Por este motivo buscamos soluciones de la forma

$$\mathcal{X} = MD_A \mathcal{V}_0 \quad (2.135)$$

done M es una matriz cuadrada 2×2 bien comportada y \mathcal{V}_0 tiene el mismo significado que antes: corresponde al ángulo observado que subtiende la imagen: $\mathcal{V}_0 \equiv \delta\theta$.

Es interesante también aquí señalar que en el régimen de lentes débiles la matriz M puede ser relacionada a la matriz de los escalares ópticos \mathcal{A} mencionada en (2.1) ya que teniendo en cuenta $\lambda \delta\beta = \mathcal{X}$ uno obtiene:

$$\mathcal{A} = \frac{D_A}{\lambda} M = (1 - \kappa_c) M. \quad (2.136)$$

En otras palabras, la lente gravitacional total combina la convergencia cosmológica global κ_c con el efecto ‘local’ de lentes contenido en M .

Debemos notar que al escribir la ecuación (2.136) hemos cambiado la base en la cual la matriz \mathcal{A} está representada; ya que la matriz \mathcal{A}_b^a de la ecuaciones (2.1) y (2.2) están referidas a una base en la esfera de direcciones, mientras que \mathcal{A} en (2.136) se supone escrita en la base asociada a las componentes complejas de \mathcal{X} .

La conexión entre ambas representaciones se obtiene dando la relación explícita de los vectores complejos m y \bar{m} en términos de las direcciones tangentes a la esfera de observación. Para fijar ideas, consideremos la expresión (2.27) del elemento de línea para las superficies de homogeneidad y pensemos que un haz de luz viene viajando desde la dirección positiva y de un marco de referencia conforme a uno Cartesiano. Entonces, en cualquier punto de la trayectoria tenemos a nuestra disposición una tetraedra ortonormal con respecto a las direcciones del marco Cartesiano conforme. Utilizando este marco podemos tomar la siguiente elección que utilizaremos en nuestros cálculos:

$$\begin{aligned} l^a &= (1, 0, -1, 0), \\ m^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, i), \\ \bar{m}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -i), \\ n^a &= \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Ahora, para comparar con las expresiones usuales donde aparecen los escalares ópticos κ, γ_1 y γ_2 , recordemos que los mismos están definidos por (2.1) y (2.2); dado que son entonces relaciones lineales los vectores desviación también están relacionados de la misma forma; esto es:

$$\zeta_s^i = A_j^i \zeta_\delta^j; \quad (2.138)$$

donde $\{\zeta_s^i, \zeta_\delta^i\}$ son los vectores espaciales asociados con $\{\zeta_s, \zeta_\delta\}$ respectivamente.

El significado de los índices (i, j) está vinculado con las direcciones espaciales que determinan el plano de las imágenes. Nosotros identificaremos la primer componente con la dirección x y la

segunda de ellas con la dirección z . Entonces ahora podemos escribir explícitamente las componentes del vector espacial ζ_o^a : ζ_o y ζ_s en términos del sistema Cartesiano. En el caso de ζ_o^a se tiene

$$\begin{aligned}\zeta_o^a &= \zeta_o \bar{m}^a + \bar{\zeta}_o m^a \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta_o(0, 1, 0, -i) + \bar{\zeta}_o(0, 1, 0, i)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, (\zeta_o + \bar{\zeta}_o), 0, i(\bar{\zeta}_o - \zeta_o)) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} (0, \zeta_{oR}, 0, \zeta_{oI});\end{aligned}\tag{2.139}$$

y de manera similar uno obtiene una expresión semejante para ζ_s^a .

Reemplazando luego en la ecuación (2.138) se obtiene

$$\zeta_{sR} = (1 - \kappa - \gamma_1)\zeta_{oR} - \gamma_2 \zeta_{oI},\tag{2.140}$$

$$\zeta_{sI} = -\gamma_2 \zeta_{oR} + (1 - \kappa + \gamma_1)\zeta_{oI};\tag{2.141}$$

lo que permite una interpretación física directa del plano de las imagen; esto es la componente real representa la dirección horizontal mientras que la componente imaginaria representa la dirección vertical.

Fijar esta convención resulta crucial a la hora de analizar los mapas de shear que obtendremos luego en los modelos de lentes.

La ecuación que satisface M puede encontrarse teniendo en cuenta (2.133):

$$\begin{aligned}\ell(\ell(MD_A\mathbf{V}_0)) &= \ell(\ell(M)D_A\mathbf{V}_0 + M\ell(D_A\mathbf{V}_0)) \\ &= \ell(\ell(M))D_A\mathbf{V}_0 + 2\ell(M)\ell(D_A\mathbf{V}_0) \\ &\quad + M\ell(\ell(D_A\mathbf{V}_0)) \\ &= (\ell(\ell(M)) - 2\ell(M)P_B)D_A\mathbf{V}_0 \\ &\quad - MQ_B D_A\mathbf{V}_0 \\ &= -(Q_B + \delta Q)MD_A\mathbf{V}_0;\end{aligned}\tag{2.142}$$

la cual se simplifica a

$$\ell(\ell(M)) - 2\ell(M)P_B + \delta Q M = 0.\tag{2.143}$$

Ahora, usando el hecho de que en R-R uno tiene la siguiente igualdad

$$P_B = \mathbb{I}\rho = -\mathbb{I}\frac{\ell(D_A^2)}{2D_A^2};\tag{2.144}$$

uno arriba a la ecuación final:

$$\ell(D_A^2\ell(M)) + \delta Q D_A^2 M = 0.\tag{2.145}$$

2.6.1. Resolviendo la ecuación matricial

Previamente a efectuar la integración de la ecuación matricial (2.145) especificaremos las condiciones iniciales que ésta debe satisfacer. Uno puede ver que las apropiadas a nuestro problema son las siguientes:

$$(D_A^2\ell(M))|_{r=0} = 0,\tag{2.146}$$

$$M|_{r=0} = \mathbb{I}.\tag{2.147}$$

Usando la primera de las condiciones iniciales obtenemos

$$\ell(M) = -\frac{1}{D_A^2} \int_0^r \delta Q D_A^2 M dr';\tag{2.148}$$

mientras que en el siguiente paso se encuentra que

$$M = \mathbb{I} - \int_0^{r_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{r'} \delta Q D_A^2 M dr'' \right) dr'; \quad (2.149)$$

donde r_s indica la posición de la fuente emisora.

Recordemos que el parámetro afín r toma valores negativos cuando se aproxima a la fuente; por este motivo resulta preferible utilizar la distancia afín λ para parametrizar la geodésica. Con este cambio reescribiremos la ecuación anterior del siguiente modo:

$$M = \mathbb{I} - \int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda'} \delta Q D_A^2 M d\lambda'' \right) d\lambda'. \quad (2.150)$$

Ahora, ya que estamos suponiendo que δQ es ‘pequeño’ uno puede resolver por iteraciones esta ecuación integro-diferencial en órdenes de la perturbación de curvatura. El primer orden puede comprobar que es:

$$M = \mathbb{I} - \int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda'} \delta Q D_A^2 d\lambda'' \right) d\lambda'. \quad (2.151)$$

Esta es la ecuación principal que nos permite describir las distorsiones a primer orden generadas por distribuciones aisladas sobre el fondo cosmológico aquí considerado.

2.6.2. Escalares ópticos

Como dijimos previamente, la matriz \mathcal{A} que contiene los escalares ópticos está dada por:

$$\mathcal{A} = (1 - \kappa_c) M, \quad (2.136)$$

y junto con la ecuación (2.151) nos permitirá obtener expresiones explícitas para los mismos. Esta tarea se lleva a cabo más fácilmente trabajando con las partes reales e imaginarias del vector desviación de geodésicas ς ; esto es $\varsigma = \varsigma_R + i\varsigma_I$ que se corresponde con utilizar una base real para expandir el plano de la imagen como discutimos en la sección anterior. Será necesario también descomponer el escalar de curvatura de Weyl en sus partes reales e imaginarias: $\delta\Psi_0 = \delta\Psi_{0R} + i\delta\Psi_{0I}$.

Como resultado uno encuentra la siguiente estructura para la matriz óptica

$$\mathcal{A} = (1 - \kappa_c) \begin{pmatrix} 1 - \kappa_L - \gamma_{1L} & -\gamma_{2L} \\ -\gamma_{2L} & 1 - \kappa_L + \gamma_{1L} \end{pmatrix}; \quad (2.152)$$

donde los *escalares ópticos intrínsecos* de la lente adicional ($\kappa_L, \gamma_{1L}, \gamma_{2L}$) son explícitamente

$$\kappa_L = \int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda'} \delta\Phi_{00} D_A^2 d\lambda'' \right) d\lambda', \quad (2.153)$$

$$\gamma_{1L} = \int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda'} \delta\Psi_{0R} D_A^2 d\lambda'' \right) d\lambda', \quad (2.154)$$

$$\gamma_{2L} = \int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda'} \delta\Psi_{0I} D_A^2 d\lambda'' \right) d\lambda'. \quad (2.155)$$

El subíndice L es introducido aquí para distinguir cantidades en las que intervienen las inhomogeneidades aisladas en contraposición a las cantidades en que únicamente interviene la cosmología, tal como en κ_c .

Los escalares ópticos para el sistema compuesto de la lente adicional y la cosmología R-W puede verse que son entonces:

$$\kappa = (1 - \kappa_c) \kappa_L + \kappa_c, \quad (2.156)$$

$$\gamma_1 = (1 - \kappa_c) \gamma_{1L}, \quad (2.157)$$

$$\gamma_2 = (1 - \kappa_c) \gamma_{2L}. \quad (2.158)$$

Así, la contribución de la cosmología es doble; por un lado, está presente en los escalares ópticos intrínsecos a través de la distancia geométrica y la distancia de área y, por otro lado, aparece por medio del factor $(1 - \kappa_c)$.

Las expresiones de arriba son las generalizaciones que hemos encontrado para los escalares ópticos de una lente en el contexto cosmológico.

En los casos sencillos de Minkowski o Milne, en donde $D_A = \lambda$, uno recupera las expresiones ya conocidas que fueron presentadas en [GM11]:

$$\kappa = \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda (\lambda_s - \lambda) \delta\Phi_{00} d\lambda', \quad (2.159)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda (\lambda_s - \lambda) \delta\Psi_{0R} d\lambda', \quad (2.160)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda (\lambda_s - \lambda) \delta\Psi_{0I} d\lambda'; \quad (2.161)$$

donde la integral doble ha sido reducida a una sola por medio de una integración por partes.

2.7. El caso axialmente simétrico

Las expresiones que hemos obtenido en la última sección no contienen ninguna suposición sobre la naturaleza y la geometría de las fuentes. En esta sección, en cambio, discutiremos modelos con simetría axial en los cuales el eje de simetría yace a lo largo de la línea de la visual pasando a través de la región central de la distribución.

Estamos interesados, por tanto, en el estudio de un fotón viajando a lo largo de la dirección paralela al eje de simetría con un parámetro de impacto J respecto del centro de la lente. Para este propósito tomaremos un sistema de coordenadas apropiado a tal situación de manera similar a la descrita en (2.6), en la cual las direcciones x y z , mutuamente ortogonales serán consideradas y el fotón viaja en la dirección y .

Debido a la simetría de la lente será útil también trabajar en términos del ángulo ϑ entre el eje z y la trayectoria del fotón.

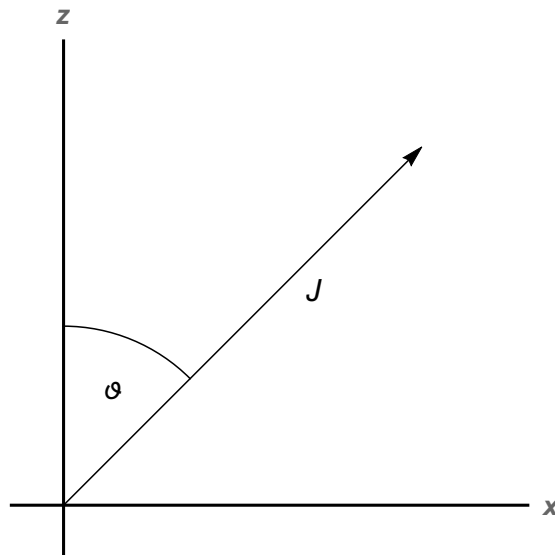


Figura 2.5: Variables utilizadas en el plano de la imagen para la descripción de un lente axialmente simétrica.

Entonces con tal configuración de la lente uno nota que la componente $\delta\Phi_{00}$ es una cantidad real de peso de spin cero y depende solamente de las coordenadas (J, λ) mientras que la componente $\delta\Psi_0$ es una cantidad compleja con peso de spin dos y por tanto tiene la siguiente dependencia funcional

$$\delta\Psi_0 = |\delta\Psi_0| e^{2i\vartheta + \text{phase}}; \quad (2.162)$$

donde la fase contiene una libertad de ‘gauge’.

Como se menciona en [GM11], es común definir la cantidad real $\delta\psi_0(J, \lambda)$ asociada a la contribución del Weyl mediante:

$$\delta\Psi_0(J, \lambda, \vartheta) = -\delta\psi_0(J, \lambda) e^{2i\vartheta}. \quad (2.163)$$

Con esta definición uno escribe para los escalares ópticos intrínsecos de la lente

$$\kappa_L(J) = \int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda'} \delta\Phi_{00}(J, \lambda) D_A^2 d\lambda'' \right) d\lambda', \quad (2.153)$$

$$\gamma_{cL}(J, \vartheta) = -e^{2i\vartheta} \int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda'} \delta\psi_0(J, \lambda) D_A^2 d\lambda'' \right) d\lambda'; \quad (2.164)$$

donde el shear complejo está normalmente expresado en términos de sus partes real e imaginaria: $\gamma_{cL} \equiv \gamma_{1L} + i\gamma_{2L}$.

De manera similar la forma compleja del shear nos invita a definir la cantidad real $\gamma_L(J)$ como:

$$(\gamma_{1L} + i\gamma_{2L})(J, \vartheta) \equiv -\gamma_L(J) e^{2i\vartheta}; \quad (2.165)$$

y por tanto

$$\gamma_L(J) = \int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda'} \delta\psi_0''(J) D_A^2 d\lambda'' \right) d\lambda'. \quad (2.166)$$

2.8. La aproximación de lente fina

Una de las situaciones más comunes en el escenario cosmológico es aquella donde el tamaño típico δ_l de la lente es mucho más chico que la distancia desde el observador a la lente λ_l y que la distancia desde la lente a la fuente λ_{ls} . Tal configuración es referida como una lente fina.

Siguiendo las líneas presentadas en el artículo [GM11] asumiremos que las perturbaciones a los escalares de curvatura $\{\delta\Phi_{00}, \delta\Psi_0\}$, los que denotaremos genéricamente como δC estarán muy concentrados alrededor de λ_l donde está localizada la lente. Esto implica que debe valer la siguiente aproximación

$$\delta\bar{C}(\lambda) \equiv \int_0^\lambda \delta C(\lambda') d\lambda' \cong \begin{cases} 0, & \forall \lambda < \lambda_l - \delta_l; \\ \widehat{\delta C}, & \forall \lambda \geq \lambda_l + \delta_l; \end{cases} \quad (2.167)$$

donde $\delta_l \ll \lambda_l$, $\delta_l \ll \lambda_s$ y $\delta_l \ll \lambda_{ls}$ ($\lambda_{ls} = \lambda_s - \lambda_l$).

Haremos uso de esta suposición para simplificar el integrando dentro de los paréntesis en las ecuaciones (2.153, 2.154, 2.155). Notemos pues lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_A^2} \int_0^\lambda \delta C D_A^2 d\lambda' &= \widehat{\delta C} - \frac{1}{D_A^2} \int_0^\lambda \frac{dD_A^2}{d\lambda'} \delta\bar{C}(\lambda') d\lambda' \\ &= \widehat{\delta C} - \frac{\widehat{\delta C}}{D_A^2} \left(D_A^2 - D_A^2(\lambda_l) \right) \\ &= \widehat{\delta C} \frac{D_A^2(\lambda_l)}{D_A^2}; \end{aligned} \quad (2.168)$$

donde $\lambda_l \leq \lambda$. Entonces, tomando otra integral uno arriba a la expresión reducida para los escalares ópticos:

$$\int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2(\lambda')} \int_0^{\lambda'} \delta C D_A^2 d\lambda'' \right) d\lambda' = \widehat{\delta C} D_A^2(\lambda_l) \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} \frac{d\lambda'}{D_A^2}; \quad (2.169)$$

en donde se han despreciado términos de orden $\mathcal{O}\left(\frac{\delta_l}{\lambda_l}\right)$.

El factor que aparece en la última ecuación será recurrente en lo que sigue por lo que para simplificar la notación definiremos:

$$\mathbf{D}_{ls} \equiv D_A^2(\lambda_l) \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} \frac{d\lambda'}{D_A^2(\lambda')}. \quad (2.170)$$

Luego los escalares ópticos intrínsecos de la lente adquieren una forma muy simple:

$$\kappa_L = \mathbf{D}_{ls} \widehat{\delta\Phi}_{00}, \quad (2.171)$$

$$\gamma_{1L} = \mathbf{D}_{ls} \widehat{\delta\Psi}_{0R}, \quad (2.172)$$

$$\gamma_{2L} = \mathbf{D}_{ls} \widehat{\delta\Psi}_{0I}; \quad (2.173)$$

y para los escalares ópticos del sistema completo:

$$\kappa = (1 - \kappa_c) \mathbf{D}_{ls} \widehat{\delta\Phi}_{00} + \kappa_c, \quad (2.174)$$

$$\gamma_1 = (1 - \kappa_c) \mathbf{D}_{ls} \widehat{\delta\Psi}_{0R}, \quad (2.175)$$

$$\gamma_2 = (1 - \kappa_c) \mathbf{D}_{ls} \widehat{\delta\Psi}_{0I}; \quad (2.176)$$

donde estamos usando consistentemente que:

$$\widehat{\delta\Phi}_{00} = \int_0^{\lambda_s} \delta\Phi_{00} d\lambda', \quad (2.177)$$

y

$$\widehat{\delta\Psi}_0 = \int_0^{\lambda_s} \delta\Psi_0 d\lambda'. \quad (2.178)$$

Más adelante (sección (2.9.1)) veremos la conexión de las expresiones que hemos obtenido con las fórmulas presentes en la literatura. Por el momento, notemos que, cuando la curvatura del fondo cosmológico tiende a cero uno tiene que D_A converge a λ y

$$\mathbf{D}_{ls} \rightarrow \frac{\lambda_l \lambda_s}{\lambda_s}; \quad (2.179)$$

de forma tal que uno arriba a las expresiones usuales encontradas en los estudios de lentes sobre un espaciotiempo plano[GM11].

Señalemos un detalle importante que nos servirá para considerar lentes en movimiento sobre la cosmología. Las expresiones (2.171)-(2.173) están construidas a partir de dos factores distintos: \mathbf{D}_{ls} y las cantidades con circunflejo $\widehat{\delta C}$ que contienen la curvatura de la lente fina. El primer factor no depende en absoluto de las características de la lente pues sólo depende de la cosmología. En cambio las cantidades $\widehat{\delta C}$ dependen del estado de movimiento de la lente. En las siguientes subsecciones nos concentraremos en ambos factores de forma separada.

2.8.1. Expresión alternativa para el factor \mathbf{D}_{ls}

El término \mathbf{D}_{ls} que solamente depende de la cosmología puede integrarse analíticamente en el caso general y reescribirse en una forma más transparente. Para ellos usaremos las coordenadas (u, χ) discutidas en (2.3.1). Esto permite ver fácilmente que el integrando en la ecuación (2.170) es una derivada total a lo largo de la geodésica nula.

Notemos que de la ecuación (2.60) y el hecho que $\frac{\partial}{\partial \lambda} = -\ell$ uno tiene la siguiente relación

$$d\lambda = \frac{A^2(u, \chi)}{A(t_0)} d\chi; \quad (2.180)$$

que implica

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{ls} &= \frac{D_A^2(\chi_l)}{A(t_0)} \int_{\chi_l}^{\chi_s} \frac{d\chi}{f_k^2(\chi)} \\
 &= \frac{D_A^2(\chi_l)}{A(t_0)} \frac{f_k(\chi_s - \chi_l)}{f_k(\chi_s) f_k(\chi_l)} \\
 &= \frac{1}{(1+z_l)} \frac{D_A(\chi_s - \chi_l) D_A(\chi_l)}{D_A(\chi_s)};
 \end{aligned} \tag{2.181}$$

donde z_l es el redshift cosmológico en el sitio de la lente y $D_A(\chi_s - \chi_l)$ es la distancia diámetro angular medida por un observador fundamental que se situaría en las coordenadas (u, χ_l)

$$D_A(\chi_s - \chi_l) = A(u, \chi_s) f_k(\chi_s - \chi_l). \tag{2.182}$$

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación reducida:

$$\mathbf{D}_{ls} = \frac{1}{1+z_l} \frac{D_{A_{ls}} D_{A_l}}{D_{A_s}}. \tag{2.183}$$

Notemos que la presencia del factor de redshift $1+z_l$ podría causar confusión si uno considera el caso de un Universo de Milne donde $D_A = \lambda$ pero $z_l \neq 0$ ya que en este caso parecería que uno no recuperaría la expresión (2.179). Esto es sólo aparente ya que en tal caso uno tiene que la ecuación (2.182) resulta ser $(1+z_l)(\lambda_s - \lambda_l)$ como uno puede comprobar. Equivalentemente esto es consecuencia del hecho que la distancia de área depende del movimiento del observador. En otras palabras, en el Universo de Milne uno tiene

$$D_{A_{ls}} \rightarrow \bar{\lambda}_s - \bar{\lambda}_l = (1+z_l)(\lambda_s - \lambda_l); \tag{2.184}$$

donde $\bar{\lambda}$ representa el parámetro afín definido por la ecuación (2.10) respecto a la línea mundo del observador co-móvil.

2.8.2. Integración sobre la curvatura para lentes en movimiento

En principio, las expresiones (2.177) y (2.178) tienen toda la información que uno necesita para completar el cálculo completo de los escalares ópticos. Sin embargo, en el caso de lentes en movimiento es deseable referir el cómputo de las expresiones al marco de referencia en reposo de la lente. Para ello, uno puede pensar en dos posibilidades: dejar fijo la tetra nula y calcular la curvatura de la geometría en movimiento ó alternativamente uno puede pensar en considerar la geometría de la lente en ‘reposo’ y cambiar el marco de referencia de observación apropiadamente por un boost. Apelando al formalismo GHP[GHP73] uno ve que ambos integrandos tienen peso de boost igual a 2. En consecuencia, si tenemos en cuenta el cambio del parámetro afín al pasar al marco de referencia que cambiamos por un boost, uno deduce que para una porción local y estacionaria del espacio-tiempo que se mueve relativa al observador con una 4-velocidad v^a , las expresiones (2.177) y (2.178) están relacionadas con respecto al caso en que no hay movimiento por el factor

$$\frac{1}{\ell \cdot v} = 1 + z_v. \tag{2.185}$$

Remarquemos que z_v no necesita coincidir con z_l .

Se puede ver entonces que las expresiones (2.171)-(2.173) tienen la misma estructura; esto es, si \circ_{Lv} es el escalar óptico para una lente con velocidad v uno puede expresar

$$\begin{aligned}
 \circ_{Lv} &= \mathbf{D}_{ls} \widehat{\delta C}_v \\
 &= \mathbf{D}_{ls} (1+z_v) \widehat{\delta C} \\
 &= \frac{(1+z_v)}{(1+z_l)} \frac{D_{A_{ls}} D_{A_l}}{D_{A_s}} \widehat{\delta C} \\
 &= \frac{(1+z_v)}{(1+z_l)} \circ_L;
 \end{aligned} \tag{2.186}$$

donde la notación aquí es $\widehat{\delta C}_v$ para la lente en movimiento y $\widehat{\delta C}$ para la lente en reposo en el marco de referencia del observador.

La simplicidad de la ecuación (2.186) y su derivación no debería opacar lo notable que resulta esta expresión ya que sintetiza todo lo que uno necesita tener en cuenta en el movimiento de las lentes. En esta forma nuestro tratamiento simplifica trabajos previos en la literatura que tratan con la cuestión de lentes en movimiento y generalizamos su aplicación al escenario cosmológico.

Observación respecto a Σ_{cr} : Llegado este momento, nos gustaría tomar la oportunidad de comentar acerca de la noción de densidad de masa crítica usada en varios trabajos y en libros texto.

Hemos notado antes que la contribución a los escalares ópticos que aparece en (2.171)-(2.173) está compuesta de dos factores distintos que involucran la contribución de la cosmología y de la lente respectivamente. Cuando comparamos con el contenido en libros de textos[SEF92, SKW06] basados en el factor de distancia Σ/Σ_{cr} , nosotros deberíamos relacionar nuestro \mathbf{D}_{ls} con $1/\Sigma_{cr}$ y $\widehat{\delta C}_v$ con Σ . Sin embargo, en un sentido estricto, nosotros hemos encontrado que \mathbf{D}_{ls} no coincide con $1/\Sigma_{cr}$ tal como es definido en[SKW06]

$$\frac{1}{\Sigma_{cr}} \equiv \frac{4\pi G}{c^2} \frac{D_A(\chi_s - \chi_l) D_A(\chi_l)}{D_A(\chi_s)}; \quad (2.187)$$

ya que, salvo el factor numérico con las constantes físicas, vemos que el factor de redshift de la lente es ignorado. Este detalle es importante debido a que en referencias muy conocidas en el área [SKW06] se afirma que en los cálculos de lentes finas en el contexto cosmológico uno ‘solamente’ necesita reemplazar las distancias del espacio plano por distancias angulares.

Observación respecto a Σ : Además, en el mismo libro de texto[SEF92], podemos ver cerca de las ecuaciones (4.19) y (4.20), que se argumenta que el ángulo de deflexión no se ve afectado por efectos a primer orden en el movimiento de la lente. Entonces como la cantidad Σ usada en estas referencias es lineal en el ángulo de deflexión, uno deduciría que Σ no cambia por el movimiento de la lente. Aquí hemos mostrado que eso no es correcto.

Esto significa que resulta equivocado generalizar las expresiones usuales que aparecen corrientemente los estudios de lentes débiles en el caso de una espacio de fondo plano a uno cosmológico solamente cambiando las distancias por distancias diámetro angular. Cuando presentemos algunos ejemplos debajo retomaremos esta cuestión.

2.9. Lentes finas en movimiento cuya geometría es estacionaria y esféricamente simétrica

Consideremos el caso de una lente gravitacional que, localmente está representada por un elemento de línea estacionario y esféricamente simétrico. Entonces, en un entorno de la lente, podemos establecer un sistema de coordenadas donde el elemento de línea de la geometría puede ser expresado como:

$$ds_L^2 = e^{2\Phi(\mathbf{r})} dt^2 - \frac{d\mathbf{r}^2}{1 - \frac{2M(\mathbf{r})}{r}} - \mathbf{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2); \quad (2.188)$$

el cual está completamente determinado por las funciones $M(\mathbf{r})$ y $\Phi(\mathbf{r})$.

Es importante señalar que en esta situación uno puede aplicar la aproximación de lentes finas tal cual está dada por las expresiones (2.171)-(2.173). Cuando esto es hecho uno nota que la información provista por la cosmología de fondo aparecerá únicamente a través del factor (2.183) que contiene las distancias diámetro angular y el redshift.

Además, comparando las ecuaciones (2.171)-(2.173) con las ecuaciones (78)-(80) de la referencia [GM11] y, percatándose que en la aproximación de lentes finas lo que importa es el parámetro de impacto J , uno puede ver que toda la discusión de la sección V de [GM11] puede ser aplicada también al escenario cosmológico teniendo en cuenta el movimiento de la lente discutido previamente.

Esto implica que podemos expresar los escalares ópticos en términos de las componentes del tensor energía-momento y de la función $M(\mathbf{r})$ del siguiente modo:

$$\kappa_L(J) = \frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{D}_{ls}(1+z_v) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varrho(\mathbf{r}) + \frac{P_r(\mathbf{r})}{c^2} + \frac{J^2}{c^2 \mathbf{r}^2} \left(P_t(\mathbf{r}) - P_r(\mathbf{r}) \right) \right] dy, \quad (2.189)$$

y

$$\gamma_L(J) = \frac{G}{c^2} \mathbf{D}_{ls}(1+z_v) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J^2}{\mathbf{r}^2} \left[\frac{3M(\mathbf{r})}{\mathbf{r}^3} - \left(\varrho(\mathbf{r}) + \frac{P_t(\mathbf{r})}{c^2} - \frac{P_r(\mathbf{r})}{c^2} \right) \right] dy; \quad (2.190)$$

donde ϱ denota la densidad de energía de la distribución y $P_r(r)$ y $P_t(r)$ son las componentes espaciales del tensor energía-momento. La variable de integración y está definida como en [GM11]:

$$\mathbf{r}^2 \equiv J^2 + y^2. \quad (2.191)$$

Hemos omitido aquí las δ 's para simplificar la notación en la expresión de la curvatura ya que en la aproximación de lente fina la contribución a la curvatura no necesita ser pequeña.

Notemos que las expresiones obtenidas contienen la contribución de las componentes espaciales del tensor energía-momento, en contraste con la suposición convencional que desprecia dichas componentes.

Las ecuaciones (2.189) y (2.190) son expresiones útiles que nos permiten escribir de manera simple la relación entre los escalares ópticos y el contenido de materia de la lente. A su vez, ella son las generalizaciones del par de ecuaciones (183) de [GM11] al contexto cosmológico.

En la aproximación de lentes finas uno debe remarcar que la perturbación δC no necesita ser pequeña. Como puede demostrarse, el hecho de que la perturbación δC esté altamente concentrada, le permite a uno puede integrar la ecuación (2.133) exactamente en el caso de una fuente distribucional de curvatura (ver section (B.3)). Este es de hecho, la razón por la cual el tratamiento de lentes débiles en la aproximación de lentes finas permite una buena descripción de grandes distorsiones tales como arcos y anillos. En la literatura tales situaciones son usualmente referidas como eventos de *lentes fuertes*. Esta nomenclatura resulta un poco confusa dada que su derivación es presentada en base a la aproximación de lentes débiles de centros dispersores puntuales[SEF92]. Cuando una distribución de estos centros puntuales de dispersión es considerada se suele recurrir a la superposición lineal de sus efectos individuales aduciendo que uno está trabajando con el orden lineal en el cálculo de las deflexiones. Esto es razonable en el régimen de campo débil, sin embargo uno puede ver que esta suposición hace bien su trabajo en el caso de arcos y anillos debido a que la lente está muy localizada.

2.9.1. Ejemplos

En esta subsección aplicamos las expresiones generalizadas que hemos encontrado para los escalares ópticos a tres casos: una lente de Schwarzschild, una distribución de masa con perfil isotérmico y otra lente que tiene la geometría presentada en [GM12]. En este último caso aprovechamos para señalar una relación importante que mantiene esta geometría peculiar con el modelo isotérmico.

Schwarzschild

Consideremos aquí el caso de una distribución monopolar de masa caracterizada por $M = \text{cte.}$; la cual podría estar moviéndose con velocidad v respecto del observador. Para una lente sencilla como esta uno obtiene:

$$\kappa_L = 0, \quad (2.192)$$

$$\gamma_L = \frac{4G}{c^2} \mathbf{D}_{ls}(1+z_v) \frac{M}{J^2}; \quad (2.193)$$

entonces la convergencia y el shear totales son:

$$\kappa = \kappa_c, \quad (2.194)$$

$$\begin{aligned}\gamma &= (1 - \kappa_c) \frac{4G}{c^2} \mathbf{D}_{ls} (1 + z_v) \frac{M}{J^2} \\ &= \frac{4G}{c^2} \frac{(1 - \kappa_c)}{(1 + z_l)} \frac{D_{A_{sl}} D_{A_l}}{D_{A_s}} (1 + z_v) \frac{M}{J^2}.\end{aligned}\quad (2.195)$$

El perfil isotérmico

El modelo isotérmico es un perfil de masa caracterizado por una función radial de la forma:

$$\varrho(\mathbf{r}) = \frac{\sigma^2}{2G\pi\mathbf{r}^2}.\quad (2.196)$$

Esta distribución aparece en varios estudios astrofísicos en los cuales es usado para modelar la dinámica estelar y para el estudio de la rotación diferencial en galaxias con materia oscura entre otras aplicaciones. El parámetro $v \equiv \sqrt{2}\sigma$ tiene unidades de velocidad y se encuentra que satisface $v \ll c$; lo cual implica que las presiones en este modelo son despreciables. Por lo tanto, el contenido de materia para esta lente viene dado por:

$$M(\mathbf{r}) = \frac{2\sigma^2}{G} \mathbf{r},\quad (2.197)$$

$$P_r(\mathbf{r}) = P_t(\mathbf{r}) \approx 0;\quad (2.198)$$

junto con la ecuación (2.196).

Los escalares ópticos intrínsecos dan como resultado entonces lo siguiente:

$$\kappa_L = \frac{\mathbf{D}_{ls}}{c^2} (1 + z_v) \frac{2\pi\sigma^2}{J},\quad (2.199)$$

$$\gamma_L = \frac{\mathbf{D}_{ls}}{c^2} (1 + z_v) \frac{2\pi\sigma^2}{J};\quad (2.200)$$

y si incluimos la contribución de la cosmología las expresiones son:

$$\begin{aligned}\kappa &= (1 - \kappa_c) \frac{\mathbf{D}_{ls}}{c^2} (1 + z_v) \frac{2\pi\sigma^2}{J} + \kappa_c \\ &= \frac{(1 - \kappa_c)}{(1 + z_l)} \frac{D_{A_{sl}} D_{A_l}}{c^2 D_{A_s}} (1 + z_v) \frac{2\pi\sigma^2}{J} + \kappa_c,\end{aligned}\quad (2.201)$$

$$\begin{aligned}\gamma &= (1 - \kappa_c) \frac{\mathbf{D}_{ls}}{c^2} (1 + z_v) \frac{2\pi\sigma^2}{J} \\ &= \frac{(1 - \kappa_c)}{(1 + z_l)} \frac{D_{A_{sl}} D_{A_l}}{c^2 D_{A_s}} (1 + z_v) \frac{2\pi\sigma^2}{J}.\end{aligned}\quad (2.202)$$

Solución anisotrópica peculiar

Este último ejemplo es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein que describe muy bien la fenomenología de materia oscura en sistemas astrofísicos y fue presentada en [GM12]. Posee un tensor energía-momento poco convencional cuyas componente son

$$\varrho(\mathbf{r}) = 0,\quad (2.203)$$

$$P_r(\mathbf{r}) = \frac{c^4}{4\pi G \mathbf{r}^2 \ln\left(\frac{\mathbf{r}}{\mu}\right)},\quad (2.204)$$

$$P_t(\mathbf{r}) = 0;\quad (2.205)$$

con μ una constante de caracterizando la distribución. La solución satisface las condiciones de energía *débil* y *fuerte* y posee una masa total $M(\mathbf{r})$ igual a cero.

En diferentes aplicaciones de esta geometría a problemas involucrando materia oscura se encontró que en el rango de interés $\ln \mathbf{r}$ era siempre mucho más pequeño que $-\ln \mu$. Esto significa que

para todos los fines prácticos el factor \log es una constante; en otras palabras uno podría tomar $4\Delta^2 \cong \frac{c^2}{\ln(\frac{x}{\mu})}$. Entonces, usando la ecuaciones (2.189) y (2.190) uno obtiene:

$$\kappa_L(J) = \frac{\mathbf{D}_{ls}}{c^2}(1+z_v)\frac{2\pi\Delta^2}{J}, \quad (2.206)$$

$$\gamma_L(J) = \frac{\mathbf{D}_{ls}}{c^2}(1+z_v)\frac{2\pi\Delta^2}{J}. \quad (2.207)$$

Por lo tanto, observemos que este tipo de modelos se comportan como un perfil isotérmico con velocidad de dispersión $v = \sqrt{2}\Delta$ cuando son considerados como modelo de lente gravitacional. El shear y la convergencia total son:

$$\begin{aligned} \kappa &= (1 - \kappa_c) \frac{\mathbf{D}_{ls}}{c^2} (1 + z_v) \frac{2\pi\Delta^2}{J} + \kappa_c \\ &= \frac{(1 - \kappa_c) D_{A_{sl}} D_{A_l}}{(1 + z_l) c^2 D_{A_s}} (1 + z_v) \frac{2\pi\Delta^2}{J} + \kappa_c, \end{aligned} \quad (2.208)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= (1 - \kappa_c) \frac{\mathbf{D}_{ls}}{c^2} (1 + z_v) \frac{2\pi\Delta^2}{J} \\ &= \frac{(1 - \kappa_c) D_{A_{sl}} D_{A_l}}{(1 + z_l) c^2 D_{A_s}} (1 + z_v) \frac{2\pi\Delta^2}{J}. \end{aligned} \quad (2.209)$$

Este ejemplo es notable porque muestra claramente la diferencia del punto de vista adoptado aquí y las limitaciones del tratamiento convencional basado en el uso de la densidad de masa proyectada Σ/Σ_{cr} . Si uno fuera a utilizar el formalismo usual uno obtendría que todos los escalares ópticos se anularían ya que en este caso $\Sigma = 0$.

Observación respecto de los ejemplos Estos ejemplos nos permiten mostrar las principales diferencias de nuestras expresiones con el formalismo basado en el cómputo del ángulo de deflexión y en el cociente entre la densidad de masa proyectada y la densidad de masa crítica Σ/Σ_{cr} .

Los primeros dos ejemplos muestran que nuestras expresiones incluyen la contribución de la cosmología contenida en el factor de la convergencia cosmológica κ_c y la contribución de la velocidad de la lente que involucra un factor de redshift z_v . Para lentes que son co-móviles con los observadores fundamentales uno obtiene la cancelación de este factor con el otro factor de redshift que aparecen en el denominador y que está solamente asociado a la cosmología. En tal caso sin embargo todavía permanece la contribución κ_c , de tal forma que nuestros resultados todavía extienden los que se encuentran en el formalismo usual basado en la prescripción Σ/Σ_{cr} .

Mencionemos que en las discusiones usuales basadas en el paradigma Σ/Σ_{cr} que estamos generalizando, el problema del movimiento de la lente es totalmente omitido; y por lo tanto no se mencionan los dos efectos que producen los dos factores que hemos visto.

Finalmente, el tercer ejemplo demuestra notablemente que mediante el uso de las fórmulas convencionales no se pueden tratar geometrías que son útiles para la descripción de los fenómenos de materia oscura.

2.10. Comentarios sobre este capítulo

En este capítulo hemos presentado un estudio detallado y sistemático de los escalares ópticos para lentes gravitacionales dentro del contexto cosmológico.

Nuestros resultados ofrecen nuevas expresiones que permiten considerar modelos de lentes que poseen un contenido de materia-energía completamente general: ecuaciones (2.153)-(2.158); al mismo tiempo contempla las correcciones que deben ser tenidas en cuenta cuando la lente está en movimiento relativo respecto del marco de referencia del observador (sección (2.8.2)).

En este tratamiento de lentes gravitacionales encaramos la discusión desde una perspectiva ligeramente distinta. Hemos elegimos hacer la comparación de los efectos de lentes respecto de un

espaciotiempo que no tiene curvatura a diferencia del abordaje usual en donde la comparación se hace respecto del modelo cosmológico asumido. De esta forma, incluimos explícitamente la contribución de la cosmología a los efectos de lentes. Esto fue discutido en la sección (2.5) donde mostramos que la geometría de R-W puede ser caracterizada como una lente gravitacional ‘gruesa’ que produce convergencia κ_c pero no shear. Vimos así mismo que la validez de los escalares ópticos en este caso tienen significado incluso para extensiones angulares arbitrariamente grandes.

En este análisis fue necesario revisar el lenguaje que uno está usando y la interpretación de las observaciones; lo cual fue hecho en la sección (2.2). En particular, señalamos que la noción fundamental de distancia en la discusión de lentes gravitacionales es la de distancia afín λ .

Mencionemos que en la derivación de las nuevas expresiones no es necesario recurrir a la noción de ángulo de deflección, el cual no es un observable en lentes débiles.

Sin embargo, la diferencia más significativa con otros trabajos y con referencias estándar en la literatura es que nuestras expresiones no están restringidas a distribuciones basadas en una descripción Newtoniana de la materia; ellas permiten tener en cuenta la totalidad del tensor energía-momento de la lente y por ello constituyen una herramienta muy útil e interesante para estudiar el problema de la masa faltante en sistemas compactos. Esto es una cuestión clave ya que a pesar de que existen excelentes referencias en la literatura [SEF92, SKW06] que presentan de manera bastante completa y en forma pedagógica el tema de lentes gravitacionales, ellas descansan en simplificaciones que limitan la investigaciones de situaciones astrofísicas desde una perspectiva más general. Aquí, hemos generalizado expresiones que aparecen en libros de textos [SEF92, SKW06], artículos de reseña (“reviews”) [Wammb, BS01, Bar10] y en premisas de artículos de investigación [KF08, LLC⁺16, HBA16].

Además, consideramos importante señalar que el efecto producido por el movimiento de la lente está totalmente integrado en nuestro formalismo y aparece de una manera sencilla y clara como puede constatarse comparando con otros trabajos conocidos [KS99, Fri03, WS04] en los cuales el álgebra es mucho más complicada. En la sección (2.9) calculamos explícitamente los escalares ópticos exhibiendo estas propiedades en el caso de lentes que localmente tienen una geometría estática y esféricamente simétrica (ecuaciones (2.189) y (2.190)). Con ellas mostramos que hay modelos geométricos de lentes que no pueden ser tratados si no se tiene en cuenta toda la estructura del tensor energía-momento; estos modelos resultan sumamente útiles para una descripción de las observaciones de materia oscura (ver por ejemplo [GM12]). Estas novedades han sido explícitamente ilustradas en la aproximación de lentes finas en donde hemos notado la aparición un factor que involucra el redshift de la lente, como se indica en la ecuación (2.181), el cual no ha sido mencionado previamente. Esto en particular indica que no es correcto intercambiar distancias Euclideas utilizadas en el caso de lentes sobre un espaciotiempo de fondo plano por distancias angulares en el caso de un fondo cosmológico como el de R-W tal como se sugiere en [SKW06].

Con nuestro lenguaje también presentamos nuevas fórmulas para la relación de las *magnitudes observadas* con los escalares ópticos a través de las magnificaciones en intensidad que definimos en la subsección (2.5.4). Esta conexión con las magnitudes observadas se hizo de dos formas diferentes: introduciendo la magnificación de intensidad $\tilde{\mu}$ definida en términos de los flujos y a través de la definición de la magnificación de intensidad astrofísica μ'_c . La primera de ellas, está contenida en las ecuaciones (2.108) y (2.109) y surge de comparar flujos a igual valor del parámetro afín λ ; la segunda, hace contacto con la forma en que la comunidad astrofísica describe el comportamiento del módulo de la distancia como función del redshift.

En este sentido es importante destacar que la magnificación de intensidad ‘física’ $\tilde{\mu}$ sólo depende de la distancia afín y que coincide con la magnificación angular μ como consecuencia del teorema de Etherington (2.5.1). Por lo tanto, cuando expresamos el módulo de la distancia, válido para espaciotiempos generales, éste sólo depende de los escalares de lentes y de datos cinemáticos. En cambio, cuando lo expresamos en término de μ'_c , esto requiere de la suposición de un modelo cosmológico de tal forma que una relación distancia-redshift pueda ser aplicada.

Es debido a esta razón que algo curioso ha pasado con la manera en que los datos de supernovas han sido estudiados. En efecto, una inspección de las ecuaciones (2.109) y (2.23) muestra que las observaciones de los flujos de las supernovas no dependen de una posible constante cosmológica ya que en el cálculo de los escalares ópticos sólo interviene la parte sin traza del tensor de Ricci y el tensor de Weyl en la cual Λ no aparece. Sin embargo, en trabajos famosos como [R⁺98, P⁺99]

los autores han estudiado la relación entre el comportamiento de los flujos de las supernovas con el redshift por medio de la ecuación (2.110). Se asume allí un modelo cosmológico y se argumenta que la explicación más favorecida de las observaciones requiere de la presencia de una constante cosmológica.

Esta curiosidad está relacionada también a lo siguiente: si nos referimos a las tablas 2.1 y 2.2 uno puede ver que la intensidad en magnificación $\tilde{\mu}$ es siempre más grande que 1; si aplicamos pues (2.109) para describir la luminosidad observada de las supernovas uno diría, contrariamente, que son más brillantes que en el caso plano. Sin embargo, en el análisis [R⁺98, P⁺99] la afirmación es que la luminosidad observada es más tenue (See table 2.1) de lo esperado como función del redshift y por lo tanto una constante cosmológica es requerida.

Capítulo 3

El formalismo de lentes gravitacionales en una configuración que contiene varias lentes finas

3.1. Un arreglo de varias lentes finas

En esta sección consideraremos un arreglo de N subsistemas compactos dispuestos a lo largo de la visual, cada uno de ellos actuando como una lente gravitacional fina. Las configuraciones que trataremos serán tales que las distancias entre los subsistemas vecinos es suficientemente grande como para que el tamaño característico δ_l de cada lente puede ser despreciado en frente de las separaciones relativas. Ya que estamos interesados en lentes finas, la contribución a la curvatura en la ecuación desviación de geodésicas es solamente significativa en un entorno local de cada una de ellas. Esto significa que podemos considerar la noción de lentes finas que empleamos en la sección (2.8) pero ahora extendida al caso de varias lentes que están cuasi-alineadas a lo largo de la visual (figura 3.1). Más precisamente consideraremos un arreglo que satisface:

$$\delta\bar{C}(\lambda) \equiv \int_0^\lambda \delta C(\lambda') d\lambda' \cong \begin{cases} 0, & 0 < \lambda < \lambda_{l_1} - \delta_1 \\ \widehat{\delta C}_{l_1}, & \lambda_{l_1} + \delta_1 \leq \lambda \leq \lambda_{l_2} - \delta_2 \\ \widehat{\delta C}_{l_1} + \widehat{\delta C}_{l_2}, & \lambda_{l_2} + \delta_2 \leq \lambda \leq \lambda_{l_3} - \delta_3 ; \\ \vdots & \vdots \\ \widehat{\delta C}_{l_1} + \dots + \widehat{\delta C}_{l_N}, & \lambda_{l_N} + \delta_N \leq \lambda \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\delta_k \ll \lambda_{l_{\Delta k}}$ con $\lambda_{l_{\Delta k}} = \lambda_{l_{k+1}} - \lambda_{l_k}$ y donde recordemos que usamos δC para denotar los escalares $\{\delta\Phi_0, \delta\Psi_0\}$.

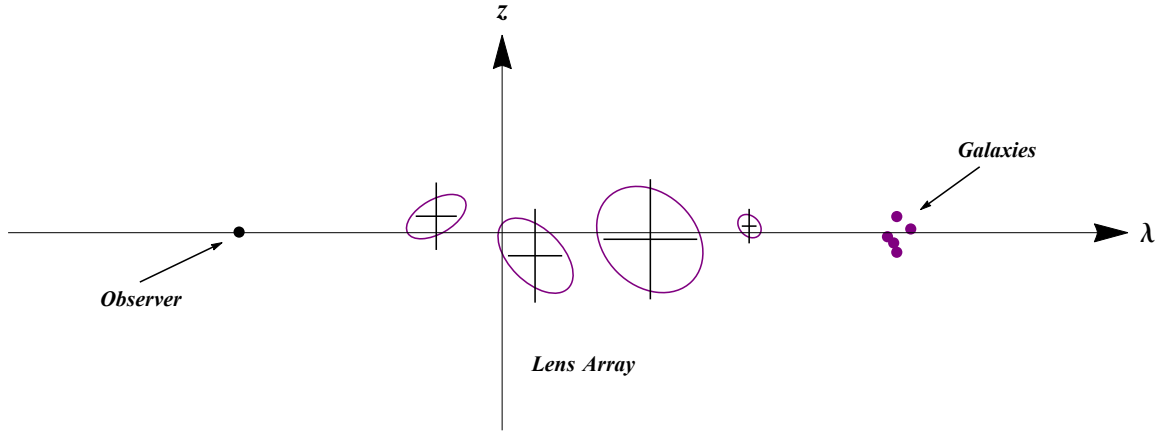


Figura 3.1: Esquema de la disposición observacional del arreglo de lentes finas.

Notemos que en general, como sugiere la figura 3.1, el arreglo no tendrá ninguna simetría respecto del eje de la visual. Esto será así, incluso en el caso en que cada lente esté descrita por una geometría axialmente simétrica cuyo eje de simetría esté alineado con el eje de la visual.

Para calcular los escalares ópticos de la configuración dada por (3.1) necesitaremos hacer uso entonces de las ecuaciones generales (2.153, 2.154, 2.155) presentadas en el capítulo 2. Por la estructura que tienen las fórmulas que allí presentamos, recordemos que podemos escribir genéricamente para las contribuciones intrínsecas lo siguiente:

$$\circ_{Lv} = \int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda'} \delta C D_A^2 d\lambda'' \right) d\lambda'. \quad (3.2)$$

Entonces, mediante un cálculo cuidadoso siguiendo los mismos pasos que presentamos en la sección (2.8) hemos encontrado la siguiente fórmula general:

$$\begin{aligned} \circ_{Lv} = & \widehat{\delta C}_{l_1} \left[\frac{D_{A_{l_1}}}{1+z_{l_1}} \frac{D_{A_{l_2 l_1}}}{D_{A_s}} - \frac{D_{A_{l_2}}^2 - D_{A_{l_1}}^2}{1+z_{l_2}} \frac{D_{A_{s l_2}}}{D_{A_s} D_{A_{l_2}}} \right] \\ & + \left(\widehat{\delta C}_{l_1} + \widehat{\delta C}_{l_2} \right) \left[\frac{D_{A_{l_2}}}{1+z_{l_2}} \frac{D_{A_{l_3 l_1}}}{D_{A_s}} - \frac{D_{A_{l_3}}^2 - D_{A_{l_2}}^2}{1+z_{l_3}} \frac{D_{A_{s l_3}}}{D_{A_s} D_{A_{l_3}}} \right] \\ & + \dots \\ & + \left(\widehat{\delta C}_{l_1} + \dots + \widehat{\delta C}_{l_N} \right) \left[\frac{D_{A_{l_N}}}{1+z_{l_N}} \frac{D_{A_{s l_N}}}{D_{A_s}} \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La notación reducida que hemos usado para las distancias angulares es la siguiente: $D_{A_{l_k l_j}}$ denota la distancia angular desde lente l_j hasta l_k medida por un observador fiducial situado en el lugar de la lente l_j que se mueve con la misma 4-velocidad que los observadores preferenciales de la cosmología.

El cálculo de la fórmula (3.3) no presenta mayores dificultades y por ello hemos relegado los detalles de la derivación al apéndice C.1.

Del aspecto que tiene la expresión para los escalares ópticos uno puede notar que cuando dos o más lentes son consideradas el efecto neto del arreglo no corresponde a la superposición lineal de los efectos individuales que tendría cada una de las lentes por separado. Esto es completamente análogo a lo que sucede en los instrumentos ópticos contruidos con varias lentes tal como un telescopio o unos prismáticos.

En el caso que exista solamente una lente esta expresión se reduce a las ecuaciones (2.171, 2.172, 2.173) presentadas en la sección (B.3.1) simplemente tomando $\widehat{\delta C}_{l_1} = \dots = \widehat{\delta C}_{l_{N-1}} = 0$ y $\widehat{\delta C}_{l_N} \equiv \widehat{\delta C}$.

La expresión (3.3) es totalmente general, en el mismo sentido que hemos destacado anteriormente: los términos $\widehat{\delta C}_{l_j}$ permiten considerar lentes con un tensor energía-momento no trivial e incluyen la información sobre el movimiento de las lentes.

Existen muchas situaciones en las cuales se requieren estudios considerando arreglos de lentes finas; por ejemplo en el estudio de la magnificación de supernovas [BRN⁺02, ?] así como también en el caso menos explorado de un arreglo de cúmulos de galaxias a lo largo de la visual. Teniendo en mente esta última situación en la siguiente sección presentamos las expresiones para un arreglo de dos y tres lentes junto con aplicaciones usando los modelos ya discutidos de lentes.

3.1.1. Arreglos con dos y tres lentes finas

En esta subsección queremos ilustrar el uso de la fórmula general (3.3) en los casos más sencillos donde el número de lentes es reducido. Tales situaciones podrían encontrarse en el caso de grandes sistemas que se encuentren aproximadamente alineados como el caso de cúmulos de galaxias [J⁺15]. Aquí presentaremos las expresiones completas en el caso de dos y tres lentes; y en la siguiente sección las aplicaremos a lentes modeladas con las geometrías ya discutidas anteriormente.

Dos lentes finas

Este es el caso más simple y de acuerdo a la ecuación (3.3) cuando solamente dos lentes están presentes obtenemos lo siguiente:

$$\kappa_L = \frac{D_{A_{l_1}}}{D_{A_{l_2}} D_{A_s}} \left(\frac{D_{A_{l_2} l_1} D_{A_{l_2}}}{1 + z_{l_1}} + \frac{D_{A_{l_1}} D_{A_{s l_2}}}{1 + z_{l_2}} \right) \widehat{\delta \Phi}_{00 l_1} + \frac{1}{1 + z_{l_2}} \frac{D_{A_{l_2}} D_{A_{s l_2}}}{D_{A_s}} \widehat{\delta \Phi}_{00 l_2}, \quad (3.4)$$

$$\gamma_{1L} + i\gamma_{2L} = \frac{D_{A_{l_1}}}{D_{A_{l_2}} D_{A_s}} \left(\frac{D_{A_{l_2} l_1} D_{A_{l_2}}}{1 + z_{l_1}} + \frac{D_{A_{l_1}} D_{A_{s l_2}}}{1 + z_{l_2}} \right) \widehat{\delta \Psi}_{0 l_1} + \frac{1}{1 + z_{l_2}} \frac{D_{A_{l_2}} D_{A_{s l_2}}}{D_{A_s}} \widehat{\delta \Psi}_{0 l_2}; \quad (3.5)$$

Debido a que los factores de distancia que acompañan a las cantidades $\widehat{\delta C}_{l_1}$ y $\widehat{\delta C}_{l_2}$ son distintos quizás es interesante notar aquí que éstas fórmulas dependen sensiblemente del orden en el cual están dispuestas las contribuciones $\widehat{\delta C}_{l_1}$ y $\widehat{\delta C}_{l_2}$. Esto es, en general, uno obtendrá valores distintos si intercambia $\widehat{\delta C}_{l_1}$ por $\widehat{\delta C}_{l_2}$ en las expresiones de arriba.

Tres lentes finas

En el caso de tres lentes obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \kappa_L = & \frac{D_{A_{l_1}}}{D_{A_s}} \left[\frac{D_{A_{l_2} l_1}}{1 + z_{l_1}} + \left(\frac{D_{A_{l_3} l_1}}{1 + z_{l_2}} + \frac{D_{A_{s l_3}} D_{A_{l_2}}}{1 + z_{l_3} D_{A_{l_3}}} \right) \frac{D_{A_{l_2}}}{D_{A_{l_1}}} + \frac{D_{A_{s l_2}} D_{A_{l_1}}}{1 + z_{l_2} D_{A_{l_2}}} \left(1 - \frac{D_{A_{l_2}}^2}{D_{A_{l_1}}^2} \right) \right] \widehat{\delta \Phi}_{00 l_1} \\ & + \frac{D_{A_{l_2}}}{D_{A_s}} \left[\frac{D_{A_{l_3} l_1}}{1 + z_{l_2}} + \frac{D_{A_{s l_3}} D_{A_{l_2}}}{1 + z_{l_3} D_{A_{l_3}}} \right] \widehat{\delta \Phi}_{00 l_2} + \frac{D_{A_{l_3}}}{D_{A_s}} \frac{D_{A_{s l_3}}}{1 + z_{l_3}} \widehat{\delta \Phi}_{00 l_3}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{1L} + i\gamma_{2L} = & \frac{D_{A_{l_1}}}{D_{A_s}} \left[\frac{D_{A_{l_2} l_1}}{1 + z_{l_1}} + \left(\frac{D_{A_{l_3} l_1}}{1 + z_{l_2}} + \frac{D_{A_{s l_3}} D_{A_{l_2}}}{1 + z_{l_3} D_{A_{l_3}}} \right) \frac{D_{A_{l_2}}}{D_{A_{l_1}}} + \frac{D_{A_{s l_2}} D_{A_{l_1}}}{1 + z_{l_2} D_{A_{l_2}}} \left(1 - \frac{D_{A_{l_2}}^2}{D_{A_{l_1}}^2} \right) \right] \widehat{\delta \Psi}_{0 l_1} \\ & + \frac{D_{A_{l_2}}}{D_{A_s}} \left[\frac{D_{A_{l_3} l_1}}{1 + z_{l_2}} + \frac{D_{A_{s l_3}} D_{A_{l_2}}}{1 + z_{l_3} D_{A_{l_3}}} \right] \widehat{\delta \Psi}_{0 l_2} + \frac{D_{A_{l_3}}}{D_{A_s}} \frac{D_{A_{s l_3}}}{1 + z_{l_3}} \widehat{\delta \Psi}_{0 l_3}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde hemos reagrupado los sumandos de tal forma de exhibir explícitamente el hecho que el efecto total no es el que produciría la suma de las contribuciones aisladas de cada lente.

Tanto en el caso de dos lentes como en este que corresponde a tres lentes uno puede entrever una propiedad que es importante señalar y que se da en la situación general: las magnificaciones producidas por el sistema de lentes dista de ser igual al producto de las magnificaciones individuales que producirían las lentes por separado.

3.2. Una configuración de dos lentes esféricamente simétricas en movimiento

Para lentes cuya geometría es estática y esféricamente simétrica vimos que las contribuciones a la curvatura $\widehat{\delta\Phi}_{00\ l_i}$ y $\widehat{\delta\Psi}_{0\ l_i}$ tienen la forma:

$$\widehat{\delta\Phi}_{00\ l_i} = \frac{4\pi G}{c^2} (1 + z_{v_i}) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varrho(\mathbf{r}_{l_i}) + \frac{P_r(\mathbf{r}_{l_i})}{c^2} + \frac{J_{l_i}^2}{c^2 \mathbf{r}_{l_i}^2} \left(P_t(\mathbf{r}_{l_i}) - P_r(\mathbf{r}_{l_i}) \right) \right] dy, \quad (3.8)$$

y

$$\widehat{\delta\Psi}_{0\ l_i} = -e^{2i\vartheta_{l_i}} \frac{G}{c^2} (1 + z_{v_i}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{l_i}^2}{\mathbf{r}_{l_i}^2} \left[\frac{3M(\mathbf{r}_{l_i})}{\mathbf{r}_{l_i}^3} - \left(\varrho(\mathbf{r}_{l_i}) + \frac{P_t(\mathbf{r}_{l_i})}{c^2} - \frac{P_r(\mathbf{r}_{l_i})}{c^2} \right) \right] dy; \quad (3.9)$$

donde las cantidades $\varrho(\mathbf{r}_{l_i})$, $P_r(\mathbf{r}_{l_i})$ y $P_t(\mathbf{r}_{l_i})$ son la densidad energía, las componentes radial y tangencial de la presión respectivamente; mientras que $M(\mathbf{r}_{l_i})$ denota la masa total de la geometría. Como la notación lo indica la variable \mathbf{r}_{l_i} está asociada con la coordenada radial usual de la geometría local de la lente:

$$ds^2 = a(\mathbf{r}_{l_i}) dt^2 - \frac{d\mathbf{r}_{l_i}^2}{1 - \frac{2M(\mathbf{r}_{l_i})}{\mathbf{r}_{l_i}}} - \mathbf{r}_{l_i}^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2); \quad (3.10)$$

y los parámetros J_{l_i} y ϑ_{l_i} corresponden, respectivamente, al parámetro de impacto del fotón respecto del centro de la distribución l_i y al ángulo que éste forma con el eje ‘z’ del plano correspondiente a la lente l_i . Uno puede ver ([GM11]) que J_{l_i} y ϑ_{l_i} satisfacen:

$$J_{l_i}^2 = \mathbf{r}_{l_i}^2 - y^2, \quad (3.11)$$

$$e^{i\vartheta_{l_i}} = \frac{z_{l_i} + ix_{l_i}}{J_{l_i}}. \quad (3.12)$$

Ahora bien, en el caso de varias lentes finas puede ser conveniente describir el plano de la imagen respecto de un sistema de coordenadas (\mathbf{X}, \mathbf{Z}) que no esté centrado en ninguna de las distribuciones que se observan a lo largo de la visual. Sin embargo, es conveniente elegir para la descripción uno de los planos que están asociados a alguna de las lentes que componen el arreglo. Sin pérdida de generalidad asumiremos aquí que será la lentes más cerca al observador (primera lente) y, asociaremos entonces este plano de referencia con las coordenadas (\mathbf{X}, \mathbf{Z}) .

Dado que estamos suponiendo que el arreglo comprende una región muy pequeño del cielo observado, la relación entre el plano de la lente l_i descrito por las coordenadas (x_i, z_i) y el sistema (\mathbf{X}, \mathbf{Z}) está dada simplemente por una traslación, tal como se ilustra en la figura 3.2. En la figura la primera lente se encuentra en el origen y la lente l_i se sitúa en las coordenadas (X_i, Z_i) las cuales se interpretan como las distancias transversales respecto del eje que pasa por el observador y el centro del plano X-Z. Notemos que en general uno trabaja con ángulos por lo que las coordenadas (X_i, Z_i) dependen de la distancia en profundidad a la cual se sitúa la lente l_i .

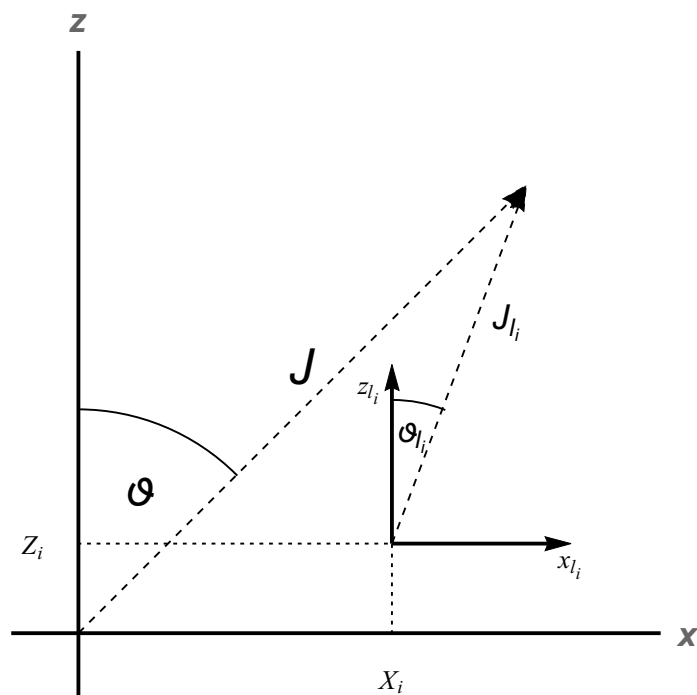


Figura 3.2: Geometría en el plano de la imagen.

De manera análoga, a como procedimos en el caso de una única lente aquí también es conveniente escribir la dependencia funcional de los escalares ópticos en términos de dos variables J y ϑ definidas respecto del sistema de coordenadas (X, Z) . La relación entre estas variables y las correspondientes a una lente l_i que tiene una ubicación proyectada a lo largo de la visual en (X_i, Z_i) es la siguiente:

$$J e^{i\vartheta} = (Z_i + iX_i) + J_i e^{i\vartheta_i}. \quad (3.13)$$

Notemos entonces que por construcción las cantidades J y ϑ representan, respectivamente, el parámetro de impacto de los fotones respecto la primera lente y el ángulo que forma la trayectoria de los mismos con el eje Z .

Estas son las relaciones que necesitamos para construir los mapas de shear y estudiar las magnificaciones producidas por un arreglo de lentes.

3.2.1. Dos cúmulos de galaxias

Aquí mostraremos los resultados para dos cúmulos de galaxias. Los mismos están modelados por un perfil isotérmico, donde las contribuciones individuales a la curvatura están dadas por:

$$\widehat{\delta\Phi}_{00\ l_i} = \left(1 + z_{v_i}\right) \frac{1}{c^2} \frac{2\pi\sigma^2}{J_i}, \quad (3.14)$$

$$\widehat{\delta\Psi}_{0\ l_i} = - \left(1 + z_{v_i}\right) \frac{1}{c^2} \frac{2\pi\sigma^2}{J_i} e^{2i\vartheta_i}; \quad (3.15)$$

tal como vimos en la sección (2.9.1).

El arreglo que consideramos ilustra la situación de cúmulos con masas del mismo orden; por ello hemos tomado para ambos perfiles una velocidad de dispersión igual en ambos casos de $500 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Las lentes hemos asumido por simplicidad que se mueven con el flujo de observadores cosmológicos en un Universo de Friedman con los parámetros reportados por la colaboración Planck (ver sección (2.5.6)) y poseen los siguientes redshifts: $z_{l_1} = 0,06$ y $z_{l_2} = 0,17$.

3.2. UNA CONFIGURACIÓN DE DOS LENTES ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICAS EN MOVIMIENTO

Los gráficos siguientes muestran los escalares ópticos para distintos valores de apartamiento relativo respecto de la visual. En el caso del shear se grafica en mapas de contorno el valor del módulo del mismo conjuntamente con las curvas tangentes al campo de shear sobre el plano de referencia.

Notemos que al plano de referencia correspondiente a la primera lente se le ha efectuado una traslación de manera de centrar la imagen; por tal motivo los centros de las lentes se encuentran situados a lo largo del eje Z en las coordenadas $(0, Z_l)$ y $(0, -Z_l)$.

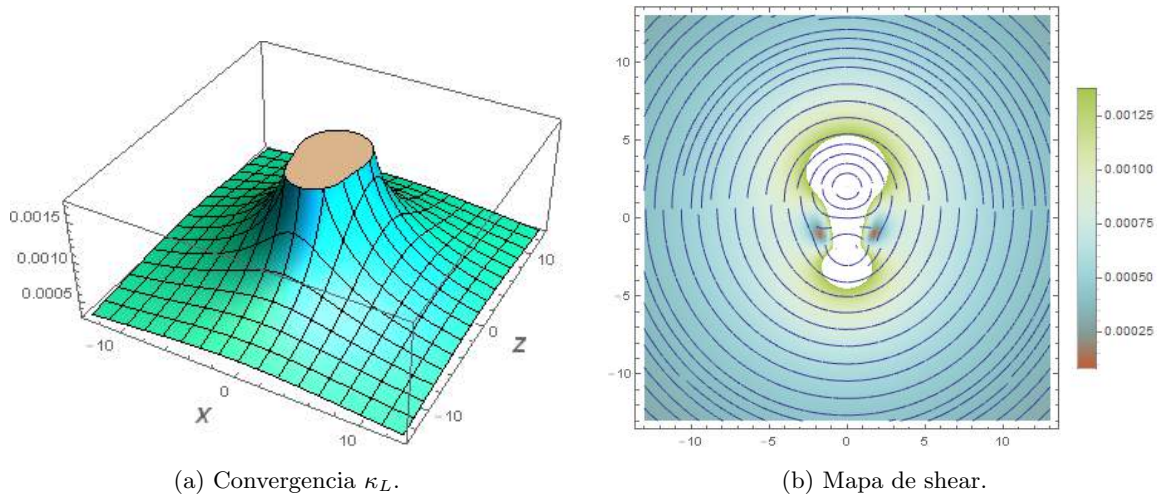


Figura 3.3: Escalares ópticos para dos cúmulos esféricos con perfil de masa isotérmico situados en las coordenadas $(X_l = 0, Z_l = \pm 2 \text{Mpc})$.

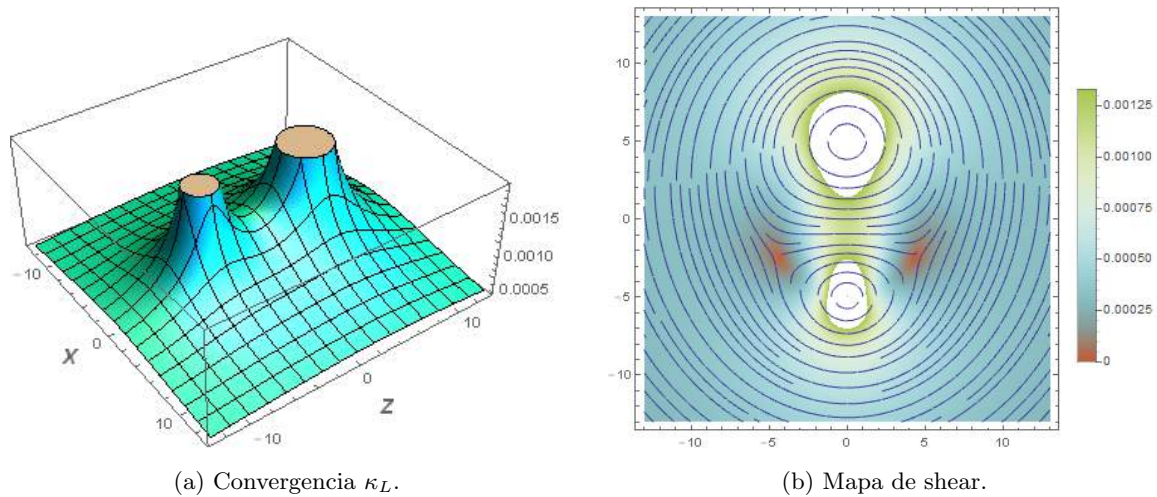


Figura 3.4: Escalares ópticos para dos cúmulos esféricos con perfil de masa isotérmico situados en las coordenadas $(X_l = 0, Z_l = \pm 5 \text{Mpc})$.

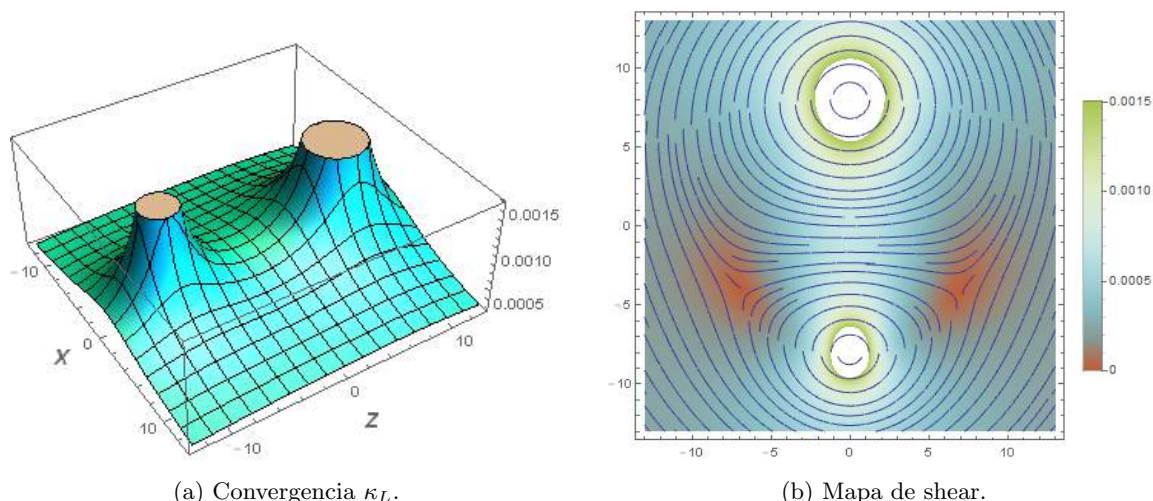


Figura 3.5: Escalares ópticos para dos cúmulos esféricos con perfil de masa isotérmico situados en las coordenadas ($X_l = 0, Z_l = \pm 8\text{Mpc}$).

En los gráficos siguientes podemos ver la característica general de este tipo de lente compuesta. En ellos podemos distinguir tres regiones en el plano de la imagen que presentan distintas características: una región inmediatamente cercana a la posición de los centros de las distribuciones en la cual las curvas integrales del shear forman curvas cerradas que contienen a una de las dos lentes; otra región intermedia donde las líneas integrales del shear son curvas cerradas en forma de óvalos que contienen en su interior ambos focos y, finalmente una región asintótica donde las curvas integrales son circunferencias.

3.2.2. Un cúmulo de galaxias y un void compensado

En este caso nos ocupamos de la situación en la cual tenemos un void alineado con un cúmulo de galaxias. El cúmulo estará caracterizado por una distribución con perfil isotérmico, en tanto que para el void usaremos el modelo sencillo de Amendola [AFW99] para un void compensado.

Dado que la señal que uno esperaría obtener por medio del efecto de lentes débiles en void es muy baja resulta interesante estudiar si por la presencia de otros sistemas tal como un cúmulo estos efectos podrían magnificarse. Aquí utilizamos nuevamente las fórmulas (3.4, 3.5) para computar los mapas de shear en una situación donde el void se encuentra entre el observador y el cúmulo. Presentamos aquí, los resultados para dos sistemas con valores típicos: en el caso del cúmulo hemos tomado $\sigma = 500 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ mientras que el void ha sido elegido con radio $R = 10\text{Mpc}$, una pared de tamaño $d = 1\text{Mpc}$ y una densidad de energía en su interior del 5% con respecto a la media cosmológica. El modelo cosmológico usado ha sido el presentado en la sección (2.5.6) y las distancias a la cual ambas se sitúan son las mismas descritas anteriormente en (3.2.1).

En este caso el plano de referencia es el correspondiente al void el cual está situado en el origen de coordenadas.

3.2. UNA CONFIGURACIÓN DE DOS LENTES ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICAS EN MOVIMIENTO

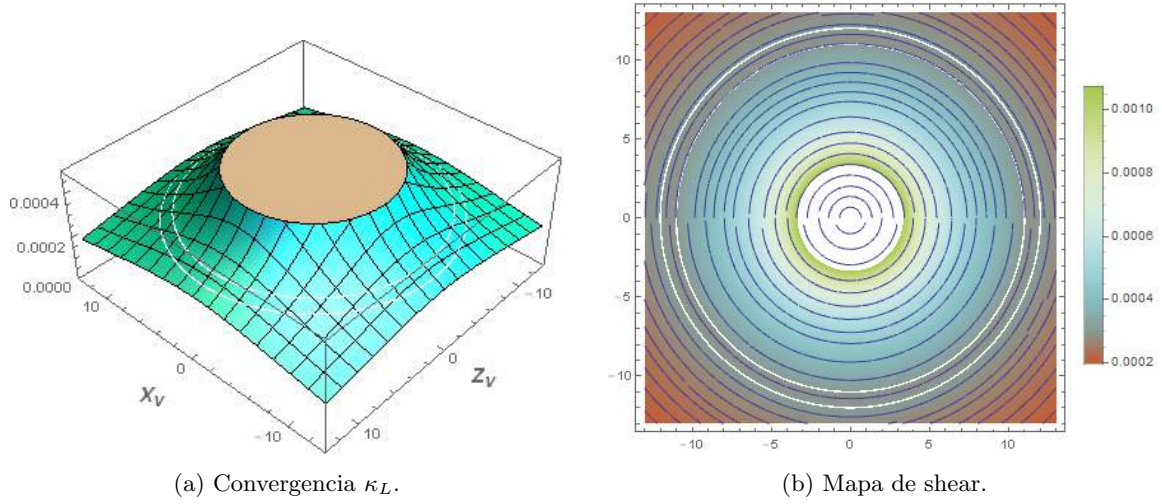


Figura 3.6: Escalares ópticos para un cúmulo y un void perfectamente alineados. Para valores típicos se ve claramente que la señal es dominada por la presencia del cúmulo.

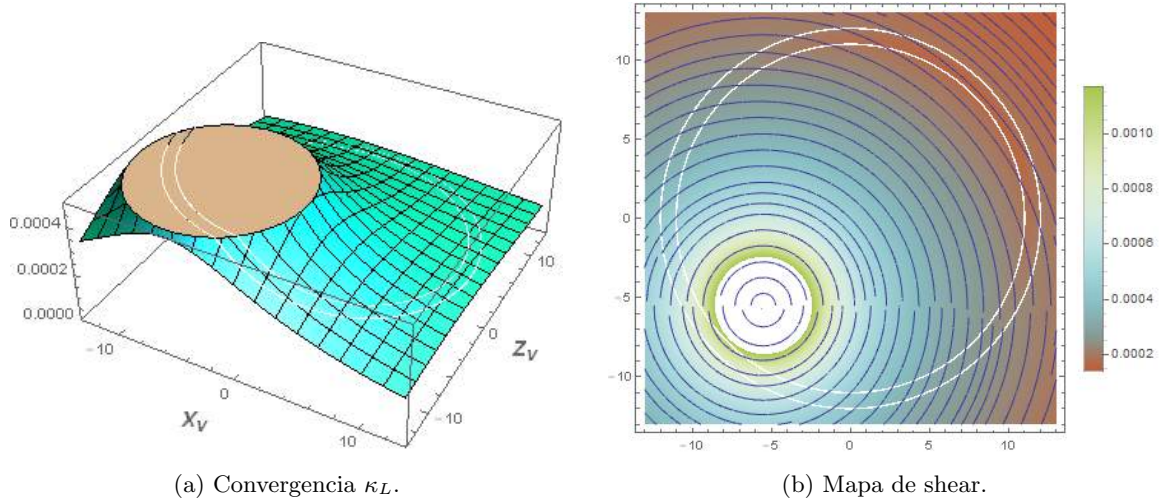


Figura 3.7: Escalares ópticos para un cúmulo y un void quasi-alineados. El cúmulo se encuentra situado en las coordenadas $(X_l = -5,5\text{Mpc}, Z_l = -5,5\text{Mpc})$ respecto del centro del void en el plano de referencia.

En todos ellos observamos que la señal está dominada por el cúmulo lo cual es esperable; por lo que para obtener señales comparables, que pudieran enriquecer la estructura observable que se muestra tanto en los mapas de shear como en el gráfico de la convergencia uno debería tener configuraciones bastante particulares. Uno debería poder encontrar alineaciones donde

$$\frac{D_{A_{l_1}}}{D_{A_{l_2}} D_{A_s}} \left(\frac{D_{A_{l_2} l_1} D_{A_{l_2}}}{1 + z_{l_1}} + \frac{D_{A_{l_1}} D_{A_{s l_2}}}{1 + z_{l_2}} \right) \widehat{\delta C}_{l_1} \sim \frac{1}{1 + z_{l_2}} \frac{D_{A_{l_2}} D_{A_{s l_2}}}{D_{A_s}} \widehat{\delta C}_{l_2}; \quad (3.16)$$

donde las contribuciones $\widehat{\delta C}_{l_1} \sim 10^{-3}$ y $\widehat{\delta C}_{l_2} \sim 10^{-6}$ corresponden al cúmulo y al void respectivamente.

3.2.3. Dos voids cuasi-alineados

Mostramos aquí también el caso de dos voids con el mismo perfil de masa dado por [AFW99].

Se trata de dos voids idénticos que están dispuestos en configuraciones que involucran distancias que hemos considerado en los casos anteriores; es decir, los factores de distancias que intervienen en las ecuaciones (3.4) y (3.5) son los mismos que en los casos anteriores dado que la intención aquí es exhibir el comportamiento general que presentan estos arreglos sencillos.

En completa analogía con el caso de los dos cúmulos (3.2.1) aquí nuevamente hemos trasladado el plano de referencia de tal forma que la imagen resulte simétrica; los voids los hemos situado por tanto a lo largo del eje Z en una traslación del plano de referencia tal como se explicó en (3.2.1).

Uno puede observar claramente el carácter divergente que tiene este tipo de lente en los gráficos de los escalares ópticos. Se ve también que el efecto de la lente es simétrico respecto del eje Z aunque se debe notar una pequeña asimetría de la señal respecto del eje X producto de la separación de las lentes.

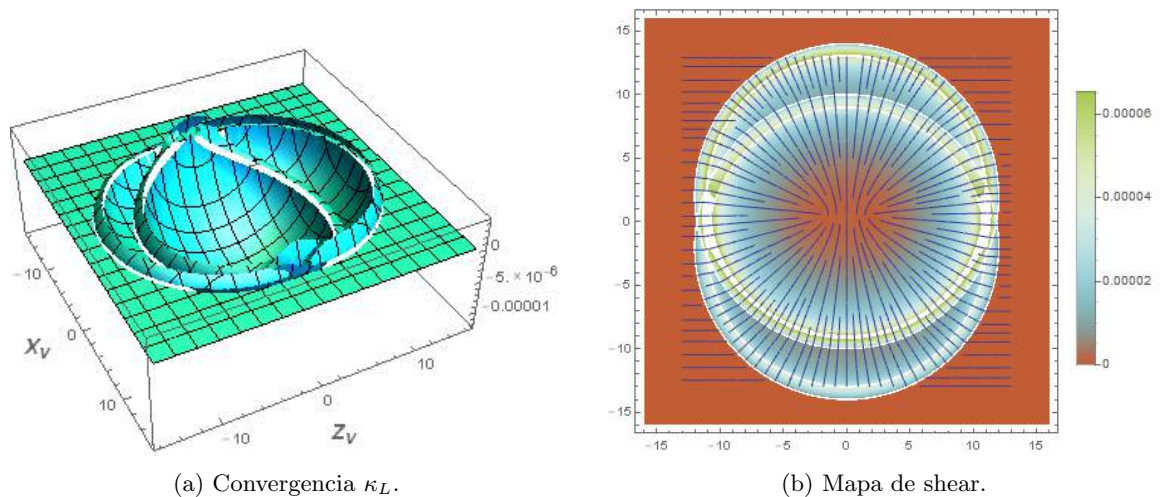


Figura 3.8: Escalares ópticos para dos voids cuasi-alineados dispuestos sobre el eje Z del plano de la imagen. El radio de ambos voids es de 10Mpc y los centros de ambos sistemas se hallan en $Z_l = \pm 2\text{Mpc}$.

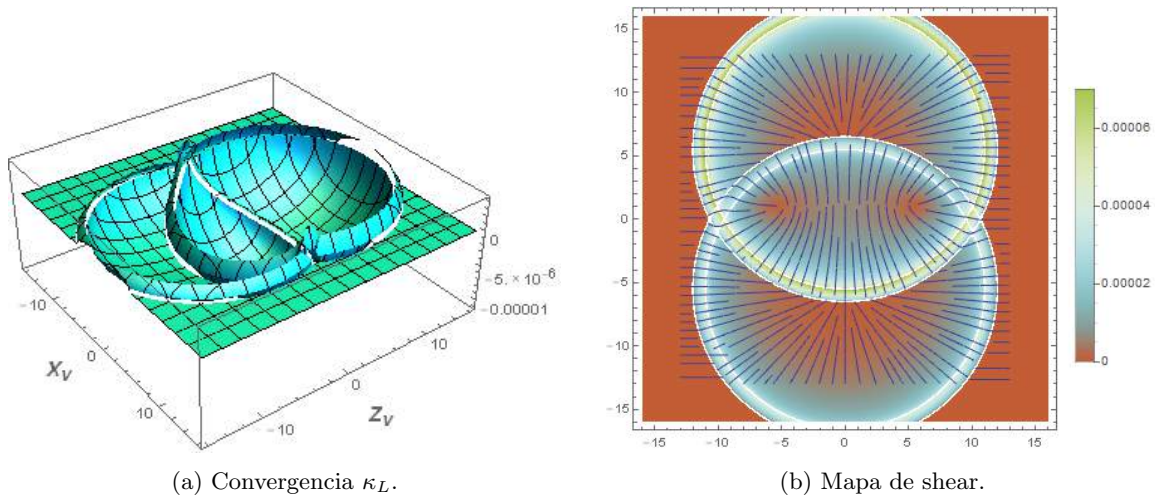


Figura 3.9: Escalares ópticos para dos voids idénticos, cuasi-alineados, dispuestos sobre el eje Z del plano de la imagen. El radio de ambos voids es de 10Mpc y los centros de ambos sistemas se hallan en $Z_l = \pm 5$ Mpc.

3.3. Comentarios sobre este capítulo

En este capítulo hemos extendido la discusión de lentes finas al caso de una disposición cuasi-alineada de un número arbitrario de lentes a lo largo de la visual usando el formalismo desarrollado en el capítulo (2). Esto constituye a su vez una generalización de las expresiones ya conocidas en el mismo sentido que fue señalado en el capítulo (2): nos permiten trabajar con geometrías completamente generales teniendo en cuenta a su vez el movimiento de cada lente individual. Al mismo tiempo resalta nuevamente el origen propio de las distorsiones que sufre la imagen; esto es, un tensor de Ricci no nulo produce la convergencia mientras que la curvatura de Weyl gobierna el shear. Si bien, los ejemplos que presentamos poseen simetría de reflexión respecto al eje que conecta los centros de las distribuciones; configuraciones más con un número mayor de lentes constituirían un primer caso sencillo donde uno puede estudiar lentes que no poseen ninguna simetría en absoluto. Como ilustración del uso de estas expresiones hemos presentado tres configuraciones con sistemas típicos en los que podrían ser utilizadas estas herramientas. En este sentido es importante notar que tales sistemas han sido poco estudiados en la literatura tales como el caso de dos cúmulos de galaxias alineados o el caso de la alineación de voids. Por otro lado, el estudio de la magnificación producida por un conjunto de inhomogeneidades a lo largo de la visual es sumamente útil a la hora de estudiar las relaciones entre distancias y luminosidad que por ejemplo aparecen en los trabajos de supernovas[BRN⁺02]. La fórmula (3.3) junto con la expresión (2.109) que relaciona las magnitudes con los escalares ópticos son las expresiones generales que nos permiten llevar a cabo este tipo de análisis en el contexto cosmológico.

Capítulo 4

Nuevas geometrías esferoidales para el estudio de sistemas astrofísicos

4.1. Introducción

En este capítulo introducimos nuevas familias de geometrías que son generalizaciones de las métricas esféricamente simétricas. Las mismas describen distribuciones esferoidales (proladas y obladas) y constituyen un primer intento en la descripción general de este tipo de sistemas por medio de espaciotiempos exactos. Dentro del contexto de esta tesis, la motivación para considerar modelos geométricos está fundada en la sospecha de que la descripción del contenido de materia de los sistemas astrofísicos podría requerir que se deba tener en cuenta la totalidad de la curvatura producida por el campo gravitacional. Esto contrasta con lo que sucede en los enfoques basados en una concepción Newtoniana de la materia en la cual solamente la densidad de energía del tensor energía-momento es relevante. Entonces, el enfoque que aquí tenemos es de considerar estas geometrías como herramientas prácticas para el estudio y modelado del campo gravitatorio de estructuras astrofísicas. Por ello, en nuestra presentación, no discutiremos modelos de materia específicos para el tensor energía-momento compatible con estas geometrías; sino que mostraremos que dichas geometrías pueden ser útiles, además de adecuadas, para el estudio de varios sistemas considerando algunas geometrías concretas. La construcción de un modelo particular para los campos de materia para cada sistema de interés constituye un problema que debe ser considerado en una instancia posterior.

En otro aspecto, esta búsqueda de geometrías más generales se complementa con el formalismo de lentes gravitacionales que hemos presentado en los capítulos (2) y (3) ya que el mismo tiene la virtud de permitir el uso de modelos geométricos exactos para la descripción de la lente. La combinación de estas dos herramientas es por lo tanto potencialmente muy útil e interesante en el estudio observacional de sistemas no esféricos que puedan ser descritos de manera más adecuada por medio de distribuciones esferoidales.

4.2. Esferoides en el espacio Euclídeo

Antes de introducir las nuevas geometrías que aquí reportamos será de ayuda para la presentación revisar sistemáticamente algunas nociones básicas de esferoides en el espacio Euclídeo \mathbb{R}^3 .

Existen dos clases de sistemas de coordenadas esferoidales: prolados y oblados; los cuales son generados a partir de las coordenadas elípticas en el plano Cartesiano \mathbb{R}^2 [MS88]. Las coordenadas esferoidales son obtenidas normalmente de forma tal que su coordenada radial describe un conjunto de esferoides confocales. El sistema de coordenadas prolado es obtenido rotando las curvas de nivel

correspondientes a las elipses confocales a lo largo del eje que une los dos focos. En cambio, las coordenadas obladas son generadas rotando las mismas elipses de manera perpendicular al eje que une los focos; esto es luego de la rotación los focos dibujan un anillo en el espacio.

Para fijar la notación que usaremos, debajo introduciremos ambos sistemas de coordenadas de la manera usual: estableciendo su relación con las coordenadas Cartesianas $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ en el espacio Euclídeo \mathbb{R}^3 .

4.2.1. Sistema de coordenadas prolado

Denotaremos por $\{r, \theta, \phi\}$ las coordenadas del sistema prolado, las cuales toma valores en los rangos:

$$r \rightarrow [0, \infty), \quad (4.1)$$

$$\theta \rightarrow [0, \pi], \quad (4.2)$$

$$\phi \rightarrow [0, 2\pi]; \quad (4.3)$$

y están relacionadas a las coordenadas Cartesianas usuales $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = r \sin(\theta) \cos(\phi), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{y} = r \sin(\theta) \sin(\phi), \quad (4.5)$$

$$\mathbf{z} = \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \cos(\theta); \quad (4.6)$$

donde la constante r_μ tiene el significado de la distancia a los focos desde el origen de coordenadas del sistema Cartesiano.

Uno puede ver que las superficies $r = \text{cte.}$ son esferoides prolados con sus focos situados a lo largo del eje \mathbf{z} , y por tanto satisfacen:

$$\frac{\mathbf{z}^2}{r^2 + r_\mu^2} + \frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}{r^2} = 1; \quad (4.7)$$

donde el valor $r = \text{cte.}$ corresponde a la longitud del semieje menor de la elipse, mientras que el tamaño del semieje mayor es igual a $\sqrt{r^2 + r_\mu^2}$.

En estas coordenadas el elemento de línea de la métrica Euclídea en \mathbb{R}^3 adquiere la siguiente expresión:

$$ds^2 = (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)) \left(\frac{dr^2}{r^2 + r_\mu^2} + d\theta^2 \right) + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (4.8)$$

4.2.2. Sistema de coordenadas oblado

Las coordenadas obladas son usualmente denotadas por los mismo símbolos $\{r, \theta, \phi\}$ empleados en el caso prolado. El rango que tiene es también el mismo especificado anteriormente por (4.1), (4.2), (4.3).

Su definición a partir de las coordenadas Cartesianas es la siguiente:

$$\mathbf{x} = \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \sin(\theta) \cos(\phi), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{y} = \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \sin(\theta) \sin(\phi), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{z} = r \cos(\theta). \quad (4.11)$$

En este caso el parámetro r_μ corresponde al radio descrito por los focos de la elipse cuando son rotados alrededor del eje \mathbf{z} para generar el esferoide tal como antes se mencionó anteriormente.

Notemos que las superficies $r = \text{cte.}$ describen esferoides oblados con el eje \mathbf{z} como el eje de simetría; esto es expresado por:

$$\frac{\mathbf{z}^2}{r^2} + \frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}{r^2 + r_\mu^2} = 1. \quad (4.12)$$

Los términos $\sqrt{r^2 + r_\mu^2}$ corresponden al radio mayor del esferoide y r al semieje menor en completa analogía con el caso prolado.

La expresión del elemento de línea del espacio Euclídeo \mathbb{R}^3 en estas coordenadas resulta ser:

$$ds^2 = (r^2 + r_\mu^2 \cos^2(\theta)) \left(\frac{dr^2}{r^2 + r_\mu^2} + d\theta^2 \right) + (r^2 + r_\mu^2) \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (4.13)$$

4.3. Espaciotiempos con simetría esferoidal

En esta sección presentaremos una clase bastante general de geometrías que poseen simetría esferoidal. Las mismas están construidas de una forma muy natural que se asemeja a la manera en que uno encuentra habitualmente las geometrías esféricas y por tanto son una generalización directa de éstas últimas.

En analogía con la forma usual del elemento de línea con simetría esférica, consideramos funciones $a(t, r)$ y $b(t, r)$ que acompañan a los diferenciales dt^2 y dr^2 y proponemos las siguientes:

$$ds^2 = a(t, r) dt^2 - (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)) \left(\frac{b(t, r)}{r^2 + r_\mu^2} dr^2 + d\theta^2 \right) - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (4.14)$$

$$ds^2 = a(t, r) dt^2 - (r^2 + r_\mu^2 \cos^2(\theta)) \left(\frac{b(t, r)}{r^2 + r_\mu^2} dr^2 + d\theta^2 \right) - (r^2 + r_\mu^2) \sin^2(\theta) d\phi^2; \quad (4.15)$$

las cuales corresponden respectivamente a una geometría con simetría prolada y otro con simetría oblada.

Uno puede ver que se trata de geometrías que pueden tener una dinámica no trivial pero que tienen momento angular $J = 0$. Nuestro objetivo es usarlas como herramientas para estudiar sistemas astrofísicos de interés; como mostraremos más adelante.

Notemos también que en el límite $r_\mu \rightarrow 0$ uno recupera la expresión usual más general en la que suele encontrar la métrica de un espaciotiempo esféricamente simétrico [Car04]. Por otra parte si uno toma $a(t, r) = b(t, r) = 1$ entonces obtiene el espaciotiempo de Minkowski expresado en coordenadas esferoidales.

Para el análisis de estas geometrías es conveniente trabajar con la siguiente redefinición de la función $b(t, r)$:

$$b(t, r) = \frac{r^2 + r_\mu^2}{r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2}; \quad (4.16)$$

la cual resalta aún más su cercanía con el caso esféricamente simétrico. Entonces, los elementos de línea adquieren la siguiente forma:

$$ds^2 = a(t, r) dt^2 - (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)) \left(\frac{1}{r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2} dr^2 + d\theta^2 \right) - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (4.17)$$

$$ds^2 = a(t, r) dt^2 - (r^2 + r_\mu^2 \cos^2(\theta)) \left(\frac{1}{r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2} dr^2 + d\theta^2 \right) - (r^2 + r_\mu^2) \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (4.18)$$

En el apéndice D.1 hemos colectado las expresiones para la curvatura, las cuales necesitaremos tanto para estudiar su contenido de materia vía las ecuaciones de Einstein como para el estudio de lentes débiles que presentaremos en el siguiente capítulo.

4.4. Geometrías estáticas con simetría prolada

A continuación discutiremos geometrías estáticas. Presentaremos una descripción analítica del tensor energía-momento asociado para el caso de distribuciones proladas que ilustra, por un lado la

estructura del mismo y por otro el hecho que un tratamiento relativamente sencillo se logra siguiendo analogías con el caso esférico.

Consideraremos en particular geometrías que son estáticas; es decir que son de la siguiente forma:

$$ds^2 = a(r) dt^2 - (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)) \left(\frac{dr^2}{r^2 - 2rM(r) + r_\mu^2} + d\theta^2 \right) - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2; \quad (4.19)$$

donde la función $M(r)$ está muy relacionada a la componente G_{tt} del tensor de Einstein tal como veremos a continuación.

4.4.1. Tensor energía-momento

De las componentes del tensor de Einstein (apéndice D.1.1) uno puede leer las componentes no nulas del tensor energía-momento más general T_{ab} compatible con las simetrías de la geometría prolada con las funciones independientes del tiempo $a(r)$ y $M(r)$.

Usando la analogía con las variables macroscópicas que caracterizan un fluido perfecto escribiremos estas componentes en términos de tres funciones $\varrho(r, \theta)$, $P_r(r, \theta)$ y $P_t(r, \theta)$ las cuales tendrían el significado de la densidad de energía y de las componentes de la presión respectivamente. Sin embargo, ya que no hemos especificado un modelo de materia para las fuentes de la geometría uno debe tener presente que esto constituye solamente una nomenclatura.

Las siguientes definiciones son generalizaciones útiles de aquellas que provienen de la situación esféricamente simétrica

$$T_{tt} \equiv a(r)\varrho(r, \theta), \quad (4.20)$$

$$T_{rr} \equiv \frac{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{r^2 - 2rM(r) + r_\mu^2} P_r(r, \theta), \quad (4.21)$$

$$T_{\phi\phi} \equiv r^2 \sin^2(\theta) P_t(r, \theta). \quad (4.22)$$

Por medio de las ecuaciones de campo entonces encontramos que estas funciones están relacionadas a las funciones métricas en la siguiente manera:

$$\varrho(r, \theta) = \frac{r_\mu^2 \sin^2(\theta) (5r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))}{8\pi r (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^3} M(r) + \frac{2r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{8\pi (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^2} \frac{dM}{dr}, \quad (4.23)$$

$$P_r(r, \theta) = \frac{(2r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)) \Upsilon(r) + rM(r)}{4\pi r^2 (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^2}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} P_t(r, \theta) = & \frac{r}{8\pi (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^2} \left[-r \frac{dM}{dr} + \frac{r^2 - 3r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)} M(r) \right] \\ & + \frac{1}{4\pi (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[\Upsilon(r) + r \frac{d\Upsilon}{dr} \right] \\ & - \frac{r^2 \Upsilon(r)}{4\pi (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)) (r^2 - 2rM(r) + r_\mu^2)} \left[1 - \frac{M(r)}{r} - \frac{dM}{dr} - 2\Upsilon(r) \right]; \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde por conveniencia introducimos la función $\Upsilon(r)$ definida así:

$$\Upsilon(r) \equiv \frac{r^2 - 2rM(r) + r_\mu^2}{4r a(r)} \frac{da}{dr}. \quad (4.26)$$

Adicionalmente, uno encuentra que las componentes $T_{r\theta}$ y $T_{\theta\theta}$ toman la siguiente forma:

$$T_{r\theta} = \frac{r}{4\pi} \frac{r_\mu^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)} \frac{\left[4\pi (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^2 P_r(r, \theta) - rM(r) \right]}{(2r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)) (r^2 - 2rM(r) + r_\mu^2)}, \quad (4.27)$$

$$T_{\theta\theta} = (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)) P_t(r, \theta) - \frac{1}{8\pi} \frac{r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)} \left[\frac{dM}{dr} - \frac{3r^2 - r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)} \frac{M(r)}{r} \right]. \quad (4.28)$$

Es interesante ver en este caso $M = 0 \Leftrightarrow G_{tt} = 0$; lo cual constituye una diferencia con respecto al caso esféricamente simétrico donde uno tiene que $M = 0 \Rightarrow G_{tt} = 0$ ya que en general $G_{tt} = 0 \not\Rightarrow M = 0$, tal como sucede con la métrica de Schwarzschild. Sin embargo, notemos también que en el límite $r_\mu \rightarrow 0$ uno vuelve a obtener las ecuaciones de campo para el caso de un fluido esféricamente simétrico. Existe además otra peculiaridad que aparece en estas geometrías respecto del caso esférico: la condición $P_r = 0$ implica $M = 0$ y $\Upsilon(r) = 0$; la cual a su vez tiene como consecuencias que $\varrho = P_t = 0$ y $a(r) = \text{cte.}$; esto es, uno obtiene Minkowski pidiendo solamente que $P_r = 0$. Esto no ocurre en general en simetría esférica.

Finalmente, para la ecuación de conservación en estas geometrías uno encuentra que toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_r}{\partial r} = & -\frac{\varrho + P_r}{2a} \frac{da}{dr} - \frac{2r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \frac{P_r - P_t}{r} \\ & - \frac{r r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{8\pi (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^4} \left(\frac{3r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)} \frac{M(r)}{r} + \frac{dM}{dr} \right); \end{aligned} \quad (4.29)$$

la cual nuevamente uno puede ver como una generalización de la ecuación análoga en el caso esférico [GM11].

4.5. Algunos modelos particulares

4.5.1. Solución anisotrópica sin masa

La geometría que aquí consideramos es una generalización de la solución anisotrópica peculiar reportada en [GM12] la cual permite describir de manera notable varias observaciones del fenómeno de materia oscura.

La solución se obtiene si uno requiere que tanto la componente tangencial de la presión como la densidad de energía sean cero:

$$\varrho(r, \theta) = 0, \quad (4.30)$$

$$P_t(r, \theta) = 0; \quad (4.31)$$

esto implica en particular que

$$M(r) = 0. \quad (4.32)$$

De esta forma, en ambos tipos de geometrías proladas y oblada, la métrica queda completamente determinada por la función $a(r)$ que tiene la siguiente forma funcional:

$$a(r) = a_0 \left[C + \ln \left(\frac{r}{r_\mu} + \sqrt{1 + \frac{r^2}{r_\mu^2}} \right) \right]^2; \quad (4.33)$$

con a_0 y C dos constantes arbitrarias de integración.

Para las métricas proladas, la función $P_r(r, \theta)$ que determina el tensor-energía momento de la distribución resulta:

$$P_r(r, \theta) = \frac{1}{8\pi r} \frac{2r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^2} \frac{\sqrt{r^2 + r_\mu^2}}{\left[C + \ln \left(\frac{r}{r_\mu} + \sqrt{1 + \frac{r^2}{r_\mu^2}} \right) \right]}; \quad (4.34)$$

mientras que para la métrica oblada uno obtiene

$$P_r(r, \theta) = \frac{1}{8\pi} \frac{(r^2 + r_\mu^2) + r^2 + r_\mu^2 \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2 + r_\mu^2} (r^2 + r_\mu^2 \cos^2(\theta))^2} \frac{r}{\left[C + \ln \left(\frac{r}{r_\mu} + \sqrt{1 + \frac{r^2}{r_\mu^2}} \right) \right]}. \quad (4.35)$$

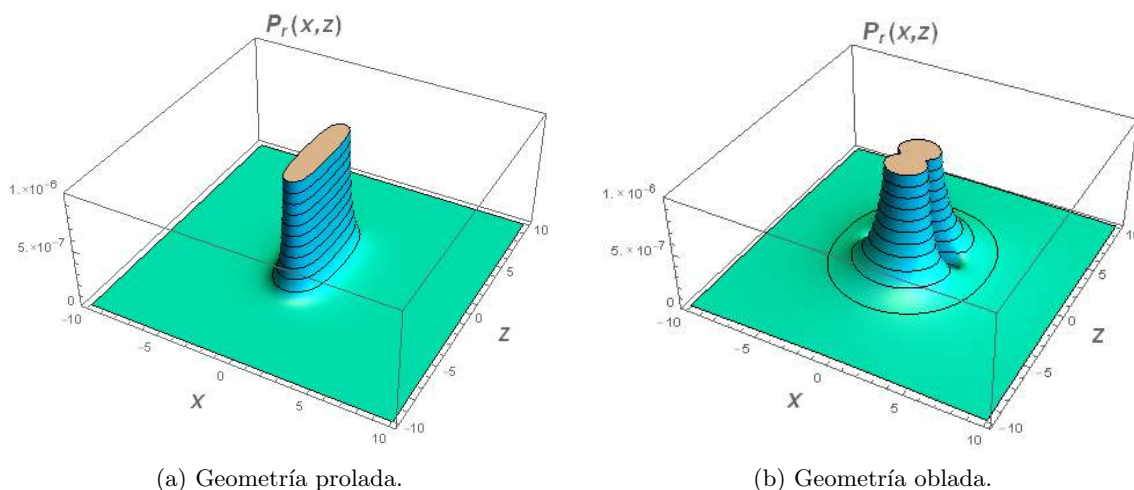


Figura 4.1: Componente $P_r(r, \theta)$ para geometrías esféricas sin masa ($M(r) = 0$) y $P_t(r, \theta) = 0$. Ambas geometrías graficadas han sido elegidas con el valor $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

Los gráficos muestran la forma típica de los perfiles que tiene la componente $P_r(r)$ para las distintas geometrías. En ellos se observa que las superficies de nivel copian de manera bastante aceptable la forma de los esferoides.

4.5.2. Geometría peculiar con perfil de masa isotérmico

Resulta claro que si queremos describir más apropiadamente los estructuras que vemos en el Universo necesitamos considerar también un tensor energía-momento con $\varrho \neq 0$. Consideremos pues un modelo más general que el presentado anteriormente en la sección (4.5.1); en este caso utilizaremos la siguiente función del perfil de masa que tiene la misma dependencia que en el caso esférico; esto es:

$$M(r) = \frac{M_*}{r_*} r; \quad (4.36)$$

y consideraremos una componente temporal en la métrica, $a(r)$, dada por la ecuación (4.33).

Entonces en estos modelos podemos calcular la densidad de energía correspondiente; en el caso de geometrías proladas uno encuentra que:

$$\varrho(r, \theta) = \frac{1}{4\pi (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^3} \frac{M_*}{r_*} \left[(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^2 + 2r^2 r_\mu^2 \sin^2(\theta)^2 \right]; \quad (4.37)$$

en tanto que en el caso oblado se tiene:

$$\varrho(r, \theta) = \frac{1}{4\pi (r^2 + r_\mu^2 \cos^2(\theta))^3} \frac{M_*}{r_*} \left[\frac{r^2 (r^2 + r_\mu^2 \cos^2(\theta))^2 (r^2 + 2r_\mu^2)}{(r^2 + r_\mu^2)^2} + 2r^2 r_\mu^2 \cos^2(\theta)^2 \right]. \quad (4.38)$$

En las figuras siguientes ilustramos la forma típica que tiene $\rho(r, \theta)$; en las cuales podemos ver que en las inmediaciones de los focos la distribución presenta una estructura muy interesante. En el caso prolado la densidad de energía se vuelve muy concentrada en la posición de los focos, tal como uno esperaría para un sistema binario por ejemplo. Por otra parte en el caso oblado las curvas de nivel de $\rho(r, \theta)$ muestran formas más complejas en la región central mientras que en la zona lejana las curvas de nivel semejan la forma elipsoidal que uno desearía.

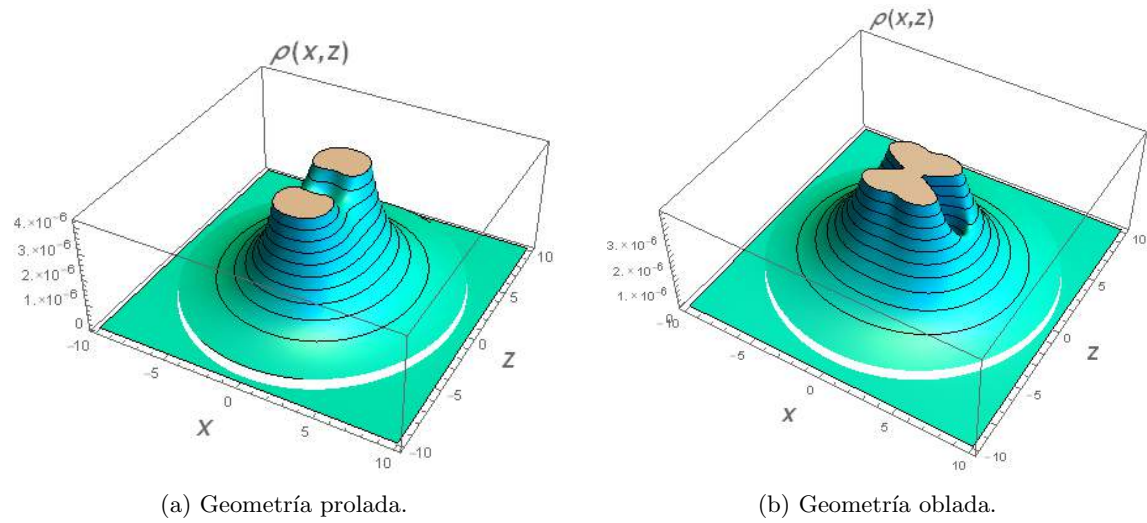


Figura 4.2: Densidad de energía $\rho(r, \theta)$ para geometrías esféricas con una función perfil de masa isotérmico. El valor del parámetro r_μ caracterizando los esferoides fue tomado $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

Respecto de las componentes espaciales del tensor energía-momento asociado, uno puede calcular también fácilmente las expresiones para las funciones $P_r(r, \theta)$ y $P_t(r, \theta)$ en ambas geometrías. En general uno puede ver que se tiene $P_r(r, \theta) \gg P_t(r, \theta)$ por lo cual será interesante observar el comportamiento de la función $P_r(r, \theta)$ del tensor energía-momento; la misma se muestra en los siguientes gráficos:

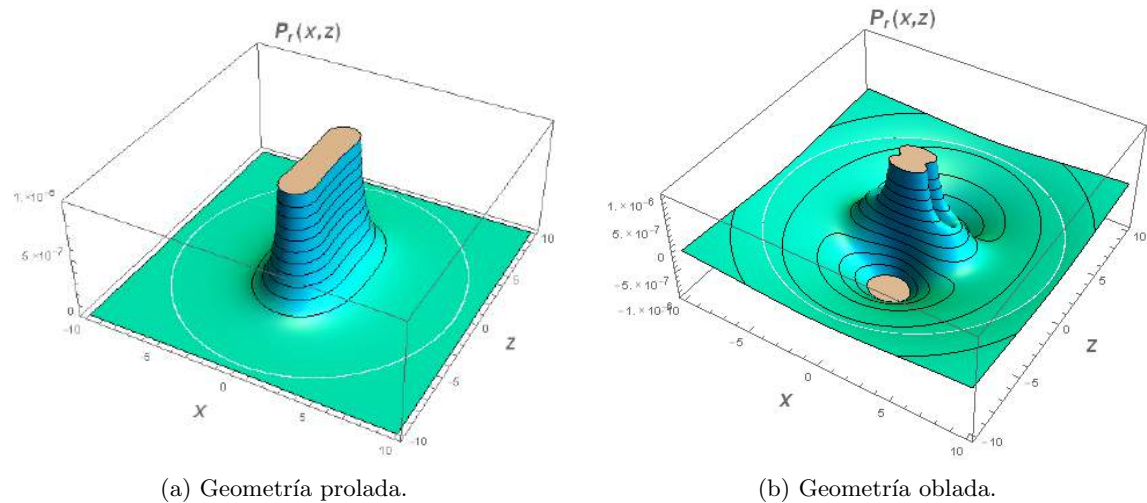


Figura 4.3: Componente $P_r(r, \theta)$ para geometrías esféricas con una función perfil de masa isotérmico y $a(r)$ dada por ecuación (4.33). Los esferoides son tales que $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

Uno puede ver que en el caso prolado nuevamente las curvas de nivel de $P_r(r, \theta)$ semejan elipses mientras que para las métricas obladas uno tiene un comportamiento más rico. Se observa una zona central en la cual la función es muy concentrada y la presencia de lóbulos a lo largo del eje z que luego desaparecen en la región lejana donde las superficies de nivel se vuelven esféricas. Este comportamiento en el caso oblado parecería introducir complicaciones no esperadas.

Los casos graficados corresponden a los modelos de nuestro interés donde las componentes espaciales del tensor energía-momento son del mismo orden que la densidad de energía. Son justamente es tipo de modelos los que consideramos útiles por su sencillez y que serían interesantes contrastar

con sistemas astrofísicos concretos en casos apropiados

En estos modelos con un perfil de masa no nulo es interesante también ver cómo la componente temporal de la métrica $a(r)$ interviene en la función $P_r(r, \theta)$ (ya que la $\rho(r, \theta)$ no se ve alterada). Para ello es natural considerar la elección trivial $a(r) = 1$ con la cual se obtiene el comportamiento ilustrado por las figuras siguientes:

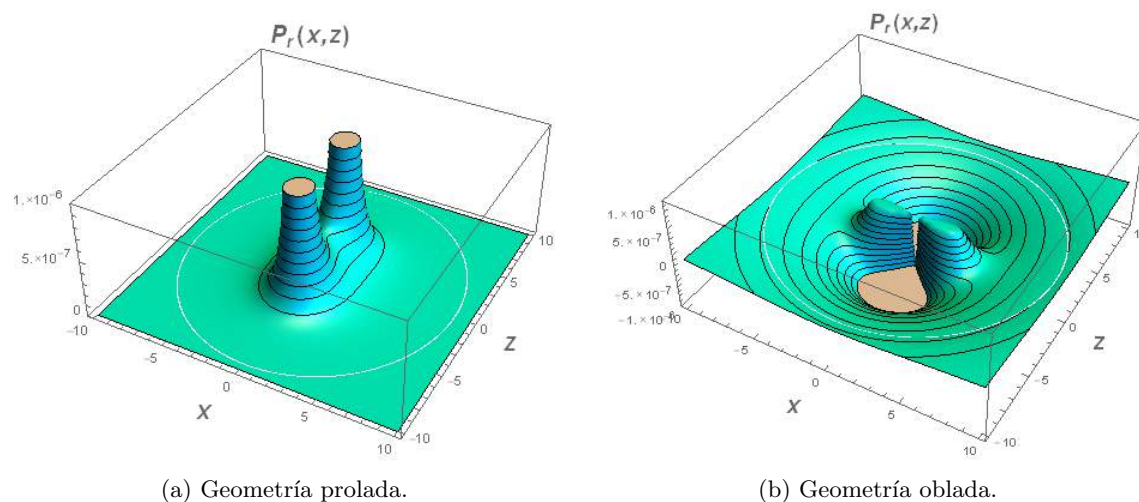


Figura 4.4: Componente $P_r(r, \theta)$ para geometrías esféricas con una función perfil de masa isotérmico y $a(r) = 1$. El valor del parámetro r_μ caracterizando los esferoides fue tomado $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

4.5.3. Geometrías con perfil de masa NFW

Mencionemos finalmente otro modelo que puede ser de interés en el estudio de sistemas astrofísicos. Se trata de modelos en los cuales la función perfil de masa tiene la forma asociada con el perfil de densidad de Navarro-Frenk-White (NFW):

$$M(r) = 4\pi\rho_*r_*^3 \left[\ln \left(1 + \frac{r}{r_*} \right) - \frac{\frac{r}{r_*}}{1 + \frac{r}{r_*}} \right]; \quad (4.39)$$

donde r_* y ρ_* son dos parámetros que tienen unidades de distancia y densidad de energía respectivamente. La misma aparece en el estudio de la formación de estructura cuando se emplean simulaciones numéricas con un gran número de partículas no-relativistas para la descripción de la materia oscura[NFW96].

Para esta clase de modelos la densidad de energía $\rho(r, \theta)$ tiene el siguiente aspecto:

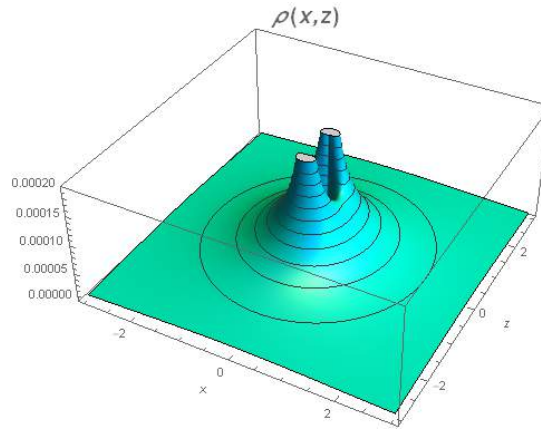


Figura 4.5: Densidad de energía $\rho(r, \theta)$ para geometrías proladas con una función perfil de masa NFW y $r_\mu = 0,4\text{Mpc}$.

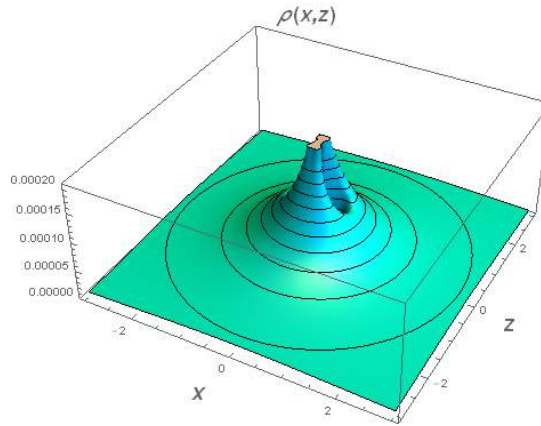


Figura 4.6: Densidad de energía $\rho(r, \theta)$ para geometrías oblatas con una función perfil de masa NFW y $r_\mu = 0,4\text{Mpc}$.

Vemos nuevamente que con la sola introducción de una función radial $M(r)$ se consiguen distribuciones con densidad de masa que pueden representar muy bien sistemas esferoidales. Si uno tiene en cuenta la componente temporal de la métrica uno posee además un conjunto más amplio de distribuciones con las cuales esperaríamos poder describir diversas observaciones en sistemas que se desvíen, al menos ligeramente de la simetría esférica.

4.6. Comentarios sobre este capítulo

En este capítulo hemos propuesto una nueva clase de geometrías para el modelado de sistemas astrofísicos con simetría esferoidal prolada u oblada. Las métricas (4.17) y (4.18) son modificaciones de las geometrías con simetría esférica las cuales están caracterizadas por dos funciones radiales $a(r)$ y $M(r)$, además del parámetro r_μ que está relacionado con la posición de los focos de los esferoides.

Si uno piensa, al menos formalmente, a las geometrías esféricas como modificaciones de la métrica plana en un sistema de coordenados apropiado (el esférico), donde dichas modificaciones son introducidas por medio de funciones radiales $a(r)$ y $M(r)$ en las componentes temporal y radial de la misma, respectivamente; entonces uno puede ver que las geometrías que aquí presentamos son una

generalización en este mismo sentido para el caso esferoidal. Esto es, para su construcción, hemos escrito la métrica plana en coordenadas esferoidales y luego introducimos las funciones radiales que mencionamos. Sin embargo, uno debería notar que no resulta nada trivial el hecho de que a priori uno pueda obtener de esta construcción un modelo que pueda describir distribuciones esferoidales. En esta sección se consideraron concretamente geometrías estáticas y hemos mostrado con varios ejemplos que efectivamente esto se puede lograr con solamente la introducción de estas dos funciones radiales; donde $M(r)$ regula lo que uno interpretaría como la densidad de energía de la distribución mientras que la función $a(r)$ permite controlar la contribución de las componentes espaciales del tensor energía-momento asociado a estas geometrías vía las ecuaciones de Einstein.

En particular hemos presentado una generalización al caso esferoidal de la geometría sin masa [GM12], la cual ha demostrado describir muy bien varios aspectos de la fenomenología de materia oscura. Para tratar casos más realistas en los cuales uno debe incorporar una densidad de energía no nula hemos discutido métricas esferoidales en las cuales la función perfil de masa $M(r)$ tiene la misma dependencia que en modelos usuales empleados en simetría esférica como lo son el perfil isotérmico y el de NFW. Hemos considerado en detalle el caso de esferoides prolados al cual hemos dedicado más tiempo en el tratamiento de las expresiones analíticas. La diferencia en el tratamiento entre un caso y otro es arbitraria; sucede que el caso prolado fue el primero que hemos considerado cuando en una primera instancia perseguíamos el objetivo de hallar expresiones analíticas para los escalares ópticos en términos de las componentes de materia asociadas a estas geometrías. En efecto uno puede hacer llevar a cabo esta laboriosa tarea y encontrar expresiones analíticas tal como mostraremos en el siguiente capítulo; sin embargo las fórmulas se vuelven demasiado extensas como para proveer de un análisis sencillo en el caso de lentes débiles. Para estos casos entonces será más apropiado la implementación por cómputo numérico.

Teniendo en mente la aplicación a lentes gravitacionales, estos modelos están pensados para estudiar varios sistemas astrofísicos de una forma que resulta práctica a la vez que útil en distribuciones que se desvían de la usual suposición de geometría esférica. En general esto suele hacerse caracterizando las distribución de materia del sistema. Aquí el enfoque es considerar la geometría exacta y su contenido de materia resultante.

Capítulo 5

Lentes débiles en geometrías esferoidales

5.1. Introducción

Este capítulo constituye la primera aplicación de cierta complejidad del formalismo de lentes presentado en el capítulo (2). Aquí presentamos los resultados de emplear las geometrías anteriormente propuestas como lentes gravitacionales débiles en la aproximación de lentes finas. En particular presentamos los mapas de shear para las geometrías peculiares que generalizan la solución [GM12]. El cómputo de los escalares ópticos sobre distribuciones que poseen simetría axial nos obliga a tener en cuenta la posible orientación del eje de simetría con respecto a la perpendicular del plano de la imagen. Por este motivo incluimos las expresiones necesarias para la construcción de los escalares de curvatura en un sistema de coordenadas en la cual el sistema de referencia natural de las geometrías esferoidales se encuentra rotado.

Los resultados obtenidos fueron realizados numéricamente y son un primer paso en el estudio sistemático de observaciones por medio de modelos geométricos exactos de mayor generalidad.

5.2. Esferoides rotados

Consideremos dos sistemas de coordenadas Cartesianas (x, y, z) y $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. El segundo de ellos, es una rotación del primera alrededor del eje x y denotaremos el ángulo de rotación con la letra ι .

La relación entre ambos sistemas de coordenadas es, por lo tanto, la siguiente:

$$\mathbf{x} = x, \tag{5.1}$$

$$\mathbf{y} = y \cos(\iota) + z \sin(\iota), \tag{5.2}$$

$$\mathbf{z} = -y \sin(\iota) + z \cos(\iota); \tag{5.3}$$

y la transformación inversa por:

$$x = \mathbf{x}, \tag{5.4}$$

$$y = \mathbf{y} \cos(\iota) - \mathbf{z} \sin(\iota), \tag{5.5}$$

$$z = \mathbf{y} \sin(\iota) + \mathbf{z} \cos(\iota). \tag{5.6}$$

En esta parte del trabajo, adoptaremos la siguiente convención: el sistema de coordenadas $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ corresponderá a un sistema rígido al esferoide (prolado u oblado); en otras palabras el eje \mathbf{z} será el eje de simetría axial sobre el cual se sitúan los focos. El sistema de coordenadas (x, y, z) , por otro lado corresponderá al marco de referencia utilizado por el observador en su configuración observacional tal como hemos descrito en la sección (2.6).

Una nueva transformación de coordenadas nos permite particularizar las relaciones de arriba para conectar las coordenadas esféricas con el sistema de coordenadas (x, y, z) empleado por el observador. En el caso del sistema prolado obtenemos

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi), \quad (5.7)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\iota) - \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \cos(\theta) \sin(\iota), \quad (5.8)$$

$$z = r \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\iota) + \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \cos(\theta) \cos(\iota); \quad (5.9)$$

mientras que para el sistema oblado la relación es:

$$x = \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \sin(\theta) \cos(\phi), \quad (5.10)$$

$$y = \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\iota) - r \cos(\theta) \sin(\iota), \quad (5.11)$$

$$z = \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\iota) + r \cos(\theta) \cos(\iota). \quad (5.12)$$

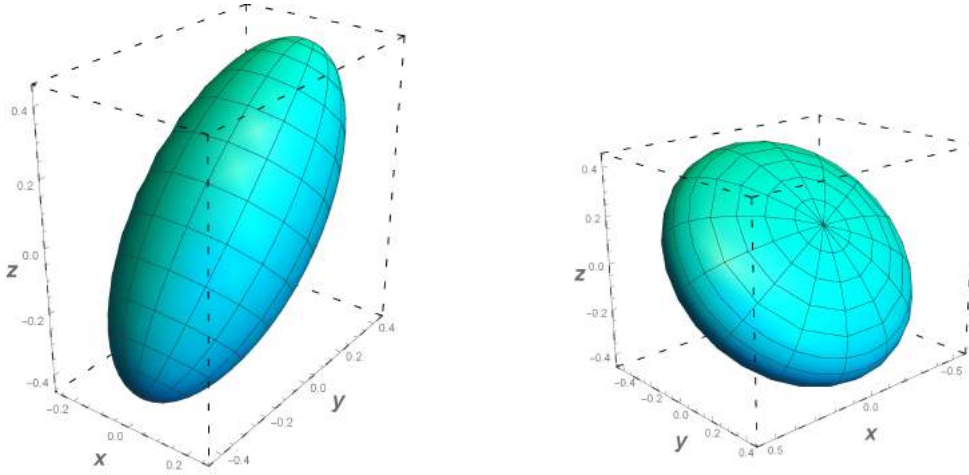


Figura 5.1: Esferoides prolados y oblados inclinados respecto del eje z . Los fotones viajan aproximadamente a lo largo de la dirección y que corresponde a la línea de la visual del observador.

Las relaciones inversas pueden ser escritas del siguiente modo; en el caso prolado uno tiene

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\sqrt{x^2 + (y - r_\mu \sin(\iota))^2 + (z + r_\mu \cos(\iota))^2} + \sqrt{x^2 + (y + r_\mu \sin(\iota))^2 + (z - r_\mu \cos(\iota))^2} \right]^2 - 4r_\mu^2}, \quad (5.13)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2r_\mu} \sqrt{x^2 + (y - r_\mu \sin(\iota))^2 + (z + r_\mu \cos(\iota))^2} - \frac{1}{2r_\mu} \sqrt{x^2 + (y + r_\mu \sin(\iota))^2 + (z - r_\mu \cos(\iota))^2}}{\phantom{\frac{1}{2r_\mu} \sqrt{x^2 + (y - r_\mu \sin(\iota))^2 + (z + r_\mu \cos(\iota))^2} - \frac{1}{2r_\mu} \sqrt{x^2 + (y + r_\mu \sin(\iota))^2 + (z - r_\mu \cos(\iota))^2}}} \right], \quad (5.14)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y \cos(\iota) + z \sin(\iota)}{x} \right); \quad (5.15)$$

en el caso oblado las relaciones son las siguientes:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\sqrt{\left(\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2} + r_\mu \right)^2 + (-y \sin(\iota) + z \cos(\iota))^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2} - r_\mu \right)^2 + (-y \sin(\iota) + z \cos(\iota))^2} \right]^2 - 4r_\mu^2}, \quad (5.16)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2r_\mu} \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2} + r_\mu \right)^2 + (-y \sin(\iota) + z \cos(\iota))^2} - \\ - \frac{1}{2r_\mu} \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2} - r_\mu \right)^2 + (-y \sin(\iota) + z \cos(\iota))^2} \end{array} \right], \quad (5.17)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y \cos(\iota) + z \sin(\iota)}{x} \right). \quad (5.18)$$

5.3. Lentes débiles en geometrías esferoidales estáticas

5.3.1. Geodésicas nulas exactas en las geometrías esferoidales

Aunque en los cálculos de lentes débiles uno solamente necesita conocer la trayectoria no perturbada de los fotones para obtener los escalares ópticos, es muy útil tener a disposición la información exacta sobre el comportamiento de las geodésicas nulas cuando atraviesa la lente. En el caso de las geometrías que hemos presentado, uno tiene acceso a esta información en una forma relativamente sencilla. Haremos uso de la simetría axial y del carácter estático de la distribución para expresar las componentes del vector ℓ^a , tangente a las geodésicas nulas, en término de las cantidades conservadas E y J_z a lo largo de la trayectoria del fotón. En la geometría prolada uno tiene:

$$\ell^t = -\frac{E}{a(r)}, \quad (5.19)$$

$$\ell^\phi = \frac{J_z}{r^2 \sin^2(\theta)}, \quad (5.20)$$

$$(\ell^r)^2 + (r^2 - 2rM(r) + r_\mu^2) (\ell^\theta)^2 = \frac{r^2 - 2rM(r) + r_\mu^2}{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)} \left(\frac{E^2}{a(r)} - \frac{J_z^2}{r^2 \sin^2(\theta)} \right). \quad (5.21)$$

En el caso oblado uno puede ver que se obtiene:

$$\ell^t = -\frac{E}{a(r)}, \quad (5.22)$$

$$\ell^\phi = \frac{J_z}{(r^2 + r_\mu^2) \sin^2(\theta)}, \quad (5.23)$$

$$(\ell^r)^2 + (r^2 - 2rM(r) + r_\mu^2) (\ell^\theta)^2 = \frac{r^2 - 2rM(r) + r_\mu^2}{r^2 + r_\mu^2 \cos^2(\theta)} \left(\frac{E^2}{a(r)} - \frac{J_z^2}{(r^2 + r_\mu^2) \sin^2(\theta)} \right). \quad (5.24)$$

Las dos cantidades conservadas están relacionadas con las condiciones iniciales asintóticas de la trayectoria del fotón. La constante de movimiento E está asociada con la energía del fotón, en tanto que J_z tiene el significado del parámetro de impacto con respecto al eje de simetría del esferoide. Si denotamos por x_0 esta condición inicial entonces uno tiene que $J_z \equiv x_0$.

5.3.2. Tetrada nula adaptada a la trayectoria no perturbada de los fotones

Para el cómputo de los escalares ópticos de lentes débiles necesitaremos considerar la tetrada nula asociada a la congruencia de geodésicas nulas no perturbadas de la geometría local de la lente. Esta tetrada que denotaremos por $(\ell_F^a, m_F^a, \bar{m}_F^a, n_F^a)$ es la que está asociada en el espacio plano a una congruencia de fotones representando una onda plana. La misma toma la siguiente expresión general:

$$\ell_F^a = -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} = \ell_F^t \frac{\partial}{\partial t} + \ell_F^r \frac{\partial}{\partial r} + \ell_F^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \ell_F^\phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (5.25)$$

$$m_F^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right) = m_F^r \frac{\partial}{\partial r} + m_F^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + m_F^\phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (5.26)$$

$$\bar{m}_F^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right) = \bar{m}_F^r \frac{\partial}{\partial r} + \bar{m}_F^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \bar{m}_F^\phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (5.27)$$

$$n_F^a = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right) = n_F^t \frac{\partial}{\partial t} + n_F^r \frac{\partial}{\partial r} + n_F^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + n_F^\phi \frac{\partial}{\partial \phi}; \quad (5.28)$$

Nosotros necesitaremos conocer las componentes de la tetrada en la base de las coordenadas esféricas ya que es en esta base donde será conveniente computar los escalares de curvatura que son fuente de los escalares ópticos.

Para las geometrías proladas hayamos que las componentes están dadas de la siguiente forma:

$$\ell_F^t = 2n_F^t = -1, \quad (5.29)$$

$$\ell_F^r = -2n_F^r = \frac{\sqrt{r^2 + r_\mu^2}}{r(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[y\sqrt{r^2 + r_\mu^2} + r_\mu^2 \cos(\theta) \sin(\iota) \right], \quad (5.30)$$

$$\ell_F^\theta = -2n_F^\theta = \frac{1}{\sin(\theta)(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[y \cos(\theta) + \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \sin(\iota) \right], \quad (5.31)$$

$$\ell_F^\phi = -2n_F^\phi = \frac{\cos^2(\phi) \cos(\iota)}{x}; \quad (5.32)$$

y

$$m_F^r = \bar{m}_F^r = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{r^2 + r_\mu^2}}{r(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[(ix + z) \sqrt{r^2 + r_\mu^2} - r_\mu^2 \cos(\theta) \cos(\iota) \right], \quad (5.33)$$

$$m_F^\theta = \bar{m}_F^\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sin(\theta)(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[-(ix + z) \cos(\theta) + \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \cos(\iota) \right], \quad (5.34)$$

$$m_F^\phi = \bar{m}_F^\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos^2(\phi) \sin(\iota) - i \sin(\phi) \cos(\phi)}{x}. \quad (5.35)$$

Para el caso de las geometrías obladas uno debe utilizar las siguientes expresiones:

$$\ell_F^t = 2n_F^t = -1, \quad (5.36)$$

$$\ell_F^r = -2n_F^r = \frac{\sqrt{r^2 + r_\mu^2}}{r(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[y\sqrt{r^2 + r_\mu^2} - r_\mu^2 \cos(\theta) \frac{\cos(\iota)(y \cos(\iota) + z \sin(\iota))}{\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2}} \right], \quad (5.37)$$

$$\ell_F^\theta = -2n_F^\theta = -\frac{1}{\sin(\theta)(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[\sqrt{r^2 + r_\mu^2} \frac{\cos(\iota)(y \cos(\iota) + z \sin(\iota))}{\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2}} - y \cos(\theta) \right], \quad (5.38)$$

$$\ell_F^\phi = -2n_F^\phi = \frac{\cos^2(\phi) \cos(\iota)}{x}; \quad (5.39)$$

$$m_F^r = \overline{m^r}_F = \frac{\sqrt{r^2 + r_\mu^2}}{\sqrt{2}r (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[(ix + z) \sqrt{r^2 + r_\mu^2} - r_\mu^2 \cos(\theta) \frac{ix + \sin(\iota) (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))}{\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2}} \right], \quad (5.40)$$

$$m_F^\theta = \overline{m^\theta}_F = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\theta) (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[(iy + z) \cos(\theta) - \frac{\sqrt{r^2 + r_\mu^2} (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))}{\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2}} (i \cos(\iota) + \sin(\iota)) \right], \quad (5.41)$$

$$m_F^\phi = \overline{m^\phi}_F = -\frac{\cos(\phi)}{\sqrt{2}x} (i \sin(\phi) - \cos(\phi) \sin(\iota)). \quad (5.42)$$

Las relaciones de arriba son el resultado de computar el mapa diferencial entre los sistemas de coordenadas esferoidales y el Cartesiano (x, y, z) (ver apéndices E.1.1 y E.1.2)

5.3.3. Los escalares de curvatura Φ_{00} y Ψ_0

Con las fórmulas para la tetrada nula y las componentes de la curvatura uno ahora está en condiciones de calcular los escalares de curvatura que intervienen en las expresiones de los escalares ópticos.

Uno puede ver que las expresiones vienen dadas por:

$$\Phi_{00} = \frac{1}{2} \left[G_{tt} \ell^t \ell^t + G_{rr} \ell^r \ell^r + 2G_{r\theta} \ell^r \ell^\theta + G_{\theta\theta} \ell^\theta \ell^\theta + G_{\phi\phi} \ell^\phi \ell^\phi \right], \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0 = (\ell^t)^2 & \left[R_{trtr} (m^r)^2 + R_{t\theta t\theta} \left((m^\theta)^2 + \sin^2(\theta) (m^\phi)^2 \right) + 2R_{trt\theta} m^r m^\theta \right] + \\ & + R_{r\theta r\theta} (\ell^r m^\theta - \ell^\theta m^r)^2 + R_{r\phi r\phi} (\ell^r m^\phi - m^r \ell^\phi)^2 + R_{\theta\phi\theta\phi} (\ell^\theta m^\phi - \ell^\phi m^\theta)^2. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Uno puede obtener expresiones analíticas en función de las componentes de materia, en completa analogía con la expresiones (2.190) y (2.190). Sin embargo, en estos casos el análisis resulta mucho más complicado dada la extensión que presentan las fórmulas. Solamente a modo de ejemplo presentaremos la expresión del escalar de curvatura Φ_{00} en el caso de la simetría prolada.

$$\begin{aligned} \Phi_{00} = & 4\pi E^2 \left(\varrho(r, \theta) + P_r(r, \theta) \right) \\ & + 4\pi \left(\frac{J_z^2}{r^2 \sin^2(\theta)} + (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)) (\ell_F^\theta)^2 \right) \left(P_t(r, \theta) - P_r(r, \theta) \right) \\ & - \frac{1}{2} \frac{r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)} (\ell_F^\theta)^2 \left[\frac{dM}{dr} - \frac{3r^2 - r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)} \frac{M(r)}{r} \right] \\ & + 2r \frac{r_\mu^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)} \ell_F^r \ell_F^\theta \frac{4\pi (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^2 P_r(r, \theta) - rM(r)}{(2r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)) (r^2 + r_\mu^2)}; \end{aligned} \quad (5.45)$$

Las expresiones ya conocidas en el caso esférico [GM11] se recuperan cuando tomamos el límite $r_\mu \rightarrow 0$; en tal caso uno tiene

$$\varrho(r, \theta) \longrightarrow \varrho(r), \quad (5.46)$$

$$P_r(r, \theta) \longrightarrow P_r(r), \quad (5.47)$$

$$P_t(r, \theta) \longrightarrow P_t(r), \quad (5.48)$$

y

$$\left(\frac{J_z^2}{r^2 \sin^2(\theta)} + (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)) \right) \longrightarrow \frac{J_z^2}{r^2}. \quad (5.49)$$

5.4. Escalares ópticos

En las secciones anteriores hemos presentado todos los elementos que necesitamos para llevar a cabo el cálculo de los escalares ópticos en lentes débiles para las familias de modelos geométricos dados por los elementos de línea (4.17) y (4.18). Aquí presentamos los resultados que hemos obtenido de la implementación numérica de las fórmulas (2.171, 2.172, 2.173) para estas geometrías en los casos de lentes estáticas. Para realizar la integración numérica se han probado varios métodos; sin embargo, en los resultados obtenidos no hemos apreciado cambios visibles en la resolución de los gráficos cuando variamos entre uno y otro para los casos considerados.

5.4.1. Geometría prolada sin masa

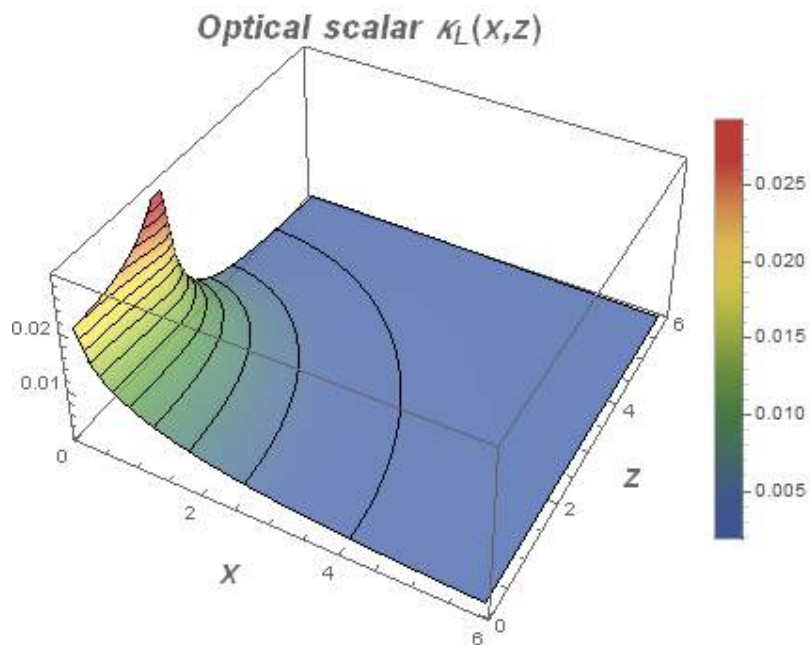


Figura 5.2: Gráfico de la convergencia κ_L para una geometría prolada sin masa $M(r) = 0$. Se muestra los resultados para esferoides rotados un ángulo $\iota = \frac{\pi}{4}$ y valores $C = 23025$, $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

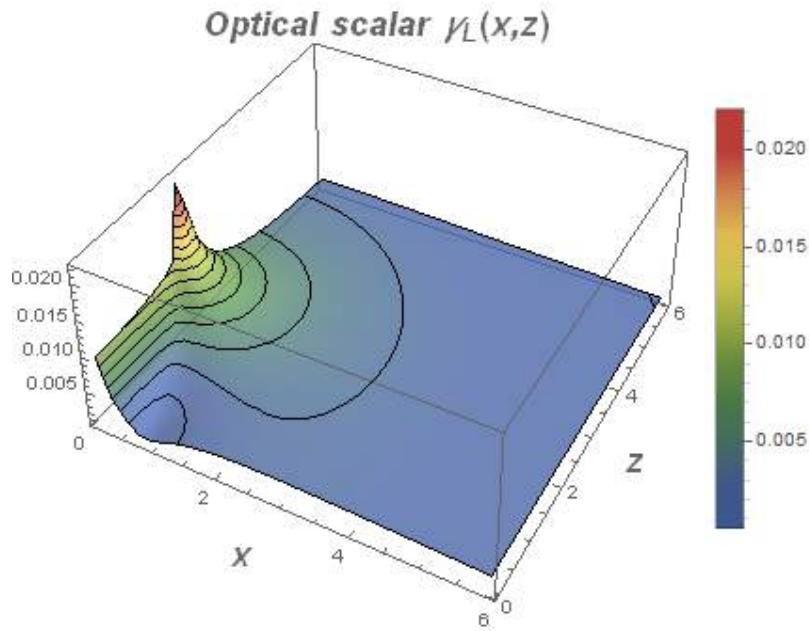


Figura 5.3: Gráficos del módulo del shear γ_L para una geometría prolada sin masa $M(r) = 0$. Se muestra los resultados para esferoides rotados un ángulo $\iota = \frac{\pi}{4}$ y valores $C = 23025$, $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

De los gráficos para la convergencia y el módulo del shear aquí arriba uno puede observar cómo la curvas de nivel de la convergencia copian la forma de esferoides en el plano de la lente mientras que el comportamiento del módulo del shear es mucho más complejo; tal como se manifiesta en la forma que tienen las curvas de nivel en la región cercana a los sitios donde proyectan los focos del esferoide en el plano de la lente.

Este comportamiento en el módulo del shear se debe a que, en general, en las lentes que no están dispuestas axialmente simétricas existe una dependencia mucho más complicada en el escalar $\delta\Psi_0$; en efecto, en tal situación uno no tiene la dependencia dada por la ecuación (2.163) sino que se tendrá:

$$\delta\Psi_0 = -\delta\psi_0(J, \lambda, \theta)e^{2i\vartheta(J,\theta)}; \quad (5.50)$$

donde en este caso ϑ tiene una relación no trivial con la coordenada angular θ en el plano de la lente.

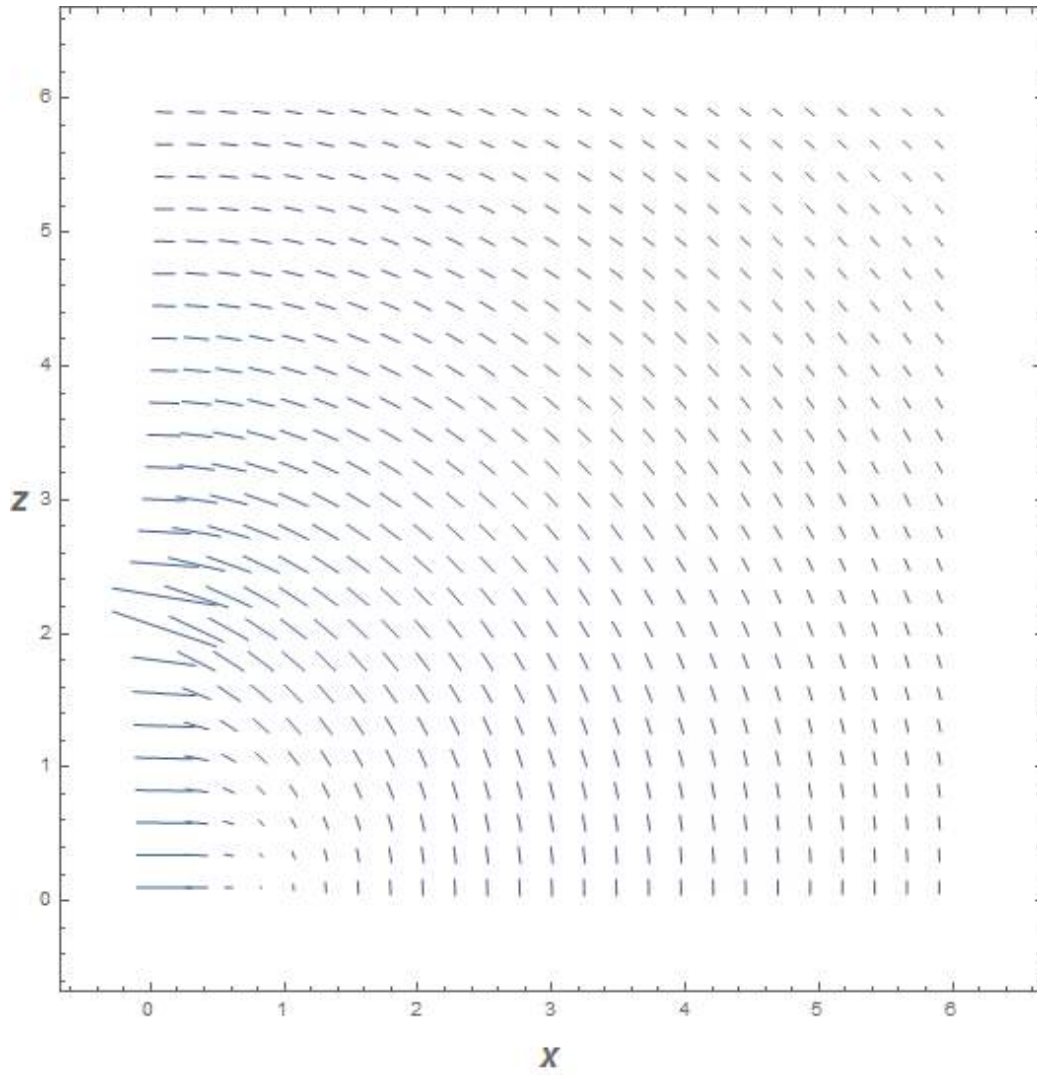


Figura 5.4: Mapa del shear para una lente con simetría prolada sin masa $M(r) = 0$. El esferoide ha sido rotado un ángulo $\iota = \frac{\pi}{4}$ y la geometría posee los siguientes parámetros: $C = 23025$, $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

En este mapa de shear uno puede notar que el patrón que surge indica que el efecto de las distorsiones sobre imágenes extendidas tiende a deformar la imagen de la fuente sobre curvas que semejan elipses.

5.4.2. Geometría oblada sin masa

En este caso presentamos los mismo gráficos de la convergencia, el módulo del shear y el mapa de shear para la solución prolada sin masa (4.5.1).

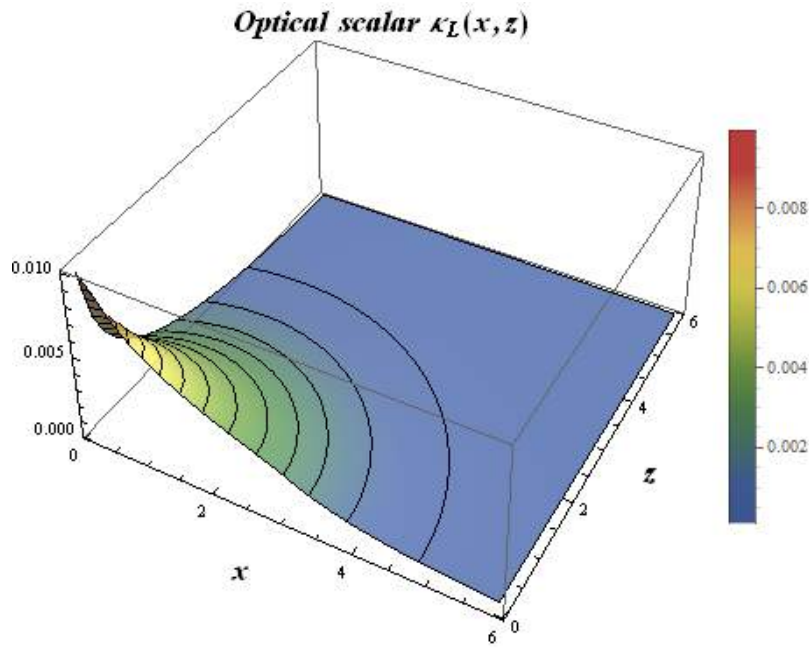


Figura 5.5: Gráfico de la convergencia κ_L para una geometría oblada sin masa $M(r) = 0$. Se muestra los resultados para esferoides rotados un ángulo $\iota = \frac{\pi}{4}$ y valores $C = 23025$, $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

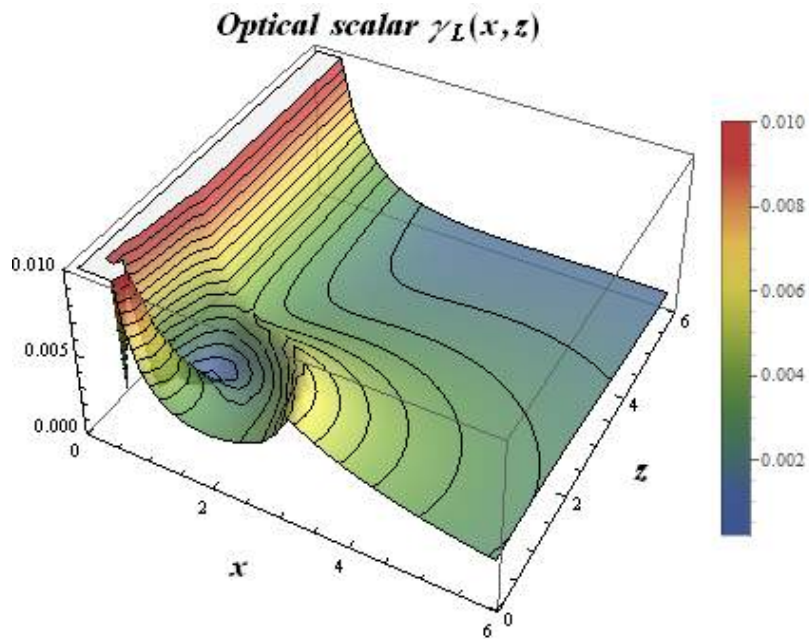


Figura 5.6: Gráficos del módulo del shear γ_L para una geometría oblada sin masa $M(r) = 0$. Se muestra los resultados para esferoides rotados un ángulo $\iota = \frac{\pi}{4}$ y valores $C = 23025$, $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

Nuevamente uno puede observar la forma en que las curvas de nivel en la convergencia semejan la forma de los esferoides proyectados en el plano de la lente mientras que el shear presenta un comportamiento mucho más complicado. El correspondiente mapa de shear también se muestra y en el se pueden distinguir también que las distorsiones reflejan la forma de la lente.

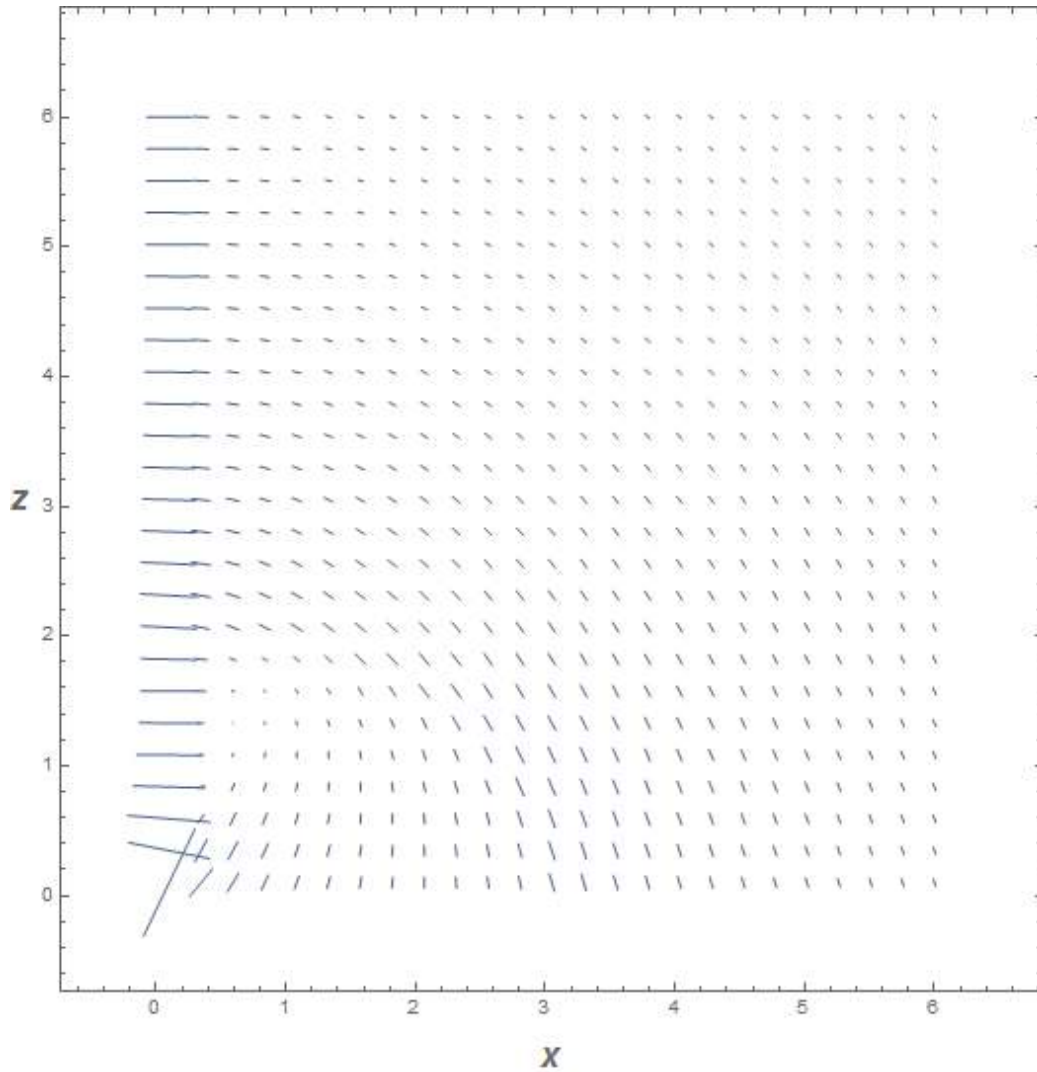


Figura 5.7: Mapa del shear para una lente con simetría oblada sin masa $M(r) = 0$. El esferoide ha sido rotado un ángulo $\iota = \frac{\pi}{4}$ y la geometría posee los siguientes parámetros: $C = 23025$, $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

5.4.3. Geometría prolada con perfil de masa isotérmico

En estos gráficos hemos considerado el caso de una lente prolada dada por la geometría presentada en la sección (4.5.2). Las características que presentan los gráficos de los escalares ópticos en este caso varían poco respecto de los ejemplos anteriores donde hemos usado valores que proveen contribuciones de orden similar en las cantidades computadas.

Esto es de esperar, ya que en el caso esférico hemos mostrado que en sistemas astrofísicos, el modelo isotérmico es indistinguible respecto del modelo sin masa desde el punto de vista de lentes gravitacionales.

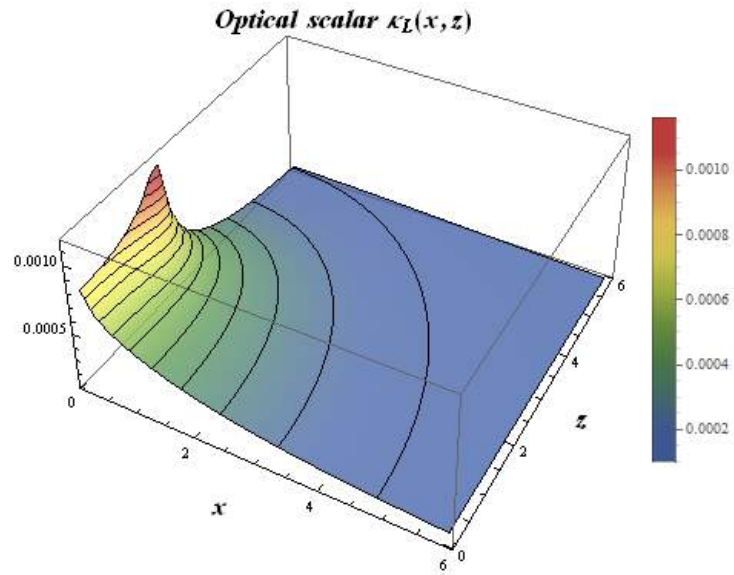


Figura 5.8: Gráfico de la convergencia κ_L para una geometría prolada con perfil de masa isotérmico y $a(r)$ dada por la ecuación (4.33). Se muestra los resultados para esferoides rotados un ángulo $\iota = \frac{\pi}{4}$ y valores $C = 8 \times 10^5$, $\sigma = 500 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ y $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

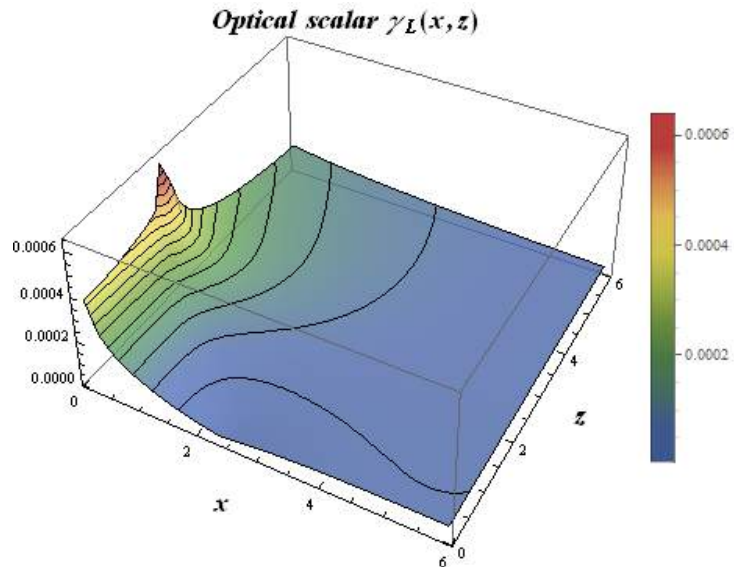


Figura 5.9: Gráfico de la convergencia κ_L para una geometría oblada con perfil de masa isotérmico y $a(r)$ dada por la ecuación (4.33). Se muestra los resultados para esferoides rotados un ángulo $\iota = \frac{\pi}{4}$ y valores $C = 8 \times 10^5$, $\sigma = 500 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ y $r_\mu = 3\text{Mpc}$.

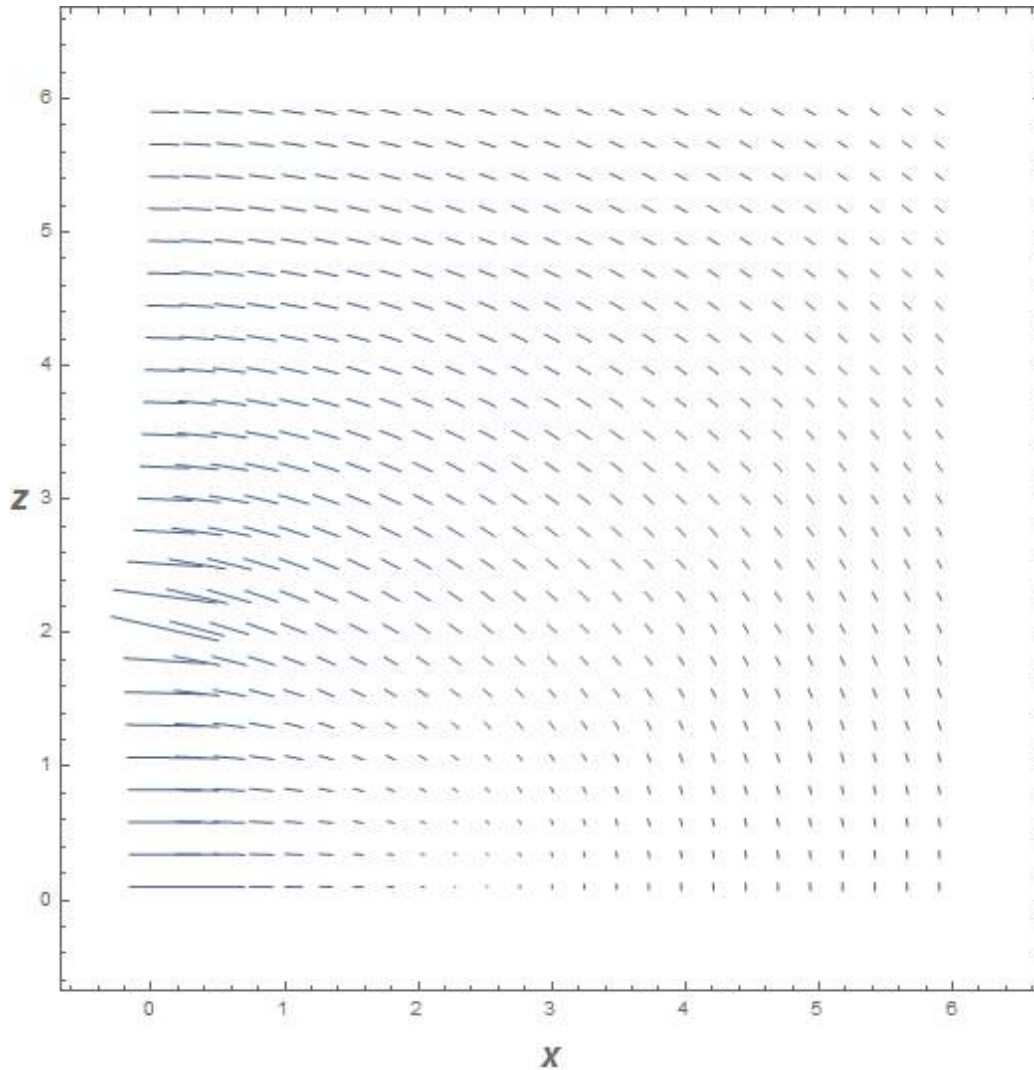


Figura 5.10: Mapa de shear para una geometría prolada ($r_\mu = 3\text{Mpc}$) con perfil de masa isotérmico y $a(r)$ dada por la ecuación (4.33). La inclinación del esferoide es $\iota = \frac{\pi}{4}$ y los parámetros de la geometría empleados son: $C = 8 \times 10^5$ y $\sigma = 500 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

5.5. Comentarios sobre este capítulo

En este capítulo, hemos ilustrado la utilización de los modelos geométricos introducidos anteriormente en el cálculo de los observables de lentes débiles.

Dado que en general, el eje de simetría axial de las geometrías esferoidales no coincide con la línea de la visual, la disposición observacional de las lentes esferoidales no es axialmente simétrica. Para tener en cuenta este hecho incluimos en el análisis, la descripción en términos de esferoides cuyo eje de simetría está inclinado sobre la línea de la visual.

Con el objetivo de computar los escalares de curvatura Φ_{00} y Ψ_0 , presentamos las expresiones que toman las componentes de la tetra nula que uno debe utilizar en el cálculo de lentes débiles. Las mismas fueron utilizadas en el desarrollo de un código numérico que implementa la integración a lo largo de la visual de las cantidades Φ_{00} y Ψ_0 de acuerdo a las fórmulas (2.171, 2.172, 2.173) obtenidas en el capítulo (2).

Los resultados que presentamos corresponden a los modelos discutidos en las secciones (4.5.1) y (4.5.2). En ellos podemos ver las diferencias que surgen con los casos esféricos: es interesante notar

que pese a que los mapas de shear producen patrones que semejan la forma de elipses en el plano de la imagen el módulo del shear no copia estas formas en la región cercana a los focos. Ello parece está relacionado con el hecho de que en este caso el comportamiento de la fase que aparece en shear debido a que Ψ_0 tiene peso de spin 2 tiene una dependencia mucho más complicada que en el caso esférico. Recordemos que cuando la lente es esférica uno puede extraer esta fase de la integral que da el shear complejo (ver ecuación (2.165)); sin embargo esta propiedad no puede ser trasladada al caso esferoidal, excepto cuando el eje de simetría del esferoide coincide con la visual.

Por otra parte, notamos que el comportamiento de la convergencia κ_L , sí muestra la forma característica de lo que se esperaría para distribuciones esferoidales. Así mismo vemos nuevamente que cuando las geometrías no tienen masa, el resultado no es cero ya que el campo gravitacional es no trivial.

Capítulo 6

Modelos geométricos para sistemas astrofísicos con simetría esferoidal inmersos en R-W

6.1. Introducción

En el modelado teórico de las estructuras presentes en la distribución cósmica de materia, el uso de modelos esféricamente simétricos ha sido la primera opción natural para el estudio de las mismas. De manera notable, muchos objetos astrofísicos tales como los cúmulos de galaxias y la mayoría de los voids son descritos usando esta opción (ver por ejemplo [HSW14, IS07]). Ejemplo de ello, son también, varios de los ejemplos que hemos visto en la sección (2). En una cosmología homogénea e isotrópica, a priori, sería natural esperar que uno encuentre estructuras con forma esférica debido a que no existen direcciones preferenciales en tal geometría. Sin embargo, en nuestro Universo una gran variedad de formas son observadas; en particular esto es muy notable en el caso de los voids.

Los voids son regiones de muy baja densidad respecto de la densidad cósmica media $\bar{\rho}$ del Universo y comprenden una de las clases de sistemas más interesantes de objetos en la estructura en gran escala debido a su predominante presencia en el Universo. Análisis de los sondeos de galaxias 2dF Galaxy Redshift Survey y Sloan Sky Digital Survey [HV04, PVH⁺12] han revelado que la mayor parte del universo está ocupada con voids; aproximadamente el 40 % del volumen total lo conforman voids con radios del orden de 15Mpc [HV04].

A pesar de que habitualmente no presentan formas bien definidas, ha sido sugerido que una caracterización más apropiada para la morfología de los voids puede ser obtenida por medio de elipsoides [FN09, TK06, vdWP11]; sin embargo, la mayoría de los trabajos que buscan voids han asumido simetría esférica en sus algoritmos.

Trabajar con modelos que incluyen desviaciones de la geometría esférica nos enfrenta a un incremento considerable de la complejidad en la descripción de los sistemas; no obstante, existen estudios analíticos[PL07] usando esta clase de geometrías. Pero, los trabajos presentes en la literatura evitan el uso de una descripción métrica detallada para el modelado de estas configuraciones susceptibles de ser tratadas como elipsoidales. Una clase de modelos de este tipo son necesarios por varias razones además: si se tiene en cuenta, una vez más, que la mayoría de los modelos del contenido de materia descansan sobre una descripciones Newtonianas, una de ellas es que ofrecerían la posibilidad de explorar sistemas desde un punto de vista más general en términos de la totalidad del tensor energía-momento. Además, teniendo a mano geometrías exactas que describen estructuras como los voids sería relevante para el estudio de aspectos dinámicos en el problema de la evolución y formación de estructura en el Universo.

Desafortunadamente, son escasas las métricas para describir configuraciones elipsoidales y en consecuencia la cantidad de trabajos estudiando modelos más sofisticados y sus implicaciones no es abundante en la literatura.

Esta parte de nuestro trabajo pretende ser una contribución en esa dirección. Aquí, presentamos una familia de métricas para modelar el espaciotiempo de estructuras con simetría prolada y oblada inmersas en R-W. Esto significa que no son modelos perturbados; ellos poseen dos regiones bien definidas: una interior que describe una familia bastante general de distribuciones esferoidales y otra región exterior que puede ser elegida para que coincida apropiadamente con R-W. De esta manera, constituyen una generalización directa de modelos esféricamente simétricos circundados por un ambiente cosmológico. Las métricas que aquí presentamos pueden ser usadas para describir estructuras en gran escala tales como cúmulos de galaxias y void; sin embargo nos concentraremos aquí en el caso de voids.

En particular, presentamos un modelo que void que es una generalización adaptada del modelo utilizado por [AFW99] para el estudio de la probabilidad de detección de lentes débiles en presencia de voids. Inspirado en este trabajo usaremos este modelo de void para computar los escalares ópticos utilizando esta geometría y las técnicas desarrolladas en el capítulo 2.

No hemos encontrado en la literatura artículos que hagan uso de métricas esferoidales en el contexto cosmológico para describir voids. Aunque estas geometría constituyen una pequeña modificación a sistemas esféricamente simétricos; ellas resultan ser bastante sofisticadas ya que por ejemplo permiten la inclusión de componentes del tensor energía-momento habitualmente ignoradas. La razón para considerar esta amplia generalidad proviene también del hecho que los voids son unos de los mejores candidatos para el estudio de la distribución del contenido de materia-energía del Universo; (ver por ejemplo [GLKH03, MSS⁺14]).

6.2. Preliminares geométricos

6.2.1. Los espaciotiempos de R-W en coordenadas esferoidales

Ya que la geometría exterior a la estructura esferoidal queremos que sea la métrica de R-W será conveniente, antes de presentar los modelos, introducir una descripción de la cosmología en términos de las coordenadas esferoidales previamente discutidas.

Entre las diferentes expresiones equivalentes que presentamos en la sección (2.3) para la métrica dL_k^2 de la parte espacial de la métrica:

$$ds^2 = dt^2 - A(t)^2 dL_k^2; \quad (6.1)$$

nosotros elegiremos aquella que exhibe explícitamente el hecho que dL_k^2 es conforme a la métrica Euclídea en 3 dimensiones; es decir tomaremos

$$dL_k^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{k\bar{r}^2}{4}\right)^2} \left[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 \left(d\bar{\theta}^2 + \sin(\bar{\theta})^2 d\bar{\phi}^2 \right) \right]. \quad (6.2)$$

Preferimos esta versión pues sacaremos provecho de su naturaleza conforma usando las coordenadas proladas y obladas para reescribir la métrica plana dentro del paréntesis.

Esta forma del elemento de línea constituye la base de los modelos generalizados que presentamos a continuación.

El elemento de línea de R-W en coordenadas proladas

Usando el elemento de línea (4.8) junto con la relación

$$\bar{r}^2 \equiv \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 = r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2; \quad (6.3)$$

la cual es válida para coordenadas proladas, obtenemos para la métrica de R-W (6.1)

$$ds^2 = dt^2 - \frac{A(t)^2}{\left[1 + \frac{k}{4} \left(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2\right)\right]^2} \times \left[\left(r^2 + r_\mu^2 \sin(\theta)^2\right) \left(\frac{dr^2}{r^2 + r_\mu^2} + d\theta^2\right) + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2 \right]. \quad (6.4)$$

El elemento de línea de R-W en coordenadas oblatas

En este caso es inmediato también ver que se cumple la siguiente relación

$$\bar{r}^2 \equiv \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 = r^2 + r_\mu^2 \sin(\theta)^2; \quad (6.5)$$

y junto con el elemento de línea (4.13) uno obtiene

$$ds^2 = dt^2 - \frac{A(t)^2}{\left[1 + \frac{k}{4} \left(r^2 + r_\mu^2 \sin(\theta)^2\right)\right]^2} \times \left[\left(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2\right) \left(\frac{dr^2}{r^2 + r_\mu^2} + d\theta^2\right) + \left(r^2 + r_\mu^2\right) \sin(\theta)^2 d\phi^2 \right]. \quad (6.6)$$

Hasta aquí, sólo hemos hecho un cambio de coordenadas y por lo tanto las ecuaciones (6.4) y (6.6) representan la misma geometría que R-W (homogénea e isotrópica) en los menos convencionales sistemas de coordenadas esféricas.

6.3. Modelos exactos de espaciotiempos para sistemas esféricos inmersos en R-W

Ahora estamos en condiciones de presentar nuestros modelos para sistemas astrofísicos con simetrías prolada u oblada inmersos en una cosmología estándar.

6.3.1. Geometría con simetría prolada

Es posible generalizar la métrica homogénea e isotrópica de R-W para describir una distribución de materia con simetría esférica. Esta simetría tiene que estar reflejada en la geometría del espaciotiempo correspondiente. Haremos esto introduciendo dos funciones nuevas que alteran el elemento de línea de R-W en una región limitada pero que son compatibles con el requisito de simetría esférica.

Para el caso de estructuras con simetría esférica prolada el elemento de línea que proponemos es:

$$ds^2 = F(r)dt^2 - \frac{A(t)^2}{\left[1 + \frac{k}{4} \left(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2\right)\right]^2} \times \left[\left(r^2 + r_\mu^2 \sin(\theta)^2\right) \left(\frac{dr^2}{r^2 - \frac{2M(r)}{r} \left(r^2 + r_\mu^2 \sin(\theta)^2\right) + r_\mu^2} + d\theta^2\right) + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2 \right]. \quad (6.7)$$

6.3.2. Geometría con simetría oblada

Aplicando la misma metodología al caso de simetría oblada, proponemos el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = F(r)dt^2 - \frac{A(t)^2}{\left[1 + \frac{k}{4} \left(r^2 + r_\mu^2 \sin(\theta)^2\right)\right]^2} \times \left[\left(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2\right) \left(\frac{dr^2}{r^2 - \frac{2M(r)}{r} \left(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2\right) + r_\mu^2} + d\theta^2\right) + \left(r^2 + r_\mu^2\right) \sin(\theta)^2 d\phi^2 \right]. \quad (6.8)$$

Uno observa que las modificaciones respecto de la métricas (6.6) y (6.4) están dadas por la presencia de las funciones radiales $M(r)$, en la componente g_{rr} de la métrica, y la función $F(r)$ en

la componente temporal g_{tt} . Notemos que ambas funciones guardan mucho parecido con la forma en que aparecen las funciones que $a(r)$ y $M(r)$ en el elemento de línea (2.188). En particular, nos referiremos a la función $M(r)$ en las ecuaciones (6.6) y (6.4) como *la función del perfil de masa* debido a su parecido con la función de masa usual en simetría esférica.

El espaciotiempo, descrito de este modo, está foliado por hipersuperficies espaciales ($t = \text{cte.}$) que poseen simetría esférica. Además, es claro que tomando $M(r) = 0$ y $F(r) = 1$ en una región exterior al esferoide dada por $r > r_0$ con $r_0 = \text{cte.}$, la métrica coincide exactamente con la de R-W y, por lo tanto la dinámica del factor de escala $A(t)$ está determinada por las ecuaciones de campo en esta región. En la región interior uno tiene un amplio rango de modelos posibles con simetría esférica que pueden ajustarse de manera tal de describir diversas distribuciones de materia-energía. Para ello uno cuenta con cierta intuición ya que la función del perfil de masa $M(r)$ es una generalización natural de la función de masa en simetría esférica. El otro grado de libertad que uno puede usar, $F(r)$ puede ser empleado para introducir componentes espaciales del tensor energía-momento y por tanto pueden resultar útiles en la descripción del contenido de materia no visible como hemos tratado de enfatizar a lo largo de esa tesis.

Entonces, los elementos de línea (6.7) y (6.8) constituyen una familia no trivial de geometrías para el estudio práctico de distribuciones esféricas en el contexto cosmológico.

Mostraremos su utilidad en el caso especial de regiones de muy baja densidad como los voids. Y las utilizaremos luego en el cálculo numérico de los escalares ópticos de lentes débiles.

6.4. Un modelo geométrico exacto para voids con simetría esférica

En esta sección presentamos un modelo simple para voids esféricos; esto es, una geometría cuyo tensor energía-momento asociado a través de las ecuaciones de Einstein tiene una componente temporal, T_t^t , que en la región $r < r_0$ es menor que la densidad cósmica media de la cosmología en la región exterior $r \geq r_0$.

Si consideramos la elección $F(r) = 1$ en todo el rango de la coordenada radial, entonces la función del perfil de masa $M(r)$ más sencilla que uno podría considerar para nuestros fines sería aquella usada en el trabajo [AFW99]:

$$M(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \varrho_{\text{int}} r^3 & \text{for } r < R \\ M(R) + \frac{4\pi}{3} \varrho_{\text{bor}} (r^3 - R^3) & \text{for } R \leq r < R + d \\ 0 & \text{for } R + d \leq r; \end{cases} \quad (6.9)$$

donde ϱ_{int} y ϱ_{bor} están relacionadas a los valores de la densidad media fuera del void, ρ_0 , y a los parámetros R y d de la siguiente manera:

$$\varrho_{\text{int}} = -\rho_0 \epsilon \quad (\text{with } \epsilon \leq 1), \quad (6.10)$$

$$\varrho_{\text{bor}} = \frac{\rho_0 \epsilon}{\left(1 + \frac{d}{R}\right)^3 - 1} \quad (\text{with } \epsilon \leq 1). \quad (6.11)$$

El parámetro R está asociado con el ‘radio’ del void mientras que el parámetro d está relacionado con el tamaño de la pared del void, la cual es necesaria para que el void esté compensado.

En simetría esférica, como vimos, este perfil tiene la propiedad que la masa contenida en la pared, compensa exactamente la masa que le falta al void para que la densidad en esa región sea igual a la cosmológica. El valor de la densidad ρ_0 dicta por tanto la evolución del parámetro de expansión $A(t)$ a través de las ecuaciones de Friedman:

$$\frac{3}{A(t)^2} \left[\left(\frac{dA}{dt} \right)^2 + k \right] = 8\pi\rho_0. \quad (6.12)$$

Las componentes del tensor energía-momento de las geometrías pueden ser fácilmente calculadas con ayuda de algún software y en general resultan ser bastantes complejas en cuanto a su extensión.

Por tal motivo, en vez de presentar aquí complicadas fórmulas analíticas para el tensor energía-momento decidimos mostrar el gráficos de la densidad de energía en la figura 6.1 y señalar que las componentes espaciales resultan despreciables respecto de ésta, tal como uno esperaría. Puede verse que este modelo simplificado provee con una descripción muy buena para una región que se podría interpretar como un void y que a su vez tiene simetría esferooidal.

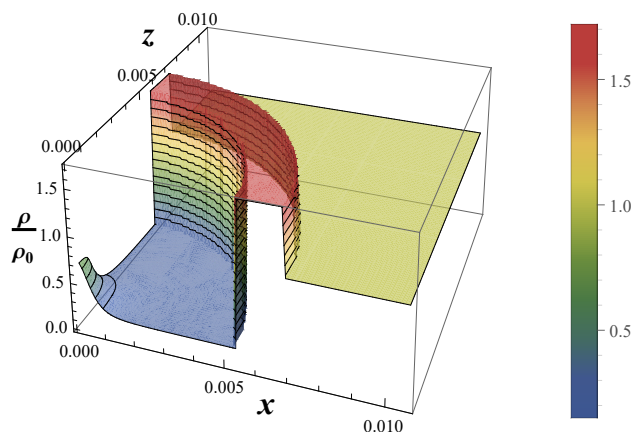


Figura 6.1: Gráfico de la densidad de energía, relativa a la densidad cósmica media para un void compensado con simetría prolada inmersa en R-W. El eje de simetría yace a lo largo del eje z por lo cual en el gráfico hemos obviado una de las direcciones perpendiculares que resulta redundante. Los parámetros usados han sido elegidos de la siguiente manera: $d = 0,3R$, $\epsilon = 0,9$, $r_\mu = 0,1R$, con un radio R correspondiente a un tamaño físico de 22Mpc.

6.5. Lentes débiles en voids esferooidales

Aquí presentaremos los resultado del cómputo numérico de los escalares ópticos cuando consideramos al void como una lente débil. Haremos uso del formalismo desarrollado en el capítulo 2 con la suposición adicional que el void puede considerarse como una lente fina; es decir, emplearemos las fórmulas (2.171, 2.172, 2.173).

6.5.1. Escalares ópticos para un void prolado que se encuentra inclinado a lo largo de la visual

En nuestro cálculo tomamos en cuenta la posibilidad que la geometría esferooidal esté inclinada con respecto a la línea de la visual un ángulo ι . Además, adoptamos la convención de que el plano de la lente está situado a la distancia cosmológica λ_l que corresponde al plano $y = 0$ en el marco de referencia local en el cual el esferoide se encuentra inclinado respecto del eje vertical z tal como se muestra en las figuras 5.1.

El trabajar con la aproximación de lentes finas es consistente con la suposición de que el tiempo de vuelo de los fotones dentro del void es mucho menor que la distancia recorrida en la geometría de R-W. Entonces, para todos los fines prácticos uno puede considerar la geometría del esferoide como estática; en otras palabras consideraremos que mientras el fotón recorre el void el parámetro de expansión tiene el valor constante A_v .

Un detalle importante que hemos incorporado en el cálculo de lo efectos de lente es que consideraremos una componente temporal de la métrica $F(r) \neq 1$. La función que empleamos es una versión adaptada de aquella que aparece en el elemento de línea de la geometría peculiar sin masa que presentamos en (2.9.1); la misma está dada por:

$$F(r) = F_0 \left[C + \ln \left(\frac{r}{r_\mu} + \sqrt{1 + \frac{r^2}{r_\mu^2}} \right) \right]^2 ; \quad (6.13)$$

donde F_0 y C son parámetros constantes. Si estas constantes se eligen apropiadamente uno puede obtener componentes espaciales del tensor energía-momento con una contribución significativa en los efectos de lentes que se verán reflejadas luego en los cálculos. La selección de constante C en (6.13) fue hecha de tal manera de asegurar que T_r^r sea del mismo orden que la densidad media ρ_0 .

Los siguientes resultados corresponden a un esferoide prolado que está inclinado un ángulo $\iota = \frac{\pi}{4}$ con respecto a la visual. Los parámetros que hemos usado para describir el void son los mismos que utilizamos para testear la descripción de nuestro modelo en la sección anterior. El tamaño es típicamente del orden de magnitud de los encontrados en catálogos de galaxias (como por ejemplo en [HV04]). La cosmología empleada fue un modelo Λ CDM con los parámetros cosmológicos reportados por la colaboración Planck [A⁺16] y el factor de distancias D_{ls} fue elegido ~ 220 Mpc.

Debajo mostramos los gráficos de los escalares ópticos κ_L , γ_{1L} , γ_{2L} y el módulo del shear γ para este modelo. Recordemos que la relación entre las componentes del shear y su módulo está expresada por:

$$\gamma_1 + i\gamma_2 \equiv -\gamma e^{i2\vartheta}; \quad (6.14)$$

donde la fase ϑ tiene el significado de un ángulo en el plano $x - z$ de la lente. Para este tipo de geometrías esferoidales la fase ϑ tiene un comportamiento complicado en términos del parámetro de impacto en el plano de la lente que puede ser comprobado inspeccionando las componentes individuales del shear (γ_1, γ_2) .

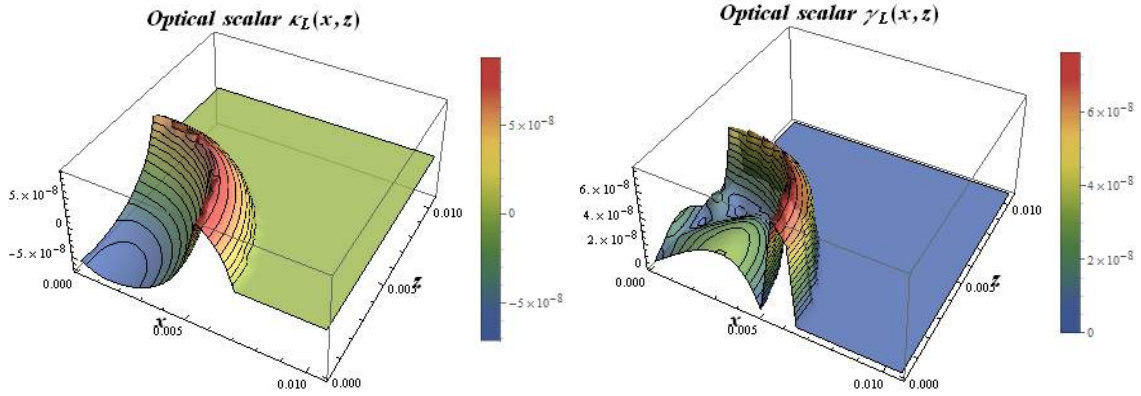


Figura 6.2: Gráficos de los escalares ópticos en términos de las coordenadas del plano de la lente para un void prolado cuya inclinación es $\iota = \frac{\pi}{4}$ respecto de la visual. Izquierda: Convergencia κ . Derecha: Módulo del shear γ .

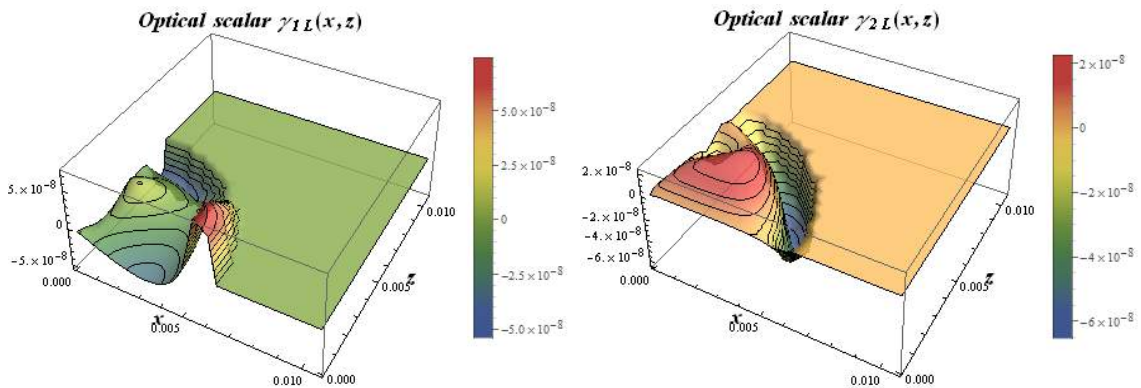


Figura 6.3: En este gráfico puede verse que las componentes del shear muestran un comportamiento complejo dentro del void. En la región exterior el efecto desaparece tal como debe ocurrir. Izquierda: Componente real del shear γ_{1L} . Derecha: Componente imaginaria del shear γ_{2L} .

Uno puede ver que la magnitud de los escalares ópticos para el caso típico de un void inmerso tratado con estas geometrías es muy baja en acuerdo con análisis previos [AFW99].

Podemos observar que el comportamiento del shear muestra una rica estructura; en particular ni las componentes del shear ni su módulo copian la forma cuasi-elíptica de un esferoide proyectado en el plano de la lente. En cambio cuando uno observa el comportamiento de la convergencia, en la figura (6.2), puede verse una dependencia mucho más sencilla.

6.6. Comentarios sobre este capítulo

En este capítulo sobre geometrías exactas con simetría esferoidal que están inmersas apropiadamente en una cosmología estándar hemos presentado una amplia clase de métricas: las ecuaciones (6.7) y (6.8). Las mismas resultan ser herramientas útiles para la descripción de distribuciones con sobre-densidades tanto como para regiones de baja densidad como los voids tal como mostramos en la sección (6.4). El espaciotiempo que ellas describen está caracterizado por dos funciones ‘radiales’ que pueden ser ajustadas apropiadamente para que en el rango $r \geq r_0$ (con r_0 un radio co-móvil fijo) la geometría sea la de R-W. La región interna $r < r_0$ en cambio, se puede interpretar como un sistema esferoidal cuyo tamaño crece con el parámetro de expansión $A(t)$. Estas dos funciones escalares tienen una interpretación física directa: la función $M(r)$, la cual se eligió de tal forma que en el límite $r_\mu \rightarrow 0$ coincide con la masa usual en simetría esférica, tiene aquí también una estrecha relación con la densidad de energía de la distribución esferoidal como puede verse también a través de la figura 6.1. La función $F(r)$ ha sido usada para introducir en una manera sencilla aunque no trivial componentes espaciales en el tensor energía-momento no despreciables.

Debido a que no hemos encontrado en la literatura otras presentaciones de geometrías exactas que representen voids esferoidales inmersos en cosmología, hemos construido un modelo de void con esas características que además admite en su interior ($r < r_0$) un tensor energía-momento no trivial. Este modelo es una extensión del perfil radial utilizado en el trabajo [AFW99] para el estudio de la detección de lentes gravitacionales en voids esféricos.

Como una aplicación interesante que se encauza dentro de las líneas de esta tesis, implementamos numéricamente el cálculo de lentes débiles en la aproximación de lente fina en el caso más general de un void inclinado a lo largo de la visual con un tensor energía-momento con componentes espaciales significativas dentro del void.

Hemos visto que para un void típico la señal que uno observaría es muy baja tal como se ha sugerido previamente en la literatura. Los mapas de shear que obtenemos muestran un patrón no trivial; en particular no recrean la forma cuasi-elíptica de un esferoide proyectado sobre el plano de la lente tal como uno esperaría.

Esperamos que estas geometrías sean útiles en el estudio concreto de sistemas que requieren un modelado más sofisticado y completo que aquel que se logra mediante la suposición de simetría esférica; especialmente en el caso de voids donde estos requerimientos parecen ser más demandantes. Aquí hemos desarrollado e implementado todas las herramientas necesarias para describir lentes gravitacionales con estas geometrías.

En el futuro planeamos aplicar este tipo de modelos para la descripción de observaciones concretas en sistemas astrofísicas.

Capítulo 7

Promedios en relatividad general

7.1. Introducción

7.1.1. Promedios

Parece ser un hecho ineludible que toda descripción de los sistemas físicos y de las leyes que los rigen está siempre asociada con una determinada escala de validez.

En aquellos sistemas que poseen varios niveles de descripción es frecuente que los constituyentes en una pequeña escala (micro) influyeran fenómenos que se distinguen a nivel global en una escala mayor (macro). Naturalmente, esto nos lleva a indagar la manera en que las observaciones registran los campos presentes en escalas más grandes. La noción de promedio aparece entonces en este contexto ya que usualmente la respuesta proviene de pensar que a través de ellos uno podría vincular los campos en la escala macro con aquellos de la escala micro.

Una característica común en cualquier noción de promedios es que ésta se encuentra asociada al concepto de linealidad. Más precisamente, la noción básica de promedios involucra, en general, la aplicación de cierto operador lineal $\langle \cdot \rangle$ a las cantidades micro para producir las macro. Esto corresponde, comúnmente, a la integración de alguna cantidad \mathcal{Q} sobre un dado dominio Σ :

$$\langle \mathcal{Q} \rangle \propto \int_{\Sigma} \mathcal{Q} d\Sigma. \quad (7.1)$$

Este es el caso de varios campos definidos sobre el espaciotiempo plano; tal como por ejemplo sucede en electrodinámica[LBK⁺13] o en mecánica de fluidos[LL91].

En lo que concierne a la gravedad podríamos pensar en el Universo como un todo, en el cual identificamos un amplio rango de escalas jerárquicamente organizadas en las cuales se manifiestan diversas estructuras: el sistema solar, los cúmulos de estrellas, las galaxias, los cúmulos de galaxias, supercúmulos, etc. Además a todas ellas, podemos asignarles una geometría dada; de lo cual parece derivar que uno podría recurrir a una noción de promedio para lograr conectar la descripción geométrica de las diferentes escalas[CELU11].

Si bien, hasta ahora, tal programa no ha sido llevado a cabo, la importancia de contar con un procedimiento de este tipo ha sido enfatizada reiteradas veces, sobre todo en el contexto cosmológico[Ell11, EB05].

7.1.2. Las dificultades en relatividad general

En el caso de la gravitación, las dificultades surgen debido a que uno está confrontado a una rica estructura geométrica en la cual varios tensores están relacionados por intermedio de operadores diferenciales (por ejemplo, la métrica g_{ab} del espaciotiempo con la curvatura de Riemann $R_{abc}{}^d$). Por lo tanto, surgen sutilezas no presentes en el caso habitual de campos sobre una métrica plana de fondo.

Un aspecto no trivial a tener en cuenta es determinar qué campos tensoriales uno debería promediar y cuál es la relación entre los tensores promediados. Concretamente, consideremos la geometría g_{ab} ; entonces en general uno esperaría que el tensor de curvatura asociado a una métrica promediada, $R_{abc}{}^d[\langle g \rangle]$, difiera del promedio del tensor de curvatura asociado a una métrica en la escala micro, $\langle R_{abc}{}^d[g] \rangle$; esto es

$$g_{ab} \neq \langle g_{ab} \rangle \Rightarrow \langle R_{abc}{}^d[g] \rangle \neq R_{abc}{}^d[\langle g \rangle], \quad (7.2)$$

[Ell11]. Esto también permite considerar varias opciones; por ejemplo uno podría partir de las ecuaciones de campo y promediar primero el tensor energía-momento y luego integrar para encontrar la métrica correspondiente. Notemos de igual modo que aquí tampoco cabe esperar que esto coincida con el promedio de la métrica en la pequeña escala.

Otros aspectos no triviales tienen que ver con la elección de las regiones de integración y, por supuesto, con la definición misma de promedio. Debido a que en espacios curvos el transporte paralelo depende de la trayectoria esto trae aparejado el hecho de que no hay una forma unívoca de tomar promedios.

7.1.3. Nuestro trabajo

Con esta introducción lo que deseamos señalar es que esas diferencias serán sensibles a la definición de promedios que uno decida usar; las cuales, resulta claro, son muy numerosas. Sería deseable, por tanto, que una definición concreta sea tan simple como sea posible y a la vez de aplicación práctica, de tal manera de alcanzar una clara interpretación en su uso.

A pesar de que existen en la literatura sugerencias de cómo realizar promedios de tensores [Zal04, BHC10, Beh08, GW11]; no hemos encontrado una que colmara nuestra expectativa de ser simple y de inmediato uso práctico. Por ello, nuestra intención aquí es salvar esta brecha y proveer una definición de campos tensoriales y sus correspondientes derivadas, la cual pueda ser usada en una variedad de situaciones de interés y requiriendo un mínimo de estructura geométrica adicional.

Con tal objetivo, hemos decidido basar la noción en la integración de cantidades escalares construidos a partir de una base de vectores previamente especificada. La elección de esta base vendrá normalmente dictada por la naturaleza del problema que uno esté considerando. En la siguiente sección (7.2) consideraremos en más detalles algunos ejemplos; sin embargo, subrayemos que la elección de la base más apropiada es una cuestión que está más allá del objetivo de este trabajo. En cambio, aquí solamente nos concentraremos en los aspectos matemáticos de cómo uno puede tratar la noción de promedios de tensores y sus derivadas en forma concreta para que sea una herramienta práctica para todas las situaciones en donde este concepto sea necesario.

Es importante mencionar que usualmente la noción de promedio está asociada solamente a la región de integración donde se computa. Aquí, hemos elegido asociar los promedios a un punto del espaciotiempo; esto es, nuestra definición de promedios de tensores producirá campos tensoriales. Consistentemente, todos nuestros ejemplos que motivan este estudio tienen en mente de manera implícita la aplicación de promedios asociados a un punto del espaciotiempo.

La forma en que introducimos esta estructura es partiendo de la suposición que en cada punto p uno tiene a disposición un mapa que especifica una región de integración $\Sigma(p)$, como será explicada en más detalle debajo. Esta estructura es esencial para cualquier intento de definir una derivada de promedios.

La importancia también de contar con una definición de derivada de promedios es que nos permitirá tratar problemas en los cuales aparezcan las ecuaciones de campo.

A continuación introduciremos las motivaciones que animan esta parte del trabajo mencionando las principales situaciones donde la noción de promedios demanda una atención especial. Algunas de ellas han sido señaladas por otros autores tiempo atrás, otras son motivaciones propias que no hemos visto discutidas en la literatura. Todas ellas constituyen nuestra guía principal para el estudio de promedios en el contexto de la relatividad general.

7.2. Problemas y motivaciones que sustentan la necesidad de promedios en relatividad general

Nuestra intención en esta sección es dejar planteadas las preguntas y problemáticas que surgen en diferentes situaciones astrofísicas y cosmológicas en torno a la descripción de los sistemas con varias escalas. Esencialmente, lo discutido aquí es nuestro preámbulo para la formulación de las definiciones que aquí proponemos.

7.2.1. Promedios en la estructura en gran escala del espaciotiempo

Como dijimos anteriormente, el bosquejo actual que uno posee acerca del Universo incluye la presencia de estructuras en un amplio rango de escalas jerárquicamente organizadas. Asumiendo que la interacción gravitacional está presente en todas las escalas del Universo uno se ve conducido a asignar una dada geometría en cada escala característica. Y, por lo tanto indica ser una situación natural en la cual recurrir a una noción de promedios.

En el caso de escalas suficientemente grandes en el Universo la idea básica es que si uno piensa en volúmenes cada vez más y más grandes, la incidencia de la distribución de materia en gran escala sobre la dinámica en la pequeña escala, resulta equivalente al efecto que produciría una distribución suave (en el sentido de la continuidad de los valores que toma el campo).

Además, aquí uno tiene la información que a tiempos cósmicos tempranos la materia se encontraba a temperaturas excesivamente altas y la distribución de la misma puede ser apropiadamente descrita como un fluido homogéneo suave, tal como lo indican las observaciones del CMB.

En el marco de referencia cosmológico que corresponde a la escala más grande de representación, uno asume que la geometría es descrita adecuadamente por la métrica de Robertson-Walker (R-W). De hecho, la mayor parte de nuestro conocimiento sobre cosmología proviene de un estudio detallado de esta geometría, la cual tiene la siguiente propiedad:

$$R_{ab} \neq 0, \quad C_{abc}{}^d = 0; \quad (7.3)$$

donde R_{ab} y $C_{abc}{}^d$ denotan como es usual al tensor de Ricci y al tensor de Weyl, respectivamente. Sin embargo, en escalas mucho más chicas uno observa altas concentraciones de materia circundadas por espacio vacío. Entonces, el uso de las ecuaciones de Hilbert-Einstein en la escala más pequeña indicaría, que para un evento típico, el tensor de Ricci debería ser trivial, mientras que el tensor de Weyl tendría que ser no nulo:

$$R_{ab} = 0, \quad C_{abc}{}^d \neq 0; \quad (7.4)$$

es decir que, llamativamente, uno obtiene la situación opuesta a la que resulta de considerar el supuesto básico utilizado en el marco teórico cosmológico.

La dificultad aquí radica en que no existe una noción sencilla de promedios que produzca un resultado no nulo a partir de un tensor de Ricci nulo. Esto enfatiza, por tanto, la necesidad de un estudio detallado en contraposición de la rápida adopción de una cosmología homogénea desde el principio. Debemos mencionar que este problema ha sido el objeto de estudio por largo tiempo [Ell84] y refleja de qué manera se ha hecho un uso implícito de una noción de promedios en el contexto cosmológico para abordar la descripción geométrica del espaciotiempo y su curvatura.

Luego de haber notado este problema uno se pregunta si es correcta la idea de promediar el tensor energía-momento y luego postular las ecuaciones de Hilbert-Einstein; ya que es de este modo cómo se determina el tensor de Ricci en tales situaciones.

En este sentido una definición precisa ayudaría a ganar un mejor entendimiento acerca de la manera en la cual uno arriba a una descripción global donde las subestructuras se ven difuminadas.

7.2.2. El problema de la materia oscura

Nuestro punto de partida para sugerir el uso de promedios para indagar en el problema de la materia oscura es que se conocen geometrías que permiten describir algunas de las observaciones que caracterizan este fenómeno. Por ejemplo, en la referencia [MGN00] se propone una métrica con

simetría esférica que describe las curvas de rotación observadas en galaxias. Más detalladamente, en [GM12] se presenta una solución a las ecuaciones de Einstein que explica varios de los efectos observados de materia oscura no solamente en galaxia sino también en cúmulos.

Este tipo de geometrías presentan la peculiaridad de que en ellas aparece una contribución no trivial de las componentes espaciales del tensor energía-momento. Estas construcciones que satisfacen las ecuaciones de Hilbert-Einstein, pero que son no-Newtonianas en su naturaleza, refuerzan por un lado la sospecha acerca de si el empleo de un punto de vista Newtoniano es apropiado en la descripción de sistemas astrofísicos y cosmológicos.

Otros modelos con características similares proponen una descripción en términos de campos escalares[NSS01, ALS03]. El tensor energía-momento de un campo escalar satisface naturalmente esta característica que mencionamos; sin embargo no se da ninguna explicación acerca del origen de tal posibilidad.

Esta situación dispara la siguiente pregunta: ¿de qué manera uno podría entender las componentes espaciales del tensor energía-momento que hasta ahora no han sido tenidas en cuenta? ¿Podría ser, por ejemplo, que la presencia de componentes espaciales no despreciables del tensor energía-momento surjan luego de algún proceso de promedio realizado en un sistema compuesto por una gran cantidad de pequeños constituyentes?

Estamos pensando aquí, en la situación donde uno posee una métrica g_{ab} que describe exactamente la escala micro y satisface las ecuaciones de Hilbert-Einstein:

$$G_{ab}[g] = \kappa T_{ab}. \quad (7.5)$$

Luego el promedio formal de este sistema estaría dado por

$$\langle G_{ab}[g] \rangle = \kappa \langle T_{ab} \rangle; \quad (7.6)$$

el cual puede ser visto como

$$G_{ab}[\langle g \rangle] + E_{ab} = \kappa \langle T_{ab} \rangle; \quad (7.7)$$

donde hemos reescrito el lado izquierdo en términos del tensor de Einstein $G_{ab}[\langle g \rangle]$ para la métrica promedio $\langle g \rangle$ y un término adicional E_{ab} que da cuenta de la diferencia con $\langle G_{ab}[g] \rangle$.

Por tanto uno podría investigar si el término E_{ab} que surge luego de un proceso de promedios podría dar cuenta significativa de componentes espaciales en el lado derecho de (7.7).

7.2.3. La cuestión de promediar la métrica misma

La métrica claramente es uno de los candidatos inmediatos para promediar debido a que, tanto mediciones de longitudes y tiempo están determinadas a partir de ella, así como también porque juega un papel esencial en la descripción de los campos de materia presentes en una dada escala a través del tensor energía-momento.

En el caso de un gran sistema compuesto por numerosos subsistemas uno podría considerar la idea de que su tamaño y evolución temporal estarían apropiadamente determinados por una geometría promediada en la cual los detalles internos del sistema son suavizados.

Esto es de hecho lo que sucede en cosmología, donde la hipótesis básica de trabajo, es que la métrica en su escala más grande es homogénea e isotrópica.

Más precisamente, uno podría contemplar el caso de dos escalas típicas dentro una jerarquía multi-escala del sistema en cuestión. Una opción posible, que parece razonable considerar en este caso, es descomponer la métrica del sistema total, de la siguiente forma:

$$g_{ab} = \bar{g}_{ab} + h_{ab}; \quad (7.8)$$

donde \bar{g}_{ab} correspondería a la métrica ‘promediada’ del sistema más grande y h_{ab} a aquella adecuada para describir la pequeña escala y que sería una perturbación de la primera; en otras palabras uno esperaría tener lo siguiente

$$\langle \bar{g}_{ab} \rangle = \bar{g}_{ab} \quad \text{y} \quad \langle h_{ab} \rangle = 0. \quad (7.9)$$

Por ejemplo, la aplicación de esta idea a un cúmulo de galaxias que en su escala más grande parece tener una forma esféricamente simétrica nos induciría a tomar \bar{g}_{ab} dentro de la familia que son esféricamente simétricas y usar h_{ab} para describir la estructura interna remanente. Sin embargo, en tales casos el procedimiento no sigue un esquema preciso de cómo realizar los promedios.

Esto es una propuesta que resulta interesante en vista a futuras aplicaciones; a pesar de ello, uno debe subrayar que nuestra sugerencia es sólo una entre muchas otras diferentes en las cuales uno podría atacar el problema de promediar la métrica. Esto es, no existe un tratamiento universal para esto y en consecuencia hay muchos abordajes posibles. Por lo tanto, sería deseable que el factor común de todas estas técnicas sea el hecho de que provean con una definición práctica y precisa de promedios; con el fin de que puedan ayudar a una interpretación clara y concreta luego de aplicarlas.

7.2.4. Promedio del tensor energía-momento

También, una opción natural sería considerar una técnica para promediar el contenido de materia previo al uso de las ecuaciones de campo en vez de la métrica. En este caso, si uno denota por t_{ab} el tensor energía-momento de los subsistemas en la escala micro entonces, parece haber pocas opciones para considerar un tensor energía-momento macroscópico, \bar{T}_{ab} , que no sea el siguiente:

$$\bar{T}_{\alpha\beta} = \frac{1}{V_\Sigma} \int_\Sigma t_{\alpha\beta} d\Omega; \quad (7.10)$$

donde con letras griegas denotamos las componentes en una base apropiada.

Un ejemplo importante, en que esto se podría aplicar, es en el caso en que uno quisiera abordar el problema de la descripción macroscópica de materia en el Universo a través de la distribución de galaxias. Si la materia estuviese solamente concentrada con la materia visible entonces en puntos intermedios entre galaxias uno tendría que el tensor energía-momento es nulo mientras que su promedio produciría un resultado distinto de cero.

Los detalles para un cálculo como este dependerán de la manera en que uno decida cómo atacar el problema y, en particular de la elección de las regiones de integración. Normalmente la caracterización del sistema incluirá la elección de una base particular en la cual el cálculo tenga una interpretación física inmediata.

7.2.5. Promedio de la conexión

Cuando sistemas astrofísicos son considerados uno encuentra muy a menudo modelos convenientes que consideran el movimiento de pequeños cuerpos sobre una dada geometría que predomina en escalas grandes. En un cúmulo de galaxias, uno podría obtener información de la dinámica de cada galaxia individual asumiendo que las mismas son cuerpos de prueba sobre la geometría de fondo. Conjuntamente, teniendo en cuenta el paso de los fotones a través del cúmulo, uno podría obtener información complementaria a partir de observaciones de lentes débiles. Este tipo de comportamientos está descrito en términos de la ecuación de geodésicas, la cual tiene registro de la conexión en vez de la métrica y la curvatura.

Esto sugiere por ende que en algunos casos podría ser relevante considerar promedios de la conexión sobre una geometría de referencia. Esto también podría ser posible en términos de tensores ya que si uno tiene una métrica g_{ab} , que describe en detalle el sistema, y alguna otra de fondo \mathbf{g}_{ab} entonces la diferencia entre las conexiones asociadas a ellas puede ser descrita en términos de un tensor; es decir, uno puede escribir:

$$\nabla_a v^b = \partial_a v^b + \gamma_a^b{}_c v^c; \quad (7.11)$$

donde ∇_a y ∂_a son las derivadas covariantes métricas de g_{ab} y \mathbf{g}_{ab} respectivamente; y $\gamma_a^b{}_c$ es un tensor.

Teniendo a mano una definición de promedios uno podría además relacionar el promedio de la conexión con su curvatura correspondiente.

La construcción que proponemos en este capítulo se ajusta a este propósito para esta clase de estudios.

7.3. Definición de promedios para campos tensoriales

7.3.1. El caso general

Consideremos una variedad diferencial \mathcal{M} n -dimensional. Asumiremos que en cada punto $q \in \mathcal{M}$ una base de vectores e_α^a junto con su respectiva base dual ω_a^α ha sido dada; esto es:

$$e_\alpha^a \omega_a^\beta = \delta_\alpha^\beta; \quad (7.12)$$

donde hemos usado, para nuestra notación, el alfabeto griego para los índices numéricos de la base, es decir, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$, mientras que para denotar índices abstractos empleamos a, b, \dots .

Denotaremos entonces las componentes de un campo tensorial arbitrario $A^{a\dots b}_{c\dots d}$ en esta base como $A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta}$ de tal forma que en esta notación se tiene

$$A^{a\dots b}_{c\dots d} = A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} e_\alpha^a \dots e_\beta^b \omega_c^\gamma \dots \omega_d^\delta. \quad (7.13)$$

Las componentes son campos escalares para las cuales la operación usual de promedios en términos de integrales 7.1 puede ser aplicada.

Escojamos entonces un punto de referencia p y una asignación que le haga corresponder una región de integración m -dimensional, la cual denotaremos como $\Sigma(p)$. Dicha asignación es en principio arbitraria pero, una elección apropiada de $\Sigma(p)$ dependerá en principio de las características del sistema a promediar. La suposición de dicho mapa $p \rightarrow \Sigma$ jugará un rol importante en la definición de las derivadas del promedio de campos tensoriales.

La definición que proponemos para el promedio de campos tensoriales es la siguiente:

Definición 7.3.1 (Promedios) El promedio del campo tensorial $A^{a\dots b}_{c\dots d}$ en el punto p sobre la región de integración $\Sigma(p)$, el cual denotaremos por $\langle A^{a\dots b}_{c\dots d} \rangle_{\Sigma(p)}$, es el nuevo tensor

$$\langle A^{a\dots b}_{c\dots d} \rangle_{\Sigma(p)} = \left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)} e_\alpha^a \dots e_\beta^b \omega_c^\gamma \dots \omega_d^\delta, \quad (7.14)$$

asignado en el punto p ; donde

$$\left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)} \equiv \frac{1}{V_{\Sigma(p)}} \int_{\Sigma(p)} A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} d\Omega_p; \quad (7.15)$$

y donde $d\Omega_p$ es el elemento de volumen de $\Sigma(p)$ y $V_{\Sigma(p)}$ es el volumen de dicha región.

Aplicando dicha definición a todo punto p de \mathcal{M} uno obtiene un campo tensorial promediado sobre la variedad.

La definición trae implicadas algunas propiedades algebraicas que pueden ser inmediatamente deducidas y las cuales resulta útil tener en cuenta, como por ejemplo: el promedio de cualquier elemento de la base es trivial

$$\langle e_\alpha^a \rangle_{\Sigma(p)} = e_\alpha^a, \quad (7.16)$$

$$\langle \omega_a^\alpha \rangle_{\Sigma(p)} = \omega_a^\alpha. \quad (7.17)$$

Los promedios no conmutan con el producto tensorial, esto es:

$$\langle A_a B^b \rangle_{\Sigma(p)} \neq \langle A_a \rangle_{\Sigma(p)} \langle B^b \rangle_{\Sigma(p)}. \quad (7.18)$$

Por otra parte es interesante notar que para la delta de Kronecker uno tiene

$$\langle \delta_b^a \rangle_{\Sigma(p)} = \delta_b^a; \quad (7.19)$$

de tal manera que la contracción de un campo tensorial promediado coincide con el promedio de la contracción:

$$\delta_b^a \langle A_a^b \rangle_{\Sigma(p)} = \langle \delta_b^a A_a^b \rangle_{\Sigma(p)}. \quad (7.20)$$

La propuesta que presentamos es deliberadamente sencilla y está construida en una forma directa con la intención de maximizar su aplicabilidad teniendo en mente la variedad de ejemplos que hemos presentado en la introducción.

7.3.2. El caso con regiones de integración $(n - 1)$ -dimensional

Teniendo en cuenta las situaciones que hemos discutido en la introducción, podemos esperar que, en varias ocasiones, las regiones de integración a considerar tengan dimensión $n - 1$. En particular, este parece ser el caso más apropiado cuando uno quiera enfrentarse al problema de promediar observables sobre el cono de luz pasado de un observador en el cual uno desearía describir el comportamiento efectivo de los fotones en su paso a través de la geometría en pequeña escala. Este hecho es precisamente nuestra principal justificación para ahondar en más detalle sobre promedios en hipersuperficies, si bien la discusión siguiente aplica a los tres posibles caracteres que puede presentar la hipersuperficie $\Sigma(p)$: temporal, espacial o nula.

Esencialmente, repasaremos aquí cuestiones de integración que necesitaremos luego para el computo de las derivadas del promedio (sección (7.4.2)) y señalaremos las sutilezas que existen en la integración sobre superficies nulas además de sentar la notación que utilizaremos en lo siguiente.

Comencemos asumiendo que una métrica y su correspondiente forma de volumen $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$ han sido dadas sobre el espaciotiempo; entonces para realizar una integración sobre $\Sigma(p)$ necesitamos trabajar con una forma de volumen $(n - 1)$ -dimensional inducida sobre tal hipersuperficie que escribiremos simplemente como $\epsilon_{a_1 \dots a_{n-1}}$. La especificación de esta forma de volumen presenta sutilezas en el caso nulo a diferencia de los casos temporales y espaciales donde su determinación es natural.

Si $\Sigma(p)$ es una hipersuperficie nula, la elección de $\epsilon_{a_1 \dots a_{n-1}}$ puede ser hecha de la siguiente forma: dentro del subespacio de 1-formas definido sobre $\Sigma(p)$ que aniquilan todos los vectores tangentes a $\Sigma(p)$ escogamos un elemento, θ_a y definamos $\epsilon_{a_1 \dots a_{n-1}}$ como

$$\epsilon_{a_1 \dots a_n} \equiv n \theta_{[a_1} \epsilon_{a_2 \dots a_n]}. \quad (7.21)$$

Notemos que la libertad en esta elección es un factor multiplicativo de θ_a . Conviene introducir, también, una normal a la hipersuperficie denotada por N^a ; entonces uno tendría

$$\theta_a = g_{ab} N^b. \quad (7.22)$$

Por ejemplo, consideremos el caso del cono nulo (pasado o futuro) de un punto en el espaciotiempo de cuatro dimensiones, el cual está generado por el campo vectorial nulo ℓ^a ; entonces el vector normal N^a es

$$N^a = \ell^a, \quad (7.23)$$

y en esta notación uno tiene

$$\theta_b = \ell_b. \quad (7.24)$$

Además, usando una tetrada nula $(\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$ uno tomaría los tres vectores (ℓ^a, m^a, \bar{m}^a) tangentes a $\Sigma(p)$.

En los casos temporal y espacial tenemos una única elección natural para θ_a dada por la ecuación (7.22) e imponiendo la normalización $N^a \theta_a = \pm 1$ según corresponda. En consecuencia existirá una única forma de volumen $\epsilon_{a_1 \dots a_{n-1}}$ en estas situaciones. En el caso general usaremos la notación \mathcal{N}^a para referirnos a un vector saliente de la hipersuperficie; de esta manera la forma de volumen $\epsilon_{a_1 \dots a_{n-1}}$ será proporcional a la contracción de \mathcal{N}^a con $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$. Por consistencia con lo dicho anteriormente siempre escogeremos este vector de forma tal que $\mathcal{N}^a \theta_a = 1$. Concretamente, en el ejemplo anterior tendríamos $\mathcal{N}^a = n^a$, mientras que si $\Sigma(p)$ es temporal o espacial uno tomaría $\mathcal{N}^a = \pm N^a$ según corresponda.

Hasta aquí hemos tratado de resaltar de manera lisa y llana la estructura métrica en la integración sobre hipersuperficies, sin embargo uno podría preferir destacar la estructura asociada a un sistema de coordenadas adaptado a $\Sigma(p)$; esto es, uno podría tomar la coordenada x_1 a ser constante sobre $\Sigma(p)$ de tal forma que el vector $\frac{\partial}{\partial x^1}$ apunte en la dirección saliente; es decir $\mathcal{N}^a = \frac{\partial}{\partial x^1}$. De hecho, es habitualmente de esta forma tal como se suele presentar en la literatura (ver por ejemplo [Poi04]).

7.4. Derivada de los promedios

Como se mencionó en la introducción, uno de los objetivos principales en cualquier formalismo de promedios es el de obtener las ecuaciones que satisfacen las cantidades macro. Con esa finalidad, en

esta sección proveemos de una definición natural de derivadas para campos tensoriales promediados que sólo requiere de técnicas conocidas.

A la hora de tomar derivadas en un punto p es necesario que los campos estén definidos en un entorno de p . Entonces, si consideramos una derivada covariante ∇_a sobre \mathcal{M} , ella puede ser aplicada directamente sobre un campo que ha sido previamente promediado. El campo debe ser suave por lo que resultan fundamentales las características de la asignación $p \rightarrow \Sigma(p)$.

Respecto de esta correspondencia asumiremos que existe un mapa $\Psi_p : U \rightarrow \Sigma(p)$ que va desde una región d -dimensional $U \subset \mathbb{R}^d$ a $\Sigma(p)$ ($d \leq n$). Los detalles específicos del mapa dependerán de la estructura disponible alrededor del punto $p \in \mathcal{M}$. Por ejemplo, para fijar ideas, en el caso de un espaciotiempo cuatridimensional la estructura podría estar dada por el campo de velocidades v^a de observadores cosmológicos y sus conos de luz pasados. Alrededor de cualquier punto uno puede referir puntos en un entorno por medio de las coordenadas angulares canónicas (θ, ϕ) y la distancia afín λ definida unívocamente respecto de v^a . Entonces a cada punto p uno podría asignarle la región $\Sigma(p)$ definida por el mapa: $(\theta, \phi, \lambda \leq \lambda^*) \rightarrow$ (todo puntos en el cono nulo pasado de p).

Por lo tanto, ya que en el cómputo de derivadas uno compara el valor del tensor promedio en p con otro calculado en un punto ‘cercano’ q , uno necesita la información de cómo cambia la región $\Sigma(p)$ cuando uno se mueve desde p a q . Caracterizaremos el movimiento de p a q por una curva $\gamma(s)$, con vector tangente ξ^a . Vemos así que la asignación $p \rightarrow \Sigma(p)$ y la curva γ a través de p generan curvas γ' para cualquier otro punto $p' \in \Sigma(p)$. En otras palabras, la congruencia de curvas γ' está completamente determinada por el mapa generador Ψ_p mencionada arriba.

En el ejemplo anterior, las curvas γ' son generadas manteniendo fijo los valores de (θ, ϕ, λ) mientras se pasa de p a q .

Esta construcción produce por tanto, para asignación $p \rightarrow \Sigma(p)$ y para cada curva γ un campo vectorial w^a tangente a las curvas γ' con la siguiente dependencia funcional sobre $\Sigma(p)$:

$$w^a = w^a(p, \xi^a). \quad (7.25)$$

Este campo aparece naturalmente en las definiciones que presentamos debajo.

7.4.1. Derivada covariante

Consideremos una conexión arbitraria ∇_a sobre \mathcal{M} , entonces podemos definir la derivada covariante en la dirección del vector ξ^a como sigue:

Definición 7.4.1 (Derivada covariante para el promedio de tensores)

$$\begin{aligned} \xi^e \nabla_e \langle A^{a\dots b}_{c\dots d} \rangle_{\Sigma(p)} &\equiv \xi \left(\left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)} \right) e_\alpha^a \dots e_\beta^b \omega_c^\gamma \dots \omega_d^\delta \\ &+ \left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)} \xi^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\epsilon e_\epsilon^a \dots e_\beta^b \omega_c^\gamma \dots \omega_d^\delta \\ &+ \dots + \left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)} \xi^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^\epsilon e_\alpha^a \dots e_\epsilon^b \omega_c^\gamma \dots \omega_d^\delta \\ &- \left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)} e_\alpha^a \dots e_\beta^b \xi^\sigma \Gamma_{\sigma\epsilon}^\gamma \omega_c^\epsilon \dots \omega_d^\delta \\ &- \dots - \left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)} e_\alpha^a \dots e_\beta^b \xi^\sigma \Gamma_{\sigma\epsilon}^\delta \omega_c^\gamma \dots \omega_d^\epsilon; \end{aligned} \quad (7.26)$$

donde $e_\alpha^a \nabla_a e_\beta^b = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma^b$ y $e_\alpha^a \nabla_a \omega_b^\beta = -\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \omega_b^\gamma$.

Claramente, esta constituye la noción más natural y directa de derivada aplicable que es consistente con la asociación $p \rightarrow \Sigma(p)$.

Podemos observar que la información acerca de cómo la región de integración $\Sigma(p)$ cambia está solamente contenida en el primer término del lado derecho que posee el factor $\xi \left(\left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)} \right)$.

Esta derivada puede ser expresada en términos del campo vectorial w^a discutido antes. Hemos preferido relegar los detalles de este cálculo a los apéndices A.1; donde computamos el siguiente límite

$$\xi \left(\left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(q)} - \left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)} \right); \quad (7.27)$$

donde s es el parámetro a lo largo de la curva γ conectando p con q y $\xi \equiv \frac{\partial}{\partial s}$. Allí mostramos que el mismo adquiere la siguiente expresión alternativa:

$$\xi \left(\left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)} \right) = \frac{1}{V_{\Sigma(p)}} \int_{\Sigma(p)} \mathcal{L}_w \left(A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} d\Omega_{q(s)} \right) \Big|_{\parallel\Sigma(p)} - \frac{\left\langle A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \right\rangle_{\Sigma(p)}}{V_{\Sigma(p)}} \xi(V_{\Sigma(p)}); \quad (7.28)$$

donde \mathcal{L}_w denota la derivada de Lie a lo largo del campo vectorial w^a y $\parallel\Sigma(p)$ indica la proyección al espacio tangente de $\Sigma(p)$. Esta condición es necesaria cuando la dimensionalidad de la región de integración es menor que n .

7.4.2. Derivada de Lie

Dado un campo vectorial z^a podemos también considerar la derivada de Lie de tensores definidos como promedios según (7.3.1). Nuevamente, notamos que podemos aplicar las técnicas usuales[KN63]; definiremos la derivada de Lie de tensores promedios haciendo uso de la derivada covariante:

Definición 7.4.2 (Derivada de Lie para el promedio de tensores)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_z \langle A^{a\dots b}_{c\dots d} \rangle_{\Sigma(p)} &= z^e \nabla_e \left(\langle A^{a\dots b}_{c\dots d} \rangle_{\Sigma(p)} \right) - \langle A^{e\dots b}_{c\dots d} \rangle_{\Sigma(p)} \nabla_e z^a - \dots - \langle A^{a\dots e}_{c\dots d} \rangle_{\Sigma(p)} \nabla_e z^b \\ &\quad + \langle A^{a\dots b}_{e\dots d} \rangle_{\Sigma(p)} \nabla_c z^e + \dots + \langle A^{a\dots b}_{c\dots e} \rangle_{\Sigma(p)} \nabla_d z^e. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Advirtamos que en general, el campo z^a será diferente de aquel utilizado para mover la región de integración $\Sigma(p)$ a pesar de que ambos campos deben coincidir en p .

7.4.3. Derivadas de promedios sobre regiones $(n-1)$ -dimensionales

En este apartado deseamos completar la discusión de derivadas presentando un resultado que permite computar los tensores definidos previamente en el caso en que los promedios sean definidos sobre regiones $(n-1)$ -dimensionales. La siguiente expresión cuya prueba relegamos al apéndice (A.1) es completamente general en el sentido que contempla las tres posibilidades para $\Sigma(p)$, bien sea espacial, temporal o nula.

Como puede verse de las definiciones anteriores lo que uno necesita esencialmente conocer es la acción de la derivada sobre el promedio de campos escalares. En el caso en que $\Sigma(p)$ es una hipersuperficie la derivada de un campo escalar general A puede ser expresado como:

$$\mathcal{L}_w \langle A \rangle_{\Sigma(p)} = \int_{\Sigma(p)} \left[\nabla_e (A w^e) + A \theta_f (w^e \nabla_e \mathcal{N}^f - \mathcal{N}^e \nabla_e w^f) \right] d\Omega_p; \quad (7.30)$$

donde aquí estamos empleando la notación introducida en (7.3.2).

7.5. Comparación con otros trabajos en la literatura

Para poner en perspectiva nuestro trabajo nos parece pertinente aquí relacionar nuestra definición de promedios de tensores con trabajos previos en la literatura subrayando similitudes y diferencias.

Citemos, por ejemplo el trabajo de Buchert[Buc00]; uno de los primeros en la materia en el cual se discute una noción de promedios motivada por el problema de explicar la expansión acelerada en cosmología a través del concepto de ‘backreaction’. En el mismo solamente se emplea una noción de promedios aplicada a las cantidades escalares que encontramos en la formulación $3 + 1$ de las ecuaciones de Einstein. El autor aplica las técnicas de promedios sobre hipersuperficies espaciales a las ecuaciones en la que sólo estos escalares intervienen; sin embargo el alcance del método allí expuesto sólo pretende ser de uso para promediar modelos cosmológicos inhomogéneos. En nuestro caso hemos preferido ampliar la atención a la noción de promedios de tensores la cual abarca éste como caso particular. El mismo autor presenta además reglas de conmutación para las derivadas temporales y los promedios, en cambio aquí hemos optado por presentar una definición general de derivadas de promedios de tensores.

En un artículo inspirado en el recién citado, Gasperini y colaboradores [GMNV11] aplican promedios a cantidades escalares sobre el cono de luz pasado haciendo uso de una particular elección de coordenadas observacionales en las aplicaciones que ellos sugieren. Este tratamiento ilustra las circunstancias en la cual una base puede ser extraída para realizar promedios de tensores; y al mismo tiempo constituye un ejemplo de la clase de estructura que naturalmente aparece en el estudio de ciertos problemas específicos. En nuestro trabajo, esta base está explícitamente materializada en la definición.

Otros trabajos que solamente consideran el promedio de cantidades escalares fueron propuestos por Coley [Col10], y Kaspar y Svítek [KS14]. Ambos están esencialmente enfocados con el problema de promedios en el contexto cosmológico y únicamente admiten promedios de escalares definidos a partir de la curvatura.

Por otro lado, esquemas generales, aplicables a cualquier campo tensorial fueron propuestos por Zalaletdinov[Zal93, Zal04, Zal92, Zal08] los cuales están basados en el uso de bitensores para transportar tensores de un punto a otro dentro de la región de integración. En esta forma el autor propone evitar el problema de la dependencia del transporte paralelo para tensores. Uno puede ver que el uso de bitensores puede ser relacionado a la especificación de una base en cada punto de la variedad; en nuestro caso la prescripción de una base sobre la región de integración implica la existencia de un bitensor $\mathcal{W}_a^b(p, q)$ naturalmente asociado de la siguiente manera:

$$\mathcal{W}_a^{b'}(p, q) = \omega_a^\gamma(p) e_\gamma^{b'}(q); \quad (7.31)$$

el cual puede ser usado en el abordaje de Zalaletdinov. Los promedios en este caso son solamente discutidos sobre regiones que de igual dimensión que la variedad y son aplicados para promediar las ecuaciones de Einstein; sin embargo el empleo del contenido total de las ecuaciones de Einstein en tal derivación merece un estudio más detallado según ha sido apuntado oportunamente en otros trabajos[GW13].

Mencionemos también otras propuestas y definiciones usadas para promediar campos tensoriales que difieren en naturaleza de la nuestra tal como la de Green y Wald [GW11, GW13, GW16] y la de Behrend [Beh08]. La primera de ellas se basa en la existencia de un límite de alta frecuencia para los campos y la han aplicado a las ecuaciones de Einstein.

Esta pequeña lista no pretende ser una revisión de todos los esfuerzos que se encuentran en la literatura sobre trabajos que tratan con definiciones de promedios de tensores sobre una variedad general; es sólo una selección personal que intenta dar una idea de la naturaleza de los diferentes esquemas explorados en la materia. Nuestro acercamiento en este ámbito trata de emplear un mínimo de estructura que permita un uso práctico de promedios aplicados a tensores. Aspiramos también a que nuestra propuesta nos permita mantener un máximo de claridad al abordar problemas concretos, por lo cual hemos optado por un método sencillo. Así mismo esperamos que resulte útil al tratar explícitamente con ecuaciones diferenciales para los campos.

7.6. Comentarios sobre este capítulo

Hemos presentado aquí una nueva definición de promedios aplicable a campos tensoriales de completa generalidad sobre una variedad n -dimensional. La misma está basada en la integración de

escalares construidos con el uso de una base adecuada a la situación particular que se desee tratar; esto es uno deberá prescribirla de acuerdo a la naturaleza del problema en que se desea aplicar. Las técnicas usadas para la definición si bien no involucran nuevos desarrollos están diseñadas para ser de amplia aplicación en diversas situaciones. Hemos preferido este enfoque que nos permite recurrir solamente a la estructura más simple presente en los sistemas a estudiar. Contrariamente a esquemas más elaborados confiamos que nuestra propuesta permitirá una implementación práctica y directa. Complementariamente esta construcción provee una definición simple de derivadas para los promedios en comparación con otros trabajos como por ejemplo [Zal04].

Diversos escenarios posibles han sido discutidos y constituyen nuestras motivaciones preliminares. A través de ellos hemos intentado argumentar que el rango de aplicabilidad es bastante amplio y alcanza sistemas en escalas astrofísicas tanto como cosmológicas en las cuales la explicación de la fenomenología asociada con las llamadas materia oscura y energía oscura podría requerir de técnicas que contemplen de forma adecuada promedios de los campos físicos. Es de hecho, en el caso cosmológico donde uno normalmente encuentra este tipo de discusiones que recurren implícitamente a nociones de promedios. Sin embargo, consideramos también que es importante destacar que una definición de promedios de tensores podría ser muy relevante para el estudio de sistemas astrofísicos, esto es, en escalas menores como por ejemplo cúmulos de galaxias o galaxias individuales donde el problema de la materia oscura no es bien comprendido.

Otro punto importante que vale remarcar es que existen diversas situaciones donde podría ser interesante considerar promedios de la conexión con respecto a algún espaciotiempo de fondo debido a que varias observaciones proveen información acerca de la ecuación de geodésicas. Es llamativo que esta última posibilidad no haya sido vislumbrada anteriormente y esta técnica aplicada.

Este trabajo ha sido confinado al aspecto puramente teórico, nuestra expectativa en el futuro inmediato es hacer uso de estas herramientas en el estudio de las ecuaciones de campos en sistemas astrofísicos en general y en el problema de promediar observables en el contexto cosmológico.

Capítulo 8

Comentarios Finales

En esta tesis nuestra motivación ha sido la de abordar la problemática que existe en el estudio del contenido de materia del Universo. El problema en sí mismo es muy complejo pues se manifiesta en diversas escalas que van desde galaxias hasta el nivel cosmológico y, por lo tanto, su incidencia se extiende a cuestiones que guardan cierta distancia entre sí también: como por ejemplo la descripción de la dinámica de las estrellas en una galaxia y la explicación del crecimiento y formación de estructuras en el Universo. Sin embargo, el gran desconcierto quizá sea que el modelo cosmológico estándar ha sido capaz de describir un número importante de observaciones e incluso poder predecir otras: tal como por ejemplo la presencia de los picos acústicos en el espectro de anisotropías del CMB. A pesar de esto, permanece la incógnita sobre la naturaleza misma de las componentes más abundantes requeridas dentro del cuadro teórico que se ha elaborado: las llamadas materia oscura y energía oscura.

En lo que respecta al caso de la materia oscura la mayoría de los modelos que se utilizan para describir distintos sistemas astrofísicos solamente tienen en cuenta la densidad de energía como fuente del campo gravitatorio; sin embargo, en el marco teórico de las teorías de campo de la gravedad, como la relatividad general uno dispone del tensor energía-momento; en el cual, la densidad de energía es sólo una de sus componentes. Debido a esta observación y al hecho que existen geometrías donde las componentes espaciales del tensor energía-momento han demostrado ser de utilidad para la descripción de aspectos observacionales del fenómeno de materia oscura, es que nuestro enfoque ha sido el de no trabajar a priori con suposiciones acerca de la misma, sino buscar medios que permitan una aproximación desprejuiciada para abordar su estudio. La ruta que hemos tomado para ello fue el de perfeccionar y construir nuevas técnicas que nos permitan responder a la pregunta: ¿cuál es la forma más apropiada de descripción de la materia oscura? Aquí, hemos proporcionado nuevas herramientas que nos permiten lidiar con este problema desde una perspectiva más amplia. El trabajo que aquí presentamos se ha desarrollado en un nivel puramente teórico, sin embargo estas herramientas son un medio útil para estudios observacionales concretos y en el futuro cercano planeamos aplicarlas a sistemas específicos.

Para concluir este trabajo y poner en perspectiva lo realizado hasta aquí sintetizaremos las principales contribuciones que presentamos y que se encuentran discutidas en detalle al final de cada capítulo que componen esta tesis.

Hemos comenzado el trabajo con una discusión acerca de la necesidad de considerar promedios en relatividad general ya que es posible que la forma en que uno da cuenta del contenido de materia esté relacionado a la manera en que normalmente tratamos con inhomogeneidades en cosmología. En particular, ello podría dar origen a términos que no son tenidos en cuenta en las ecuaciones de campo y podrían contribuir como fuentes adicionales. Dado que una noción de promedios para campos en espacios curvos involucra varios desafíos uno debe considerar el problema en detalle; esto fue hecho en el capítulo dos en el cual dejamos planteadas estas cuestiones y discutimos las distintas cantidades de interés que podrían ser susceptibles de promediar; en particular, señalamos la importancia de considerar promedios de la conexión, un tema que no es frecuentemente mencionado en la literatura.

Dada la amplitud de posibles aplicaciones en las cuales es necesario tener un buen entendimiento de las consecuencias derivadas luego de recurrir a una noción de promedios es que hemos propuesto una definición de promedios que sea de suficiente generalidad pero, a la vez sencilla y de uso práctico. La misma se aplica a campos tensoriales de cualquier rango y da como resultado campos tensoriales del mismo rango definidos sobre la misma variedad; lo cual es esencial para luego definir una noción de derivada que sea apropiada para lidiar con las ecuaciones de los campos. Nuestra definición hace uso de la menor estructura adicional posible a diferencia de otros trabajos en la literatura y contiene a varios de ellos como casos particulares. Está construida a partir de la prescripción de una base de vectores con la cual se toman las componentes de los tensores que uno desea promediar y, donde la especificación de esta base está dictada según las particulares de cada problema, tal como hemos ejemplificado en la discusión. En el futuro esperamos aplicar estas técnicas a situaciones concretas que son de especial interés para nosotros tal como por ejemplo en el problema de promediar observables en el contexto cosmológico y en la obtención de ecuaciones de campos para los campos promediados en la cual también interviene nuestra definición de derivada de promedios.

La segunda novedad que introducimos en este trabajo tiene que ver con la extensión de las ideas presentadas en [GM11] al contexto cosmológico. En esta parte del trabajo presentamos el nuevo formalismo de lentes débiles partiendo desde primeros principios para un espaciotiempo de fondo arbitrario y luego particularizando a una cosmología estándar. Para realizar las comparaciones entre las situaciones en que existe una lente gravitacional y en la cual no hemos utilizado el espaciotiempo plano como referencia lo cual nos permite tener en cuenta los efectos producidos por el espacio cosmológico de fondo. Esto nos ha llevado a señalar varias sutilezas que surgen en el caso en que lentes son consideradas sobre espaciotiempos curvos. Nuestro tratamiento sólo hace uso de los escalares ópticos ya que son ellos los observables que uno dispone en el estudio de lentes débiles; en otras palabras, hemos evitado en la discusión hacer referencia al ángulo de desviación que es el punto de partida de la gran mayoría de artículos en la literatura. Las fórmulas (2.153, 2.154, 2.155) que hemos obtenido son nuevas y de una gran generalidad ya que están escritas en términos de la curvatura de la lente y por tanto tienen en cuenta todas las componentes del tensor energía-momento. En particular, esto nos permite trabajar con modelos geométricos para la lente en contraste con las descripciones usuales que sólo consideran la densidad de materia del sistema. En la sección (2.8) y (2.9) hemos mostrado el caso general de lentes finas caracterizadas por geometrías estáticas y esféricamente simétricas. En esta aproximación, que suele ser la más usual en las situaciones observacionales, hemos corregido un error conceptual que aparecen frecuentemente en libros de texto basados en el paradigma de Σ/Σ_{cr} , a saber: que no es correcto intercambiar distancias Euclídeas por distancias angulares en las expresiones de los escalares ópticos en la aproximación de lentes finas cuando uno pasa al contexto cosmológico. Hemos mostrado que en una derivación más cuidadosos aparecen dos términos de redshift de diferente origen que modifican las expresiones usuales; los cuales sólo se anulan en el caso de que el movimiento de la lente coincida con el que tendría un observador preferencial de la cosmología. Ello surge debido a que nuestras expresiones contienen de manera intrínseca el posible movimiento de la lente y de hecho nuestra presentación incluye de manera natural el efecto de lentes en movimiento en contraste con trabajos mucho más extensos que tratan este aspecto de manera separada al caso de lentes en reposo. Otro punto de importancia es que con los ejemplos presentados en la sección (2.9.1) queda claro conceptualmente que los efectos de convergencia y shear están asociados a distintos componentes de la curvatura: la convergencia responde al tensor de Ricci mientras que el shear tiene su origen en el tensor de Weyl. Es este hecho justamente el que nos permite considerar geometrías peculiares como la solución anisotrópica sin masa discutida en (2.9.1), la cual es imposible de tratar con las fórmulas derivadas a partir del cociente Σ/Σ_{cr} .

Dentro del lenguaje de lentes también presentamos nuevas fórmulas para la relación de las *magnitudes observadas* con los escalares ópticos a través de las magnificaciones en intensidad que definimos en la subsección (2.5.4). Mostramos allí que la magnificación de intensidad ‘física’ $\bar{\mu}$ sólo depende de la distancia afín y coincide con la magnificación angular μ como consecuencia del teorema de Etherington (2.5.1). Esto implica que uno puede expresar el módulo de la distancia como función de los escalares ópticos y de datos cinemáticos. Nos referimos aquí a un concepto más ‘físico’ ya que se basa en la comparación de flujos a igual valor del parámetro afín y por tanto es adecuado

para espaciotiempos generales. En cambio, cuando lo expresamos en término de μ'_c , esto requiere de la suposición de un modelo cosmológico de tal forma que una relación distancia-redshift pueda ser aplicada.

Hemos mencionado la relación de este hecho con la observación de supernovas ya que si uno observa las tablas 2.1 y 2.2 puede notar que la intensidad en magnificación $\bar{\mu}$ es siempre más grande que 1. Si hacemos uso de (2.109), esto implica que las luminosidades observada son más brillantes que en el caso plano. Sin embargo, en el análisis usual basado en los trabajos [R⁺98, P⁺99] se afirma que las luminosidades observadas son más tenues (ver tabla 2.1) de lo esperado como función del redshift y luego se aduce la presencia de una constante cosmológica. Esto está en marcado contraste si uno considera la situación más general en la cual no se requiere asumir de un modelo para explicar las observaciones ya que las observaciones de luminosidad no son sensibles a la presencia de una constante cosmológica en este caso tal como lo revelan las ecuaciones (2.109) y (2.23) ya que en ellas sólo intervienen las partes sin traza del tensor de Ricci y el tensor de Weyl.

En relación a este punto también resulta sumamente interesante el estudio de la magnificación producida por un conjunto de inhomogeneidades a lo largo de la visual. Para ello hemos desarrollado en el capítulo (3) el formalismo de lentes finas para configuraciones de varias lentes que se encuentran cuasi-alineadas a lo largo de la visual el cual es una extensión del formalismo presentado en el capítulo (2).

Por último, en las secciones finales nos hemos concentrado en construir modelos geométricos, esto es espaciotiempos exactos, para la descripción de sistemas astrofísicos con simetría esférica (prolada y oblada); los cuales hemos utilizados como lentes en el cálculo de los escalares ópticos y donde hemos visto aplicaciones no triviales de lentes que no exhiben simetría axial.

Los nuevos modelos que presentamos son de dos tipos: en el capítulo (4) hemos presentado modelos que son generalizaciones de espaciotiempos esféricamente simétricos que están pensado para la descripción de sistemas compactos mientras que en el capítulo (6) hemos propuestos modelos esféricamente simétricos que están inmersos dentro de la cosmología de R-W y por tanto, parecerían mucho más adecuados para la descripción de estructuras muy grandes tal como es el caso de voids. Las generalizaciones en ambos casos están construidas a partir de la introducción de dos funciones radiales, una de ellas que estrechamente relacionada a la masa de la distribución mientras que la otra permite controlar de una forma relativamente sencilla la contribución de las componentes espaciales del tensor energía-momento.

En el capítulo (4) hemos considerado varios ejemplos específicos en los casos prolados y oblados vimos que las distribuciones describen de manera apropiada lo que uno esperaría observar en sistemas con estas simetrías; en particular hemos presentado las generalizaciones al caso prolado y oblado la solución peculiar [GM12] y hemos visto que las geometrías proladas parecen describir muy bien sistemas binarios. En las aplicaciones a lentes gravitacionales vimos que se presentan comportamientos complejos en el módulo del shear.

En el capítulo (6) por otro lado la principal contribución además de la familia de geometrías inmersas fue su utilización para la construcción de un modelo que describe de manera muy buena lo que sería un void cósmico el cual es una generalización de la geometría utilizada por [AFW99].

En ambos casos estas geometrías son modelos geométricos exactos con grados de libertad que nos permiten explorar con cierta intuición modelos útiles para el estudio de sistemas astrofísicos debido a la relación que posee la función $M(r)$ con densidad de energía de las distribuciones. Al mismo tiempo, estos modelos contemplan la inclusión de componentes espaciales del tensor energía-momento de acuerdo a las motivaciones generales de esta tesis.

La utilización de estos modelos exactos nos permitió realizar cálculos numéricos de los efectos de lentes gravitacionales, usando las nuevas ecuaciones que presentamos en esta tesis. Consideramos esta contribución como un primer paso en un estudio sistemático de las observaciones que nos dan información de la estructura en gran escala del espaciotiempo. Es nuestro deseo el aplicar estos estudios y herramientas en casos concretos de observaciones astrofísicas en el futuro inmediato.



Apéndice A

A.1. Fórmula para la derivada del promedio de cantidades escalares

Consideremos el punto p , el cual tiene asociado la región de integración $\Sigma(p)$ y recordemos que hemos denotado con $d\Omega_p$ el elemento de volumen de esta región. Consideremos, además, una curva $\gamma(s)$ conectando p con un punto vecino $q(s)$, que tiene también su propia región de integración asociada: $\Sigma(q(s))$ con su elemento de volumen $d\Omega_{q(s)}$. Tomaremos $\gamma(0) = p$ y asumiremos $\gamma(s)$ diferenciable en p con el correspondiente vector tangente en p denotado por ξ^a . El cambio de la región, desde $\Sigma(p)$ a $\Sigma(q(s))$ genera un flujo $\Phi_s : \Sigma(p) \rightarrow \Sigma(q(s))$ que es completamente determinado por el mapa Ψ mencionado antes y la curva γ . El campo vectorial w^a , es entonces tangente a este flujo y satisface en p : $w^a = \xi^a$.

Aquí, nos interesan los casos en que las regiones de integración son $(n-1)$ -dimensionales y n -dimensionales. Comenzaremos tratando el caso general y luego veremos cómo resultan las fórmulas en el caso $(n-1)$ -dimensional.

Nuestro objetivo es entonces computar el siguiente límite

$$\begin{aligned}
 & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\frac{1}{V_{\Sigma(q(s))}} \int_{\Sigma(q(s))} A d\Omega_{q(s)} - \frac{1}{V_{\Sigma(p)}} \int_{\Sigma(p)} A d\Omega_p \right] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\frac{1}{V_{\Sigma(q(s))}} - \frac{1}{V_{\Sigma(p)}} \right] \int_{\Sigma(p)} A d\Omega_p \\
 & \quad + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1}{V_{\Sigma(q(s))}} \left[\int_{\Sigma(q(s))} A d\Omega_{q(s)} - \int_{\Sigma(p)} A d\Omega_p \right] \\
 &= - \frac{1}{V_{\Sigma(p)}^2} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{V_{\Sigma(q(s))} - V_{\Sigma(p)}}{s} \right] \int_{\Sigma(p)} A d\Omega_p \\
 & \quad + \frac{1}{V_{\Sigma(p)}} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\int_{\Sigma(q(s))} A d\Omega_{q(s)} - \int_{\Sigma(p)} A d\Omega_p \right]; \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

donde el escalar A es cualquier escalar que proviene de la contracción del tensor $A^{a \dots b}_{c \dots d}$ con la base $\{e_\alpha^a, \omega_a^\alpha\}$.

El factor principal en el segundo término sobre el lado derecho es:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\int_{\Sigma(q(s))} A d\Omega_{q(s)} - \int_{\Sigma(p)} A d\Omega_p \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_{\Sigma(p)} [\Phi_s^* (A d\Omega_{q(s)}) - A d\Omega_p] \\
 &= \int_{\Sigma(p)} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\Phi_s^* (A d\Omega_{q(s)}) - A d\Omega_p] = \int_{\Sigma(p)} \mathcal{L}_w (A d\Omega_{q(s)}) \Big|_{\|\Sigma(p)} ; \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

donde $\|\Sigma(p)$ denota la proyección del espacio tangente de $\Sigma(p)$, Φ_s^* denota el ‘pull-back’ del flujo Φ_s , y \mathcal{L}_w denota la derivada de a lo largo del campo vectorial w^a .

Esta es la expresión que nos permite computar el límite (A.1) en término de la integral sobre $\Sigma(p)$. Este límite es equivalente a la ecuación (7.28) de la sección (7.4.1).

A.2. El caso de regiones de integración $(n - 1)$ -dimensionales

Siguiendo con el álgebra anterior, uno puede ver que: en el caso particular en el cual las regiones de integración son subvariedades de dimensión $(n - 1)$ del espacio de n dimensiones, como consecuencia de la regla de Leibnitz se obtiene

$$\mathcal{L}_w (Ad\Omega_{q(s)}) = (\mathcal{L}_w A) d\Omega_p + A \mathcal{L}_w (d\Omega_{q(s)}); \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\mathcal{L}_w A = w^e \nabla_e A, \quad (\text{A.4})$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w (d\Omega_{q(s)}) \Big|_{\|\Sigma(p)} &= (\mathcal{L}_w \epsilon_{ba_2 \dots a_n}) \mathcal{N}^b + \epsilon_{ba_2 \dots a_n} (\mathcal{L}_w \mathcal{N}^b) \Big|_{\|\Sigma(p)} \\ &= (\nabla_e w^e) \epsilon_{ba_2 \dots a_n} \mathcal{N}^b + \epsilon_{ba_2 \dots a_n} (w^e \nabla_e \mathcal{N}^d - \mathcal{N}^e \nabla_e w^d) \Big|_{\|\Sigma(p)} \\ &= (\nabla_e w^e) \epsilon_{ba_2 \dots a_n} \mathcal{N}^b + \theta_f (w^e \nabla_e \mathcal{N}^f - \mathcal{N}^e \nabla_e w^f) \epsilon_{ba_2 \dots a_n} \mathcal{N}^d \\ &= \left[(\nabla_e w^e) + \theta_f (w^e \nabla_e \mathcal{N}^f - \mathcal{N}^e \nabla_e w^f) \right] d\Omega_p, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde \mathcal{N}^a es el vector que apunta fuera de $\Sigma(p)$ y θ_a la 1-forma asociada que mencionamos en la sección (7.3.2) y que satisface $\mathcal{N}^a \theta_a = 1$. La fórmula de arriba es válida para cualquier hipersuperficie sin importar su naturaleza, ya sea ésta temporal, espacial o nula

Entonces hemos obtenido que

$$\mathcal{L}_w (Ad\Omega_p) = \left[\nabla_e (Aw^e) + A \theta_f (w^e \nabla_e \mathcal{N}^f - \mathcal{N}^e \nabla_e w^f) \right] d\Omega_p; \quad (\text{A.6})$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w \langle A \rangle_{\Sigma(p)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\int_{\Sigma(q(s))} A d\Omega_{q(s)} - \int_{\Sigma(p)} A d\Omega_p \right] \\ &= \int_{\Sigma(p)} \left[\nabla_e (Aw^e) + A \theta_f (w^e \nabla_e \mathcal{N}^f - \mathcal{N}^e \nabla_e w^f) \right] d\Omega_p. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Apéndice B

B.1. Geometría en término de la tetrada nula asociada al sistema de coordenadas adaptado al cono pasado de los observadores fundamentales

Presentamos aquí una lista de cantidades geométricas que hemos empleado para la descripción de las geometrías de R-W en términos del formalismo GHP[GHP73] y que consideramos útiles como material de consulta.

Consideramos aquí la tetrada nula de la subsección (2.3.1) que es la más relevante a nuestras necesidades. Por simplicidad, presentamos las expresiones en términos de las coordenadas co-móviles.

La geometría de los espacios de R-W está caracterizada solamente por su conexión y por su tensor de Ricci ya que debido a que son conformemente planas el tensor de Weyl es cero.

B.1.1. Conexión y curvatura en términos de la tetrada nula asociada a la función nula u

Coefficientes de spin

$$\rho = -\frac{A(t_0)}{A(t)} \left(\frac{H(t)}{c} - \frac{\sqrt{1 - kf_k^2(\chi)}}{A(t)f_k(\chi)} \right), \quad (\text{B.1})$$

$$\rho' = -\frac{A(t)}{A(t_0)} \left(\frac{H(t)}{c} + \frac{\sqrt{1 - kf_k^2(\chi)}}{A(t)f_k(\chi)} \right), \quad (\text{B.2})$$

$$\beta = -i \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\zeta}{A(t)f_k(\chi)}, \quad (\text{B.3})$$

$$\beta' = i \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\bar{\zeta}}{A(t)f_k(\chi)}, \quad (\text{B.4})$$

$$\epsilon' = \frac{A(t)}{2A(t_0)} \frac{H(t)}{c}. \quad (\text{B.5})$$

Escalares de curvatura de Ricci

$$\Phi_{00} = \frac{A^2(t_0)}{c^2 A^2(t)} \left(\frac{kc^2}{A^2(t)} + H^2(t) + q(t)H^2(t) \right), \quad (\text{B.6})$$

$$\Phi_{11} = \frac{1}{4} \frac{A^2(t)}{A^2(t_0)} \Phi_{00}, \quad (\text{B.7})$$

$$\Phi_{22} = \frac{1}{4} \frac{A^4(t)}{A^4(t_0)} \Phi_{00} = \frac{A^2(t)}{A^2(t_0)} \Phi_{11}, \quad (\text{B.8})$$

$$\Lambda = \frac{1}{4c^2} \left(\frac{kc^2}{A^2(t)} + H^2(t) - q(t)H^2(t) \right). \quad (\text{B.9})$$

B.2. Ecuaciones de Friedman

La evolución dinámica del factor de escala $A(t)$ satisface las llamadas ecuaciones de Friedman cuando las ecuaciones de Einstein son impuestas:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = -kT_{ab}; \quad (\text{B.10})$$

aquí Λ es la constante cosmológica y $k = \frac{8\pi G}{c^2}$ otra constante que involucra cantidades universales. El tensor energía-momento para un fluido perfecto compatible con la geometría tiene la forma

$$T_{ab} = \varrho(t)v_a v_b - \frac{P(t)}{c^2} (g_{ab} - v_a v_b); \quad (\text{B.11})$$

donde $\varrho(t)$ y $P(t)$ denotan la densidad de energía y la presión isotrópica medida por la familia de observadores preferenciales.

Las ecuaciones de campo en la forma de Friedman son

$$\frac{1}{A^2(t)} \left(\frac{dA}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \varrho(t) - \frac{kc^2}{A^2(t)} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{1}{A(t)} \frac{d^2 A}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\varrho(t) + \frac{3P(t)}{c^2} \right) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (\text{B.13})$$

Debido a la conservación del tensor energía-momento uno debe también considerar la ecuación:

$$c^2 \frac{d}{dt} \left(\varrho A^3 \right) + P(t) \frac{dA^3}{dt} = 0; \quad (\text{B.14})$$

la cual complementada con una ecuación de estado para el fluido permiten cerrar el sistema.

B.2.1. Parámetros de densidad

Para un fluido cosmológico compuesto de radiación y partículas de polvo uno introduce los llamados *parámetros de densidad* que son cantidades adimensionales en términos de los cuales uno puede parametrizar el espacio de soluciones.

En términos de la constante de Hubble $H(t_0)$ y la *densidad crítica* ϱ_{cr}

$$\varrho_{cr} \equiv \frac{3H^2(t_0)}{8\pi G}; \quad (\text{B.15})$$

los *parámetros de densidad* son definidos como

$$\Omega_r \equiv \frac{\varrho_r(t_0)}{\varrho_{cr}}, \quad (\text{B.16})$$

$$\Omega_m \equiv \frac{\varrho_m(t_0)}{\varrho_{cr}}, \quad (\text{B.17})$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2}; \quad (\text{B.18})$$

donde $\varrho_r(t)$ y $\varrho_m(t)$ son respectivamente la densidad de energía correspondiente a las componentes de radiación y polvo.

En este caso uno puede escribir las ecuaciones de Friedman en la siguiente forma compacta:

$$\frac{H^2(t)}{H^2(t_0)} = -\frac{3}{8\pi G} \frac{kc^2}{\rho_{cr} A^2} + \Omega_r \frac{A^4(t_0)}{A^4(t)} + \Omega_m \frac{A^3(t_0)}{A^3(t)} + \Omega_\Lambda, \quad (\text{B.19})$$

$$q(t) = \frac{H^2(t_0)}{H^2(t)} \left(\Omega_r \frac{A^4(t_0)}{A^4(t)} + \frac{\Omega_m}{2} \frac{A^3(t_0)}{A^3(t)} - \Omega_\Lambda \right); \quad (\text{B.20})$$

donde hemos usado la definición del *parámetro de desaceleración* $q(t)$ en la segunda ecuación:

$$q(t) = -\frac{1}{A(t)H^2(t)} \frac{d^2 A}{dt^2}. \quad (\text{B.21})$$

Notemos que evaluando (B.19) al tiempo presente uno tiene

$$1 = -\frac{kc^2}{H(t_0)^2 A(t_0)^2} + \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda; \quad (\text{B.22})$$

de donde uno puede calcular $A(t_0)$ en término de las abundancias cósmicas a t_0 para los casos $k = \pm 1$; mientras que en el caso $k = 0$ uno tiene una libertad en la elección del valor $A(t_0)$ el cual puede ser tomado como $A(t_0) = \frac{c}{H(t_0)}$.

B.3. Una fuente distribucional de curvatura en la ecuación de desviación de geodésicas

En este apéndice deducimos las fórmulas para los escalares ópticos en la aproximación de lente fina presentadas en la sección (2.8) partiendo de una fuente distribucional de curvatura en la ecuación desviación de geodésicas.

Comencemos pues considerando la ecuación de desviación de geodésicas y una fuente de curvatura a lo largo de la geodésica nula de la siguiente forma:

$$\ell(\ell(\mathcal{X})) = -(Q_B + \delta Q) \mathcal{X}; \quad (\text{B.23})$$

donde un término perturbativo, δQ con respecto a la curvatura de fondo Q_B , es considerado. Como vimos esta descomposición es especialmente adecuada para describir lentes finas sobre un espacio-tiempo curvo de fondo. En la sección (2.8) utilizamos un método aproximativo para encontrar las expresiones en este caso particular.

Aquí en cambio integraremos exactamente la ecuación desviación de geodésicas en el caso de un término distribucional δC de la forma

$$\delta Q = f(\theta, \phi) \delta(\lambda - \lambda_l); \quad (\text{B.24})$$

donde $\delta(\lambda - \lambda_l)$ denota la delta Dirac centrada a una distancia afín λ_l desde el observador y, $f(\theta, \phi)$ es la matriz cuyas componentes son funciones angulares definidas sobre la esfera de direcciones del observador.

B.3. UNA FUENTE DISTRIBUCIONAL DE CURVATURA EN LA ECUACIÓN DE DESVIACIÓN DE GEODÉSICAS

La integración directa de la ecuación (B.23) desde el sitio de la fuente en λ_s hasta el lugar del observador con las condiciones iniciales

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}|_{\lambda=0} = 0, \quad (\text{B.25})$$

$$\ell(\boldsymbol{\mathcal{X}})|_{\lambda=0} = \mathcal{V}_0; \quad (\text{B.26})$$

dan el siguiente resultado:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(\lambda_s) = \mathcal{V}_0 \lambda_s - f(\theta, \phi) \boldsymbol{\mathcal{X}}|_{\lambda_l} (\lambda_s - \lambda_l) - \int_0^{\lambda_s} \left(\int_0^{\lambda'} Q_B \boldsymbol{\mathcal{X}} d\lambda'' \right) d\lambda'; \quad (\text{B.27})$$

donde uno ha usado como paso intermedio que la primera integración es

$$\ell(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = \mathcal{V}_0 - f(\theta, \phi) \boldsymbol{\mathcal{X}}|_{\lambda_l} \Theta(\lambda - \lambda_l) - \int_0^\lambda Q_B \boldsymbol{\mathcal{X}} d\lambda'; \quad (\text{B.28})$$

aquí $\Theta(\lambda - \lambda_l)$ denota la función escalón de Heaviside que toma el valor unidad para $\lambda > \lambda_l$ y es cero en otro caso.

Notemos que la solución es válida para un espaciotiempo de fondo arbitrario ya que no hemos hecho ninguna suposición sobre la geometría; excepto por la forma particular en la que descomponemos la curvatura en la ecuación (B.23) y el carácter distribucional especificado por (B.24).

B.3.1. Rederivación de las expresiones de lente fina sobre una cosmología R-W

En R-W uno tiene que la contribución de la curvatura Q_B , en la ecuación (B.23) está dada por:

$$Q_B(\lambda) = -\frac{1}{D_A} \ell(\ell(D_A)) \mathbb{I}; \quad (\text{B.29})$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad 2×2 . Entonces en los rangos $\lambda < \lambda_l$ y $\lambda_l < \lambda$ donde $\delta C = 0$, uno puede ver que las ecuación desviación de geodésicas (B.23) puede ser reescrita como

$$\ell \left(D_A^2 \ell \left(\frac{\boldsymbol{\mathcal{X}}}{D_A} \right) \right) = 0. \quad (\text{B.30})$$

La solución a esta ecuación con las condiciones iniciales apropiadas (B.25) y (B.26) es:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \begin{cases} D_A(\lambda) \mathcal{V}_0 & \text{for } \lambda \leq \lambda_l, \\ D_A(\lambda) \left(\frac{\boldsymbol{\mathcal{X}}_l}{D_{A_l}} + \mathcal{K}_l \int_{\lambda_l}^\lambda \frac{d\lambda'}{D_A^2} \right) & \text{for } \lambda_l \leq \lambda. \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

Notemos el uso del símbolo \leq en lugar de $<$ en el resultado de arriba debido a la continuidad requerida por la función $\boldsymbol{\mathcal{X}}$; ó en otras palabras cuando $\lambda = \lambda_l$ uno debe tener lo siguiente: $\boldsymbol{\mathcal{X}}(\lambda_l) = \boldsymbol{\mathcal{X}}_l = D_{A_l} \mathcal{V}_0$. Esto clarifica el significado de $\boldsymbol{\mathcal{X}}_l$; respecto de la constante \mathcal{K}_l que aparece en la segunda línea de la ecuación de arriba, uno nota que es la constante de integración que resulta luego de la primera integración de la ecuación (B.30). Uno puede ver que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_l &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_l^+} D_A^2 \left(\frac{\boldsymbol{\mathcal{X}}}{D_A} \right) \Big|_\lambda = D_{A_l}^2 \left(\frac{\boldsymbol{\mathcal{X}}}{D_A} \right) \Big|_{\lambda_l} \\ &= D_{A_l} \ell(\boldsymbol{\mathcal{X}})|_{\lambda_l} - \boldsymbol{\mathcal{X}}_l \ell(D_A)|_{\lambda_l} \\ &= D_{A_l} \left[\ell(\boldsymbol{\mathcal{X}})|_{\lambda_l} - \ell(D_A)|_{\lambda_l} \mathcal{V}_0 \right]; \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

y haciendo uso de la ecuación (B.28) se obtiene finalmente

$$\mathcal{K}_l = -f(\theta, \phi) D_{A_l}^2 \mathcal{V}_0. \quad (\text{B.33})$$

Finalmente la integral que multiplica la constante \mathcal{K}_l en la ecuación (B.31) es igual a

$$\int_{\lambda_l}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{D_A^2} = \frac{1}{1+z_l} \frac{D_{A_{sl}}}{D_{A_s} D_{A_l}}; \quad (\text{B.34})$$

tal como hemos visto en la sección (2.8.1).

Esto significa que en el sitio del emisor, en $\lambda = \lambda_s$, uno tiene

$$\mathcal{X}_s = \left[1 - \frac{1}{1+z_l} \frac{D_{A_{sl}} D_{A_l}}{D_{A_s}} f(\theta, \phi) \right] D_{A_s} \mathcal{V}_0; \quad (\text{B.35})$$

es decir que uno vuelve a obtener los resultados de la sección (2.8):

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{1}{1+z_l} \frac{D_{A_{sl}} D_{A_l}}{D_{A_s}} f(\theta, \phi); \quad (\text{B.36})$$

la cual contiene el factor de redshift $(1+z_l)^{-1}$ no reportado en la literatura.

Sólo resta notar que la matriz que contiene la perturbación en la curvatura $f(\theta, \phi)$ puede ser escrita como

$$f(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \widehat{\delta\Phi}_{00} & \widehat{\delta\Psi}_0 \\ \widehat{\delta\Psi}_0 & \widehat{\delta\Phi}_{00} \end{pmatrix}; \quad (\text{B.37})$$

donde

$$\widehat{\delta\Phi}_{00} = \int_0^{\lambda_s} \delta\Phi_{00} d\lambda', \quad (\text{B.38})$$

$$\widehat{\delta\Psi}_0 = \int_0^{\lambda_s} \delta\Psi_0 d\lambda'. \quad (\text{B.39})$$

Apéndice C

C.1. Cálculo de los escalares ópticos para un arreglo de lentes finas

Este apéndice contiene el cómputo detallado de la fórmula (3.3). El cálculo es directo ya que involucra la integración de la desviación en la curvatura δC que se asume está dada por la expresión (3.1). Recordemos primeramente que los escalares ópticos están dados por la siguiente expresión:

$$\circ_{Lv} = \int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda'} \delta C D_A^2 d\lambda'' \right) d\lambda'. \quad (\text{C.1})$$

Entonces comencemos notando que la primera integral en el lado derecho de la ecuación de arriba toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda} \delta C' D_A^2 d\lambda' &= \delta \bar{C}(\lambda) - \frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda} \frac{dD_A^2'}{d\lambda'} \delta \bar{C}(\lambda') d\lambda' \\ &= \delta \bar{C}(\lambda) - \frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda} \frac{dD_A^2'}{d\lambda'} \delta \bar{C}(\lambda') \left[\Theta(\lambda') - \Theta(\lambda' - \lambda_{l_1} + \delta_1) \right] d\lambda' - \\ &\quad - \frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda} \frac{dD_A^2'}{d\lambda'} \delta \bar{C}(\lambda') \left[\Theta(\lambda' - \lambda_{l_1} + \delta_1) - \Theta(\lambda' - \lambda_{l_1} - \delta_1) \right] d\lambda' - \\ &\quad - \frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda} \frac{dD_A^2'}{d\lambda'} \delta \bar{C}(\lambda') \left[\Theta(\lambda' - \lambda_{l_1} - \delta_1) - \Theta(\lambda' - \lambda_{l_2} + \delta_2) \right] d\lambda' - \\ &\quad - \frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda} \frac{dD_A^2'}{d\lambda'} \delta \bar{C}(\lambda') \left[\Theta(\lambda' - \lambda_{l_2} + \delta_2) - \Theta(\lambda' - \lambda_{l_2} - \delta_2) \right] d\lambda' - \\ &\quad - \frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda} \frac{dD_A^2'}{d\lambda'} \delta \bar{C}(\lambda') \left[\Theta(\lambda' - \lambda_{l_2} - \delta_2) - \Theta(\lambda' - \lambda_{l_3} + \delta_3) \right] d\lambda' - \\ &\quad - \dots - \\ &\quad - \frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda} \frac{dD_A^2'}{d\lambda'} \delta \bar{C}(\lambda') \left[\Theta(\lambda' - \lambda_{l_N} - \delta_N) - \Theta(\lambda' - \lambda) \right] d\lambda'; \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

la cual en un segundo paso resulta ser

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D_A^2} \int_0^\lambda \delta C' D_A^{2'} d\lambda' &= \delta \bar{C}(\lambda) - 0 - \\
&- \frac{1}{D_A^2} \int_0^\lambda \frac{dD_A^{2'}}{d\lambda'} \delta \bar{C}(\lambda') \left[\Theta(\lambda' - \lambda_{l_1} + \delta_1) - \Theta(\lambda' - \lambda_{l_1} - \delta_1) \right] d\lambda' - \\
&- \frac{\widehat{\delta C}_{l_1}}{D_A^2(\lambda)} \left(D_A^2(\lambda) - D_A^2(\lambda_{l_1} + \delta_1) \right) \left[\Theta(\lambda - \lambda_{l_1} - \delta_1) - \Theta(\lambda - \lambda_{l_2} + \delta_2) \right] - \\
&- \frac{\widehat{\delta C}_{l_1}}{D_A^2(\lambda)} \left(D_A^2(\lambda_{l_2} - \delta_2) - D_A^2(\lambda_{l_1} + \delta_1) \right) \left[\Theta(\lambda - \lambda_{l_2} + \delta_2) \right] - \\
&- \frac{1}{D_A^2} \int_0^\lambda \frac{dD_A^{2'}}{d\lambda'} \delta \bar{C}(\lambda') \left[\Theta(\lambda' - \lambda_{l_2} + \delta_2) - \Theta(\lambda' - \lambda_{l_2} - \delta_2) \right] d\lambda' - \\
&- \frac{\widehat{\delta C}_{l_1} + \widehat{\delta C}_{l_2}}{D_A^2(\lambda)} \left(D_A^2(\lambda) - D_A^2(\lambda_{l_2} + \delta_2) \right) \left[\Theta(\lambda - \lambda_{l_2} - \delta_2) - \Theta(\lambda - \lambda_{l_3} + \delta_3) \right] - \\
&- \frac{\widehat{\delta C}_{l_1} + \widehat{\delta C}_{l_2}}{D_A^2(\lambda)} \left(D_A^2(\lambda_{l_3} - \delta_3) - D_A^2(\lambda_{l_2} + \delta_2) \right) \left[\Theta(\lambda - \lambda_{l_3} + \delta_3) \right] - \\
&- \dots - \\
&- \frac{\widehat{\delta C}_{l_1} + \dots + \widehat{\delta C}_{l_N}}{D_A^2(\lambda)} \left(D_A^2(\lambda) - D_A^2(\lambda_{l_N} + \delta_N) \right) \left[\Theta(\lambda - \lambda_{l_N} - \delta_N) \right].
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Ahora notemos que debido a que $\delta_k \ll \lambda_{l_{\Delta k}}$ donde $\lambda_{l_{\Delta k}} \equiv \lambda_{l_{\Delta k+1}} - \lambda_{l_{\Delta k}}$ uno tiene que

$$D_A^2(\lambda_{l_j} + \delta_j) = D_A^2(\lambda_{l_j}) + \mathcal{O}(\delta_j); \tag{C.4}$$

y

$$\frac{1}{D_A^2} \int_{\lambda_{l_j} - \delta_k}^{\lambda_{l_j} + \delta_j} \frac{dD_A^{2'}}{d\lambda'} \delta \bar{C}(\lambda') d\lambda' = \frac{\mathcal{O}(\delta_j)}{D_A^2}; \tag{C.5}$$

lo cual ayuda a simplificar la primera integral para obtener:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D_A^2} \int_0^\lambda \delta C' D_A^{2'} d\lambda' &= \delta \bar{C}(\lambda) - \frac{\widehat{\delta C}_{l_1}}{D_A^2(\lambda)} \left(D_A^2(\lambda) - D_A^2(\lambda_{l_1} + \delta_1) \right) \left[\Theta(\lambda - \lambda_{l_1} - \delta_1) - \Theta(\lambda - \lambda_{l_2} + \delta_2) \right] - \\
&- \frac{\widehat{\delta C}_{l_1}}{D_A^2(\lambda)} \left(D_A^2(\lambda_{l_2} - \delta_2) - D_A^2(\lambda_{l_1} + \delta_1) \right) \left[\Theta(\lambda - \lambda_{l_2} + \delta_2) \right] - \\
&- \frac{\widehat{\delta C}_{l_1} + \widehat{\delta C}_{l_2}}{D_A^2(\lambda)} \left(D_A^2(\lambda) - D_A^2(\lambda_{l_2} + \delta_2) \right) \left[\Theta(\lambda - \lambda_{l_2} - \delta_2) - \Theta(\lambda - \lambda_{l_3} + \delta_3) \right] - \\
&- \frac{\widehat{\delta C}_{l_1} + \widehat{\delta C}_{l_2}}{D_A^2(\lambda)} \left(D_A^2(\lambda_{l_3} - \delta_3) - D_A^2(\lambda_{l_2} + \delta_2) \right) \left[\Theta(\lambda - \lambda_{l_3} + \delta_3) \right] - \\
&- \dots - \\
&- \frac{\widehat{\delta C}_{l_1} + \dots + \widehat{\delta C}_{l_N}}{D_A^2(\lambda)} \left(D_A^2(\lambda) - D_A^2(\lambda_{l_N} + \delta_N) \right) \left[\Theta(\lambda - \lambda_{l_N} - \delta_N) \right].
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Luego, de esta manera procedemos a computar la segunda integral la cual uno puede ver que toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \circ_{Lv} &= \int_0^{\lambda_s} \left(\frac{1}{D_A^2} \int_0^{\lambda'} \delta C D_A^2 d\lambda'' \right) d\lambda' \\
 &= \int_0^{\lambda_s} \delta \widehat{C}(\lambda') d\lambda' - \widehat{\delta C}_{l_1} \int_{\lambda_{l_1}}^{\lambda_s} \left(1 - \frac{D_A^2(\lambda_{l_1})}{D_A^{2'}} \right) \left[\Theta(\lambda' - \lambda_{l_1}) - \Theta(\lambda' - \lambda_{l_2}) \right] d\lambda' \\
 &\quad - \widehat{\delta C}_{l_1} \left(D_A^2(\lambda_{l_2}) - D_A^2(\lambda_{l_1}) \right) \int_{\lambda_{l_2}}^{\lambda_s} \frac{d\lambda'}{D_A^{2'}} \\
 &\quad - \left(\widehat{\delta C}_{l_1} + \widehat{\delta C}_{l_2} \right) \int_{\lambda_{l_2}}^{\lambda_s} \left(1 - \frac{D_A^2(\lambda_{l_2})}{D_A^{2'}} \right) \left[\Theta(\lambda' - \lambda_{l_2}) - \Theta(\lambda' - \lambda_{l_3}) \right] d\lambda' \\
 &\quad - \left(\widehat{\delta C}_{l_1} + \widehat{\delta C}_{l_2} \right) \left(D_A^2(\lambda_{l_3}) - D_A^2(\lambda_{l_2}) \right) \int_{\lambda_{l_3}}^{\lambda_s} \frac{d\lambda'}{D_A^{2'}} \\
 &\quad - \dots \\
 &\quad - \left(\widehat{\delta C}_{l_1} + \dots + \widehat{\delta C}_{l_N} \right) \int_{\lambda_{l_N}}^{\lambda_s} \left(1 - \frac{D_A^2(\lambda_{l_1})}{D_A^{2'}} \right) \left[\Theta(\lambda' - \lambda_{l_N}) \right] d\lambda';
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

donde hemos despreciado los órdenes δ_i .

Para arribar a la expresión final, aquí uno nota que las integrales que aparecen en el lado derecho de la ecuación anterior son:

$$\int_0^{\lambda_s} \delta \widehat{C}(\lambda') d\lambda' = \widehat{\delta C}_{l_1} (\lambda_{l_2} - \lambda_{l_1}) + \dots + \left(\widehat{\delta C}_{l_1} + \dots + \widehat{\delta C}_{l_N} \right) (\lambda_s - \lambda_{l_N}) + \mathcal{O}(\delta_j), \tag{C.8}$$

$$\int_{\lambda_{l_j}}^{\lambda_s} \frac{d\lambda'}{D_A^{2'}} = \frac{1}{A(t_0)} \int_{\chi_{l_j}}^{\chi_s} \frac{d\chi'}{f_k(\chi')^2} = \frac{1}{A(t_0)} \frac{f_k(\chi_s - \chi_{l_j})}{f_k(\chi_s) f_k(\chi_{l_j})} = \frac{1}{1 + z_{l_j}} \frac{D_{A_s l_j}}{D_{A_s} D_{A_{l_j}}}, \tag{C.9}$$

y

$$\begin{aligned}
 \int_{\lambda_{l_1}}^{\lambda_s} \left(1 - \frac{D_A^2(\lambda_{l_1})}{D_A^{2'}} \right) \left[\Theta(\lambda' - \lambda_{l_1}) - \Theta(\lambda' - \lambda_{l_2}) \right] d\lambda' &= (\lambda_{l_{j+1}} - \lambda_{l_j}) - D_A^2(\lambda_{l_j}) \int_{\lambda_{l_j}}^{\lambda_{l_{j+1}}} \frac{d\lambda'}{D_A^{2'}} \\
 &= (\lambda_{l_{j+1}} - \lambda_{l_j}) - \frac{D_{A_{l_j}}^2}{1 + z_{l_j}} \frac{D_{A_{l_{j+1} l_j}}}{D_{A_s} D_{A_{l_j}}} \\
 &= (\lambda_{l_{j+1}} - \lambda_{l_j}) - \frac{D_{A_{l_j}}}{1 + z_{l_j}} \frac{D_{A_{l_{j+1} l_j}}}{D_{A_s}}.
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

Reuniendo entonces las ecuaciones (C.8), (C.9) y (C.10) dentro de la ecuación (C.7) uno finalmente obtiene la ecuación (3.3):

$$\begin{aligned}
 \circ_{Lv} &= \widehat{\delta C}_{l_1} \left[\frac{D_{A_{l_1}}}{1 + z_{l_1}} \frac{D_{A_{l_2 l_1}}}{D_{A_s}} - \frac{D_{A_{l_2}}^2 - D_{A_{l_1}}^2}{1 + z_{l_2}} \frac{D_{A_s l_2}}{D_{A_s} D_{A_{l_2}}} \right] \\
 &\quad + \left(\widehat{\delta C}_{l_1} + \widehat{\delta C}_{l_2} \right) \left[\frac{D_{A_{l_2}}}{1 + z_{l_2}} \frac{D_{A_{l_3 l_2}}}{D_{A_s}} - \frac{D_{A_{l_3}}^2 - D_{A_{l_2}}^2}{1 + z_{l_3}} \frac{D_{A_s l_3}}{D_{A_s} D_{A_{l_3}}} \right] \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \left(\widehat{\delta C}_{l_1} + \dots + \widehat{\delta C}_{l_N} \right) \left[\frac{D_{A_{l_N}}}{1 + z_{l_N}} \frac{D_{A_s l_N}}{D_{A_s}} \right].
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

C.1. CÁLCULO DE LOS ESCALARES ÓPTICOS PARA UN ARREGLO DE LENTES FINAS

Apéndice D

D.1. Curvatura de las geometrías esferoidales

En este apéndice listamos las componentes del tensor de Einstein. Las expresiones fueron computadas con el uso de la función $M(t, r)$ definida en la sección (4.3). El cálculo de la curvatura se realizó con la ayuda del paquete *xAct* diseñado para el cómputo del álgebra de tensorial en *Mathematica* (<http://www.xact.es/>).

D.1.1. El tensor de Einstein para las geometrías proladas

$$G_{tt} = a(t, r) \left[\frac{r_\mu^2 \sin^2(\theta) (5r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))}{r (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^3} M(t, r) + \frac{2r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^2} \frac{\partial M}{\partial r} \right], \quad (\text{D.1})$$

$$G_{tr} = \frac{2r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^2 (r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2)} \frac{\partial M}{\partial t}, \quad (\text{D.2})$$

$$G_{t\theta} = - \frac{rr_\mu^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^2 (r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2)} \frac{\partial M}{\partial t}, \quad (\text{D.3})$$

$$G_{rr} = \frac{1}{(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[\frac{(2r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))}{2ra(t, r)} \frac{\partial a}{\partial r} - \frac{2rM(t, r)}{(r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2)} \right], \quad (\text{D.4})$$

$$G_{r\theta} = \frac{r_\mu^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)} \left(\frac{1}{2a(t, r)} \frac{\partial a}{\partial r} \right), \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} G_{\theta\theta} = & - \frac{\partial M}{\partial r} + \frac{r^2 - r_\mu^2 \sin^2(\theta)}{r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta)} \frac{M(t, r)}{r} + (r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2) \left[\frac{1}{2a(t, r)} \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} - \left(\frac{1}{2a(t, r)} \frac{\partial a}{\partial r} \right)^2 \right] \\ & + \left[r - M(t, r) - r \frac{\partial M}{\partial r} + \frac{r_\mu^2 \sin^2(\theta) (r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2)}{r (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \right] \left(\frac{1}{2a(t, r)} \frac{\partial a}{\partial r} \right) \\ & + \frac{r (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))}{2a(t, r) (r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2)} \left[\frac{1}{a(t, r)} \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial M}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} - \frac{6r}{(r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2)} \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned}
 G_{\phi\phi} = & \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[\frac{r(r^2 - 3r_\mu^2 \sin^2(\theta))}{(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))^2} M(t, r) - \frac{r^2}{(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \frac{\partial M}{\partial r} \right] \\
 & + \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left(r - M(t, r) - r \frac{\partial M}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{2a(t, r)} \frac{\partial a}{\partial r} \right) \\
 & + \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} (r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2) \left[\frac{1}{2a(t, r)} \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} - \left(\frac{1}{2a(t, r)} \frac{\partial a}{\partial r} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{r \sin(\theta)^2}{2a(t, r)(r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2)} \left[\frac{1}{a(t, r)} \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial M}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} - \frac{6r}{r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2} \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

D.1.2. El tensor de Einstein para las geometrías oblatas

$$\begin{aligned}
 G_{tt} = & a(t, r) r^2 \frac{(r^2 + r_\mu^2) + (r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2)}{(r^2 + r_\mu^2)(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2)^2} \frac{\partial M}{\partial r} \\
 & + \frac{rr_\mu^2 a(t, r)}{(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2)^3} \left[2 \frac{(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2)^2}{(r^2 + r_\mu^2)^2} - \frac{(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2)}{(r^2 + r_\mu^2)} \sin(\theta)^2 + 4 \cos(\theta)^2 \right] M(t, r)
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

$$G_{tr} = \frac{r^2}{r^2 - 2rM(t, r) - r_\mu^2} \frac{(r^2 + r_\mu^2) + (r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2)}{(r^2 + r_\mu^2)(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2)} \frac{\partial M}{\partial t}, \tag{D.9}$$

$$G_{t\theta} = \frac{rr_\mu^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2)(r^2 - 2rM(t, r) - r_\mu^2)} \frac{\partial M}{\partial t}, \tag{D.10}$$

$$G_{rr} = \frac{r}{(r^2 + r_\mu^2)(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2)} \left[\frac{(r^2 + r_\mu^2) + (r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2)}{2a(t, r)} \frac{\partial a}{\partial r} - \frac{2r^2 M(t, r)}{(r^2 - 2rM(t, r) - r_\mu^2)} \right], \tag{D.11}$$

$$G_{r\theta} = - \frac{r_\mu^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2} \left(\frac{1}{2a(t, r)} \frac{\partial a}{\partial r} \right), \tag{D.12}$$

$$\begin{aligned}
 G_{\theta\theta} = & - \frac{r^2}{r^2 + r_\mu^2} \left[\left(\frac{2r_\mu^2 \cos(\theta)^2}{r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2} + \frac{r^2 - r_\mu^2}{r^2 + r_\mu^2} \right) \frac{M(t, r)}{r} + \frac{\partial M}{\partial r} \right] \\
 & + (r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2) \left[\frac{1}{2a(t, r)} \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} - \left(\frac{1}{2a(t, r)} \frac{\partial a}{\partial r} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{r(r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2)}{a(t, r)(r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2)^2} \left[(r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2) \left(\frac{1}{2a(t, r)} \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} \right) - 3r \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{r}{2a(t, r)} \left[\frac{r^2 - 2rM(t, r) + r_\mu^2}{r^2 + r_\mu^2} \left(2 - \frac{r^2 + r_\mu^2}{r^2 + r_\mu^2 \cos(\theta)^2} \right) - \left(\frac{\partial M}{\partial r} - \frac{r^2 - r_\mu^2}{r^2 + r_\mu^2} \frac{M(t, r)}{r} \right) \right] \frac{\partial a}{\partial r},
 \end{aligned} \tag{D.13}$$

Apéndice E

E.1. Transformación de coordenadas entre los sistemas esferoidales y el Cartesiano

E.1.1. El caso del sistema de coordenadas prolado

En el capítulo (5), para llevar a cabo los cálculos de lentes débiles necesitamos conocer la tetrada nula asociada a las geodésicas no perturbadas en la base coordenada esferoidal. Esto se debe a que la curvatura de las geometrías esferoidales la hemos computado respecto del sistema de coordenadas esferoidal.

Para la derivación de las componentes de la tetrada en la base coordenada esferoidal necesitamos recordar la relación entre las coordenadas esferoidales en función de las Cartesianas. En el caso prolado las mismas son:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sqrt{\Xi^+} + \sqrt{\Xi^-}\right)^2 - 4r_\mu^2}, \quad (\text{E.1})$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{1}{2r_\mu} \left(\sqrt{\Xi^+} - \sqrt{\Xi^-}\right) \right], \quad (\text{E.2})$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y \cos(\iota) + z \sin(\iota)}{x} \right); \quad (\text{E.3})$$

con las siguientes definiciones de las cantidades Ξ^+ y Ξ^- :

$$\Xi^+ = x^2 + (y - r_\mu \sin(\iota))^2 + (z + r_\mu \cos(\iota))^2, \quad (\text{E.4})$$

$$\Xi^- = x^2 + (y - r_\mu \sin(\iota))^2 + (z - r_\mu \cos(\iota))^2. \quad (\text{E.5})$$

Para el cálculo de las derivadas parciales que nos permiten encontrar la relación entre las componentes de vectores en uno y otro sistema de coordenadas resulta útil tener en cuenta las siguientes igualdades:

$$\sqrt{\Xi^+} + \sqrt{\Xi^-} = 2\sqrt{r^2 + r_\mu^2}, \quad (\text{E.6})$$

$$\sqrt{\Xi^+} - \sqrt{\Xi^-} = 2r_\mu \cos(\theta), \quad (\text{E.7})$$

$$\sqrt{\Xi^+} \sqrt{\Xi^-} = r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta), \quad (\text{E.8})$$

$$4r_\mu^2 - \left(\sqrt{\Xi^+} - \sqrt{\Xi^-}\right)^2 = 4r_\mu^2 \sin^2(\theta); \quad (\text{E.9})$$

las mismas nos permiten reescribir las expresiones en una forma compacta como se presentan debajo. Uno puede comprobar entonces que la diferencial del cambio de coordenadas está dada por:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r^2 + r_\mu^2}{r(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} x, \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\sqrt{r^2 + r_\mu^2}}{r (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[y \sqrt{r^2 + r_\mu^2} + r_\mu^2 \cos(\theta) \sin(\iota) \right], \quad (\text{E.11})$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\sqrt{r^2 + r_\mu^2}}{r (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[z \sqrt{r^2 + r_\mu^2} - r_\mu^2 \cos(\theta) \cos(\iota) \right]; \quad (\text{E.12})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta) (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} x, \quad (\text{E.13})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sin(\theta) (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[y \cos(\theta) + \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \sin(\iota) \right], \quad (\text{E.14})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\sin(\theta) (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[z \cos(\theta) - \sqrt{r^2 + r_\mu^2} \cos(\iota) \right]; \quad (\text{E.15})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{x}, \quad (\text{E.16})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos^2(\phi) \cos(\iota)}{x}, \quad (\text{E.17})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\cos^2(\phi) \sin(\iota)}{x}. \quad (\text{E.18})$$

E.1.2. El caso del sistema de coordenadas oblado

El caso del sistema de coordenadas oblado es análogo al anterior; uno puede ver que las ecuaciones (5.16, 5.17, 5.18) del capítulo (5) que relacionan las coordenadas obladas en función de las Cartesianas presenta la siguiente estructura:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sqrt{\Xi^+} + \sqrt{\Xi^-} \right)^2 - 4r_\mu^2}, \quad (\text{E.19})$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{1}{2r_\mu} \left(\sqrt{\Xi^+} - \sqrt{\Xi^-} \right) \right], \quad (\text{E.20})$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y \cos(\iota) + z \sin(\iota)}{x} \right); \quad (\text{E.21})$$

donde en este caso las definiciones de Ξ^+ y Ξ^- son las siguientes:

$$\Xi^+ = \left(\sqrt{x^2 + \left(y \cos(\iota) + z \sin(\iota) \right)^2} + r_\mu \right)^2 + \left(-y \sin(\iota) + z \cos(\iota) \right)^2, \quad (\text{E.22})$$

$$\Xi^- = \left(\sqrt{x^2 + \left(y \cos(\iota) + z \sin(\iota) \right)^2} - r_\mu \right)^2 + \left(-y \sin(\iota) + z \cos(\iota) \right)^2. \quad (\text{E.23})$$

De la misma forma que en el caso prolado uno tiene las siguientes relaciones útiles que permiten expresar las derivadas parciales en una forma compacta:

$$\sqrt{\Xi^+} + \sqrt{\Xi^-} = 2\sqrt{r^2 + r_\mu^2}, \quad (\text{E.24})$$

$$\sqrt{\Xi^+} - \sqrt{\Xi^-} = 2r_\mu \cos(\theta), \quad (\text{E.25})$$

$$\sqrt{\Xi^+} \sqrt{\Xi^-} = r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta), \quad (\text{E.26})$$

$$4r_\mu^2 - \left(\sqrt{\Xi^+} - \sqrt{\Xi^-} \right)^2 = 4r_\mu^2 \sin^2(\theta). \quad (\text{E.27})$$

Luego uno puede ver que la diferencial del cambio de coordenadas se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x\sqrt{r^2 + r_\mu^2}}{r(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[\sqrt{r^2 + r_\mu^2} - \frac{r_\mu^2 \cos(\theta)}{\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2}} \right], \quad (\text{E.28})$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\sqrt{r^2 + r_\mu^2}}{r(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[y\sqrt{r^2 + r_\mu^2} - r_\mu^2 \cos(\theta) \frac{\cos(\iota) (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))}{\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2}} \right], \quad (\text{E.29})$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\sqrt{r^2 + r_\mu^2}}{r(r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[z\sqrt{r^2 + r_\mu^2} - r_\mu^2 \cos(\theta) \frac{\sin(\iota) [y \cos(\iota) + z \sin(\iota)]}{\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2}} \right]; \quad (\text{E.30})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{x}{\sin(\theta) (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[\frac{\sqrt{r^2 + r_\mu^2}}{\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2}} - \cos(\theta) \right], \quad (\text{E.31})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{1}{\sin(\theta) (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[\sqrt{r^2 + r_\mu^2} \frac{\cos(\iota) (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))}{\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2}} - y \cos(\theta) \right], \quad (\text{E.32})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{\sin(\theta) (r^2 + r_\mu^2 \sin^2(\theta))} \left[\sqrt{r^2 + r_\mu^2} \frac{\sin(\iota) (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))}{\sqrt{x^2 + (y \cos(\iota) + z \sin(\iota))^2}} - z \cos(\theta) \right]; \quad (\text{E.33})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{x}, \quad (\text{E.34})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos^2(\phi) \cos(\iota)}{x}, \quad (\text{E.35})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\cos^2(\phi) \sin(\iota)}{x}. \quad (\text{E.36})$$

Bibliografía

- [A⁺14] P. A. R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 571:A16, 2014.
- [A⁺16] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13, 2016.
- [AFW99] Luca Amendola, Joshua A. Frieman, and Ioav Waga. Weak Gravitational lensing by voids. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 309:465, 1999.
- [ALS03] Alexandre Arbey, Julien Lesgourgues, and Pierre Salati. Galactic halos of fluid dark matter. *Phys. Rev.*, D68:023511, 2003.
- [Bar10] Matthias Bartelmann. Gravitational lensing. *Class. Quantum Grav.*, 27:233001, 2010.
- [Beh08] Juliane Behrend. Metric Renormalization in General Relativity. 2008.
- [BHC10] Johan Brannlund, Robert van den Hoogen, and Alan Coley. Averaging geometrical objects on a differentiable manifold. *Int. J. Mod. Phys.*, D19:1915–1923, 2010.
- [BHS05] Gianfranco Bertone, Dan Hooper, and Joseph Silk. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. *Physics Reports*, 405(5–6):279 – 390, 2005.
- [BK04] Bruce A. Bassett and Martin Kunz. Cosmic distance-duality as a probe of exotic physics and acceleration. *Phys. Rev.*, D69:101305, 2004.
- [BM15] Ezequiel F. Boero and Osvaldo M. Moreschi. Averages associated to the energy momentum tensor and study of a two scale system in General Relativity. In *Proceedings, 2nd Argentinian-Brazilian Meeting on Gravitation, Relativistic Astrophysics and Cosmology (GRACo II): Buenos Aires, Argentina, April 22-25, 2014*, pages 75–80, 2015.
- [BM16a] Ezequiel F. Boero and Osvaldo M. Moreschi. Geometrical models for the study of astrophysical systems with spheroidal symmetry imbedded in a standard cosmology: The case of cosmic voids. *arXiv.1611.05832*, 2016.
- [BM16b] Ezequiel F. Boero and Osvaldo M. Moreschi. Gravitational lens optical scalars in terms of energy-momentum distributions in the cosmological framework. *arXiv.1610.06032*, 2016.
- [BM16c] Ezequiel F. Boero and Osvaldo M. Moreschi. Practical definition of averages of tensors in general relativity. *arXiv.1610.06040*, 2016.
- [Bra04] H. Bradt. *Astronomy Methods: A Physical Approach to Astronomical Observations*. Cambridge Planetary Science. Cambridge University Press, 2004.
- [BRN⁺02] Narciso Benitez, Adam G. Riess, Peter E. Nugent, Mark Dickinson, Ryan Chornock, and Alexei V. Filippenko. The Magnification of SN 1997ff, the farthest known supernova. *Astrophys. J.*, 577:L1–L4, 2002.

-
- [BS01] Matthias Bartelmann and Peter Schneider. Weak gravitational lensing. *Phys.Rept.*, 340:291–472, 2001.
- [Buc00] Thomas Buchert. On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity. 1. Dust cosmologies. *Gen.Rel.Grav.*, 32:105–125, 2000.
- [Car01] Sean M. Carroll. The Cosmological constant. *Living Rev. Rel.*, 4:1, 2001.
- [Car04] Sean M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. 2004.
- [CELU11] Chris Clarkson, George Ellis, Julien Larena, and Obinna Umeh. Does the growth of structure affect our dynamical models of the universe? The averaging, backreaction and fitting problems in cosmology. *Rept.Prog.Phys.*, 74:112901, 2011.
- [Col10] A.A. Coley. Averaging in cosmological models using scalars. *Class.Quant.Grav.*, 27:245017, 2010.
- [Dod03] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [EB05] George F.R. Ellis and Thomas Buchert. The Universe seen at different scales. *Phys.Lett.*, A347:38–46, 2005.
- [Ell71] G. F. R. Ellis. Relativistic cosmology. In R.K. Sachs, editor, *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi*, Course 47, pages 104–182, 1971.
- [Ell84] G. F. R. Ellis. Relativistic cosmology - Its nature, aims and problems. In B. Bertotti, F. de Felice, and A. Pascolini, editors, *General Relativity and Gravitation Conference*, pages 215–288, 1984.
- [Ell11] George F.R. Ellis. Inhomogeneity effects in Cosmology. *Class.Quant.Grav.*, 28:164001, 2011.
- [Ell12] Maartens R. MacCallum M.A.H. Ellis, G.F.R. *Relativistic Cosmology*. Cambridge, University Press, 2012.
- [Eth33] I. M. H. Etherington. On the definition of distance in general relativity. *Phil. Mag.*, 15:761, 1933.
- [FKN00a] Simonetta Frittelli, Thomas P. Kling, and Ezra T. Newman. Image distortion from optical scalars in nonperturbative gravitational lensing. *Phys. Rev. D*, 63:023007, 2000.
- [FKN00b] Simonetta Frittelli, Thomas P. Kling, and Ezra T. Newman. Image distortion in non-perturbative gravitational lensing. *Phys. Rev. D*, 63:023006, 2000.
- [FM12] Benoît Famaey and Stacy S. McGaugh. Modified newtonian dynamics (mond): Observational phenomenology and relativistic extensions. *Living Reviews in Relativity*, 15(1):10, 2012.
- [FN09] Caroline Foster and Lorne A. Nelson. The Size, Shape and Orientation of Cosmological Voids in the Sloan Digital Sky Survey. *Astrophys. J.*, 699:1252–1260, 2009.
- [Fri03] Simonetta Frittelli. On bending angles by gravitational lenses in motion. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 340:457–462, 2003.
- [GHP73] R. Geroch, A. Held, and R. Penrose. A space-time calculus based on pairs of null directions. *J. Math. Phys.*, 14:874–881, 1973.
- [GLKH03] Stefan Gottloeber, Ewa L. Lokas, Anatoly Klypin, and Yehuda Hoffman. The Structure of voids. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 344:715, 2003.

- [GM11] Emanuel Gallo and Osvaldo M. Moreschi. Gravitational lens optical scalars in terms of energy-momentum distributions. *Phys.Rev.*, D83:083007, 2011.
- [GM12] Emanuel Gallo and Osvaldo Moreschi. Peculiar anisotropic stationary spherically symmetric solution of Einstein equations. *Mod.Phys.Lett.*, A27:1250044, 2012.
- [GMNV11] M. Gasperini, G. Marozzi, F. Nugier, and G. Veneziano. Light-cone averaging in cosmology: Formalism and applications. *JCAP*, 1107:008, 2011.
- [GW11] Stephen R. Green and Robert M. Wald. A new framework for analyzing the effects of small scale inhomogeneities in cosmology. *Phys.Rev.*, D83:084020, 2011.
- [GW13] Stephen R. Green and Robert M. Wald. Examples of backreaction of small scale inhomogeneities in cosmology. *Phys. Rev.*, D87(12):124037, 2013.
- [GW16] Stephen R. Green and Robert M. Wald. A simple, heuristic derivation of our ‘no backreaction’ results. *Class. Quant. Grav.*, 33(12):125027, 2016.
- [HBA16] R. F. L. Holanda, V. C. Busti, and J. S. Alcaniz. Probing the cosmic distance duality with strong gravitational lensing and supernovae Ia data. *JCAP*, 1602(02):054, 2016.
- [HSW14] Nico Hamaus, P.M. Sutter, and Benjamin D. Wandelt. A Universal Density Profile for Cosmic Voids. 2014.
- [HV04] Fiona Hoyle and Michael S. Vogeley. Voids in the 2dF Galaxy Redshift Survey. *Astrophys.J.*, 607:751–764, 2004.
- [IS07] Kaiki Taro Inoue and Joseph Silk. Local Voids as the Origin of Large-angle Cosmic Microwave Background Anomalies: The Effect of a Cosmological Constant. *Astrophys. J.*, 664:650–659, 2007.
- [J⁺15] Benjamin Joachimi et al. Galaxy alignments: An overview. *Space Sci. Rev.*, 193(1-4):1–65, 2015.
- [KF08] Thomas P. Kling and Simonetta Frittelli. Study of errors in strong gravitational lensing. *ApJ*, 675:115–125, 2008.
- [KN63] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume I. John Wiley & Sons, 1963.
- [KS99] Sergei M. Kopeikin and Gerhard Schaefer. Lorentz covariant theory of light propagation in gravitational fields of arbitrary moving bodies. *Phys. Rev.*, D60:124002, 1999.
- [KS14] P. Kaspar and O. Svítek. Averaging in cosmology based on Cartan scalars. *Class.Quant.Grav.*, 31:095012, 2014.
- [LBK⁺13] L.D. Landau, J.S. Bell, M.J. Kearsley, L.P. Pitaevskii, E.M. Lifshitz, and J.B. Sykes. *Electrodynamics of Continuous Media*. COURSE OF THEORETICAL PHYSICS. Elsevier Science, 2013.
- [LL91] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mecánica de fluidos*. Number v. 6 in Curso de física teórica. Reverté, 1991.
- [LLC⁺16] Kai Liao, Zhengxiang Li, Shuo Cao, Marek Biesiada, Xiaogang Zheng, and Zong-Hong Zhu. The Distance Duality Relation from Strong Gravitational Lensing. *Astrophys. J.*, 822(2):74, 2016.
- [MGN00] Tonatiuh Matos, Francisco Siddhartha Guzman, and Dario Nunez. Spherical scalar field halo in galaxies. *Phys. Rev.*, D62:061301, 2000.

- [Mor90] Osvaldo M. Moreschi. FUTURE NULL INFINITY OF ROBERTSON-WALKER SPACE-TIMES. *J. Math. Phys.*, 31:1208, 1990.
- [MR13] J. W. Moffat and S. Rahvar. The MOG weak field approximation and observational test of galaxy rotation curves. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 436:1439–1451, 2013.
- [MS88] P.H. Moon and D.E. Spencer. *Field theory handbook: including coordinate systems, differential equations, and their solutions*. Springer-Verlag, 1988.
- [MSS⁺14] Peter Melchior, P. M. Sutter, Erin S. Sheldon, Elisabeth Krause, and Benjamin D. Wandelt. First measurement of gravitational lensing by cosmic voids in SDSS. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 440(4):2922–2927, 2014.
- [NFW96] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D.M. White. The Structure of cold dark matter halos. *Astrophys.J.*, 462:563–575, 1996.
- [NSS01] Ulises Nucamendi, Marcelo Salgado, and Daniel Sudarsky. An Alternative approach to the galactic dark matter problem. *Phys. Rev.*, D63:125016, 2001.
- [OPY74] J. P. Ostriker, P. J. E. Peebles, and A. Yahil. The size and mass of galaxies, and the mass of the universe. *Astrophys. J.*, 193:L1–L4, 1974.
- [P⁺99] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys.J.*, 517:565–586, 1999.
- [Per04] V. Perlick. Gravitational lensing from a spacetime perspective. *Living Rev. Rel.*, 7:9, 2004.
- [PL07] Daeseong Park and Jounghun Lee. The Void Ellipticity Distribution as a Probe of Cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, 98:081301, 2007.
- [Poi04] E. Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [PSS96] Massimo Persic, Paolo Salucci, and Fulvio Stel. The Universal rotation curve of spiral galaxies: 1. The Dark matter connection. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 281:27, 1996.
- [PVH⁺12] Danny C. Pan, Michael S. Vogeley, Fiona Hoyle, Yun-Young Choi, and Changbom Park. Cosmic Voids in Sloan Digital Sky Survey Data Release 7. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 421:926–934, 2012.
- [R⁺98] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron.J.*, 116:1009–1038, 1998.
- [R⁺04] Adam G. Riess et al. Type Ia supernova discoveries at $z \gtrsim 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *Astrophys.J.*, 607:665–687, 2004.
- [Rob33] H. P. Robertson. Relativistic Cosmology. *Rev. Mod. Phys.*, 5:62–90, 1933.
- [SEF92] P. Schneider, J. Ehlers, and E.E. Falco. *Gravitational lenses*. Springer-Verlag, 1992.
- [SKW06] Peter Schneider, C.S. Kochanek, and Joachim Wambsganss. *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro*. Springer-Verlag, 2006.
- [SLT⁺07] Paolo Salucci, A. Lapi, C. Tonini, G. Gentile, I. Yegorova, and U. Klein. The Universal Rotation Curve of Spiral Galaxies. 2. The Dark Matter Distribution out to the Virial Radius. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 378:41–47, 2007.

- [SSE94a] Stella Seitz, Peter Schneider, and Jürgen Ehlers. Light propagation in arbitrary space-times and the gravitational lens approximation. *Class.Quantum.Grav.*, 11:2345–2373, 1994.
- [SSE94b] Stella Seitz, Peter Schneider, and Jürgen Ehlers. Light propagation in arbitrary space-times and the gravitational lens approximation. *Class.Quant.Grav.*, 11:2345–2374, 1994.
- [Sum02a] T. J. Sumner. Experimental searches for dark matter. *Living Rev. Rel.*, 5:4, 2002.
- [Sum02b] Timothy J. Sumner. Experimental searches for dark matter. *Living Reviews in Relativity*, 5(1):4, 2002.
- [TK06] Anton V. Tikhonov and Igor D. Karachentsev. Minivoids in the Local Volume. *Astrophys.J.*, 653:969–976, 2006.
- [vdWP11] Rien van de Weygaert and Erwin Platen. Cosmic Voids: structure, dynamics and galaxies. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, 01:41–66, 2011.
- [Wal44] A. G. Walker. Completely symmetric spaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 19(76 Part 4):219–226, 1944.
- [Wal84] R. Wald. *General Relativity*. The Chicago University Press, 1984.
- [Wammb] Joachim Wambsganss. Gravitational lensing in astronomy. *Living Rev. Rel.*, 1:74, (1998), <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume1/1998-12wamb/>.
- [WS04] Olaf Wucknitz and Ulrich Sperhake. Deflection of light and particles by moving gravitational lenses. *Phys. Rev.*, D69:063001, 2004.
- [Zal92] Roustam M. Zalaletdinov. Averaging out the Einstein equations and macroscopic space-time geometry. *Gen.Rel.Grav.*, 24:1015–1031, 1992.
- [Zal93] Roustam Zalaletdinov. Towards a theory of macroscopic gravity. *Gen.Rel.Grav.*, 25:673–695, 1993.
- [Zal04] Roustam Zalaletdinov. Space-time averages of classical physical fields. *Annals Eur.Acad.Sci.*, 2004.
- [Zal08] Roustam Zalaletdinov. The Averaging Problem in Cosmology and Macroscopic Gravity. *Int.J.Mod.Phys.*, A23:1173–1181, 2008.